Marc Lassonde

Réduction du cas multivoque au cas univoque dans les problèmes de coïncidence

Abstract. We prove a result of the following type: If all the continuous maps which satisfy a certain boundary condition have the fixed point property, then so do the Kakutani multifunctions which satisfy a boundary condition of the same type. This work continues and refines the ideas contained in a recent paper by the author [12].

Résumé. Nous démontrons un résultat du type suivant : si toutes les applications continues qui satisfont une certaine condition au bord ont la propriété du point fixe, alors il en va de même des multi-applications de Kakutani qui satisfont une condition au bord du même type. Ce travail reprend et affine les idées contenues dans un article récent de l'auteur [12].

1. INTRODUCTION

Les applications univoques sont notées par des lettres minuscules, les applications multivoques (*multi-applications*) par des lettres majuscules. Applications et multi-applications sont identifiées à leurs graphes.

Soient X et Y deux ensembles et $\Delta : X \to Y$ une multi-application. Soit $\gamma : X \to Y$ une application univoque. On dit que γ et Δ ont une *coïncidence* s'il existe $x \in X$ tel que $\gamma(x) \in \Delta x$, c'est-à-dire :

$$\gamma \cap \Delta \neq \emptyset. \tag{1}$$

Exemples :

(a) Soit $\Delta = X \times \{y\}$ où y est un point quelconque de Y. Alors (1) signifie qu'il existe $x \in X$ tel que $\gamma(x) = y$. Autrement dit, (1) est un problème de *surjectivité*.

(b) Soient $X \subset Y$ et $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$. Alors (1) signifie qu'il existe $x \in X$ tel que $\gamma(x) = x$. Autrement dit, (1) est un problème de *point fixe*.

(c) Soient Y un espace de Banach, X un sous-ensemble compact de Y et $\Delta : X \to Y$ définie par

$$\Delta x = \{y \in Y : \ \| y - x \| \ \leq \ \| y - z \| \quad \forall z \in X\}$$

(Δx est l'ensemble des points de Y qui se projettent en x sur X). Alors (1) est un problème de *meilleure approximation* :

$$\exists\ x \in X \text{ tel que } \| \gamma(x) - x \| \ = \min_{z \in X} \| \gamma(x) - z \| .$$

(d) Soient X un ensemble convexe dans un espace de Banach E, $Y = E'$, le dual de E, et $\Delta : X \to Y$ définie par

$$\Delta x = \{x' \in E' : \sup_{z \in X} < x', z - x > \ \leq \ 0\}$$

(Δx est le cône normal à X en x). Alors (1) est une *inéquation variationnelle* :

$$\exists \ x \in X \text{ tel que } < \gamma(x), z - x > \ \leq \ 0 \quad \forall z \in X.$$

Plus généralement, soit $\Gamma : X \to Y$ une multi-application. On dit que Γ et Δ ont une *coïncidence* s'il existe $x \in X$ tel que $\Gamma x \cap \Delta x \neq \emptyset$, c'est-à-dire :

$$\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset. \tag{2}$$

Le problème (2) recouvre en particulier les problèmes de surjectivité, de point fixe, de meilleure approximation et d'inéquation variationnelle pour applications multivoques.

Notre principal objectif dans ce travail est de montrer que l'étude du problème (2) peut se ramener dans certains cas à l'étude du problème (1). L'énoncé précis du théorème de réduction est donné en section 2. Des applications aux problèmes de surjectivité et de point fixe sont données dans les sections suivantes.

Soient X et Y deux ensembles et $\Gamma : X \to Y$ une multi-application. On note $\Gamma^- : Y \to X$ la multi-application *inverse* de Γ définie par $\Gamma^- y = \{x \in X : y \in \Gamma x\}$. Si $A \subset X$, on note $\Gamma(A) = \bigcup_{x \in A} \Gamma x$ l'*image* de A par Γ. Si $\Delta : Y \to Z$ est une autre multi-application, la *composée* de Δ par Γ est la multi-application $\Delta\Gamma : X \to Z$ définie par $\Delta\Gamma x = \Delta(\Gamma x)$.

Lorsque X et Y sont des espaces topologiques, on dit que $\Gamma : X \to Y$ est *fermée* si Γ est un sous-ensemble fermé de $X \times Y$; *semi-continue supérieurement (s.c.s.)* si pour chaque ensemble fermé $B \subset Y$, l'image inverse $\Gamma^-(B)$ est un sous-ensemble fermé de X; *compacte* si l'image $\Gamma(X)$ de X par Γ est contenue dans un sous-ensemble compact de Y.

Lorsque X est un espace topologique et Y un ensemble convexe dans un espace vectoriel topologique (*e.v.t.*), on dit que $\Gamma : X \to Y$ est *de Kakutani* si Γ est s.c.s. à valeurs convexes compactes non vides. On note $\mathcal{K}(X, Y)$ l'ensemble des multi-applications de Kakutani de X dans Y. Le sous-ensemble de $\mathcal{K}(X, Y)$ constitué des applications univoques continues de X dans Y est noté $\mathcal{C}(X, Y)$.

Enfin, on note $\boldsymbol{\Lambda}^n$ le simplexe standard de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\boldsymbol{\Lambda}^n = \{\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \lambda_i \geq 0 \text{ pour tout } i \text{ et} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Tous les espaces topologiques considérés dans ce travail sont supposés séparés.

2. LE THÉORÈME DE RÉDUCTION

Soient X et Y deux ensembles. On dit que deux multi-applications Γ, F de X dans Y sont *liées* si $\Gamma x \cap Fx \neq \emptyset$ pour tout $x \in X$.

Soit S un simplexe. Pour $x \in S$, on note Φx la plus petite face de S qui contient x. On dit qu'une multi-application $F : S \to Y$ est Φ-*invariante* si $F(\Phi x) = Fx$ pour tout $x \in S$.

Exemples :

(a) La multi-application $F : S \to Y$ définie par $Fx = Y$ pour tout $x \in S$ est Φ-invariante. Une multi-application $\Gamma : S \to Y$ est liée à F si et seulement si elle est à valeurs non vides.

(b) La multi-application $F : S \to S$ définie par $Fx = \Phi x$ pour tout $x \in S$ est Φ-invariante. Une multi-application $\Gamma : S \to S$ est liée à F si et seulement si $\Gamma x \cap \Phi x \neq \emptyset$ pour tout $x \in S$.

(c) Soit E un espace euclidien contenant S. Pour $x \in S$, notons $T_S x$ le *cône tangent* à S en x ($T_S x = \overline{\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(S - x)}$). La multi-application $F : S \to E$ définie par $Fx = x + T_S x$ pour tout $x \in S$ est Φ-invariante. Une multi-application $\Gamma : S \to Y$ est liée à F si et seulement si elle est *rentrante* (c'est-à-dire si $\Gamma x \cap (x + T_S x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in S$).

(d) Soient E et $T_S x$ comme en (c). La multi-application $F : S \to E$ définie par $Fx = x - T_S x$ pour tout $x \in S$ est Φ-invariante. Une multi-application $\Gamma : S \to Y$ est liée à F si et seulement si elle est *sortante* (c'est-à-dire si $\Gamma x \cap (x - T_S x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in S$).

Théorème 1. *Soient S un simplexe, Y un ensemble convexe non vide dans un e.v.t. et $F : S \to Y$ une multi-application Φ-invariante à valeurs convexes. Soit $\Delta : S \to Y$ une multi-application fermée. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) pour toute $\gamma \in \mathcal{C}(S, Y)$ liée à F, $\gamma \cap \Delta \neq \emptyset$;

(ii) pour toute $\Gamma \in \mathcal{K}(S, Y)$ liée à F, $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$.

Démonstration. Il suffit de montrer que (i) implique (ii). Pour cela, on modifie légèrement la première partie de la démonstration de [12, Lemma 1]. Soit donc Γ dans $\mathcal{K}(S, Y)$ telle que $\Gamma x \cap Fx \neq \emptyset$ pour tout x dans S.

Pour $p = 1, 2, \ldots$, soit Σ^p une subdivision simpliciale de S de taille inférieure à $1/p$. Soient $a_0^p, \ldots, a_{m_p}^p$ les sommets de Σ^p et $\lambda_0^p, \ldots, \lambda_{m_p}^p$ les fonctions coordonnées associées. Tout point x de S s'écrit $x = \sum_{i=0}^{m_p} \lambda_i^p(x) a_i^p$. Pour chaque sommet a_i^p de Σ^p choisissons un point b_i^p dans $\Gamma a_i^p \cap F a_i^p$, et définissons une application continue $\gamma^p : S \to Y$ en posant $\gamma^p(x) = \sum_{i=0}^{m_p} \lambda_i^p(x) b_i^p$.

Montrons que γ^p est liée à F. Pour $x \in S$, posons $I^p(x) = \{i : \lambda_i^p(x) > 0\}$. Il est aisé de vérifier que a_i^p appartient à Φx pour tout i dans $I^p(x)$. Par suite, $F a_i^p$ est contenu dans $F(\Phi x) = Fx$ pour tout i dans $I^p(x)$, et donc b_i^p appartient à Fx pour tout i dans

$I^p(x)$. Comme $\gamma^p(x) = \sum_{i\in I^p(x)} \lambda_i^p(x) b_i^p$ et que Fx est convexe, on a bien $\gamma^p(x) \in Fx$ pour tout $x \in S$.

Il résulte de (i) que

$$\text{pour tout } p, \text{ il existe } x^p \in S \text{ tel que } \gamma^p(x^p) \in \Delta x^p. \qquad (\star)$$

La fin de la démonstration est identique à celle de [12, Lemma 1]. Nous en rappelons donc simplement les grandes lignes. Soit n la dimension de S. De $(\star)$ on déduit que

$$\begin{cases} \text{pour tout } p, \text{ il existe } x^p \in S,\ \lambda^p \in \mathbf{\Lambda}^n \text{ et } (a_0^p, \dots, a_n^p) \in S^{n+1} \\ \text{tels que } \|a_i^p - x^p\| \leq 1/p \text{ pour tout } i \text{ et } (\sum_{i=0}^n \lambda_i^p \Gamma a_i^p) \cap \Delta x^p \neq \emptyset, \end{cases}$$

où $\|a_i^p - x^p\|$ dénote la distance de a_i^p à x^p dans l'espace euclidien engendré par S. Par ailleurs, on vérifie que l'ensemble

$$\{(\lambda, a_0, \dots, a_n, x) \in \mathbf{\Lambda}^n \times S^{n+1} \times S : (\textstyle\sum_{i=0}^n \lambda_i \Gamma a_i) \cap \Delta x \neq \emptyset\}$$

est fermé dans $\mathbf{\Lambda}^n \times S^{n+1} \times S$. En faisant tendre p vers l'infini, on trouve alors qu'il existe $\hat\lambda \in \mathbf{\Lambda}^n$ et $\hat x \in S$ tels que $(\sum_{i=0}^n \hat\lambda_i \Gamma \hat x) \cap \Delta \hat x \neq \emptyset$. Mais $\sum_{i=0}^n \hat\lambda_i \Gamma \hat x$ est contenu dans $\Gamma \hat x$ puisque $\Gamma \hat x$ est convexe. Par suite, $\Gamma \hat x \cap \Delta \hat x$ est non vide, et (ii) est vérifiée. □

En tenant compte des exemples ci-dessus, on obtient immédiatement :

Corollaire 1.1. *Soient S un simplexe, Y un ensemble convexe non vide dans un e.v.t. et $\Delta : S \to Y$ une multi-application fermée. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) pour toute $\gamma \in \mathcal{C}(S, Y)$, $\gamma \cap \Delta \neq \emptyset$;

(ii) pour toute $\Gamma \in \mathcal{K}(S, Y)$, $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$.

Corollaire 1.2. *Soient S un simplexe dans un espace euclidien E et $\Delta : S \to E$ une multi-application fermée. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) pour toute $\gamma \in \mathcal{C}(S, E)$ rentrante (resp. sortante), $\gamma \cap \Delta \neq \emptyset$;

(ii) pour toute $\Gamma \in \mathcal{K}(S, E)$ rentrante (resp. sortante), $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$.

3. SURJECTIVITE DES MULTI-APPLICATIONS DE KAKUTANI SORTANTES DANS LES ESPACES EUCLIDIENS

Nous présentons ici un exemple simple d'utilisation du théorème de réduction. Le théorème 2 est un cas particulier d'un résultat de Halpern [9] (voir aussi [4] et [7]).

Théorème 2. *Soit S un simplexe dans un espace euclidien E et soit Γ dans $\mathcal{K}(S, E)$. Alors :*

(1) si Γ est rentrante ou sortante, Γ a un point fixe ;

(2) si Γ est sortante, $\Gamma(S)$ contient S.

Démonstration. La remarque suivante nous sera utile :

$$\text{si } x - z \in T_S x, \text{ alors } S - z \subset T_S x \qquad (\star)$$

(en effet, $T_S x$ est un cône convexe qui contient $S - x$, par conséquent

$$S - z = S - x + x - z \subset S - x + T_S x \subset T_S x \ ).$$

(1) Soit $\Delta = \{(x, x) : x \in S\}$. Il s'agit de montrer que $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$. D'après le corollaire 1.2, il suffit de montrer que toute application univoque continue rentrante ou sortante de S dans E a un point fixe. Soit donc $\gamma : S \to E$ continue rentrante. Notons $p : E \to S$ la projection de E sur S. Il résulte du théorème de point fixe de Brouwer qu'il existe $x_0 \in S$ tel que $x_0 = p(\gamma(x_0))$. Or $\gamma(x_0) \in x_0 + T_S x_0$, et le seul point de $x_0 + T_S x_0$ qui se projette en x_0 est x_0 lui-même. D'où $\gamma(x_0) = x_0$, et le résultat est démontré dans ce cas. Soit maintenant $\gamma : S \to E$ continue sortante. D'après $(\star)$, l'application $\gamma' : S \to E$ définie par $\gamma'(x) = 2x - \gamma(x)$ est rentrante. γ' a donc un point fixe, qui est aussi point fixe de γ, ce qu'il fallait démontrer.

(2) Soit $y_0 \in S$. Il s'agit de montrer qu'il existe $x_0 \in S$ tel que $y_0 \in \Gamma x_0$, c'est-à-dire que $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$ où $\Delta = S \times \{y_0\}$. Vu le corollaire 1.2, il suffit de considérer le cas où Γ est univoque. Soit donc $\gamma : S \to E$ continue sortante. D'après $(\star)$, l'application $\gamma' : S \to E$ définie par $\gamma'(x) = y_0 + x - \gamma(x)$ est rentrante et possède donc un point fixe x_0. Ce point x_0 vérifie $\gamma(x_0) = y_0$: le théorème est démontré. □

Naturellement, le théorème 2(1) généralise le théorème de point fixe de Kakutani [11]. Le théorème 2(2) conduit pour sa part à une version multivoque d'un théorème de surjectivité de Borsuk [3, Lemme 20] :

Corollaire 2.1. *Soit K un sous-ensemble compact d'un espace euclidien E et soit Γ dans $\mathcal{K}(K, E)$ telle que $x \in \Gamma x$ pour tout x sur le bord de K. Alors $\Gamma(K)$ contient K.*

Démonstration. Soit S un simplexe dans E tel que $K \subset S$. Soit $\Gamma' : S \to E$ définie par $\Gamma' x = \Gamma x$ si $x \in K$, $\Gamma' x = x$ si $x \in S \setminus K$. On vérifie facilement que $\Gamma' \in \mathcal{K}(S, E)$. De plus, $x \in \Gamma' x$ pour tout x sur le bord de S, donc Γ' est sortante. Du théorème 2(2) on déduit que $\Gamma'(S)$ contient S. Soit maintenant $y \in K$; il existe donc $x \in S$ tel que $y \in \Gamma' x$. D'après la définition de Γ', ce point est nécessairement dans K. Ainsi, il existe $x \in K$ tel que $y \in \Gamma x$, c'est-à-dire $K \subset \Gamma(K)$. □

4. LA CLASSE $\mathcal{K}_c^+(X, Y)$: DÉFINITION ET EXEMPLES

Dans cette section, nous définissons une classe de multi-applications, fermée pour le produit de composition, qui contient en particulier les multi-applications de Kakutani et les φ^*-applications considérées dans [1]. Dans la section suivante, nous étudierons la propriété de point fixe des multi-applications de cette classe.

Soit X un espace topologique et Y un ensemble convexe dans un e.v.t. On dit que $\Gamma : X \to Y$ est *Kakutani-factorisable* s'il existe un diagramme :

$$\Gamma : X = X_0 \xrightarrow{\Gamma_0} X_1 \xrightarrow{\Gamma_1} \dots \xrightarrow{\Gamma_n} X_{n+1} = Y,$$

où chaque espace *facteur* X_i $(i = 1,\ldots,n)$ est un ensemble convexe dans un e.v.t. et chaque Γ_i $(i = 0,\ldots,n)$ appartient à $\mathcal{K}(X_i, X_{i+1})$. On note $\mathcal{K}_c(X,Y)$ la classe des multi-applications Kakutani-factorisables de X dans Y.

Un espace topologique est dit *σ-compact* s'il peut s'écrire sous la forme d'une réunion au plus dénombrable d'espaces compacts. Les espaces σ-compacts possèdent des propriétés de stabilité remarquables que nous résumons dans la proposition suivante :

Proposition 1.

(1) La réunion dénombrable et le produit cartésien d'espaces σ-compacts sont σ-compacts.

(2) L'image d'un σ-compact par une multi-application s.c.s. à valeurs compactes est σ-compacte.

(3) Dans tout e.v.t., l'enveloppe convexe d'un σ-compact est σ-compacte.

(4) Si $\Gamma \in \mathcal{K}_c(X,Y)$ et X est σ-compact, alors il existe un sous-ensemble convexe σ-compact Y' de Y et $\Gamma' \in \mathcal{K}_c(X,Y')$ tels que $\Gamma' x = \Gamma x$ pour tout $x \in X$.

Démonstration. (1) est évident. (2) découle du fait que l'image d'un compact par une multi-application s.c.s. à valeurs compactes est compacte.

Montrons (3). Soit K un ensemble σ-compact dans un e.v.t. E. Pour chaque entier n, notons $g_n : \mathbf{\Lambda}^n \times K^{n+1} \to E$ l'application continue définie par $g_n(\lambda, x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$. Puisque l'ensemble $\mathbf{\Lambda}^n \times K^{n+1}$ est σ-compact (d'après (1)), son image par g_n est σ-compacte (d'après (2)) et donc aussi la réunion $\bigcup_{n=0}^{\infty} g_n(\mathbf{\Lambda}^n \times K^{n+1})$ (d'après (1)). Or cet ensemble est précisément l'enveloppe convexe de K.

Reste à montrer (4). Supposons que Γ a la forme suivante :

$$\Gamma : X = X_0 \xrightarrow{\Gamma_0} X_1 \xrightarrow{\Gamma_1} \ldots \xrightarrow{\Gamma_n} X_{n+1} = Y,$$

où $\Gamma_i \in \mathcal{K}(X_i, X_{i+1})$ pour $i = 0,\ldots,n$. Notons K_1 l'enveloppe convexe de $\Gamma_0(X_0)$ et définissons $\Gamma'_0 : X_0 \to K_1$ par $\Gamma'_0 x = \Gamma_0 x$. Ensuite, pour $i = 1,\ldots,n$, notons K_{i+1} l'enveloppe convexe de $\Gamma_i(K_i)$ et définissons $\Gamma'_i : K_i \to K_{i+1}$ par $\Gamma'_i x = \Gamma_i x$. Finalement, posons $Y' = K_{n+1}$ et $\Gamma' = \Gamma'_n \ldots \Gamma'_0$. Il résulte de la construction que Y' est convexe σ-compact, que Γ' appartient à $\mathcal{K}_c(X,Y)$ et que $\Gamma' x = \Gamma x$ pour tout x dans X. □

Soient X un espace topologique et Y un ensemble convexe dans un e.v.t. Nous pouvons maintenant définir la classe $\mathcal{K}_c^+(X,Y)$: elle est constituée des multi-applications de X dans Y dont les restrictions aux sous-ensembles σ-compacts de X admettent une sélection Kakutani-factorisable. Plus formellement :

$$\mathcal{K}_c^+(X,Y) = \{\, G : X \to Y \;:\; \forall K \text{ } \sigma\text{-compact } \subset X \\ \exists \Gamma \in \mathcal{K}_c(K,Y) \text{ telle que } \Gamma x \subset Gx \;\; \forall x \in K \,\}.$$

(Une classe similaire a été introduite dans [2].)

Proposition 2. *Soient X et Y deux ensembles convexes dans un e.v.t.*

(1) $\mathcal{K}_c^+(X,Y)$ est fermée pour le produit de composition, c'est-à-dire, si X_1 est un convexe dans un e.v.t., $G_0 \in \mathcal{K}_c^+(X,X_1)$ et $G_1 \in \mathcal{K}_c^+(X_1,Y)$, alors $G_1G_0 \in \mathcal{K}_c^+(X,Y)$.

(2) $\mathcal{K}_c^+(X,Y)$ contient les classes suivantes :

(a) $\mathcal{K}(X,Y)$,

(b) $\mathcal{R}(X,Y) = \{R : X \to Y : Rx$ convexe $\neq \emptyset\ \forall x$ et $R^{-}y$ ouvert $\forall y\}$,

(c) $\mathcal{T}(X,Y) = \{T : X \to Y : Tx$ convexe et $\mathrm{Li}^{\delta} Tx \neq \emptyset\ \forall x\}$. (*)

(3) $\mathcal{K}_c^+(X,Y)$ contient toute multi-application $G : X \to Y$ de la forme

$$G : X = X_0 \stackrel{G_0}{\to} X_1 \stackrel{G_1}{\to} \dots \stackrel{G_n}{\to} X_{n+1} = Y,$$

où chaque espace facteur X_i $(i = 1,\dots,n)$ est un ensemble convexe dans un e.v.t. et chaque G_i $(i = 0,\dots,n)$ appartient soit à $\mathcal{K}(X_i, X_{i+1})$, soit à $\mathcal{T}(X_i, X_{i+1})$.

Démonstration.

(1) Soit $G = G_1G_0$, où $G_0 \in \mathcal{K}_c^+(X,X_1)$ et $G_1 \in \mathcal{K}_c^+(X_1,Y)$. Soit K un sous-ensemble σ-compact de X. Par définition, il existe Γ_0 dans $\mathcal{K}_c(K,X_1)$ telle que $\Gamma_0 x \subset G_0 x$ pour tout $x \in K$. D'après la proposition 1(4), il existe un sous-ensemble convexe σ-compact K_1 de X_1 et Γ_0' dans $\mathcal{K}_c(K,K_1)$ tels que $\Gamma_0' x = \Gamma_0 x$ pour tout $x \in K$. Toujours par définition, il existe Γ_1 dans $\mathcal{K}_c(K_1,Y)$ telle que $\Gamma_1 x \subset G_1 x$ pour tout $x \in K_1$. On vérifie que $\Gamma_1\Gamma_0'$ appartient à $\mathcal{K}_c(K,Y)$ et que $\Gamma_1\Gamma_0' x$ est contenu dans G_1G_0x pour tout x dans K. Donc G appartient à $\mathcal{K}_c^+(X,Y)$.

(2) (a) Évident.

(b) Soit $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ et soit K un sous-ensemble σ-compact de X. Notons que K est paracompact puisqu'il est Lindelöf et régulier (comme sous-ensemble d'un e.v.t.). Donc il existe une application univoque continue $r : K \to Y$ telle que $r(x) \in Rx$ pour tout $x \in K$ (voir par exemple [1, Théorème 2.1]). Ainsi, $R \in \mathcal{K}_c^+(X,Y)$.

(c) Soit $T \in \mathcal{T}(X,Y)$ et soit $R : X \to Y$ définie par $Rx = \mathrm{Li}^{\delta} Tx$. On vérifie facilement que Rx est convexe non vide pour tout x dans X et que $R^{-}y$ est égal à l'intérieur de $T^{-}y$ pour tout y dans Y. Ainsi $R \in \mathcal{R}(X,Y)$, et donc, d'après (b), $R \in \mathcal{K}_c^+(X,Y)$. Or $Rx \subset Tx$ pour tout $x \in X$, on a donc aussi $T \in \mathcal{K}_c^+(X,Y)$. (Remarquons en passant que $\mathcal{R}(X,Y) \subset \mathcal{T}(X,Y)$.)

(3) Découle de (1) et (2). □

5. POINTS FIXES DES MULTI-APPLICATIONS DE $\mathcal{K}_c^+(X,Y)$

En combinant le théorème de réduction et le théorème de point fixe de Brouwer, on démontre d'abord la propriété de point fixe sur un simplexe.

(*) $\mathrm{Li}^{\delta} Tx = \bigcup_{V \in \mathcal{V}(x)} \bigcap_{x' \in V} Tx'$, où $\mathcal{V}(x)$ est une base de voisinages de x dans X. On peut vérifier que la classe $\mathcal{T}(X,Y)$ est exactement la classe des φ^*-applications considérée dans [1].

Théorème 3. *Soient S un simplexe et $G \in \mathcal{K}_c^+(S,S)$. Alors G a un point fixe.*

Démonstration. Par définition, il existe Γ dans $\mathcal{K}_c(S,S)$ telle que $\Gamma x \subset Gx$ pour tout $x \in S$. Il suffit donc de montrer que toute multi-application Kakutani-factorisable de S dans S possède un point fixe. Nous allons raisonner par induction sur le nombre de facteurs de telles multi-applications.

Montrons d'abord que pour toute multi-application Γ dans $\mathcal{K}(S,S)$ on a $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$ où $\Delta = \{(x,x) : x \in S\}$. D'après le corollaire 1.1, il est équivalent de montrer que pour toute application γ dans $\mathcal{C}(S,S)$ on a $\gamma \cap \Delta \neq \emptyset$. Mais ceci est précisément l'énoncé du théorème de point fixe de Brouwer. Le cas des multi-applications de $\mathcal{K}(S,S)$ est donc réglé.

Supposons maintenant que toute multi-application factorisable par au plus n multi-applications de Kakutani possède un point fixe. Soit $\Gamma \in \mathcal{K}_c(S,S)$ de la forme

$$\Gamma : S \xrightarrow{\Gamma_0} X_1 \xrightarrow{\Gamma_1} \dots \xrightarrow{\Gamma_n} S,$$

où chaque Γ_i est de Kakutani. Il s'agit de montrer que $\Gamma_n \Gamma_{n-1} \dots \Gamma_0$ a un point fixe, ou, ce qui revient au même, que $\Gamma_0 \cap \Delta' \neq \emptyset$ avec $\Delta' = \Gamma_1^- \Gamma_2^- \dots \Gamma_n^-$. Notons que $\Delta' : S \to X_1$ est une multi-application fermée car $\Gamma_n \Gamma_{n-1} \dots \Gamma_1$ est s.c.s. à valeurs compactes. D'après le corollaire 1.1, il suffit donc de vérifier que pour toute application continue $\gamma_0 : S \to X_1$ on a $\gamma_0 \cap \Delta' \neq \emptyset$, c'est-à-dire, $\Gamma_n \Gamma_{n-1} \dots \Gamma_1 \gamma_0$ a un point fixe. Or, $\Gamma_1 \gamma_0$ étant de Kakutani, la multi-application $\Gamma_n \Gamma_{n-1} \dots \Gamma_1 \gamma_0$ est factorisable par au plus n multi-applications de Kakutani ; elle possède par conséquent un point fixe, d'après l'hypothèse de récurrence. Le théorème est démontré. □

Dans la démonstration ci-dessus, on a repris l'argument d'induction utilisé pour démontrer [12, Lemma 1]. Naturellement, le théorème 3 généralise le théorème de Kakutani [11].

Le passage à la dimension infinie se fait en deux temps. On établit d'abord un théorème de coïncidence, duquel on dérive ensuite une extension du théorème 3 à la dimension infinie.

Théorème 4. *Soient X un ensemble convexe muni de la topologie finie* [†] *et Y un ensemble convexe dans un e.v.t. Soient $S, G : X \to Y$ telles que :*

(i) Sx est ouvert pour tout x et $S^- y$ est convexe non vide pour tout y ;

(ii) G appartient à $\mathcal{K}_c^+(X,Y)$ et est compacte.

Alors, il existe $x \in X$ tel que $Sx \cap Gx \neq \emptyset$.

Démonstration. Puisque G est compacte (d'après (ii)), il existe un ensemble compact Y' tel que $G(X) \subset Y' \subset Y$. Puisque $S^- y$ est non vide pour tout $y \in Y$ (d'après (i)), la famille

[†] Un ensemble $U \subset X$ est ouvert pour la *topologie finie* si pour tout ensemble fini $A \subset X$, $U \cap coA$ est ouvert dans coA muni de la topologie euclidienne, coA désignant l'enveloppe convexe de A.

$\{Sx\}_{x\in X}$ recouvre Y donc aussi Y'. Puisque Y' est compact et que les Sx sont ouverts (d'après (i)), il existe $\{x_0,\dots,x_n\}\subset X$ tel que $Y'\subset\bigcup_{i=0}^n Sx_i$.

Notons $\ell_n:\mathbf{\Lambda}^n\to X$ l'application continue définie par $\ell_n(\lambda)=\sum_{i=0}^n\lambda_i x_i$. Il découle de (ii) que $G\ell_n\in\mathcal{K}_c^+(\mathbf{\Lambda}^n,Y)$. Soit $R_n:Y\to\mathbf{\Lambda}^n$ définie par $R_ny=\ell_n^-S^-y$ si $y\in Y'$, $R_ny=\mathbf{\Lambda}^n$ sinon.

On vérifie que, pour tout $y\in Y'$, $\ell_n^-S^-y$ est convexe (car ℓ_n est affine et S^-y est convexe d'après (i)), et non vide (car $y\in Sx_i$ pour un certain x_i, et donc $\ell_n^-S^-y$ contient un vecteur unité de $\mathbb{R}^{n+1}$). Ainsi, pour tout $y\in Y$, R_ny est convexe non vide.

On vérifie ensuite que, pour tout $\lambda\in\mathbf{\Lambda}^n$, $R_n^-\lambda=S\ell_n(\lambda)\cup Y\setminus Y'$ est ouvert dans Y. Par conséquent $R_n\in\mathcal{K}_c^+(Y,\mathbf{\Lambda}^n)$, d'après la proposition 2(2 (ii)), et donc $R_nG\ell_n\in\mathcal{K}_c^+(\mathbf{\Lambda}^n,\mathbf{\Lambda}^n)$ d'après la proposition 2(1).

Du théorème 3, on déduit qu'il existe $\lambda\in\mathbf{\Lambda}^n$ tel que $\lambda\in R_nG\ell_n(\lambda)$, ce qui s'écrit aussi $R_n^-\lambda\cap G\ell_n(\lambda)\neq\emptyset$, ou encore (puisque $G\ell_n(\lambda)\subset Y'$) $S\ell_n(\lambda)\cap G\ell_n(\lambda)\neq\emptyset$: S et G ont bien une coïncidence. □

Le théorème 4 généralise et unifie divers théorèmes de coïncidence : [12, Theorem 3], [6, Théorème 1], [1, Théorème 4.1 et Théorème 4.3]. Il admet plusieurs applications que nous présenterons (éventuellement) dans un autre article.

Théorème 5. *Soient X un ensemble convexe non vide dans un e.v.t. localement convexe et G une multi-application compacte dans $\mathcal{K}_c^+(X,X)$. Alors G possède un point fixe.*

Démonstration. Soit X' un ensemble compact tel que $G(X)\subset X'\subset X$. Notons K l'enveloppe convexe de X'. D'après la proposition 1(3), K est σ-compact. Il existe donc, par définition, $\Gamma\in\mathcal{K}_c(K,X)$ telle que $\Gamma x\subset Gx$ pour tout $x\in K$. Notons que Γ est compacte. Il suffit évidemment de montrer que Γ a un point fixe.

Soit V un voisinage ouvert convexe symétrique de l'origine dans l'e.v.t. localement convexe qui contient X. Définissons $S:K\to X$ par $Sx=(x+V)\cap X\cup X\setminus X'$. Il est clair que Sx est ouvert dans X pour tout x dans K. On vérifie en outre que $S^-y=(y+V)\cap K$ si $y\in X'$, alors que $S^-y=K$ si $y\in X\setminus X'$. Donc, S^-y est convexe non vide pour tout y dans X. Il résulte du théorème 4 qu'il existe $x_V\in K$ tel que $Sx_V\cap\Gamma x_V\neq\emptyset$, mais comme $\Gamma x_V\subset X'$, ceci s'écrit $(x_V+V)\cap\Gamma x_V\neq\emptyset$.

Ainsi, pour tout voisinage V de l'origine, il existe $x_V\in X$ et $y_V\in\Gamma x_V$ tels que $y_V\in x_V+V$. Comme les y_V restent dans le compact X', on peut supposer qu'ils convergent vers un certain point y de X'. Alors x_V converge aussi vers y, et comme Γ est fermée, on conclut que $y\in\Gamma y$. □

Le théorème 5 généralise le théorème 3, [12, Theorem 4], [13, Corollary 3.2] et [1, Théorème 3.2]. Il contient évidemment le théorème de point fixe de Fan-Glicksberg [5, 8] ainsi que sa généralisation par Himmelberg [10].

References

[1] **H. Ben-El-Mechaiekh, P. Deguire et A. Granas**, Points fixes et coïncidences pour les fonctions multivoques II (Applications de type φ et φ^*), *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **295** (1982), 381–384

[2] **H. Ben-El-Mechaiekh, P. Deguire et A. Granas**, Points fixes et coïncidences pour les fonctions multivoques III (Applications de type M et M^*), *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **305** (1987), 381–384

[3] **K. Borsuk**, Sur les rétractes, *Fund. Math.* **17** (1931), 152–170

[4] **F. E. Browder**, The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, *Math. Ann.* **177** (1968), 283–301

[5] **K. Fan**, Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **38** (1952), 121–126

[6] **K. Fan**, Sur un théorème minimax, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **259** (1964), 3925–3928

[7] **K. Fan**, A minimax inequality and applications, *in* “Inequalities III” (O. Shisha, Ed.), p. 103–113, Academic Press, New York/London, 1972

[8] **I. L. Glicksberg**, A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points, *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 170–174

[9] **B. Halpern**, Fixed points theorems for set-valued maps in infinite dimensional spaces, *Math. Ann.* **189** (1970), 104–113

[10] **C. J. Himmelberg**, Fixed points of compact multifunctions, *J. Math. Anal. Appl.* **38** (1972), 205–207

[11] **S. Kakutani**, A generalization of Brouwer’s fixed-point theorem, *Duke Math. J.* **8** (1941), 457–459

[12] **M. Lassonde**, Fixed points for Kakutani factorizable multifunctions, *J. Math. Anal. Appl.* **152** (1990), 46–60

[13] **S. Simons**, Cyclical coincidences of multivalued maps, *J. Math. Soc. Japan* **38** (1986), 515–525

Département de Mathématiques
Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand)
63177 Aubière Cédex
France