Au delà des réels. Borel et l'approche probabiliste de la réalité

Laurent Mazliak, Marc Sage

Au delà des réels
Borel et l'approche probabiliste de la réalité

Laurent MAZLIAK[1] et Marc SAGE[2]

Résumé

Nous examinons dans cet article la manière singulère dont Emile Borel, à partir de ses études sur la structure des nombres réels et un certain rejet de la vision abstraite de Cantor, a trouvé dans le calcul des probabilités un outil adéquat pour formuler une nouvelle approche des problèmes, en même temps prenait conscience de son utilité pour l'approche des phénomènes de la pysique et de la société.

Introduction

Le tournant probabiliste d'Emile Borel auquel s'intéresse cet article est une des plus singulières évolutions que l'on puisse observer chez un mathématicien au début du vingtième siècle. Après avoir jeté les bases d'une profonde transformation de la théorie des fonctions, Borel était devenu un phare de l'analyse mathématique en France. Rien ne semblait alors le prédisposer à franchir le pas et à consacrer d'importantes forces à étudier, perfectionner et divulguer le calcul des probabilités dont la réputation douteuse dans la communauté mathématique de ce temps aurait pu à juste titre le rebuter. Certes, Borel pouvait un peu s'appuyer sur le précédent d'Henri Poincaré pendant les années 1890. On sait que ce dernier, la main quelque peu forcée par les évolutions de la physique et notamment l'apparition de la physique statistique, n'avait pu faire l'économie d'un examen approfondi des mathématiques du hasard. Il leur avait notamment dédié un cours, publié chez Gauthier-Villars en 1896, au moment où il avait décidé d'occuper la chaire de Calcul des probabilités et physique mathématique de la Sorbonne. Il faut bien dire cependant que le travail sur ces questions se limita en gros pour Poincaré à rendre les probabilités fréquentables sans déshonneur pour un scientifique de qualité; Borel allait donner à ce programme une dimension autrement plus large.

Le contexte de ce virage probabiliste d'Emile Borel à partir de 1905, date de publication de son premier travail dans le domaine, a été étudié en détails dans l'article (Durand and Mazliak, 2011). Les intersections sont donc non négligeables avec le contenu du présent article. Néanmoins, disons tout de suite que nous avons choisi ici un point de vue légèrement différent, en cela que nous prétendons examiner de plus près l'origine de l'évolution

[1] Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires, Université Pierre et Marie Curie, Paris. laurent.mazliak@upmc.fr

[2] Laboratoire d'informatique Gaspard Monge, Université Paris Est, Marne la Vallée. marc.sage@normalesup.org

probabiliste de Borel en la reliant à ses considérations sur le statut des objets mathématiques - notamment les nombres réels. On assiste en effet chez le mathématicien au cours des années qui précèdent 1905 à un éloignement de plus en plus prononcé du *romantisme cantorien* et de son attitude absolue, comme l'a bien souligné Anne-Marie Décaillot dans son bel ouvrage sur Cantor et la France (Décaillot, 2008, p. 159). Borel remplace graduellement cette vision idéaliste, qui ne le satisfait plus, par un réalisme fortement teinté d'une forme de pragmatisme. La visée principale de notre article est précisément de mettre en lumière comment l'approche probabiliste est apparue à Borel comme un moyen adéquat pour se confronter à diverses formes de la réalité : mathématique, physique, pratique…

La meilleure synthèse qui résume l'esprit de Borel face à la quantification du hasard se trouve dans le texte (Cavailllès, 1940) publié dans la *Revue de Métaphysique et de Morale*, qu'il faut voir au moins en partie comme une recension du fascicule de Borel sur l'interprétation des probabilités (Borel, 1939) clôturant sa grande entreprise du *Traité du Calcul des Probabilités* commencée en 1922. Comme le signale Cavaillès (Cavaillès, 1940, p. 154), les probabilités apparaissent comme la seule voie d'accès envisageable au chemin de l'avenir *dans un monde qui n'est plus doté des arêtes vives de la certitude mais se présente désormais comme le royaume flou des approximations*. Borel, trente ans plus tôt, ne disait pas autre chose quand il affirmait qu'un coefficient de probabilité constituait une réponse tout à fait claire à de nombreuses questions, réponse correspondant à une réalité absolument tangible, et quand il ironisait sur les esprits qui renâclaient en disant préférer la certitude et qui *préfèreraient peut-être aussi que 2 et 2 fissent 5*.

Le présent article est divisé en trois parties. Dans la première, nous revenons sur les questionnements de Borel sur la structure fine de la droite réelle. Ensuite, nous examinons la manière dont Borel a trouvé dans l'approche probabiliste une méthode satisfaisante pour saisir cette structure. Enfin, dans une troisième partie, nous donnons quelques éléments pour comprendre le positionnement du mathématicien vis-à-vis de la philosophie des mathématiques et, notamment, des probabilités de son temps.

I- Le corps réel des nombres

Dans cette section, nous allons décrire les questions et les doutes concernant la structure fine des nombres réels auxquels Borel dut faire face au début du XXème siècle et la manière dont le calcul des probabilités se présenta à lui comme un auxilliaire adéquat pour y faire face.

1- Education d'Emile Borel

Né en 1871, entré à l'Ecole Normale en 1889, Borel fait partie de ces étudiants qui eurent pour maîtres la génération de scientifiques français traumatisés par la défaite de 1870. Ces derniers avaient mis les bouchées doubles pour apprendre les avancées réalisées à l'étranger, et avant tout en

Allemagne depuis le milieu du siècle. En mathématiques, l'important travail de Darboux doit être souligné, lui qui, selon ses propres termes dans une lettre à Jules Houël datant de la fin 1870, voulait à travers le *Bulletin des Sciences Mathématiques* qu'il dirigeait *réveiller le feu sacré* (Gispert, 1987). Les jeunes élèves de l'Ecole Normale des années 1890 étaient donc très au fait des travaux de Riemann, Weierstrass, Dedekind, du Bois Reymond, Kronecker et Cantor. Ce dernier justement semble avoir fait une impression particulièrement profonde sur Borel, enthousiasmé par le transfini. Une marque de cette admiration pour le mathématicien de Halle transparaît dans la thèse que Borel soutint en 1894 alors qu'il n'avait que 23 ans, premier acte d'une carrière fulgurante (Borel, 1895).

Cette thèse porte sur des questions de prolongement de fonctions analytiques et Borel y fabrique un nouveau concept de prolongement plus général que celui de Weierstrass avec beaucoup d'imagination géométrique (voir (Hawkins, 1975)). Au cours de sa démonstration, il montre qu'un sous-ensemble dénombrable d'un intervalle peut être recouvert par une suite d'intervalles de longueur totale aussi petite que l'on veut. Il s'agit probable ment de la première apparition d'un argument de σ-additivité de mesure linéaire d'un ensemble, notion promise à l'avenir que l'on sait. Sous la forme d'une note finale à son texte, Borel énonce en outre le théorème de compacité du segment [0,1] stipulant que de tout recouvrement par des intervalles ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. La preuve qu'il en propose, limitée au cas d'un recouvrement dénombrable, est lapidaire et ne peut s'apprécier qu'à l'aune de la fascination pour les raisonnements à la Cantor. Raisonnant par l'absurde, Borel montre que si la conclusion du théorème n'était pas vérifiée, il serait possible d'extraire du recouvrement une suite d'intervalles tous distincts, et de recommencer indéfiniment le procédé jusqu'à atteindre un ensemble d'intervalles ayant le cardinal de N^N, *seconde classe de nombres de M. Cantor qui constitue un ensemble de seconde puissance*, comme l'écrit Borel, d'où une contradiction avec la dénombrabilité du recouvrement (une étude détaillée des premières occurences de ce théorème a été faite dans (Maurey et Tacchi, 1998)).

Pourtant, une inquiétude semble avoir rapidement germé dans l'esprit de Borel concernant ce qu'on peut appeler la *réalité factuelle* des constructions liées à l'infini nouveau et plus généralement de celles liées à toute théorie mathématique manipulant les divers infinis - en premier lieu, le non dénombrable. La voie purement axiomatique choisie par Hilbert ne satisfaisait pas un Borel qui se montre soucieux de conserver une forme de contact entre les objets de la mathématique et ce qu'on peut décrire à grands traits comme les réalités concrètes de la vie quotidienne. Comme le souligne Bouveresse, c'est avec les considérations sur l'infini que *la question du réalisme a commencé à se poser de façon urgente et dramatique* (Bouveresse, 1998).

Borel choisit alors de prendre ses distances avec l'attitude absolue dans laquelle la méthode axiomatique enfermait selon lui les plus radicaux de ses collègues. Cette posture reçut sa plus grande publicité en 1905 lors des fameux échanges autour de l'axiome de Zermelo entre Borel, Baire, Hadamard et Lebesgue (Hadamard, 1905). Borel s'opposa notamment à

Hadamard et émit des doutes quant au bien-fondé de l'axiome du choix non dénombrable et, dans la lignée de Kronecker, sur le fait d'utiliser dans un raisonnement un objet qui n'aurait pas été décrit préalablement (ou, en tout cas dont on n'aurait pas décrit le mode d'obtention). Hadamard, en retour, ne manqua pas d'observer qu'on pouvait déceler dans cette différence d'approche deux conceptions opposées des mathématiques - sans doute, pensait-il, deux psychologies opposées.

Un des objectifs de notre travail est justement d'illustrer comment une approche probabiliste s'est trouvé bien cadrer avec la psychologie borélienne. Cette *évolution dans ses idées*, comme Borel lui-même la qualifiera dans un article qu'il publia en 1919 à la suite de la querelle de priorité déclenchée par Lebesgue sur la définition de l'intégrale (Borel, 1919, p. 75), lui permit entre autres de dégager une philosophie originale de la connaissance approchée où celle-ci est dotée d'une véritable valeur positive et scientifique et n'est plus uniquement un pis-aller qu'il s'agirait de dépasser. Cet aspect, qui inspira fortement Bachelard ultérieurement, a été étudié en profondeur dans (Barberousse, 2008) auquel nous renvoyons le lecteur.

2- Problème de l'infini : usage de la mesure

Michel Bourdeau, qui a étudié dans un bel article (Bourdeau, 2009) l'évolution de Borel vis-à-vis du transfini, a souligné combien il trouva chez du Bois-Reymond une méthode d'introduction des objets mathématiques qui lui semblait préférable à la voie logique et verbale proposée par Cantor et radicalisée par Hilbert. Du Bois Reymond, et Borel à sa suite, préféraient fonder leur démarche sur l'obtention de *faits mathématiques*, c'est-à-dire d'énoncés intervenant dans la résolution de problèmes, sur lesquels, au moins, les mathématiciens pouvaient se retrouver sans d'interminables discussions. Il faut noter qu'aujourd'hui, à cent ans de distance, nous associerions peut-être plus spontanément un tel programme à celui d'un physicien dont le travail commence en constatant que la pomme tombe, plutôt qu'en explorant des théories métaphysiques qui, *a posteriori*, rendraient la chute nécessaire. On y trouve en tout cas l'empreinte de la façon dont l'intuitionnisme réexaminait dans ces années l'intellectualisme mathématique, et remettait en question les positions idéalistes en laissant de côté le débat sur les formes *a priori* ou l'existence de faits généraux. L'ordre n'était plus perçu comme la condition préalable du progrès mathématique mais au contraire son horizon, son produit. Pour ce courant de pensée dans lequel Borel s'inscrivait, *la science à venir n'est pas enfermée, comme l'aurait voulu Comte, comme le voulait déjà Kant dans les formes de la science toute faite* (Brunschvicg, 1912, p. 567).

Borel commença son enquête par le commencement : la description du corps des réels. Il publia en 1900 le court article (Borel, 1900), où il analysait la façon dont on prétend avoir rempli le continu de la droite réelle en invoquant des arguments de cardinalité. En 1908, il résumait son opinion dans la conclusion de son article sur les probabilités dénombrables (Borel, 1909a, p. 270) :

> *Il existe certainement (si ce n'est point un abus d'employer ici le verbe exister) dans le continu géométrique des éléments*

> *qui ne peuvent être définis : tel est le sens réel de l'importante et célèbre proposition de Cantor :"Le continu n'est pas dénombrable". Le jour où ces éléments indéfinissables seraient réellement mis à part et où l'on ne prétendrait point les faire intervenir plus ou moins implicitement, il en résulterait certainement une grande simplification dans les méthodes de l'analyse.*

Les questions autour des fondements et des possibilités d'opérer simultanément une infinité de choix dans des ensembles occupèrent ainsi une place importante dans les préoccupations boréliennes. Borel fut en particulier soucieux de proposer des solutions à plusieurs paradoxes soulevés par la théorie des ensembles. L'un d'eux, le paradoxe de Richard, retint son attention et l'amena à une distinction fondamentale d'un point de vue pratique entre différents modes d'ensembles infinis. Ce paradoxe est présenté comme suit par Borel (Borel, 1908c) : si l'on considère toutes les propositions écrites (en français) avec un nombre fini de lettres (ce qui est le cas des énoncés usuels des mathématiques), ces propositions sont en nombre dénombrable - on le voit immédiatement en les classant d'abord par le nombre de lettres puis, à l'intérieur de chaque classe de longueur, par ordre lexicographique. Parmi ces propositions, on peut trouver notamment celles qui définissent un unique nombre réel ; ainsi $\sqrt{2}$ est-il l'unique élément défini comme *le nombre réel positif qui élevé au carré est égal à deux*. Les nombres réels usuellement utilisés (les entiers, les rationnels, les nombres algébriques, les constantes classiques : π, e, …) entrent naturellement dans cette catégorie. Considérons alors, dit Borel, l'écriture décimale des réels en question compris entre 0 et 1. Un nombre unique peut être défini en un nombre fini de lettres par la phrase : *le réel obtenu en modifiant la n-ième décimale du n-ième réel en lui ajoutant 1 si elle est comprise entre 0 et 5, et en lui enlevant 1 si elle est comprise entre 6 et 9* - bien que ce réel ne puisse faire partie de la liste précédente. On voit combien la description de Borel coïncide avec un argument diagonal à la Cantor.

La solution proposée par Borel pour sortir du paradoxe de Richard est, non seulement ingénieuse, mais surtout porteuse d'une interprétation riche d'enseignement sur la distinction qui se mettait en place à l'époque dans son esprit entre mathématique idéaliste et mathématique réaliste. Borel propose de considérer la notion d'ensemble *effectivement* énumérable, pour lequel il est possible de fournir un algorithme permettant de construire la bijection entre l'ensemble et celui des entiers naturels. En effet, observe Borel, un ensemble dénombrable n'est pas nécessairement effectivement énumérable, au sens où la bijection peut très bien exister sans qu'on sache la construire, et c'est le cas pour l'ensemble des formules finies définissant un réel unique. L'existence de la bijection f permet certes formellement de définir une énumération en attribuant le numéro n à la formule $f^{-1}(n)$ mais n'est pas effective dans le sens où on ne sait pas dire quel est le *successeur* de l'antécédent de n mieux qu'en disant que c'est l'antécédent de $n+1$. Le dénombrable non énumérable s'apparente à la vertu dormitive de l'opium…

Faisons observer au passage que, sous un point de vue plus contemporain, le nœud de l'apparent paradoxe, dans l'exemple proposé par Borel, réside en fait fondamentalement dans le fait de considérer, dans l'ensemble des formules finies, celles qui définissent un réel unique. En effet, le prédicat *définir un unique réel* n'est pas formulable dans le langage ensembliste: il n'est donc pas légitime dans cette situation d'appliquer l'axiome de séparation qui permet dans un ensemble donné de séparer les éléments vérifiant un prédicat de ceux ne le vérifiant pas (voir Hallett, 1986). Pour Borel, ce qui donne naissance à un ensemble, ou tout du moins ce qui permet de légiférer sur ses éléments, est un processus de construction explicite à l'instar de l'incrémentation qui permet de construire les entiers naturels.

À la lecture des travaux boréliens au tournant du siècle, on constate qu'une attention toujours croissante est portée aux objets mathématiques effectivement constructibles, et en premier lieu aux nombres réels, afin de saisir comment le continu de la droite réelle peut être conçu dans une vision réaliste. Dans son article (Borel, 1903), Borel illustre la manière dont une vision géométrique, fondée sur les raisonnements de mesure des ensembles qu'il avait introduits dès sa thèse, fournit un nouveau mode d'approche. En enrobant des réels déjà construits (comme les rationnels) par des intervalles de longueur totale aussi petite que l'on veut, on démontre la nécessité d'existence d'autres points pour, en quelque sorte, remplir la longueur. La méthode de Borel reposait fondamentalement comme on l'a déjà mentionné sur l'*additivité dénombrable* de sa mesure des ensembles. Or cet axiome d'additivité, postulé par Borel comme une extension intuitive du cas fini, n'avait pas manqué d'être critiqué notamment par Schoenflies dans un rapport écrit en 1900 sur la situation de la théorie des ensembles (Schoenflies, 1900). Schoenflies y affirmait qu'une propriété sur une notion première comme la longueur des ensembles ne pouvait être légitimée sans preuve et ne saurait relever d'un postulat. Borel avait donc besoin de nouveaux arguments pour corroborer la validité de son axiome et c'est par ce biais qu'il rencontra les probabilités.

II - L'arme probabiliste

1- Le problème de Gyldén

Il faut aller chercher une des sources de l'intérêt de Borel pour les probabilités du côté des travaux d'astronomes du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Depuis le XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, l'astronomie était en effet un des principaux domaines d'application de techniques probabilistes destinées au traitement du terme d'erreur qui apparaissait entre les prédictions de la théorie et les données d'observation. Legendre, Laplace et Gauss, entre autres, promurent un usage des probabilités qui aboutirait au milieu du XIX$^{\text{ème}}$ siècle à l'énoncé de la méthode des moindres carrés et de la loi des erreurs (voir (Chabert, 1989)).

Hugo Gyldén (1841-1896), astronome suédois de Göteborg s'intéressa à différents problèmes fondamentaux de la mécanique céleste liés à la représentation des trajectoires. L'un d'eux est ce qu'on appelle la résonance orbitale, qui correspond à l'alignement périodique de deux planètes en rotation autour d'une étoile, soit encore au fait que les périodes de rotation de ces deux planètes aient pour rapport le quotient de deux entiers. Un tel phénomène assure une forme de stabilité dans le temps au système planétaire considéré et il est donc important, à partir d'observations, de savoir déterminer si les deux corps célestes considérés sont ou non en résonance. Le quotient calculé à partir des données se trouvera naturellement entaché d'une erreur qu'il faudra savoir traiter. Le caractère rationnel d'un nombre réel se lisant très simplement à travers la décomposition en fractions continues puisque cela correspond au fait que la décomposition est finie ou, ce qui revient au même, que l'un des quotients incomplets (dits aussi quotients partiels) est infini, Gyldén proposa en 1888 (Gyldén, 1888a - 1888b) de regarder systématiquement la question sous une forme probabiliste. Gyldén se demanda si, pour un nombre réel déterminé entre 0 et 1, il était possible de donner la forme de la loi de probabilité du n-ième quotient incomplet afin de déterminer la probabilité qu'il soit infini ou, plus généralement, que ce quotient incomplet soit supérieur à une constante k fixée. Un échange de lettres s'ensuivit avec Charles Hermite (1822-1901) qui publia quelques extraits de la correspondance dans les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (Gyldén, 1888c). À notre connaissance, le problème étudié par Gyldén reliait pour la première fois décomposition en fractions continues et probabilités, un lien dont l'héritage borélien allait se révéler spectaculaire (sur d'autres aspects concernant le problème de Gyldén, voir (von Plato, 1994)).

Ce n'est cependant pas directement à travers les recherches de Gyldén mais dans un article d'un autre suédois (Wiman, 1900), Anders Wiman (1865-1959), que Borel allait se prendre d'intérêt pour cette question. Wiman n'était pas un astronome mais un mathématicien à l'Université de Lund, spécialiste de géométrie et de théorie des nombres. C'est peut-être en lien avec ses intérêts arithmétiques que Wiman lut, à la fin des années 1890, les travaux de Gyldén (qui venait de mourir) sur les fractions continues et publia en 1900 un article exposant une solution complète du problème de Gyldén. Dans ce travail, ayant décomposé l'événement $(a_n > k)$ sous forme d'une réunion dénombrable, Wiman faisait usage de la σ-additivité pour effectuer les calculs des probabilités correspondantes.

2- Ensembles, mesures, probabilités.

Borel découvrit l'article de Wiman vers 1904, sans que nous ayons pu vraiment savoir comment il en avait prit connaissance. Parmi plusieurs pistes proposées dans (Durand and Mazliak, 2011), mentionnons l'une des plus simples : Borel et Wiman assistèrent ensemble à l'été 1904 au IIIème Congrès international des mathématiciens de Heidelberg. En tout cas, quelle que fût la façon dont il connut l'article de Wiman, Borel prit conscience pour la première fois du fait que la notion de mesure des ensembles qu'il avait introduite était adéquate pour aborder des questions probabilistes. Qui plus est, la question traitée par Wiman portait sur une description des nombres réels et rejoignait ainsi comme on l'a vu les préoccupations immédiates de Borel.

Quelques mois plus tard, Borel publiait son premier article probabiliste, *Sur quelques questions de probabilités* (Borel, 1905) où son but était précisément de montrer que l'utilisation de la mesure des ensembles et de la toute jeune intégrale de Lebesgue permettaient de formuler mathématiquement des questions probabilistes inexprimables auparavant. C'était par exemple le cas, disait Borel, si on cherchait à évaluer la probabilité d'obtenir un nombre rationnel en tirant au hasard un réel entre 0 et 1. Dans son article, Borel tenait d'abord à s'inscrire dans la lignée d'Henri Poincaré, qui dominait alors la scène probabiliste française, et de sa position conventionnaliste. Poincaré avait notamment affirmé dans *la Science et l'Hypothèse* (Poincaré, 1902, p. 235) que *pour entreprendre un calcul quelconque de probabilité, et même pour que ce calcul ait un sens, il faut admettre, comme point de départ, une hypothèse ou une convention qui comporte toujours un certain arbitraire*. Cependant, la manière dont Borel affirme d'autorité dans son article que *la convention la plus commode, au moins dans le cas où l'ensemble des valeurs possibles de la ou des variables est borné, consiste à regarder la probabilité comme proportionnelle à l'étendue* semble montrer que pour lui cet arbitraire, puisqu'il s'appuie sur notre intuition géométrique de l'espace, n'en est pas vraiment un. Par ce glissement de la géométrie aux probabilités, Borel justifie que nous ayons tous une intuition immédiate de la façon de quantifier les résultats de l'expérience *tirer au hasard un nombre entre 0 et 1*. C'est cette intuition originelle qui donne sens au mode d'appréhension probabiliste du continu de la droite réelle dont il allait se faire le promoteur.

C'est surtout en 1908, dans son impressionnant article (Borel, 1909a) consacré aux applications arithmétiques des probabilités dénombrables, que Borel parut convaincu d'avoir trouvé dans l'approche probabiliste l'accès conceptuel *clair et intuitif* au continu réel qui lui manquait dans la description de ce dernier. Borel illustre ce point par l'introduction des nombres absolument normaux, nombres dont la décomposition en toute base est uniformément répartie. Borel montre qu'un nombre réel tiré au hasard entre 0 et 1 possède cette caractéristique avec probabilité 1. Et pourtant, commente-t-il :

> *dans l'état présent de la science, la détermination effective d'un nombre absolument normal semble être le plus difficile des problèmes ; il serait intéressant de le résoudre soit en construisant un nombre absolument normal, soit en prouvant que parmi les nombres qui peuvent être effectivement définis, aucun n'est absolument normal. Quelque paradoxale que cette proposition puisse paraître, elle n'est absolument pas incompatible avec le fait que la probabilité pour un nombre d'être absolument normal soit égale à 1.* (Borel, 1909a, p. 261)

Dans (Borel, 1919, p. 76), Borel énonce le rôle qu'il assigne aux raisonnements probabilistes. Il n'y a pour lui que deux modes de raisonnement sur un ensemble de nombres non donnés *a priori* de façon descriptive. Soit par des formules générales (du type des identités remarquables) qui s'appliquent universellement à tous les nombres. Soit sous forme de résultats probabilistes du type de ceux de son article de 1908, parce que seul ce type d'approche permet de considérer, non pas un individu singulier qui ne pourrait pas être décrit, mais toute la classe dans son ensemble. Borel semble ainsi assez proche du commentaire que Wittgenstein fera vingt-cinq ans plus tard en désignant le calcul des probabilités comme le *medium* par lequel nous examinons et appliquons la loi naturelle (Wittgenstein,1984; p. 276). Pour Mathieu Marion (Marion, 1998, pp. 203-204 et p. 215), les raisonnements probabilistes de Borel sur les nombres lui ont permis d'assouplir sa position finitiste stipulant que seuls les objets définis par un nombre fini de mots sont admissibles. L'usage des probabilités dénombrables place le recours à un nombre dénombrable de choix arbitraires sur un terrain mathématique incontestable et de ce fait permet d'accéder à l'existence d'objets (de nombres en l'occurence) dont la calculabilité effective serait hors de proportion avec les possibilités humaines bien qu'elle soit en théorie envisageable.

3- L'autre côté du miroir : la physique et la sociologie

Dès sa première publication (Borel, 1905), Borel évoque son intention de ne pas limiter ses considérations à l'intérieur des mathématiques mais de se tourner vers ce qui est alors la grande affaire scientifique nécessitant l'usage des probabilités : la mécanique statistique. L'année suivante, il publie un article (Borel, 1906b) sur la théorie cinétique des gaz où il exploite toute la portée d'un modèle probabiliste lui permettant de déduire la loi de Maxwell-Boltzmann sur la répartition des vitesses. Le but qu'il poursuit ce faisant est clairement affirmé dans le préambule de l'article.

> *Je voudrais m'adresser à tous ceux qui, au sujet de la théorie cinétique des gaz, partagent l'opinion de Bertrand que les problèmes de probabilité sont semblables au problème de trouver l'âge du capitaine quand on connaît la hauteur du grand mât. Si leurs scrupules sont justifiés jusqu'à un certain point parce qu'on ne peut reprocher à un mathématicien son amour de la rigueur, il ne me semble cependant pas impossible de les contenter. C'est le but des pages qui suivent : elles ne font faire aucun progrès réel à la théorie du point de vue physique ; mais elles arriveront peut être à convaincre plusieurs mathématiciens de son intérêt, et, en augmentant le nombre de chercheurs, contribueront indirectement à son développement. Si c'est le cas, elles n'auront pas été inutiles, indépendamment de l'intérêt esthétique présent dans toute construction logique.* (Borel, 1906b, p. 10)

Sans doute quelques belles formules furent elles inspirées à Brunschvicg sous l'influence du tournant probabiliste de Borel. Dans (Brunschvicg, 1950, p. 19), le philosophe mentionne que *c'est bien la raison proprement et simplement raisonnable qui s'est annexé le principe de Carnot en s'armant du calcul des probabilités que le positivisme étroit et cassant d'Auguste Comte prétendait exorciser, dans lequel dès son invention Pascal avait perçu* *l'alliance féconde, à l'intérieur de la mathématique, entre l'esprit de géométrie et l'esprit de finesse*. Le philosophe ajoute plus loin : *non seulement le contenu du savoir scientifique est élargi et purifié, mais quelque chose de plus inattendu encore éclate aux yeux des savants, la nécessité de modifier radicalement l'idée que leur réalisme ingénu et tenace s'était faite de leur commerce avec la nature* (Brunschvicg, 1950, p. 34). Un tel commentaire se rapportait sous la plume de Brunschvicg aux modifications des théories physiques, peut assez bien convenir au regard nouveau porté sur les nombres réels par Borel si, dans la citation précédente, le mot *nature* est remplacé par *continu*.

Ce n'est cependant pas uniquement en direction de la physique que regardait Borel quand il s'interrogeait sur le rôle que pouvaient jouer les probabilités dans la méthode scientifique, celle-ci même dont il avait fait le principe de la *Revue du Mois*. Son inquiétude quant aux errements de l'approche purement logique que nous avons mentionnée plus haut alla de pair avec sa conviction profonde que le mathématicien ne pouvait éviter de se poser la question de la *valeur pratique* de son travail. Savant engagé, Borel refusait de se laisser enfermer dans la tour d'ivoire mathématicienne. Le savant dans la cité devait contribuer à l'éveil de ses concitoyens en leur fournissant, le cas échéant, des moyens d'affronter la vie en société et les problèmes qui s'y posent. Quel rôle cependant attribuer spécifiquement au mathématicien ? Bien qu'il ne fût pas très disert à ce sujet, on peut imaginer Borel assez en phase avec un autre énoncé de Brunschvicg (Brunschvicg, 1912, p. 577) : *En donnant le moyen de faire entrer dans la simplicité d'une formule unique ce qui s'étale dans l'immensité de l'espace et du temps, la mathématique nous convainc de la place privilégiée que l'homme occupe parmi les espèces vivantes et les sociétés animales : il n'est pas seulement en communauté avec ses semblables, il est en communauté avec la nature*.

Au même moment où il s'investit dans les aspects mathématiques des probabilités, Borel devint persuadé de leur utilité sociale. La mesure du risque et la prédiction lui apparurent comme deux défis majeurs auxquels le citoyen est confronté: en effet, *le calcul des probabilités intervient d'une manière plus ou moins consciente dans toutes nos décisions* (Borel 1906a). Borel reprend par exemple le vieux paradoxe du tas de blé (combien de grains contient-il ?) pour conclure que la seule vraie possibilité de réponse est une distribution de probabilités provenant de l'observation d'un grand nombre de cas par un panel d'experts.

> *La réponse mathématique à donner à bien des questions pratiques est un coefficient de probabilité. Une telle réponse ne paraîtra pas satisfaisante à bien des esprits, qui attendent des mathématiques la certitude. C'est là une tendance très fâcheuse ; il est extrêmement regrettable que l'éducation du public soit, à ce point de vue, si peu avancée ; cela tient sans doute à ce que le calcul des probabilités est à peu près universellement ignoré, bien qu'il pénètre chaque jour davantage dans la vie de chacun (assurances diverses, mutualités, retraites, etc.).* (Borel, 1907a, p. 698)

Un renseignement de type statistique devint ainsi progressivement pour Borel l'outil scientifique capital mis à la disposition de l'homme d'action qui devait prendre une décision, en opposition radicale avec la préconisation bergsonienne d'un appel exclusif à l'intuition alliée à l'observation individuelle. Car, nous dit Borel, l'intuition trompe et l'homme en société a besoin de s'appuyer d'une part sur les expériences multiples vécues par ses semblables, d'autre part sur des pratiques à la scientificité éprouvée par le truchement de la rigueur mathématique ce qui une fois encore le met assez en phase avec une attitude de physicien. Dans sa volonté de convaincre, Borel s'interroge sur les résistances que rencontre l'utilisation de l'outil probabiliste. Le fantasme de la dissolution de l'individu au profit d'un groupement aux contours flous en est une car l'homme n'aime pas perdre son nom et être désigné par un numéro. Mais surtout

> *[l]e calcul des probabilités non content de recenser les événements passés prétend prévoir dans une certaine mesure les événements futurs : c'est en cela qu'il est une science. Cette prétention heurte tout d'abord le sentiment psychologique de la liberté humaine. (…)Celui qui meurt de faim s'intéresse peu à l'augmentation de la fortune moyenne : on ne doit pas chercher dans la statistique ni dans le calcul des arguments pour consoler ceux qui souffrent des inégalités sociales ; mais cette constatation ne diminue en rien la valeur propre des statistiques ni des calculs par lesquels on les interprète.* (…) *On n'a rien à redouter du calcul, lorsqu'on est décidé à ne pas régler sa conduite sur ses indications sans les avoir au préalable pesées à leur juste valeur : c'est une illusion singulière de penser que l'indépendance individuelle est accrue par l'ignorance.* (Borel, 1908b)

III - Posture borélienne

1- Borel et les philosophes

Borel ne montra jamais beaucoup de goût pour la spéculation philosophique abstraite sur les mathématiques qui lui paraissait probablement trop propice à étayer le penchant regrettable de certains mathématiciens à rester dans leur tour d'ivoire. Ce point est particulièrement net au sujet des probabilités et on peut constater avec un certain étonnement combien Borel participa finalement assez peu aux échanges sur l'intérprétation des mathématiques du hasard qui furent assez vifs dans les premières décennies du siècle. Dans un article de 1909 (Borel, 1909b), il livre le fond de sa pensée: même s'il y affirme qu'il faut être prudent avant de condamner des recherches de mathématiciens qui paraissent éloignées de tout but pratique, il critique vertement les spéculations qui préoccupent plus les philosophes que les mathématiciens et une *débauche de logique formelle qui apparaît comme une construction sans aucune base* (Borel, 1909b, p. 324). Dans un autre texte (Borel, 1907c), il avait usé d'une ironie mordante pour moquer *la facilité* *avec laquelle les philosophes parlent de la méthode des sciences mathématiques comme s'ils la connaissaient*. Certes, Borel y visait directement, comme il le dit lui même, les affirmations de Couturat exagérant le rôle de la logique dans le travail mathématique, mais il avait sans doute en tête également les assertions de Bergson sur la géométrie dont la vision lui paraissait totalement dépassée. Pour Borel, Bergson en était resté à l'intelligence géométrique des Grecs, alors qu'elle était au début du XX^ème^ siècle *beaucoup moins rigide et beaucoup plus vivante* (Borel, 1907). Une forme de cette critique se retrouve sous la plume de Brunschvicg, probablement là aussi inspiré en partie par l'exemple de Borel : *Les spéculations philosophiques qui portent sur l'espace des géomètres sans autre spécification, qu'elles en fassent d'ailleurs une réalité ou une idée pure ou une forme d'intuition, ont perdu le contact avec la science actuelle* (Brunschvicg, 1912, p. 444).

Pour ce qui est de la question de l'interprétation des probabilités, Borel ne paraît jamais avoir été attiré par les longs débats sur leur caractère objectif ou subjectif et, s'il alla plus loin que l'attitude purement conventionnaliste prisée par Poincaré, il se contenta toujours du strict minimum pour fonder la part objective du sens que l'on pourra attribuer à une probabilité. Son but fut probablement d'éviter ainsi de tomber dans un subjectivisme intégral qui cadrerait difficilement avec l'utilisation des probabilités en physique statistique. On l'a dit, pour lui, l'importance attachée à l'interprétation des probabilités et à leur connexion avec le monde réel se mesurait à l'aune de l'utilité des résultats qu'elles fournissaient. Dans le dernier fascicule de son *Traité sur le calcul des probabilités et ses applications* (Borel, 1939) qu'il consacra à la valeur pratique et philosophique des probabilités, Borel présentait ce résidu objectif comme étant *la loi unique du hasard* : si le calcul d'une probabilité amène un nombre proche de 0, on doit considérer qu'objectivement l'événement ne se produira pas. Cette reprise du principe de Cournot se fait avec une précision supplémentaire puisque Borel fournit des ordres de grandeur qui dépendent des situations considérées. Ses réflexions culmineront dans la détermination de *probabilités universellement négligeables* qui sont l'objet de la note (Borel, 1930).

À notre connaissance, l'influence significative du courant pragmatiste sur Borel n'a peut être pas été suffisamment soulignée, notamment celle qu'il a pu recevoir au contact lointain des études italiennes sur le sujet menées par Giovanni Vailati. C'est précisément dans ces années du tout début du XX^ème^ siècle que Borel fait connaissance de cette figure singulière du paysage scientifique italien, probablement à travers Volterra qui en était très proche. On sait que c'est Vailati qui fut en grande partie l'inspirateur de la *Prolusione* que Volterra prononça en 1901 lors de sa nomination à l'université de Rome, où le mathématicien italien eut l'occasion d'évoquer l'usage des mathématiques dans les récentes études économiques et biométriques à travers, en particulier, l'intervention de calculs de probabilités. La traduction française de ce discours académique (Volterra, 1906), premier texte publié en janvier 1906 dans la toute nouvelle *Revue du Mois* fondée par Borel et Camille Marbo (Marguerite Appel), représente une étape importante dans la prise de conscience par Borel des potentialités des probabilités. Les articles de Vailati dans *Leonardo* qui, d'une part décelent les aspects pragmatistes du programme de logiciens adossant comme Peano leurs choix (de postulats, de définitions…) à des *faits* (Vailati, 2009 pp. 164-165), d'autre part justifient l'intervention d'une dose d'indéterminisme dans le principe de causalité en raison de l'inexistence de faits qui se répètent à l'identique (Vailati, 2009 p. 194), semblent bien cadrer avec l'orientation borélienne vers des descriptions probabilistes.

Sur les conseils de Volterra, Borel publia d'ailleurs un article de Vailati dans une des premières livraisons de la *Revue du Mois* (Vailati, 1907). Vailati y résumait un certain nombre de ses articles précédents et insistait sur l'attitude singulière des jeunes pragmatistes italiens en cela qu'ils allaient à la rencontre des mathématiciens au lieu de se réfugier dans les domaines habituels aux philosophes. Ces remarques ne furent d'ailleurs pas du goût de tous : le philosophe Enriques demanda à Borel un droit de réponse, publié peu après dans la *Revue du Mois* (Enriques, 1907), où il contestait vigoureusement que le point de vue pragmatiste de Vailati soit représentatif du milieu philosophique italien. On ne peut exclure que Borel, peu au fait des subtilités des écoles philosophiques, ait été séduit (et un peu abusé) par un aspect du pragmatisme qu'Enriques relie à l'école de William James, aspect établissant un lien fort entre vérité et utilité, plus que par le pragmatisme strictement logique de Vailati limitant la vérité des théories scientifiques aux faits qu'elles contiennent. Brunschvicg formulera en outre lui aussi d'importantes réserves au sujet des pragmatistes : *Il est visible d'ailleurs qu'enveloppant la philosophie particulière de la mathématique dans une conception générale et métaphysique de la certitude, la théorie pragmatiste de la connaissance manque au précepte qui avait fait la portée et la fécondité du mouvement intuitioniste, au respect de la spécificité; elle sacrifie le sentiment direct que le mathématicien a d'avoir constitué des méthodes capables de conférer à l'objet mathématique une vérité*. (Brunschvicg, 1912, pp. 455-456).

On peut légitimement s'interroger sur l'origine profonde de la critique de Brunschvicg. Certes, l'attitude pragmatiste avait peut être perdu un certain contact avec des spécificités de la démarche mathématique, mais, s'appuyant sur un empirisme exigeant (aussi bien dans l'acception de Vailati que dans celle, plus générale, de James), elle rendait surtout difficilement tenable la position du philosophe ou au mathématicien qui resterait à l'écart des conditions pratiques et sociales des expériences. Or, selon Brunschvicg, *dès que le philosophe accepte d'ouvrir la porte, et de faire leur part aux survivances sociales, il se désarme lui même et il se perd* (Brunschvicg, 1912, p. 430). La posture de Borel, marquée du sceau de l'engagement social, cadre mal avec la vision compartimentée du savoir qui règnait dans l'université d'alors. Aussi est-ce peut être partiellement en regardant le positionnement politique excessif de membres de la génération suivante qu'il faut questionner le doute borélien; cette génération succédait au traumatisme de la Grande Guerre qui avait brutalement rendu très immédiate la question de la connexion entre le penseur professionnel et le monde. Les attaques féroces de Nizan contre les philosophes dans (Nizan, 1932), au premier rang desquels se place le malheureux Brunschvicg qu'il prend incessamment pour cible, doivent se lire à l'aune de la désillusion.: *Il est grandement temps de mettre [les philosophes] au pied du mur. De leur demander leur pensée sur la guerre, sur le colonialisme, sur la rationalisation des usines, sur l'amour, sur les différentes sortes de mort, sur le chômage, sur le suicide, les polices, les avortements, sur tous les éléments qui occupent vraiment la terre.* (Nizan, 1932, p. 38). Pour Nizan, prendre pour modèle de toute méditation un certain développement formel et impersonnel des mathématiques avait permis à *M.Bergson comme M.Brunschvicg [de conclure] que la question ne sera pas posée. Il n'y a aucune raison d'accéder à [leur] désir.* (Nizan, 1932, p. 25). Nizan voyait en ces philosophes, vivant selon lui d'une vie de *parasites*, les chiens de garde d'une bourgeoisie triomphante qui dressaient leurs travaux tel un rempart pour éviter les questions sociales. Borel ne s'approcha certes jamais de l'interprétation politique de Nizan, mais, incontestablement, il eut à cœur que, dans une certaine mesure, la question fût posée.

2- Borel versus Keynes

Cette désaffection de Borel envers les questions d'interprétation ne fut pas du goût de certains de ses contemporains en recherche d'une conception satisfaisante de la probabilité. Notamment Keynes qui, depuis 1907, à la suite de ses contacts avec Cambridge (avec Russell notamment), traquait une possibilité de fonder la théorie des probabilités sur la logique. Dans (Keynes, 1921), qui constitue une sorte d'aboutissement de ses réflexions sur les probabilités, Keynes expose la conception qu'il en défend. Selon Keynes, dans d'innombrables situations, les arguments sur lesquels nous fondons nos raisonnements ne peuvent prétendre à une valeur conclusive absolue et la théorie des probabilités intervient pour mesurer à quel degré un argument est décisif ou non. En aucun cas pour lui une approche purement théorique et mathématique ne saurait nous donner la possibilité d'interpréter de façon satisfaisante une probabilité.

> *Students of probability in the sense which is meant by the authors of typical treatises on* Wahrscheinlichkeitsrechnung *or* Calcul des probabilités*, will find that I do eventually reach topics with which they are familiar. But in making a serious attempt to deal with the fundamental difficulties with which all students of mathematical probabilities have met and which are notoriously unsolved, we must begin at the beginning (or almost at the beginning) and treat our subject widely. As soon as mathematical probability ceases to be the merest algebra or pretends to guide our decisions, it immediately meets with problems against which its own weapons are quite powerless. And even if we wish later on to use probability in a narrow sense, it will be well to know first what it means in the widest.* (Keynes, 1921, p. 6)

Quand Borel publia en 1909 son livre Eléments de Probabilités, Keynes se fendit de deux recensions assassines (Keynes, 1910a - 1910b) ironisant sur les mathématiciens français férus de belles théories esthétiquement inattaquables mais conceptuellement creuses.

> *This treatise on the mathematical principles of probability is of a type which has been common in France at any time during the last hundred years, but which has not at present an English counterpart. The great prestige of Laplace has accounted, no doubt, for the circumstances that the study of probability is a normal part of the training of a French mathematician, and to lecture on it one of the regular duties of a French professor of pure mathematics. At intervals these lectures, sometimes of an advanced and sometimes of an elementary character, are published, and we are presented with an admirably lucid and beautifully arranged account of the mathematical analysis at the hands of a first-rate pure mathematician who has, however,* [in cauda venenum !] *no real interest in the subject of probability either from the statistical or from the philosophical standpoint.* (Keynes, 1910a, p. 212)

Borel répondra vigoureusement à Keynes en 1924 (la vengeance est un plat qui se mange froid …) dans une recension sur son traité (Keynes, 1921), l'accusant à son tour d'être à ce point obsédé par sa recherche de fondement logique qu'il avait dû passer sous silence les applications des probabilités à la mécanique statistique par exemple - alors que Maxwell était un des noms les plus prestigieux dont l'Université de Cambridge si chère au cœur de Keynes pouvait se glorifier, remarquait ironiquement Borel. Que Keynes puisse juger de longues discussions sur la nature subjective ou objective d'un énoncé probabiliste élémentaire portant sur le tirage de la loterie plus importantes que la théorie cinétique des gaz, voilà qui faisait monter la moutarde au nez de Borel et il ne se priva pas de le faire savoir.

> *Ceci prouve une fois de plus combien sont différents les esprits des Anglais et les esprits des continentaux ; nous ne devons pas nous hypnotiser sur ces différences et chercher avec obstination à comprendre ce qui est pour nous incompréhensible ; il vaut mieux admettre ces différences comme une* matter of fact *et essayer néanmoins d'adapter à notre mentalité particulière les idées originales des Anglais. Ce faisant, nous sommes à peu près sûrs de les trahir, mais en même temps de leur donner la seule chance qu'ils peuvent avoir d'exercer une influence sur des esprits faits autrement que les leurs.* (Borel, 1924, p.322)

Quinze ans plus tard, dans (Borel, 1939), Borel semblait avoir un peu assoupli sa position sur les enseignements qu'on peut tirer des questionnements sur les fondements logiques des probabilités, allant jusqu'à parler du *bel ouvrage de M.J.M.Keynes* (Borel,1939 p. 37). Même s'il continuait à émettre des réserves sur le fait de favoriser des jugements qualitatifs par rapport au quantitatif, Borel admettait néanmoins que la méthode de Keynes (un avatar des formules de Bayes-Laplace qu'il décrit en détail au numéro 19) permettait de modéliser l'induction logique, autrement dit l'augmentation de la valeur de vérité d'une proposition au travers d'expériences. Il est possible que Borel, un peu échaudé par le tournant axiomatique et le développement de mathématiques sophistiquées (mouvement brownien, chaînes de Markov) dans la théorie des probabilités envers lesquels il garda toujours une certaine réserve, ait alors mieux pris conscience de l'intérêt des questionnements de Keynes, d'autant que Ville était en train d'achever cette même année 1938 sa thèse sur les collectifs de von Mises. Même s'il restait en désaccord avec certaines interprétations de Keynes, Borel devait lui reconnaître de conserver en ligne de mire l'usage *pratique* de la théorie des probabilités, un aspect que justement Kolmogorov s'était empressé d'évacuer de ses travaux pour des raisons complexes. De ce fait, on constate dans le chapitre 5 de (Borel, 1939) combien dans la critique de la notion de probabilité, le commentaire sur la méthode axiomatique prend peu de place : Borel y affirme qu'il est bien sûr envisageable de choisir une approche axiomatique des probabilités et donc comme dans les *bons romans policiers* de commencer par la fin en posant des définitions. Mais les difficultés pratiques restent alors entières quand il s'agit de mettre en relation la science théorique avec n'importe quel phénomène réel et il est clair à la lecture du fascicule que c'est là l'important pour Borel, horizon sur lequel il se retrouve finalement en accord avec son collègue anglais.

Conclusion

On peut dire en conclusion que depuis ses débuts probabilistes, Borel ne dévia globalement pas dans la manière dont il conçut la théorie des probabilités. Elle constituait un outil mathématique indispensable pour une forme d'accès intuitif au réel (y compris comme on l'a vu dans le champ mathématique) en fournissant sur lui des renseignements de type statistique sur lequel fonder le raisonnement et l'action. S'il en vit d'abord l'utilité dans un cadre mathématique, sa curiosité intellectuelle et ses divers centres d'intérêt l'amenèrent rapidement à prendre conscience des multiples applications de la théorie des probabilités. C'est en particulier du constat répété que l'on pouvait faire des probabilités un usage capital dans les questions sociales que Borel tira les plus importantes conséquences. Pour lui, les probabilités devinrent fondamentalement une *physique sociale* qui, convenablement utilisée, sert au décideur à s'orienter dans un monde chaotique. Comme il l'écrivit lui même :

> *On ne doit chercher dans le calcul des probabilités ni arguments moraux, ni raisons immédiates d'agir: mais seulement,* comme dans les sciences physiques*, un moyen de bien connaître les événements passés et de prévoir avec une certaine approximation les événements futurs*. (Borel, 1908b, p. 648)

Bibliographie

(Barberousse, 2008) BARBEROUSSE, Anouk : La valeur de la connaissance approchée. L'épistémologie de l'approximation d'Emile Borel. Revue d'Histoire des Mathématiques 14 (1) (2008), 53–75.

(Borel, Emile, 1895) BOREL, Emile : Sur quelques points de la théorie des fonctions, Annales de l'E.N.S., 12, 9-55, 1895

(Borel, Emile, 1900) BOREL, Emile : A propos de l'infini nouveau, Revue Philosophique, 48, 383-390, 1900

(Borel, Emile, 1903) BOREL, Emile : Contribution à l'analyse arithmétique du continu, Journal de Mathématique pure et appliquée, 9, 329-375, 1903

(Borel, Emile, 1905) BOREL, Emile: Remarques sur certaines questions de probabilités. Bulletin de la Société Mathématique de France 33 (1905), 123–128.

(Borel, Emile, 1906a) BOREL, Emile : La valeur pratique du calcul des probabilités. Revue du mois 1 (1906), 424–437.

(Borel, Emile, 1906b) BOREL, Emile : Sur les principes de la théorie cinétique des gaz. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure 23 (1906), 9–32.

(Borel, Emile, 1907a) BOREL, Emile : Un paradoxe économique. Le sophisme du tas de blé et les vérités statistiques. Revue du mois 3 (1907), 688–699.

(Borel, Emile, 1907b) BOREL, Emile : l'évolution de l'intelligence géométrique, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 15, 6, 747-754, 1907

(Borel, Emile, 1907c) BOREL, Emile : La logique et l'intuition en mathématique, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 15, 3 (Mai 1907), pp. 273-283

(Borel, Emile, 1908a) BOREL, Emile : Le continu mathématique et le continu physique, Scientia, 6, 21-35, 1908

(Borel, Emile, 1908b) BOREL, Emile : Le calcul des probabilités et la mentalité individualiste. Revue du mois 6 (1908), 641–560.

(Borel, Emile, 1908c) BOREL, Emile : Les paradoxes de la théorie des ensembles. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure 25 (1908), 443-448

(Borel, Emile, 1909a) BOREL, Emile Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 27 (1909), 247–271.

(Borel, Emile, 1909b) BOREL 1909 : La théorie des ensembles et les progrès récents de la théorie des fonctions, Revue Générale des Sciences, 20 (1909), p. 315–324

(Borel, Emile, 1909c) BOREL 1909 : Calcul des Probabilités, Hermann, 1909

(Borel, Emile, 1919) BOREL, Emile : L'intégration des fonctions non bornées, Annales de l'E.N.S., 3,36, 71-92, 1919

(Borel, 1924) BOREL, Emile : A propos d'un traité de probabilités. Revue Philosophique 98 (1924), 321–336. (*reproduit dans* Borel,1939)

(Borel, 1930) BOREL, Emile : Sur les probabilités universellement négligeables. C.R.A.S., 190, 537-540.

(Borel, 1939) BOREL, Emile : Valeur pratique et philosophie des probabilités. Traité du calcul des probabilités et de ses applications, Fascicule 7, 1939

(Bourdeau, 2009) BOURDEAU, Michel : L'infini nouveau autour de 1900», dans Science, histoire et philosophie selon Gaston Milhaud, A. Brenner et A. Petit (éds), Paris, Vuibert, 2009, p. 207-219.

(Bouveresse, 1998) BOUVERESSE, Jacques : Conférence du 19 novembre 1998 à l'université de Genève, Société Romande de Philosophie.

(Brunschvicg, 1912) BRUNSCHVICG, Léon : Les étapes de la philosophie mathématique, Blanchard, 1912

(Brunschvicg, 1950) BRUNSCHVICG, Léon : Héritage de mots, héritage d'idées, P.U.F., 1950

(Catellier and Mazliak, 2012) CATELLIER, Rémi and MAZLIAK, Laurent : The emergence of French statistics, Revue d'Histoire des Mathématiques, 2012

(Cavaillès, 1940) CAVAILLES, Jean : Du Collectif au Pari, Revue de Métaphysique et de Morale, XLVII, 1940, pp. 139-163.

(Chabert, 1989) CHABERT, Jean-Luc : Gauss et la méthode des moindres carrés, Revue d'histoire des sciences. 1989, Tome 42 n°1-2. pp. 5-26

(Durand et Mazliak, 2011) DURAND Antonin et MAZLIAK Laurent : Revisiting the origin of Borel's interest for probability. Continued fractions, Social involvement, Volterra's prolusione, Centaurus, 53, 4, 306-332, 2011

(Décaillot, 2008) DECAILLOT Anne-Marie : Cantor et la France, Kimé, 2008

(Enriques, 1907) ENRIQUES Federigo : A propos du mouvement philosophique en Italie, Revue du Mois, t.3, 370-371, 1907

(Gattinaria, 1998) GATTINARIA Enrico Castelli : Les inquiétudes de la raison. Epistémologie et histoire en France dans l'entre-deux-guerres, VRIN-EHESS, 1998

(Gispert, 1987) GISPERT, Hélène : La correspondance de G Darboux avec J Houël: chronique d'un rédacteur (déc. 1869-nov. 1871), Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 8, Inst. Henri Poincaré (Paris, 1987), 67-202.

(Gyldén, 1888a) GYLDÉN Hugo, Om sannolikheten af inträdande divergens vid användning af de hittils brukliga methoderna att analystisk framställa platenariska störingar, Öfversikt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 45, 1888, pp. 77-87.

(Gyldén, 1888b) GYLDÉN Hugo, Om sannolikheten att påträffa stora tal vid utvecklingen af irrationella decimalbråk i kedjebråk, Öfversikt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 45, 1888, pp. 349-358.

(Gyldén, 1888c) GYLDÉN Hugo : Quelques remarques relativement á la représentation des nombres irrationnels au moyen des fractions continues, C.R.A.S., 106, 1584-1587 (1888) et C. R. CVI, 1777-1781 (1888)

(Hadamard, 1905) HADAMARD, Jacques : Cinq lettres sur la théorie des ensembles. Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 261-273

(Hallett, 1986) HALLETT, Michael : Cantorian Set Theory and limitation of size. Oxford Logic Guides n°10, Clarendon Press, 1986

(Hawkins, 1975) HAWKINS, Thomas : Lebesgue's theory of integration, Chelsea AMS, 1975

(Keynes, 1910a) KEYNES, John Maynard : Review of Eléments de la Théorie des Probabilités. The Mathematical Gazette 5 (84) (1910), 212–213.

(Keynes, 1910b) KEYNES, John Maynard : Review of Eléments de la Théorie des Probabilités, by Emile Borel. Journal of the Royal Statistical Society 73 (1910), 171–172.

(Keynes, 1921) KEYNES, John Maynard : (1921). A Treatise on Probability. Macmillan, London.

(Marion, 1998) MARION, Mathieu (1998) Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics. Oxford : Oxford University Press.

(Martin, 1994) MARTIN Thierry : La valeur objective du Calcul des Probabilités selon Cournot, Math.Sciences Humaines, 127, 5-17, 1994

(Maurey and Tacchi, 2005) MAUREY, Bernard et TACCHI, Jean-Pierre : La genèse du théorème de recouvrement de Borel. Revue d'histoire des mathématiques, 11 (2005), 163–204.

(Nizan, 1932) NIZAN Paul : Les Chiens de Garde, Rieder, 1932

(Poincaré, 1896) POINCARE, Henri Calcul des probabilités, 2nd, 1912 ed. Paris : Gauthier-Villars, 1896.

(Poincaré, 1902) POINCARE, Henri La science et l'hypothèse. Paris : Flammarion, 1902.

(Schoenflies, 1900) SCHOENFLIES, Arthur (1900) Die entwickelung der lehre von den punktmannigfaltigkeiten, Jahresbericht der Deutsche Mathematiker Vereinigung, 8, 1–251

(Shafer, 2009) SHAFER, Glenn : The Education of Jean André Ville, JEHPS (www.jehps.net), 5,1, 2009

(Vailati, 2009) VAILATI, Giovanni: Logic and Pragmatism. Selected Essays., Edited by Claudia Arrighi, Paola Cantù, Mauro De Zan & Patrick Suppes CSLI Publications, Stanford, California 2009

(Vailati, 1907) VAILATI, Giovanni: De quelques caractères du mouvement philosophique contemporain en Italie, Revue du Mois, 3, 162-185, 1907

(Volterra, 1906) VOLTERRA, Vito: Volterra Vito, Les mathématiques dans les sciences biologiques et sociales, Revue du Mois, 1, 1–20, 1906

(von Plato, 1994) von PLATO, Jan : Creating modern probability, Cambridge University Press, 1994

(Wiman, 1900) WIMAN, A. Uber eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe bei Kettenbruch-entwickelungen. Stockh. Öfv. 57 (1900),829–841.

(Wittgenstein, 1984) WITTGENSTEIN, Ludwig : Remarques philosophiques, Tel Gallimard, 1984 (p.276 ?)