



Méthode d'identification des paramètres d'un modèle de Maxwell généralisé pour la modélisation de l'amortissement

Franck Renaud, Jean-Luc Dion, Gaël Chevallier

► To cite this version:

Franck Renaud, Jean-Luc Dion, Gaël Chevallier. Méthode d'identification des paramètres d'un modèle de Maxwell généralisé pour la modélisation de l'amortissement. *Mechanics & Industry*, 2008, 11 (01), pp.47-55. 10.1051/meca/2010015 . hal-00711278

HAL Id: hal-00711278

<https://hal.science/hal-00711278>

Submitted on 22 Jun 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthode d'identification des paramètres d'un modèle de Maxwell généralisé pour la modélisation de l'amortissement

FRANCK RENAUD^a, JEAN-LUC DION ET GAËL CHEVALLIER

LISMMA - Institut Supérieur de Mécanique de Paris, 3 rue Fernand Hainaut - 93400 Saint Ouen, France

Reçu le 2 octobre 2008, accepté le 9 décembre 2009

Résumé – La dynamique des systèmes mécanique est fortement impactée par le comportement des matériaux viscoélastiques. Ainsi, pour mener des analyses aux valeurs propres complexes les plus réalistes possibles, il est indispensable de bien modéliser ces comportements. Expérimentalement, la raideur et l'amortissement de tels matériaux dépendent de la fréquence. C'est pourquoi, nous avons choisi d'étudier le modèle de Maxwell généralisé qui permet de décrire de tels comportements, contrairement à beaucoup de modèles fréquemment utilisés. Ce modèle met en jeu un certain nombre de paramètres qu'il est nécessaire d'identifier, à partir d'essais sur des matériaux. Cet article présente une méthode d'identification à partir de courbes de module et de phase. Parmi toutes les formulations possibles du modèle de Maxwell généralisé, nous avons choisi celle en pôles et en zéros pour réaliser l'identification. Des formules de passage permettent de trouver les paramètres d'autres formulations comme celle de Prony. La méthode d'identification décrite dans cet article est basée sur les courbes asymptotiques du Modèle de Maxwell généralisé. L'identification se passe en 2 temps, les paramètres du modèle sont initialisés, puis une méthode d'optimisation permet de les ajuster au mieux. Nous comparerons notre méthode à d'autres. Dans le cas d'un système mécanique comprenant plusieurs matériaux viscoélastiques différents, la taille du modèle éléments finis, mise sous forme d'état, augmente rapidement. Afin de minimiser cette taille, les pôles des différents matériaux viscoélastiques peuvent être choisis identiques. Cette contrainte supplémentaire est imposée dans le schéma itératif d'optimisation.

Mots clés : Viscoélasticité / Maxwell généralisé / amortissement / identification

Abstract – The behaviour of dynamical systems is modified by the use of viscoelastic materials. In order to lead realistic complex Eigen values analysis on dynamical systems, one need to model the behaviour of viscoelastic materials. The experiments show that the stiffness and the damping of such materials are frequency dependent. A large number of models often used are not able to describe this dependence; this is why the Generalised Maxwell's model has been chosen. This article describes a method based on modulus and angle curves to identify the parameters of this model. Between all the different formulations of Generalized Maxwell, the pole-zero formulation is the most suited to lead the identification. However, some formulas allow to find the parameters of others formulations like the Prony one. The identification method presented here is based on the asymptotic curves of Generalised Maxwell's model. This identification is led in two step, first parameters are initialised and second they are optimised. This method is confronted to others ones. If several viscoelastic materials have to be modelled in the same dynamical system, the size of the finite element model grows as quick as the number of poles. A way to reduce this size consists in constraining the poles to be equal for all materials. The method presented in this article allows to perform the identification by taking this new constraint into account.

Key words: Viscoelasticity / generalized Maxwell / damping / identification

^a Auteur pour correspondance : franck.renaud@supmeca.fr

Nomenclature

ω :	Pulsation.
F :	Transformée de Fourier de la force appliquée sur le matériau.
X :	Transformée de Fourier du déplacement du matériau.
Z :	Impédance du matériau viscoélastique.
K_0 :	Raideur statique.
K_i :	Raideur du i ème ressort.
C_i :	Amortissement du i ème amortisseur.
η :	Taux d'amortissement.
ω_{Zi} :	i ème zéro.
ω_{Pi} :	i ème pôle.
α :	Ordre de dérivation : fraction rationnelle.
δ_{ij} :	Symbole de Kronecker.
ϕ :	Phase de l'impédance.
A :	Aire sous-tendue par la courbe de phase de l'impédance.
R :	Rigidification du module de l'impédance.
$\delta_{ A }$:	Moyenne des écarts absolus entre les courbes du modèle et de l'expérience.
δ_A :	Ecart absolu entre les aires de la phase expérimentale et celle du modèle.
ν :	Coefficient de pondération.
ε :	Erreur maximale sur le placement des pôles et des zéros.
l_n :	Taille du n ème sous-domaine fréquentiel en échelle logarithmique.

1 Introduction

A l'heure actuelle, les industriels cherchent systématiquement à modéliser leurs systèmes mécaniques par la méthode des éléments finis. Grâce aux analyses aux valeurs propres complexes, ils peuvent par exemple détecter les modes de vibrations instables des systèmes frottant. Ces modes instables sont les candidats les plus recevables pour expliquer la naissance d'instabilités tels que celle du crissement de frein. Industriellement, ce genre d'instabilité est souvent évité en ajoutant des matériaux viscoélastiques destinées à amortir les vibrations, citons par exemple les shims qui sont des matériaux multicouches, acier, colle, caoutchouc, collés au dos des plaquettes de frein.

Malheureusement, dans les analyse par éléments finis, les comportements des ces matériaux sont rarement pris en compte. Lorsque ces comportements sont modélisés, ils ne le sont souvent que partiellement et leur raideur est considérée constante en fonction de la fréquence. L'amortissement modal, qui considère un amortissement différent pour chaque fréquence modale, mais qui considère une raideur constante, améliore malgré tout la modélisation. Grâce à l'amortissement modal, Fritz (cf. [9]) a montré l'impact non négligeable de la viscoélasticité sur une analyse de stabilité d'un système de freinage.

De longue date, les tests expérimentaux ont montré que le module d'Young des élastomères dépend de la fréquence (cf. [1–6]). Il existe déjà des modèles qui permettent la prise en compte de la dépendance fréquentielle du module et de la phase (cf. [8]), tel que le modèle ADF, ou les dérivées fractionnaires qui ont d'ailleurs été mise en œuvre au sein des éléments finis par Sorrentino et Fasana (cf. [12]). Les travaux de Chevallier (cf. [10, 11])

prouvent qu'il est également possible d'utiliser le modèle de Maxwell généralisé au sein de modèles EF.

Afin d'utiliser ce genre de modèle, il est nécessaire de pouvoir identifier les paramètres adéquats à partir de courbes d'essais. La plupart des méthodes d'identification peuvent être classées en trois catégories. La première catégorie de méthode se base sur le recalage du comportement modal d'une structure donnée, comme la poutre d'Oberst ainsi que toutes les méthodes analogues (cf. [7, 13–15]). Cette catégorie de méthode est très documentée et utilisée. Les deux autres catégories, moins utilisée, se basent pour l'une sur le recalage des courbes de relaxation et de fluage, grâce aux séries de Prony, comme dans le rapport de Chen (cf. [16]) et pour l'autre sur le recalage des courbes du diagramme de Bode : le module et la phase de la fonction de transfert entre la force et le déplacement. Sur les courbes de Bode, il est possible d'identifier les paramètres de modèles d'ordre élevé, tel que le modèle de Maxwell généralisé ou des dérivées fractionnaires. Des méthodes graphiques d'identification utilisant les diagrammes de Bode ont été proposées de longue date, citons pour l'exemple Vinh ou Oustaloup (cf. [1–5, 17]). La méthode présentée ici s'inscrit dans cette démarche, en reprenant l'idée principale d'une méthode graphique décrite par Oustaloup, afin d'optimiser efficacement le calcul des paramètres.

2 État de l'art de la viscoélasticité

2.1 Quelques modèles viscoélastiques

Les tests de cisaillement (cf. schéma de principe, Fig. 1) réalisés sur des shims, des matériaux multicouches viscoélastiques utilisés dans les systèmes de freinage,

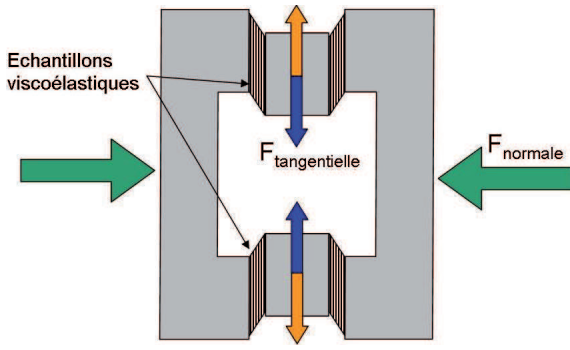


Fig. 1. Principe d'essais de cisaillement sur des couches contraintes de matériaux viscoélastiques.

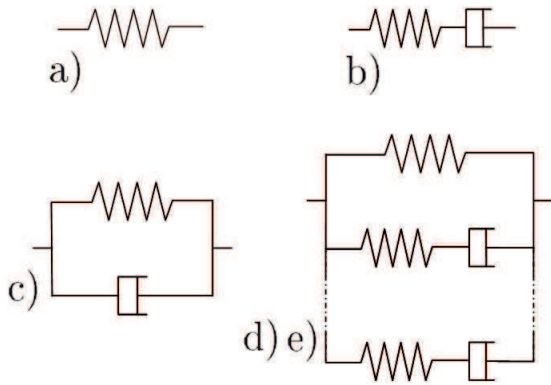


Fig. 2. Quelques modèles rhéologiques viscoélastiques.

mettent en évidence le caractère fortement visqueux de tels matériaux. Le comportement fréquentiel des shims, en phase et en module, est non monotone. De plus, lors des essais, un déphasage va toujours de paire avec une rigidification. Nous souhaitons modéliser ce comportement par une rhéologie viscoélastique linéaire. La viscoélasticité linéaire (cf. [8]) suppose l'existence d'une relation entre la contrainte subie par un matériau et l'histoire de ses déformations : $\sigma(t) = \int_{-\infty}^0 \varepsilon(t - \tau) h(\tau) d\tau$. Ce qui impose, après transformation de Fourier, un module complexe Λ dépendant de la fréquence : $\sigma(\omega) = \Lambda(\omega)\varepsilon(\omega)$.

Nous allons comparer les modèles rhéologiques de viscoélasticité existants (cf. Fig. 2), afin de mettre en évidence le plus pertinent. $Z(\omega) = F(\omega)/X(\omega)$ est l'impédance du modèle. Les modèles habituels sont les suivants (cf. [8]) :

- a) Module complexe : $Z(\omega) = K(1 + j\eta)$.
- b) Le modèle de Maxwell : $Z(\omega) = j\omega KC/(K + j\omega C)$.
- c) Le modèle de Kelvin-Voigt : $Z(\omega) = K + j\omega C$.
- d) Les dérivées fractionnaires : $Z(\omega) = K_0 \prod_{i=1}^N (1 + (j\omega/\omega_{Zi})^\alpha)/(1 + (j\omega/\omega_{Pi})^\alpha)$.
- e) Le modèle de Maxwell généralisé : $Z(\omega) = K_0 + \sum_{i=1}^N j\omega K_i C_i / (K_i + j\omega C_i)$.

La pertinence d'un modèle pour la prise en compte des comportements viscoélastiques observés expérimentalement repose sur son domaine fréquentiel

utile et sa facilité d'utilisation dans les modèles élément finis (analyse modale et réponse forcée).

La figure 3 montre le module et la phase générée par chacun de ces modèles. Un module complexe fournit une phase et un module constants indépendants de la fréquence, contrairement aux essais expérimentaux. Il n'est pas pertinent.

Le modèle de Maxwell et celui de Kelvin-Voigt décrivent un déphasage, ainsi qu'une rigidification à, respectivement, basse et haute fréquence. Ces modèles peuvent convenir pour de petites bandes fréquentielles. Or, bien souvent l'étude des vibrations instable d'un système dynamique est menée sur plusieurs décades, de quelques hertz jusqu'à environ 10 KHz pour un système de freinage, soit sur 4 décades. De plus, ces 2 modèles ne permettent pas de décrire une phase constante intermédiaire entre 0° et 90° . C'est pourquoi ces modèles ne sont pas très pertinents.

Le modèle aux dérivées fractionnaires utilise des ordres de dérivation non entiers correspondant à des fractions rationnelles. Ces ordres de dérivation sont toujours égaux à des fractions de nombre entiers pour des raisons pratique de mise en œuvre. Le modèle aux dérivées fractionnaires permet la modélisation d'une impédance avec une phase arbitraire correspondant à un module de pente arbitraire (cf. [1, 4, 5]). Ce modèle est compatible avec une modélisation par éléments finis comme S. Sorrentino le montre dans l'article (cf. [12]). Il est également possible d'utiliser un modèle comprenant N dérivées fractionnaires. La figure 3 représente un modèle d'ordre $N = 2$, avec des ordres de dérivation, $\alpha_1 = 1/5$ et $\alpha_2 = 2/3$.

À l'instar du modèle aux dérivées fractionnaires, le modèle de Maxwell généralisé (d'ordre $N = 3$ sur Fig. 3) rend compte d'un déphasage et d'une rigidification non monotone. L'emploi d'un modèle d'ordre N élevé, permet de décrire des phases et des modules ayant une dépendance complexe en fréquence. Ce modèle est lui aussi compatible avec une modélisation par éléments finis comme montré dans les actes de colloques (cf. [10, 11]).

La figure 3 prouve que les dérivées fractionnaires et Maxwell généralisé sont des modèles équivalents pour la description des dépendances en fréquence non triviales des modules et des phases expérimentales. Néanmoins, pour être mis sous la forme d'une équation d'état, le modèle aux dérivées fractionnaires nécessite de prendre un ordre de dérivation α_i qui soit une fraction de nombre entier. La taille du modèle dépend donc du plus petit multiplicateur commun des dénominateurs des α_i . Ainsi le modèle d'état de la courbe des dérivées fractionnaires présentées sur la figure 3 vaut $3 \times 5 = 15$. Quant à la taille du modèle d'état de Maxwell généralisé, elle est égale au nombre de couples pôle-zéro, c'est-à-dire 3 dans l'exemple de la figure 3. Au final, même si les dérivées fractionnaires offrent normalement un faible nombre de paramètres, elles conduisent, sous forme d'état à des tailles de modèle rapidement plus élevées que celle de Maxwell généralisé. Compte tenu de leurs performances quasi identiques, le modèle viscoélastique que nous retiendrons est celui de Maxwell généralisé.

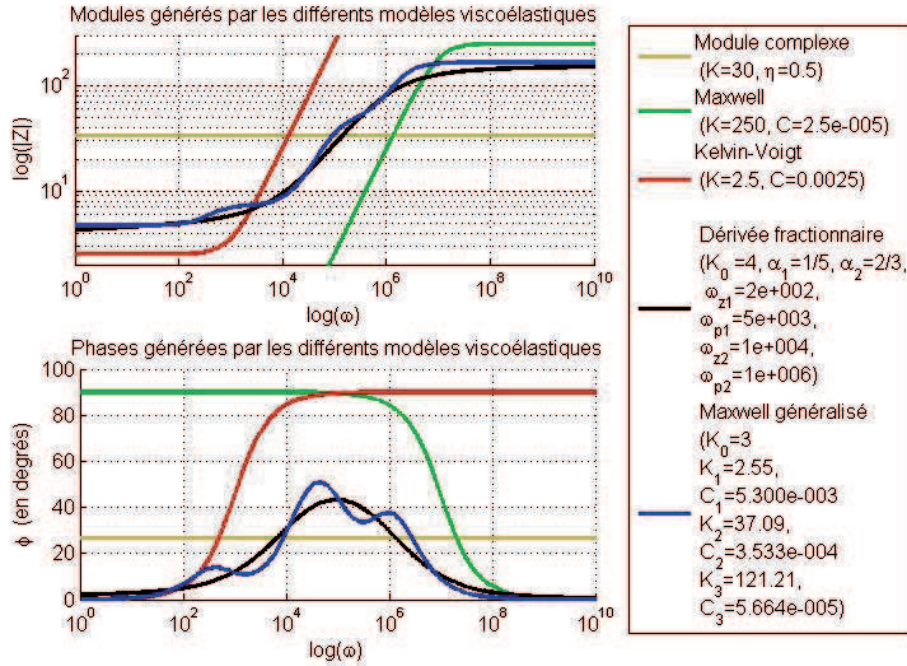


Fig. 3. Quelques modèles viscoélastiques : module et phase.

2.2 Le modèle de Maxwell généralisé

$$Z(\omega) = K_0 + \sum_{i=1}^N \frac{j\omega K_i C_i}{K_i + j\omega C_i} \quad (1)$$

Sous la forme habituelle (cf. Éq. (1)), les paramètres du modèle de Maxwell sont difficilement identifiables. Heureusement, la formulation de l'équation (1) est aisément transformable en une formulation équivalente (cf. [2]), composée de produit de termes (cf. Éq. (2)) :

$$Z(\omega) = K_0 \prod_{i=1}^N \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_{Zi}}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_{Pi}}} \quad (2)$$

Cette nouvelle forme est beaucoup plus propice à l'identification des nouveaux paramètres ω_{Zi} et ω_{Pi} . Pour retrouver les paramètres K_i et C_i correspondants, il suffit ensuite d'utiliser les formules de passages (3) proposées par Dion (cf. [2]) :

$$\begin{cases} K_k = K_0 \prod_{i=1}^N \left(\frac{\omega_{Pi}}{\omega_{Zi}} \right) \left(\frac{\omega_{Pk} - \omega_{Zi}}{\omega_{Pk} + \omega_{Pi}(\delta_{ik} - 1)} \right) \\ C_k = \frac{K_0}{\omega_{Pk}} \prod_{i=1}^N \left(\frac{\omega_{Pi}}{\omega_{Zi}} \right) \left(\frac{\omega_{Pk} - \omega_{Zi}}{\omega_{Pk} + \omega_{Pi}(\delta_{ik} - 1)} \right) \end{cases} \quad (3)$$

Le module et la phase de la relation (2), $Z(\omega) = |Z(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$, sont donnés par les relations (4).

$$\begin{cases} |Z(\omega)| = K_0 \prod_{i=1}^N \frac{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_{Zi}^2}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_{Pi}^2}}} \\ \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^N \left(\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_{Zi}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_{Pi}} \right) \right) \end{cases} \quad (4)$$

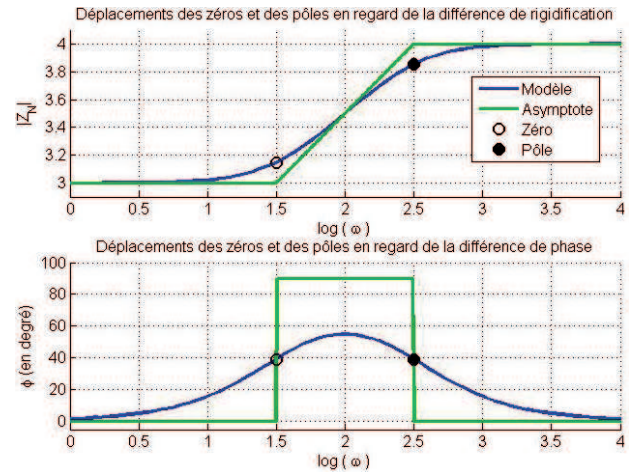


Fig. 4. Cellule élémentaire de Maxwell.

2.3 Les asymptotes du modèle

Les diverses méthodes d'identification présentées ici reposent sur la comparaison des courbes expérimentales avec les asymptotes du modèle (cf. Fig. 4). Voici le cas d'une unique cellule de Maxwell qui constitue la « brique » élémentaire du modèle.

À fréquence nulle, les relations (4) donnent : $\varphi_0 = 0$ et $\log(|Z(\omega)|_0) = \log(K_0)$, en dynamique, l'apport d'une cellule élémentaire de Maxwell en phase et en module (cf. Fig. 1) vaut :

$$\begin{cases} \log(|Z(\omega)|_i) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_{Zi}^2} \right) - \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_{Pi}^2} \right) \\ \varphi_i(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_{Zi}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_{Pi}} \right) \end{cases} \quad (5)$$

La figure 4 montre la non-linéarité du comportement d'une cellule de Maxwell. Il est notable que plus la pente du module semble être proportionnelle à la phase. Il est toutefois difficile d'utiliser les relations (4) ou (5) pour l'identification et l'on préférera, à l'instar d'Oustaloup (cf. [17]), manipuler les asymptotes des celles-ci. Ces asymptotes s'expriment :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega < \omega_{Zi} < \omega_{Pi} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\omega}{\omega_{Zi}} \ll 1 \\ \frac{\omega}{\omega_{Pi}} \ll 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_i(\omega) \rightarrow 0 \\ \log(|Z(\omega)|_i) \rightarrow 0 \end{cases} \\ \omega_{Zi} < \omega < \omega_{Pi} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\omega}{\omega_{Zi}} \gg 1 \\ \frac{\omega}{\omega_{Pi}} \ll 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_i(\omega) \rightarrow \pi/2 \\ \log(|Z(\omega)|_i) \rightarrow \log\left(\frac{\omega}{\omega_{Pi}}\right) \end{cases} \\ \omega_{Zi} < \omega_{Pi} < \omega \Rightarrow \begin{cases} \frac{\omega}{\omega_{Zi}} \gg 1 \\ \frac{\omega}{\omega_{Pi}} \gg 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_i(\omega) \rightarrow 0 \\ \log(|Z(\omega)|_i) \rightarrow \log\left(\frac{\omega_{Pi}}{\omega_{Zi}}\right) \end{cases} \end{array} \right. \quad (6)$$

En échelle logarithmique, le modèle présente une symétrie autour de $\omega_i = \sqrt{\omega_{Zi}\omega_{Pi}}$. Le module asymptotique passe d'un palier à un autre grâce à une fonction affine entre le zéro et le pôle qui le fait rigidifier d'une valeur de $\log(\omega_{Pi}/\omega_{Zi})$. La phase asymptotique est une fonction créneau égale à $\pi/2$ entre ω_{Zi} et ω_{Pi} . Ces asymptotes sont représentatives des effets d'une cellule de Maxwell tout en étant plus faciles à manier, c'est pourquoi elles seront utilisées en substitut des vraies fonctions.

Remarquons la forte analogie entre l'aire sous-tendue par l'asymptote de la courbe de phase et la rigidification de l'asymptote du module qui valent respectivement $A_i = \pi/2 \log(\omega_{Pi}/\omega_{Zi})$ et $R_i = \log(\omega_{Pi}/\omega_{Zi})$. Ainsi ne sera présentée que la méthode concernant la phase, l'identification en module est identique et n'apporte d'informations supplémentaires que le module statique qui est aisément identifiable. Néanmoins, puisque les courbes expérimentales de phase et de module contiennent quasiment les mêmes informations, il est nécessaire, lors d'une identification simultanée, de définir un paramètre, $r \in [0, 1]$, pondérant l'importance accordée à chacune d'elles.

3 Identification des paramètres par les méthodes graphiques

3.1 Le taux d'écart

L'ordre du modèle est soigneusement choisi, en fonction de la taille du domaine fréquentiel des données expérimentales. Il apparaît que 2 cellules par décade est une valeur appropriée. Les méthodes graphiques, présentées ci-dessous, reposent sur le même principe que la méthode, qui consiste à encadrer le module par un contour approché (cf. [1, 17]). Afin d'évaluer la qualité d'une méthode d'identification, nous avons besoin d'un indicateur fiable qui soit représentatif de l'écart entre les courbes expérimentales, ψ et celles du modèle, φ . Pour

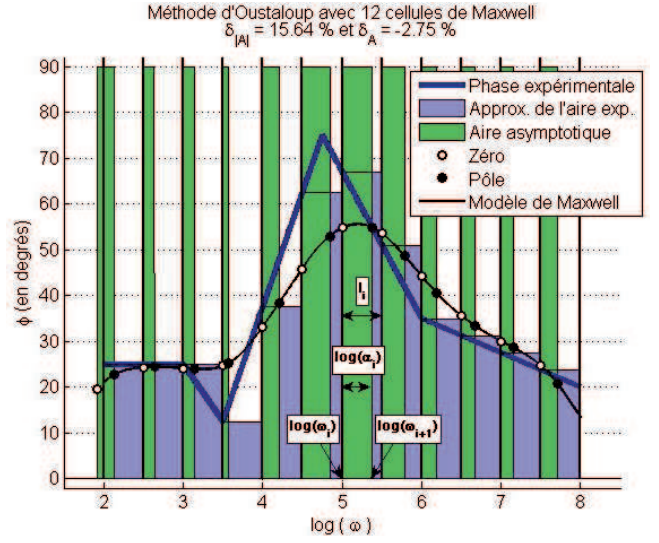


Fig. 5. La méthode graphique d'Oustaloup.

cela, dans le cas de la phase nous utiliserons les deux indicateurs, $\delta_{|A|}$ et δ_A , définis ci-dessous :

$$\delta_{|A|} = \frac{1}{\omega_{\max} - \omega_{\min}} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \left| \frac{\varphi(\omega) - \psi(\omega)}{\psi(\omega)} \right| d \log(\omega) \quad (7)$$

$$\delta_A = \frac{\int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} (\varphi(\omega) - \psi(\omega)) d \log(\omega)}{\int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \psi(\omega) d \log(\omega)} \quad (8)$$

$\delta_{|A|}$ (cf. (7)) est la moyenne des écarts absolus entre les courbes de phase du modèle et celle expérimentale. $\delta_{|A|}$ indique si le modèle est représentatif, c'est-à-dire s'il ne s'écarte pas de la courbe expérimentale. δ_A est l'écart absolu entre les aires de la phase expérimentale et celle du modèle. δ_A indique si au global l'aire totale fournie par le modèle est la même que l'aire de la phase expérimentale. Notons que, par analogie, il existe des indicateurs pour le module en fonction des rigidifications, c'est-à-dire de la dérivée du module en échelle logarithmique, qui fournissent exactement les mêmes valeurs. Ces indicateurs nous permettront de comparer les méthodes.

3.2 Méthode graphique approchée

Cette méthode consiste à égaliser l'aire sous-tendue par la courbe de phase expérimentale, $\psi(\omega)$, et celle sous-tendue par la courbe du modèle, $\varphi(\omega)$. Le domaine fréquentiel est divisé en sous-domaines, séparés par des traits noirs sur la figure 5. L'aire sous-tendue par la courbe de phase expérimentale est considérée constante dans chaque sous-domaine et l'aire de la courbe du modèle est approchée par ses aires asymptotiques. Ces 2 quantités doivent être égales dans chaque sous-domaine.

Les zéros sont placés arbitrairement de manière périodique tous les $l_i = l$ sur l'échelle logarithmique,

c'est-à-dire au début de chaque sous-domaine, ainsi, $\log(\omega_{Z_{i+1}}) = l_i + \log(\omega_{Z_i})$ et $\omega_{P_i} = \alpha_i \omega_{Z_i}$. Notons que la méthode peut être appliquée de façon analogue en plaçant les pôles à droite des sous-domaines. Dès lors, l'égalité des aires en échelle logarithmique permet de déterminer les α_i , via la relation (9), à partir de la connaissance de la phase réelle ψ_i , à la pulsation du ième zéro, ω_{Z_i} :

$$\log(\alpha_i) = \frac{2}{\pi} \psi_i l_i \quad (9)$$

Pratiquement, l sera choisi environ égal à 0,5, afin de couvrir une décade avec 2 cellules de Maxwell. Cette méthode engendre des effets de bords qui se caractérisent par une diminution de la phase du modèle aux bords du domaine fréquentiel. Afin de limiter ces effets, le premier zéro devient $\omega_{Z0}/1,2$ et le dernier pôle devient $\omega_{P_{fin}}/1,2$, ce qui augmente la phase générée par la première et la dernière cellule de Maxwell. La figure 5 montre que cette méthode n'est pas « centrée », ainsi le pic de phase du modèle se situe à droite du pic de phase expérimental. Ceci explique que le taux d'écart soit élevé $\delta_{|A|} = 15,64 \%$, notons également que le modèle a une aire de phase globale inférieure à celle expérimentale : $\delta_A = -2,75 \%$.

3.3 La méthode des asymptotes

L'intérêt de cette méthode par rapport à la précédente est que les couples de pôles-zéros sont placés en fonction des besoins. Le découpage fréquentiel est fait de telle sorte que chaque sous-domaine comporte la même aire de phase expérimentale, interpolée et calculée par la méthode des trapèzes. Il est ainsi assuré que plus, localement en fréquence, l'aire de la phase expérimentale est grande et plus les cellules se rapprochent de cette fréquence. Donc, le rapport $\alpha_i = \omega_{P_i}/\omega_{Z_i}$ qui représente l'aire de la phase dans un sous-domaine, est identique pour tous les sous-domaines. Ensuite, dans chaque sous-domaine, la moyenne fréquentielle des couples, $\omega_i = \sqrt{\omega_{Z_i}\omega_{P_i}}$, est placée à la valeur de pulsation qui réalise l'égalité de l'apport du sous-domaine en aire à sa gauche et à sa droite, ainsi :

$$\begin{cases} \omega_{Z_i} = \sqrt{\frac{\omega_i \omega_{i+1}}{\alpha_i}} \\ \omega_{P_i} = \sqrt{\alpha_i \omega_i \omega_{i+1}} \end{cases} \quad (10)$$

Le rapport $\alpha_i = \omega_{P_i}/\omega_{Z_i}$ étant identique pour chaque sous-domaine, il est nécessaire de le pondérer par un coefficient ν_i qui corrigera la position des couples pôle-zéro. Un sous-domaine étendu signifie que la phase y est faible, donc un petit ν_i sera choisi. À l'inverse plus le sous-domaine est court et plus la phase y est grande, un grand ν_i est donc nécessaire. ν_i représente ainsi la longueur du sous-domaine fréquentiel :

$$\begin{cases} \nu_i = \left(\frac{l_{\text{total}} - l_i}{l_{\text{total}}} \right) \left(\frac{N}{N-1} \right) \\ \log(\alpha_i) = \nu_i \frac{2}{\pi} \int_{\log(\omega_i)}^{\log(\omega_{i+1})} \psi(\omega) d \log(\omega) \end{cases} \quad (11)$$

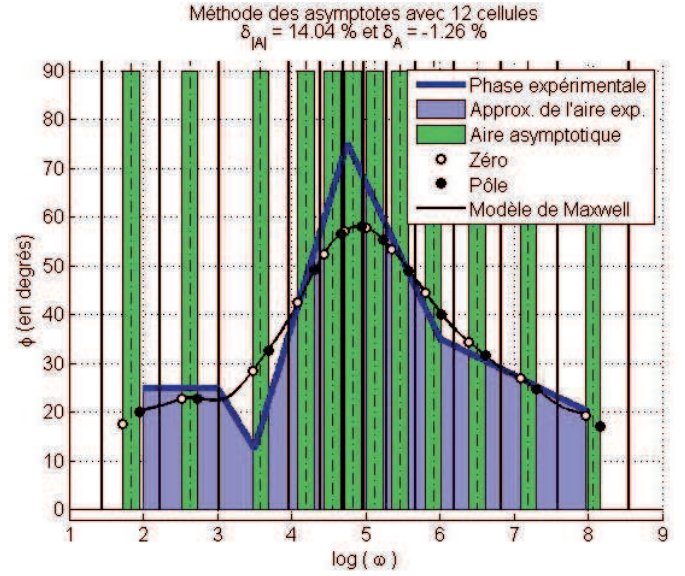


Fig. 6. La méthode des asymptotes.

Les coefficients ν_i (cf. (11)) sont tels que $\sum_{i=1}^N \nu_i = N$. Ceci assure que lorsque tous les l_i sont identiques, la pondération ne change rien car on a alors pour tout i , $\nu_i = 1$.

La figure 6 montre que cette nouvelle méthode permet de mieux centrer le pic de phase. De plus, elle permet, comme escompté, de grouper les couples pôle-zéro là où la phase est plus importante. Grâce à ses meilleurs résultats, cette méthode a des indicateurs un peu plus bas que la précédente : $\delta_{|A|} = 14,04 \%$ et $\delta_A = -1,26 \%$.

Les résultats que fournit cette méthode sont bons relativement à la première méthode proposée par Oustaloup, mais restent perfectibles. Cette méthode fournit le premier jeu de paramètres qui rentrera dans les boucles d'optimisation présentées dans la partie 3.

4 Optimisation de l'identification

Nous cherchons ici à combiner la méthode des asymptotes à une méthode d'optimisation qui permettra d'affiner le placement des zéros et des pôles. Pour cela, plusieurs méthodes ont été testées, dont la méthode de Newton-Raphson qui n'est pas présentée ici à cause de ses mauvais résultats. En effet, elle trouve généralement des minimums locaux. Les autres méthodes sont :

- Une fonction Matlab® : `fminsearch` qui est un algorithme de recherche de minimum sur des fonctions non linéaires. Appliquée aux carrés des écarts à la moyenne, W , elle fournit de bons résultats, mais ne permet pas d'imposer la contrainte $\omega_{Z_i} < \omega_{P_i}$, qui assure que chaque cellule est causale dans le sens où elles apportent une phase positive.
- La méthode des variations asymptotiques. C'est un algorithme itératif qui calcule les variations pour chaque couple pôle-zéro en fonction de leur asymptote.

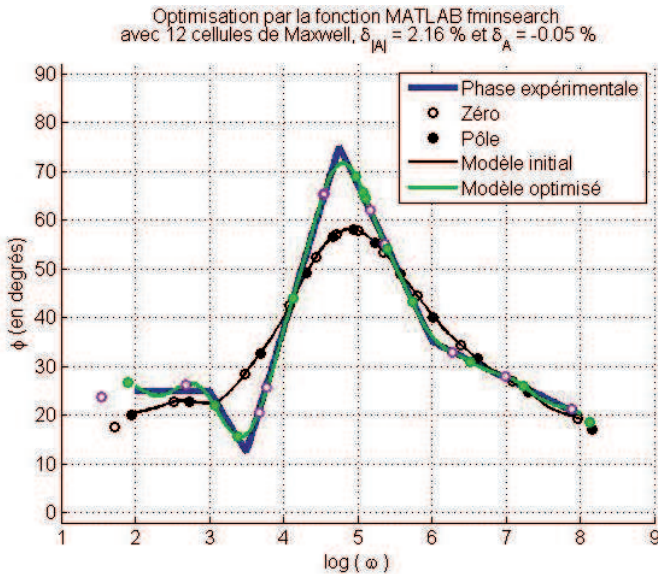


Fig. 7. Optimisation par la fonction fminsearch.

4.1 La fonction Matlab® « fminsearch »

La fonction Matlab® fminsearch permet de trouver, par itération, les paramètres qui minimisent une fonction non-linéaire. En appliquant cette fonction aux moindres carrés, W , on peut ainsi obtenir les paramètres du modèle de Maxwell qui minimisent W et donc qui permettent l'identification la plus juste des paramètres. Le gros inconvénient de cette fonction pour l'utilisateur, est de n'avoir aucun moyen de maîtriser les paramètres finaux. Comme le montre la figure 7, il est impossible d'imposer à fminsearch d'avoir $\omega_{Zi} < \omega_{Pi}$ par soucis de causalité, en effet l'inverse engendrerait une cellule de Maxwell à phase négative. Malgré ses très bons résultats $\delta_{|A|} = 2,1 \%$ et $\delta_A = -0,05 \%$, cette méthode reste trop lente et acausale.

4.2 Optimisation par les variations asymptotiques

Tout d'abord, le domaine fréquentiel est découpé très finement, environ 100 sous-domaines par décade et les valeurs de phase et de module sont interpolées de manière logarithmique, c'est-à-dire par des droites sur une échelle comme celles de la figure 3. Chaque sous-domaine présente une aire de phase qui est la somme des aires de phase apportée par chaque couple pôle-zéro (cf. (4)).

L'idée est la suivante : dans un sous-domaine particulier, il y a un certain écart entre la courbe expérimentale et celle du modèle. Tous les paramètres du modèle influent sur cet écart, mais ils influent de manière différente. Pour réduire cet écart, il faut modifier les paramètres de chaque couple pôle-zéro proportionnellement à leur influence sur cet écart.

Parmi tous les couples pôle-zéro d'un modèle de Maxwell généralisé, intéressons-nous à un couple particulier, le i ème, ayant ω_{Zi} et ω_{Pi} comme paramètres. Pour un sous-domaine donné, le pourcentage d'aire du modèle apportée par ce couple pôle-zéro est égal à l'intégrale de

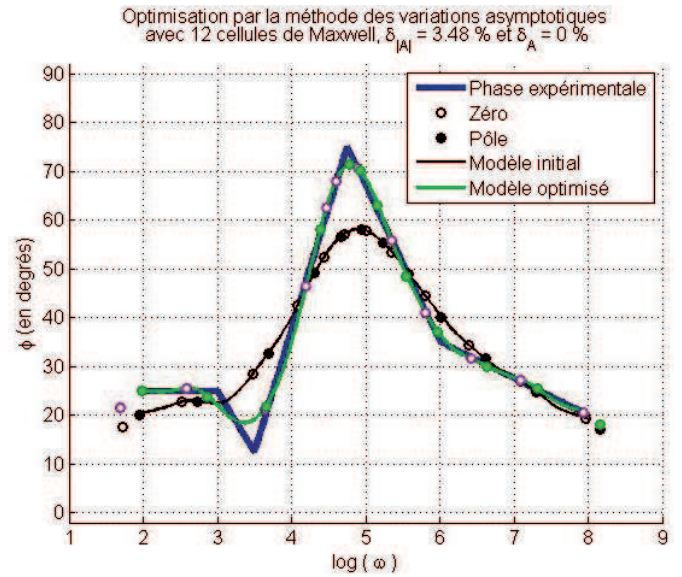


Fig. 8. Optimisation par la méthode des variations asymptotiques.

la phase de ce couple divisée par l'intégrale de la phase du modèle. Ce pourcentage est représentatif de l'influence d'un couple pôle-zéro dans un sous-domaine.

Pour le j ème sous-domaine, on calcule A_j , l'écart entre l'aire de la phase du modèle et l'aire de la phase expérimentale. A_j est la variation de l'aire de phase que l'on doit induire au modèle. Ensuite on calcule A_{ij} qui est la variation A_j pondérée par le pourcentage d'influence de la i ème cellule dans le j ème sous-domaine.

Par la suite, les A_{ij} sont calculés pour tous les sous-domaines, et on calcule leur somme sur j . La somme des A_{ij} est la variation globale d'aire de phase que l'on induira à la i ème cellule. Si cette somme est positive cela indique que la i ème cellule de Maxwell n'apporte globalement pas assez d'aire de phase et donc que ω_{Zi} et ω_{Pi} sont trop proches l'un de l'autre. A l'inverse, si cette somme est négative alors la cellule génère globalement trop de phase donc ω_{Zi} et ω_{Pi} devront être rapprochés. Il reste à définir comment cette somme affectera ω_{Zi} et ω_{Pi} .

Les asymptotes d'une cellule de Maxwell généralisé sont définies en (12). Elles permettent, à partir d'une aire de phase, d'en déduire l'écart entre un zéro et un pôle pour une cellule. Ainsi, les équations (13) permettent, à partir de la variation globale d'aire de phase de la i ème cellule de Maxwell, comment son pôle et son zéro vont être déplacés.

Chaque zéro est déplacé vers la gauche proportionnellement à la somme des A_{ij} qui se trouvent à gauche du centre de la cellule et chaque pôle est déplacé vers la droite proportionnellement à la somme des A_{ij} qui se trouvent à droite du centre de la cellule. De cette manière, on optimise le placement du centre des couples zéros-pôles ainsi que leur position relative. Cette nouvelle configuration de paramètres permet de recalculer la courbe du modèle et donc de passer à l'itération suivante du calcul des écarts

entre modèle et expérience. Le processus itératif s'arrête quand les pôles et les zéros ne sont presque plus modifiés.

Remarquons que des effets non désirables peuvent survenir si une cellule de Maxwell est amenée par itération à se rapprocher des bords du domaine fréquentiel expérimental. Pour éviter ces effets de bord, les courbes expérimentales sont extrapolées hors du domaine d'intérêt. Ceci a pour effet de déplacer les effets de bords hors du domaine d'étude. La longueur de l'extrapolation est laissée à l'appréciation de chacun, une valeur située entre une décade et une demi-décade offre souvent de bons résultats.

Cette méthode est appelée variation asymptotique parce qu'elle calcule les variations d'aire de phase qui affecte chaque cellule et les retranscrit en variation de paramètres par l'utilisation des asymptotes d'une cellule de Maxwell généralisé. Cette méthode d'optimisation s'applique de façon analogue au module. Elle donne de très bons résultats $\delta_{|A|} = 3,48 \%$ et $\delta_A = 0 \%$ comparables à la méthode précédente avec l'avantage de rester totalement maîtrisable quant à la causalité de chaque cellule.

5 Contrainte supplémentaire d'intégration dans les analyses de stabilité

Chevallier (cf. [11]) a expliqué comment mettre en œuvre la viscoélasticité modélisée par Maxwell généralisé au sein de codes de calcul EF pour la résolution de problèmes de grande taille. Cette méthode augmente la taille du modèle d'un ordre égal à celui du modèle de Maxwell lorsqu'un seul matériau viscoélastique est pris en compte. Pour plusieurs matériaux viscoélastiques, cette taille de modèle serait encore multipliée par le nombre de matériaux viscoélastiques si l'on ne prenait pas des pôles communs à tous les matériaux viscoélastiques. Ainsi tous les matériaux viscoélastiques sont modélisés par Maxwell généralisé avec un ordre identique et la taille du modèle est égal à cet ordre plus 2. Il faut donc que l'algorithme soit capable d'identifier les paramètres du modèle de Maxwell en intégrant cette contrainte supplémentaire. Si le domaine fréquentiel de mesure est différent suivant les matériaux viscoélastiques, les phases et les modules sont extrapolés, par une constante pour la phase et par une droite affine pour la rigidification, comme pour la gestion des effets de bords.

Il faut ensuite opérer en 2 temps. Premièrement, la méthode des asymptotes permet pour chaque matériau viscoélastique, de trouver un jeu de zéros et de pôles convenables. Les zéros et les pôles sont ensuite calculés via la méthode des variations asymptotiques. Puis la moyenne des pôles sur tous les matériaux viscoélastiques devient la valeur commune des pôles de tous les matériaux.

L'optimisation précédente sert uniquement à partir sur de bonnes bases lors du calcul des pôles communs. Les zéros précédemment calculés ne sont plus adaptés aux nouveaux pôles communs et doivent être recalculés par une méthode des asymptotes modifiée. Un découpage fréquentiel est redéfini tel que la pulsation de séparation

des sous-domaines est placée à la moyenne de 2 pôles consécutifs moins la moitié de l'écart moyen zéro-pôle. Ce découpage sert de base au calcul des zéros via la méthode la méthode des asymptotes mais cette fois-ci en utilisant la pondération des aires suivant la longueur du sous-domaine fréquentiel et de l'aire de sa phase expérimentale (cf. relation (12)) :

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N \nu_n A_n = A_{\text{total}} \\ \nu_n = \left(\frac{\left(\sum_{j=1}^N \frac{l_j}{A_n} \right) - \frac{l_n}{A_n}}{\left(\sum_{j=1}^N \frac{l_j}{A_n} \right)} \right) \left(\frac{A_{\text{total}} \left(\sum_{j=1}^N \frac{l_j}{A_n} \right)}{A_{\text{total}} \left(\sum_{j=1}^N \frac{l_j}{A_n} \right) - l_{\text{total}}} \right) \end{cases} \quad (12)$$

l_n représente la longueur du sous-domaine en échelle logarithmique et l_{total} , la longueur totale du domaine. A_n désigne l'aire de la phase expérimentale du sous-domaine et A_{total} , l'aire totale du domaine. Cette pondération ν_n est modifiée par rapport à la première version car le redécoupage fréquentiel n'assure plus que chaque sous-domaine ait exactement la même aire de phase. La pondération doit donc dépendre de la longueur du sous-domaine mais aussi de l'aire de phase du sous-domaine. Ainsi plus l_n est grand et plus le coefficient ν_n sera faible, plus A_n est petit et plus le coefficient ν_n sera faible.

Dans un deuxième temps, la bande fréquentielle étendue est redécoupée de manière à pouvoir appliquer une itération de la méthode d'optimisation par les variations asymptotiques. Ainsi, les écarts qu'il faut habituellement attribuer aux pôles et aux zéros servent d'abord à recalculer les zéros de chaque matériau viscoélastique. Puis, un calcul d'écarts est relancé pour réajuster les pôles de chaque matériau viscoélastique. Ces nouveaux jeux de pôles sont à leur tour moyennés car ils doivent rester identiques pour tous les matériaux. Ensuite débute une nouvelle itération des zéros et on recommence ainsi jusqu'à ce que les pôles et les zéros ne soient presque plus modifiés.

Comme le montre la figure 9, les phases des différents matériaux influencent toutes le placement des pôles à cause de la contrainte supplémentaire de pôles communs à tous les matériaux. Ceci induit des « oscillations » de la courbe du modèle autour de la courbe expérimentale du matériau qui ne seraient pas présentes lors de l'identification des paramètres de ce matériau seul. Pour autant, la courbe expérimentale reste bien modélisée et les indicateurs des trois courbes le révèlent :

$\delta_{|A|1} = 4,35 \%$, $\delta_{|A|2} = 1,18 \%$, $\delta_{|A|3} = 0,95 \%$ montrent que le modèle est représentatif des courbes expérimentales et $\delta_{A1} = -1,19 \%$, $\delta_{A2} = -0,22 \%$ et $\delta_{A3} = -0,46 \%$ montrent que le modèle apporte globalement la même aire de phase que les courbes expérimentales.

6 Conclusion et perspectives

Nous disposons maintenant d'un algorithme robuste permettant d'identifier les paramètres du modèle de

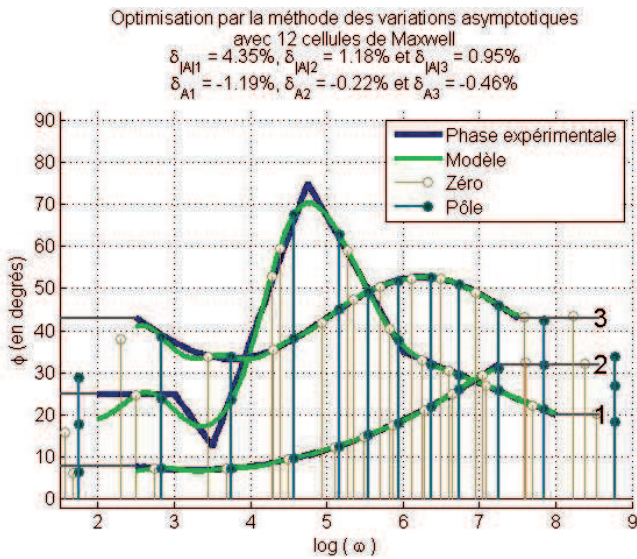


Fig. 9. Exemple d'optimisation sous contrainte sur 3 courbes expérimentales.

Maxwell généralisé des matériaux viscoélastiques d'un système mécanique entier. Il permettra d'alimenter les modèles EF. Afin d'étudier le comportement des shims en situation proche de la réalité d'un frein à disque, ils seront testés en cisaillement avec amplitude suffisante pour observer la combinaison de leur comportement viscoélastique et de leur comportement tribologique de frottement. C'est pourquoi nous chercherons à combiner le modèle de Maxwell généralisé au frottement de Coulomb ou de Dahl.

Remerciements. Les auteurs tiennent à remercier Thierry Pasquet et Rémi Lemaire de l'entreprise Bosch pour leur soutien technique et financier.

Références

- [1] N.P. Vinh Tuong, Sur le passage du régime harmonique au régime transitoire viscoélastique, Mémorial de l'artillerie française, 3ème fascicule, 1967
- [2] J.-L. Dion, S. Vialard, Identification de liaisons antivibratoires en élastomères, Mécanique industrielle et matériaux 50 (1997) 232–237
- [3] M. Soula, T. Vinh, Y. Chevalier, T. Beda, C. Esteoule, Measurements of isothermal complex moduli of viscoelastic materials over a large range of frequencies, J. Sound Vib. 205 (1997) 167–184
- [4] M. Soula, T. Vinh, Y. Chevalier, Transient responses of polymers and elastomers deduced from harmonic responses, J. Sound Vib. 205 (1997) 185–203
- [5] T. Beda, Y. Chevalier, New methods for identifying rheological parameter for fractional derivative modeling of viscoelastic behaviour, Mechanics of time-dependent materials 8 (2004) 105–118
- [6] F.S. Barbosa, M.C.R. Farage, A finite element model for sandwich viscoelastic beams : Experimental and numerical assessment, J. Sound Vib. 317 (2008) 91–111
- [7] H. Oberst, K. Frankenfeld, Damping of the bending vibrations of thin laminated metal beams connected through adherent layer, Acustica 2 (1952) 181–194 (in German)
- [8] E. Balmès, J.-M. Leclère, Viscoelastic Vibration Toolbox User's Guide Version 1.0. SDTools, 2007
- [9] G. Fritz, J.-J. Sinou, J.-M. Duffal, L. Jézéquel, Investigation of the relationship between damping and mode-coupling patterns in case of brake squeal, J. Sound Vib. 307 (2007) 591–609
- [10] G. Chevallier, L. Levy, J.-L. Dion, Étude des dispositifs de contrôle passif du crissement de frein. In Proceedings Vibrations, Chocs et bruits, Lyon, 2006
- [11] G. Chevallier, J.-L. Dion, S. Thouviot, R. Lemaire, Prise en compte des comportements viscoélastiques dans la simulation dynamique des systèmes de freinage. In Proceedings CPI, Rabat, Maroc, 2007
- [12] S. Sorrentino, A. Fasana, Finite element analysis of vibrating linear systems with fractional derivative viscoelastic models, J. Sound Vib. 299 (2007) 839–853
- [13] J. Zhang, C. Richards, Parameter identification of analytical and experimental rubber isolators represented by maxwell models, Mechanical Systems and Signal Processing 21 (2007) 2814–2832
- [14] Castello, Rochinha, Roitman, Magluta, Constitutive parameter estimation of a viscoelastic model with internal variables, Mechanical Systems and Signal Processing, in Press, 2008
- [15] A.M.G. de Lima, D.A. Rade, F.R. Lépre Neto, An efficient modeling methodology of structural systems containing viscoelastic dampers based on frequency response function substructuring, Mechanical Systems and Signal Processing 23 (2009) 1272–1281
- [16] T. Chen, Determining a Prony series for a viscoelastic material from time varying strain data. Technical report, NASA, Langley Research Center, Hampton, Virginia, 2000
- [17] A. Oustaloup, La commande CRONE: commande robuste d'ordre non entier, Hermès, 1991