



Condition nécessaire et suffisante de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues - Lien avec le Théorème de Rouché-Fontené - Démonstration nouvelle du Théorème de Rouché-Fontené

Richard Riedel

► To cite this version:

Richard Riedel. Condition nécessaire et suffisante de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues - Lien avec le Théorème de Rouché-Fontené - Démonstration nouvelle du Théorème de Rouché-Fontené. 2011. hal-00675237

HAL Id: hal-00675237

<https://hal.science/hal-00675237>

Submitted on 29 Feb 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE
DE COMPATIBILITÉ
D'UN SYSTÈME LINÉAIRE
DE n ÉQUATIONS À p INCONNUES**

- - -

**LIEN AVEC LE THÉOREME DE ROUCHÉ-FONTENÉ
DÉMONSTRATION NOUVELLE
DU THÉOREME DE ROUCHÉ-FONTENÉ**

Objet de la présente étude

K désigne un corps commutatif, en pratique celui des réels R ou celui des complexes C .

(S) désigne un système linéaire quelconque de n équations à p inconnues, à coefficients et inconnues dans K .

L'objet de cette étude est de définir une condition nécessaire et suffisante (C.N.S.) permettant de déterminer si un tel système (S) est compatible ou non. Cette C.N.S. qui constitue ainsi un critère de compatibilité (en abrégé CC) applicable à tout système (S), est énoncée sous deux formes différentes mais équivalentes, dans les Théorèmes 25-1 et 25-2 ci-après.

L'originalité de ce nouveau critère de compatibilité réside dans le fait qu'il ne fait appel ni à la notion de déterminant ni à celle de rang, usuellement associées à un système linéaire.

Le critère de compatibilité CC exposé dans ce document diffère donc notablement de celui énoncé par le Théorème de Rouché-Fontené. Nous ferons cependant le lien entre le critère CC et le Théorème de Rouché-Fontené (cf. Section 6). Une démonstration nouvelle du Théorème de Rouché-Fontené en résulte.

Note 1 :

Le critère de compatibilité CC, objet de la présente étude, est, à la connaissance de l'auteur, inédit.

Note 2 :

Les résultats présentés ici sont issus de travaux consacrés à la résolution d'un problème qui fera l'objet d'une publication ultérieure.

Object of the present study

K designates a commutative field, in practice the field of the reals $\mathbb{R}$ or the field of the complex numbers $\mathbb{C}$.

(S) designates any linear system of n equations and p unknowns, with coefficients and unknowns belonging to K .

The object of this paper is to define a necessary and sufficient condition (N.S.C.) allowing to determine if the system (S) is consistent or not. This N.S.C., which represents therefore a consistency criterion (in short CC) applicable to any system (S), is formulated in two different but equivalent ways in Theorems 25-1 and 25-2 hereafter.

The specificity of this new consistency criterion is that it does not make any use of the notion of determinant, nor of the notion of rank, usually associated with a linear system.

The CC consistency criterion differs therefore notably from the one expressed by the Rouché-Fontené Theorem. We will however establish the link between the CC criterion and the Rouché-Fontené Theorem (ref. Section 6). A new demonstration of the Rouché-Fontené Theorem results from it.

Note 1 :

To the best knowledge of the author, the consistency criterion CC here described has never been published before.

Note 2 :

The present results derive from works dedicated to the resolution of a problem which will be published later on.

TABLE DES MATIERES

1.	Introduction.....	7
1.1.	Définitions et terminologie générales	7
1.2.	Membres de gauche semblables - Équations semblables - Équations identiques - Équations distinctes (non-identiques).....	8
1.3.	Position du problème - Terminologie associée	9
2.	Définitions et Théorèmes préalables	10
2.1.	Équation impossible - Équation nulle.	10
2.2.	Équations incompatibles	11
2.3.	Équations redondantes	11
3.	Équivalence de 2 systèmes linéaires de n équations à p inconnues	12
4.	Combinaisons linéaires des équations (CLE) d'un système (S) - Ensemble dérivé EQU(S).....	13
4.1.	Combinaisons linéaires des équations (CLE) d'un système (S).....	13
4.2.	Ensemble dérivé EQU(S).....	15
5.	Méthodes de résolution d'un système linéaire d'équations - Condition nécessaire et suffisante de compatibilité (critère de compatibilité CC) d'un système linéaire d'équations.....	19
6.	Lien entre le critère de compatibilité CC d'un système linéaire d'équations et le Théorème de Rouché-Fontené - Démonstration inédite du Théorème de Rouché-Fontené.....	23

- - -

1. Introduction

1.1. Définitions et terminologie générales

Soient n et p deux entiers positifs.

Soient :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

On s'intéresse au système d'équations (S) :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,p} x_p = b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots, \\ a_{n,1} x_1 + \dots + a_{n,p} x_p = b_n \end{cases}$$

où les x_i , $1 \leq i \leq p$, sont les inconnues scalaires (1).

On représente aussi un tel système (S) sous la forme matricielle suivante :

$$(S) \quad A \cdot X = B,$$

$$\text{où } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \text{ est l'inconnue vectorielle (1).}$$

Définition 1. (S) est dénommé système linéaire de n équations à p inconnues (ou encore système affine de n équations à p inconnues) à coefficients et inconnues dans $\mathbb{K}$.

Terminologie

Nous remplacerons fréquemment, dans la suite de cette étude, l'expression « système linéaire d'équations (S) » par les expressions abrégées « système d'équations (S) » ou tout simplement « système (S) ».

Nous dirons indifféremment que le système d'équations (S) est associé aux matrices A et B, ou que les matrices A et B sont associées au système d'équations (S).

Les éléments $a_{i,j}$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$) de la matrice A - également dénommés coefficients de A - sont les coefficients du système d'équations (S).

(1) Dans la pratique, les inconnues scalaires x_j , $1 \leq j \leq p$, aussi bien que l'inconnue vectorielle X seront dénommés « inconnues », sans autre forme de précision.

Dans sa forme matricielle, (S) s'écrit : $A \cdot X = B$.

$A \cdot X$ est le « membre de gauche » du système (en abrégé : MG). C'est celui qui renferme les inconnues. B est le « membre de droite » du système (en abrégé : MD).

Nous désignerons par E_i la $i^{\text{ème}}$ équation ($1 \leq i \leq n$) du système (S), à savoir :

$$E_i : a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{ip} x_p = b_i.$$

Le membre de gauche de E_i sera désigné par MG_i , le membre de droite de E_i par MD_i .

E_i s'écrit ainsi en toute généralité : $MG_i = MD_i$,

où MG_i est une forme linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(K)$ dans K et où MD_i est un scalaire de K .

Si l'on pose $f_i(X) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{ip} x_p$, l'équation E_i ($1 \leq i \leq n$) exprime une relation que doivent satisfaire les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_p$ du vecteur X pour que la forme linéaire $f_i(X)$ prenne la valeur b_i .

Remarque :

Notons que l'équation E_i ($1 \leq i \leq n$) peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_p \end{bmatrix} = b_i.$$

1.2. Membres de gauche semblables - Équations semblables - Équations identiques - Équations distinctes (non-identiques).

Définition 2. Les membres de gauche MG_a et MG_b de deux équations linéaires E_a ($MG_a = MD_a$) et E_b ($MG_b = MD_b$) seront dits semblables s'ils ne diffèrent que par une même constante multiplicative, non nulle, de K , autrement dit si : $\exists k \in K^*$, tel que $MG_a = k MG_b$.

Deux équations linéaires E_a ($MG_a = MD_a$) et E_b ($MG_b = MD_b$) seront dites semblables si leurs membres de gauche et leurs membres de droite ne diffèrent que par une même constante multiplicative, non nulle, de K , autrement dit si : $\exists k \in K^*$, tel que $MG_a = k MG_b$ et $MD_a = k MD_b$. Nous écrirons symboliquement : $E_a = k E_b$.

Si $k = 1$, donc si : $MG_a = MG_b$ et $MD_a = MD_b$, les deux équations linéaires E_a et E_b seront dites identiques. Nous écrirons symboliquement : $E_a = E_b$.

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

Deux équations linéaires E_a ($MG_a = MD_a$) et E_b ($MG_b = MD_b$) telles que $MG_a \neq MG_b$ et/ou $MD_a \neq MD_b$, seront dites distinctes (ou non-identiques).

Remarque :

Il résulte de la Définition 2 que 2 équations semblables de rapport de similitude $k \neq 1$, seront considérées comme distinctes (non-identiques).

Théorème 3. Deux équations linéaires semblables ont le même ensemble de solutions.

Preuve : immédiate.

1.3. Position du problème - Terminologie associée

Un système d'équations (S) est un problème qu'il convient de résoudre en déterminant l'ensemble $S(S)$ de ses solutions. Il s'agit de savoir si $S(S)$ est vide ou non, et, si $S(S)$ n'est pas vide, il s'agit (idéalement) de déterminer l'ensemble des valeurs X_s de X ($X_s \in \mathcal{M}_{p,1}(K)$) telles que le système (S) soit satisfait, c.-à-d. telles que soit réalisée l'égalité : $A \cdot X_s = B$. On a alors : $S(S) = \{X_s\}$.

Si $S(S)$ n'est pas vide, nous dirons que « (S) est compatible » ou encore que « (S) a des solutions ».

Si $S(S)$ est vide, nous dirons indifféremment que « (S) est incompatible », que « (S) est non compatible », ou encore que « (S) n'a pas de solutions ».

Le critère de compatibilité CC, objet de la présente étude, doit permettre de déterminer si l'ensemble $S(S)$ des solutions d'un système (S) donné est vide ou non.

2. Définitions et Théorèmes préalables

2.1. Équation impossible - Équation nulle.

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p$ représente, en toute généralité, l'expression analytique d'une forme linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(K)$ dans K .

Désignons par $0x$ la forme linéaire nulle (obtenue lorsque : $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0$).

Définition 4. On appelle *équation impossible* (notée E_{imp}) toute équation linéaire de la forme : $0x = b$, avec $b \in K^*$. Cette équation n'admet pas de solution.

Définition 5. On appelle *équation nulle* (notée E_0) l'équation : $0x = 0$. Cette équation est satisfaite $\forall x_j, 1 \leq j \leq p$.

Remarque :

Les équations impossibles E_{imp} sont toutes semblables entre elles (cf. Définition 2). L'équation nulle E_0 n'est semblable qu'à elle-même.

Théorème 6. Les équations impossibles E_{imp} sont les seules équations linéaires qui n'admettent pas de solution.

Preuve :

Une équation linéaire différente de E_{imp} se présente nécessairement sous l'une des deux formes suivantes (a) ou (b) :

(a) $0x = 0$ (équation nulle E_0),

(b) $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p = b$, avec $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p \neq 0x$ et $b \in K$.

Or les équations de type (a) ou (b) admettent toujours une ou plusieurs solution(s).

Théorème 7. Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues. Alors :

(1) $E_{\text{imp}} \in (S) \Rightarrow (S)$ incompatible.

(2) (S) incompatible $\nRightarrow E_{\text{imp}} \in (S)$.

Preuve : immédiate.

Remarque :

L'énoncé du Théorème 7 est plutôt trivial. S'il figure ici, c'est parce que nous mettrons plus loin en évidence un sur-ensemble de (S) que nous noterons $\text{EQU}(S)$ et qui est doté de la propriété suivante : $E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S) \Leftrightarrow (S)$ incompatible.

Cette propriété caractéristique de l'ensemble $\text{EQU}(S)$ est à la base même du critère de compatibilité CC, objet de la présente étude.

Théorème 8. Soit (S) un système d'équations ne comportant pas que des équations nulles E_0 . Si l'on supprime de (S) les équations nulles E_0 qui y figurent, on obtient un nouveau système d'équations (S') ayant le même ensemble de solutions que (S).

Preuve : conséquence immédiate du fait que l'équation E_0 est satisfaite $\forall x_j, 1 \leq j \leq p$.

2.2. Équations incompatibles

Définition 9. Deux équations d'un système d'équations (S) sont dites incompatibles si leurs membres de gauche sont semblables (au sens de la Définition 2) sans qu'elles ne le soient elles-mêmes (toujours au sens de la Définition 2).

Deux équations E_a et E_b d'un système d'équations (S) sont donc incompatibles si elles s'écrivent sous la forme :

$$E_a : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p = b_1, \text{ soit encore : } f = b_1,$$

$$E_b : ka_1 x_1 + ka_2 x_2 + \dots + ka_p x_p = kb_2, \text{ soit encore : } kf = kb_2, k \in K^*, b_2 \neq b_1.$$

$$\text{avec : } f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p.$$

2.3. Équations redondantes

Définition 10. Deux équations d'un système d'équations (S) sont dites redondantes si elles sont semblables au sens de la Définition 2. Dans le cas contraire, les deux équations seront dites non-redondantes.

Deux équations E_a et E_b d'un système d'équations (S) sont donc redondantes si elles s'écrivent sous la forme :

$$E_a : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p = b, \text{ soit encore : } f = b,$$

$$E_b : ka_1 x_1 + ka_2 x_2 + \dots + ka_p x_p = kb, \text{ soit encore : } kf = kb, k \in K^*,$$

$$\text{avec : } f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p.$$

Théorème 11. Si, dans l'ensemble des équations qui composent un système donné (S), on restreint les éventuelles équations redondantes qui y figurent à une seule de ces équations, on obtient un nouveau système d'équations (S') ayant le même ensemble de solutions que (S).

Preuve : conséquence immédiate du Théorème 3.

Remarque :

Dans le cadre de cette étude, nous chercherons en fait à préserver la « taille » du système (S) donné au départ (c.-à-d. à conserver le nombre n des équations constitutives de (S)). Pour préserver cette « taille », nous n'éliminerons donc pas les équations nulles ou les équations redondantes qui peuvent apparaître lors de la résolution du système (S) donné.

3. Équivalence de 2 systèmes linéaires de n équations à p inconnues

Soient (S) et (S') deux systèmes de n équations à p inconnues :

$$(S) : A \cdot X = B \quad \text{et} \quad (S') : A' \cdot X = B',$$

$$\text{avec : } A \in \mathcal{M}_{n,p}(K), \quad A' \in \mathcal{M}_{n,p}(K), \quad B \in \mathcal{M}_{n,1}(K), \quad B' \in \mathcal{M}_{n,1}(K).$$

$X \in \mathcal{M}_{p,1}(K)$ est l'inconnue.

$S(S)$ désigne l'ensemble des solutions de (S) et $S(S')$ l'ensemble des solutions de (S').

Définition 12. Soient (S) et (S') deux systèmes linéaires de n équations à p inconnues. Les systèmes d'équations (S) et (S') sont dits équivalents s'il existe une matrice P de $\mathcal{GL}_n(K)$ telle que simultanément : $A' = P \cdot A$ et $B' = P \cdot B$.

Nous dirons alors que le système (S') est le transformé du système (S) par la transformation $T[P]$. Nous écrirons :

$$(S') = T[P](S) \quad \text{ou} \quad (S) \xrightarrow{T[P]} (S').$$

P étant inversible, on a aussi : $(S) = T[P^{-1}](S')$ ou $(S') \xrightarrow{T[P^{-1}]} (S)$.

La relation ainsi définie entre (S) et (S') est une relation d'équivalence, que nous noterons : $(S) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S')$.

Remarques :

- 1) La Définition 12 entraîne l'équivalence des matrices A et A' et des matrices B et B' .
- 2) La Définition 12 implique que les systèmes (S) et (S') ont nécessairement la même « taille », c.-à-d. le même nombre d'équations et le même nombre d'inconnues.
- 3) Si (S) et (S') sont équivalents, la matrice P intervenant dans la Définition 12 n'est pas nécessairement unique (sauf si ces systèmes sont de Cramer).

Théorème 13. Soient (S) et (S') deux systèmes linéaires de n équations à p inconnues.

$$(S) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S') \Rightarrow S(S) = S(S').$$

Preuve : Résultat classique.

Ceci signifie plus précisément que, si $(S) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S')$, alors :

- (S) compatible ($S(S) \neq \emptyset$) $\Leftrightarrow$ (S') compatible ($S(S') \neq \emptyset$), et de plus : $S(S) = S(S')$.
- (S) incompatible ($S(S) = \emptyset$) $\Leftrightarrow$ (S') incompatible ($S(S') = \emptyset$).

4. Combinaisons linéaires des équations (CLE) d'un système (S) - Ensemble dérivé EQU(S)

4.1. Combinaisons linéaires des équations (CLE) d'un système (S)

Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues, associé aux matrices A et B.

$$(S) \begin{cases} a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,p} x_p = b_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{i,1} x_1 + \dots + a_{i,p} x_p = b_i \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n,1} x_1 + \dots + a_{n,p} x_p = b_n \end{cases}, \text{ ou encore : } (S) \begin{cases} MG_1 = MD_1 \quad (E_1) \\ \dots \dots \dots \\ MG_i = MD_i \quad (E_i) \\ \dots \dots \dots \\ MG_n = MD_n \quad (E_n) \end{cases}.$$

Définition 14. Nous dénommerons combinaison linéaire des équations (en abrégé : CLE) d'un système (S), de coefficients $l_1, \dots, l_i, \dots, l_n$, ($l_i \in K$, $1 \leq i \leq n$), l'expression formelle $\sum_{i=1}^n l_i MG_i = \sum_{i=1}^n l_i MD_i$ obtenue en appliquant aux membres de gauche et aux membres de droite des équations de (S), la même combinaison linéaire de coefficients $l_1, \dots, l_i, \dots, l_n$. Nous désignerons cette expression sous la forme CLE [S] ($l_1, \dots, l_i, \dots, l_n$) et la noterons symboliquement : $\sum_{i=1}^n l_i E_i$.

Une fois explicitée, l'expression formelle $\sum_{i=1}^n l_i MG_i = \sum_{i=1}^n l_i MD_i$ génère l'équation :

$$\sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n l_i a_{ij} \right) x_j = \sum_{i=1}^n l_i b_i.$$

Nous dirons que CLE [S] ($l_1, \dots, l_i, \dots, l_n$) engendre cette équation.

Remarques :

- 1) $\sum_{i=1}^n l_i MG_i = \sum_{i=1}^n l_i \left(\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n l_i a_{ij} \right) x_j$. Il en résulte que $\sum_{i=1}^n l_i MG_i$ est une forme linéaire sur K , dont les coefficients sont : $\sum_{i=1}^n l_i a_{ij}$ ($1 \leq j \leq p$). Notons que $\sum_{i=1}^n l_i MG_i$ peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} l_1 & \dots & l_i & \dots & l_n \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_p \end{bmatrix}.$$

Notons de même (cf. Remarque page 8, précédant la Section 1.2) que l'équation engendrée par CLE [S] $(l_1, \dots, l_i, \dots, l_n)$ peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} l_1 & \dots & l_i & \dots & l_n \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & \dots & l_i & \dots & l_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

- 2) Si $\sum_{i=1}^n l_i MG_i$ engendre la forme linéaire nulle, on écrira l'équation obtenue sous la forme symbolique : $0x = \sum_{i=1}^n l_i MD_i$. Si $\sum_{i=1}^n l_i MD_i \neq 0$, l'équation obtenue est l'équation impossible E_{imp} , sinon l'équation obtenue est l'équation nulle E_0 .
- 3) Il est clair que la CLE [S] $(0, \dots, 0, \dots, 0)$, correspondant à $l_1 = \dots = l_i = \dots = l_n = 0$, engendre l'équation nulle E_0 . Si le système (S) est de Cramer, alors il s'agit de l'unique CLE engendrant l'équation nulle. Sinon, il existe d'autres CLE, à coefficients l_i non tous nuls, engendrant soit l'équation nulle E_0 , soit l'équation impossible E_{imp} , en fonction de la valeur, nulle ou non nulle, que prend le membre de droite $\sum_{i=1}^n l_i MD_i$.
- 4) Plus généralement, si le système (S) n'est pas de Cramer, deux CLE formellement différentes $\sum_{i=1}^n l_i' MG_i = \sum_{i=1}^n l_i' MD_i$ et $\sum_{i=1}^n l_i'' MG_i = \sum_{i=1}^n l_i'' MD_i$ (avec : $l_i' \neq l_i''$, pour au moins une valeur i , $1 \leq i \leq n$) peuvent engendrer deux équations identiques (cf. Définition 2).
- 5) Prise individuellement, toute équation E_{i_0} ($1 \leq i_0 \leq n$) de (S) est elle-même engendrée par une CLE : il s'agit de la CLE dont tous les coefficients l_i sont nuls, à l'exception de l_{i_0} qui vaut 1.
- 6) Si l'on considère une équation E_{i_0} ($1 \leq i_0 \leq n$) de (S), alors toute équation semblable à E_{i_0} , - et donc de la forme $k E_{i_0}$, $k \in K^*$ (cf. Définition 2) -, est engendrée par la CLE dont tous les coefficients l_i sont nuls, à l'exception de l_{i_0} qui vaut k .

Théorème 15. *Toute combinaison linéaire de CLE d'un système (S) est une CLE de (S).*

Preuve : immédiate.

Théorème 16. Soit (S) un système de n équations à p inconnues, supposé compatible.
 Soit : $X_0 = (x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_p^0)$ un p -uplet de $\mathbb{K}^p$ constituant une solution de (S).
 Alors X_0 est solution de l'équation engendrée par toute CLE de (S).

Preuve :

Soit CLE [S] $(l_1, \dots, l_i, \dots, l_n)$, avec : $l_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$, une CLE quelconque de (S).

Celle-ci s'écrit en toute généralité : $\sum_{i=1}^n l_i \text{MG}_i = \sum_{i=1}^n l_i \text{MD}_i$. Il est immédiat que :

$$\text{MG}_i(X_0) = \text{MD}_i(X_0), \forall i = 1 \text{ à } n \Rightarrow \sum_{i=1}^n l_i \text{MG}_i(X_0) = \sum_{i=1}^n l_i \text{MD}_i(X_0).$$

X_0 est donc solution de l'équation engendrée par la CLE de (S) concernée.

4.2. Ensemble dérivé EQU(S)

Définition 17. Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues.

Les équations distinctes (non-identiques) (cf. Définition 2) engendrées par l'ensemble des CLE applicables à (S) sont dénommées équations dérivées de (S). Nous désignerons par EQU(S) l'ensemble des équations dérivées de (S) et nommerons cet ensemble : ensemble dérivé de (S).

Remarques :

- 1) Nous éliminons ainsi de EQU(S) les « doublons » qui sont liés aux équations identiques (cf. Définition 2) engendrées par des CLE formellement distinctes (cf. Remarques 3 et 4 page 14), lorsque le système (S) n'est pas de Cramer.
- 2) Il est clair que EQU(S) est un sur-ensemble de (S) : $(S) \subseteq \text{EQU}(S)$.
 Si $\mathbb{K}$ n'est pas un corps fini, l'égalité $(S) = \text{EQU}(S)$ n'a lieu que lorsque (S) ne contient que des équations nulles E_0 .
- 3) EQU(S) contient notamment toutes les équations semblables (cf. Définition 2) aux n équations constitutives de (S).
- 4) Alors que : cardinal (S) = n , le cardinal de EQU(S) est infini (sauf si $\mathbb{K}$ est un corps fini).

Théorème 18. Soit EQU(S) l'ensemble dérivé d'un système (S) de n équations à p inconnues. Nous supposons que $n \geq 2$ et que (S) ne contient pas que des équations impossibles E_{imp} .

- (1) $\exists 2 \text{ équations incompatibles} \in \text{EQU}(S) \Rightarrow E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S)$.
- (2) $E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S) \Rightarrow \nexists d' \text{équations incompatibles} \in \text{EQU}(S)$.
- (3) $E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S) \Rightarrow \exists (\text{au moins}) 2 \text{ équations incompatibles} \in \text{EQU}(S)$.
- (4) $\nexists d' \text{équations incompatibles} \in \text{EQU}(S) \Rightarrow E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S)$.

Preuve :

Point (1) : EQU(S) contient, par hypothèse, 2 équations E_a et E_b incompatibles. Posons :

$$E_a : f = b_1 \quad \text{et} \quad E_b : kf = kb_2 \quad (b_1 \in K, b_2 \in K, b_2 \neq b_1, k \in K^*),$$

$$\text{avec : } f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p.$$

L'équation issue de la combinaison linéaire $(kE_a - E_b)$ appartient à l'ensemble EQU(S).

$$\text{Cette équation s'écrit : } kf - kf = kb_1 - kb_2, \text{ soit encore : } 0x = k(b_1 - b_2).$$

Et comme : $b_2 \neq b_1$, $E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S)$.

Point (2) : Il s'agit de la contraposée du Point (1).

Point (3) : Les hypothèses imposent que $E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S)$ et que (S), - et donc EQU(S) -, renferme au moins une équation E_c différente de E_{imp} . De ce fait, EQU(S) contient :

- une équation E_{imp} de la forme : $0x = b_1$, avec $b_1 \in K^*$,
- une équation E_c de la forme : $f = b_2$, avec : $f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p$ et $b_2 \in K$.

L'équation E_d issue de la combinaison linéaire $(E_{\text{imp}} + E_c)$ appartient à EQU(S). Cette équation s'écrit : $f = b_1 + b_2$. Il en découle que EQU(S) contient $E_c : f = b_2$ et $E_d : f = b_1 + b_2$. Or les équations E_c et E_d sont incompatibles, puisqu'en effet : $b_1 \in K^* \Rightarrow b_1 + b_2 \neq b_2$.

Point (4) : Il s'agit de la contraposée du Point (3).

Remarque :

Le Théorème 18 permet, dans l'étude d'un système (S), de se limiter à la recherche d'équations impossibles E_{imp} dans l'ensemble EQU(S). Autrement dit, nous pouvons nous contenter de chercher à déterminer si : $E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S)$, ou si : $E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S)$, sans nous préoccuper de l'existence ou non d'équations incompatibles dans cet ensemble. La présence d'équations incompatibles dans EQU(S) garantit en effet celle de E_{imp} , et réciproquement.

Théorème 19. Soit EQU(S) l'ensemble dérivé d'un système (S) de n équations à p inconnues.

(1) $E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S) \Rightarrow (S) \text{ incompatible.}$

(2) $(S) \text{ compatible} \Rightarrow E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S).$

Preuve :

Point (1) : Supposons à la fois : $E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S)$ et (S) compatible.

Soit alors $(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_p^0)$ un p -uplet de K^n constituant une solution de (S).

Il s'ensuit que les n équations E_i , $1 \leq i \leq n$, constitutives de (S), sont satisfaites pour $x_j = x_j^0$, $j = 1$ à p .

Soit E une équation quelconque de $\text{EQU}(S)$. D'après le Théorème 16, E est nécessairement satisfaite pour $x_j = x_j^0$, $j = 1$ à p . Comme E possède (au moins) une solution, E ne peut donc être une équation impossible E_{imp} . Contradiction avec l'hypothèse de départ : (S) est donc incompatible.

Point 2 : Il s'agit de la contraposée du Point (1).

Théorème 20. Soient (S) et (S') deux systèmes linéaires de n équations à p inconnues.

$$(S) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S') \Rightarrow \text{EQU}(S) = \text{EQU}(S').$$

Preuve :

Par hypothèse : $(S) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S')$. Par suite :

$$\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ telle que : } A' = P \cdot A \text{ et } B' = P \cdot B.$$

$$\begin{aligned} \text{Explicitons : } A &= [a_{i,j}], 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p. \quad A' = [a'_{i,j}], 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p. \\ B &= [b_i], 1 \leq i \leq n, \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}). \quad B' = [b'_i], 1 \leq i \leq n, \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}). \\ P &= [p_{i,j}], 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p. \end{aligned}$$

Soit E_k , $1 \leq k \leq n$, une équation de (S) .

$$E_k \text{ s'écrit : } MG_k = MD_k, \text{ ou plus explicitement : } a_{k1}x_1 + \dots + a_{kp}x_p = b_k.$$

$P \cdot A$ et $P \cdot B$ s'écrivent sous la forme suivante (où $\sum$ représente la sommation $\sum_{k=1}^n$) :

$$P \cdot A = \begin{bmatrix} \sum p_{1k}a_{k1} & \dots & \sum p_{1k}a_{kp} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum p_{ik}a_{k1} & \dots & \sum p_{ik}a_{kp} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum p_{nk}a_{k1} & \dots & \sum p_{nk}a_{kp} \end{bmatrix}; \quad P \cdot B = \begin{bmatrix} \sum p_{1k}b_k \\ \dots \\ \sum p_{ik}b_k \\ \dots \\ \sum p_{nk}b_k \end{bmatrix}.$$

L'équation figurant à la $i^{\text{ème}}$ ligne de (S') , soit E'_i , s'écrit donc :

$$\sum p_{ik}a_{k1}x_1 + \dots + \sum p_{ik}a_{kp}x_p = \sum p_{ik}b_k, \text{ soit :}$$

$$\sum p_{ik}(a_{k1}x_1 + \dots + a_{kp}x_p) = \sum p_{ik}b_k, \text{ soit encore :}$$

$$\sum p_{ik}MG_k = \sum p_{ik}MD_k.$$

$$\text{On en déduit que : } MG'_i = \sum_{k=1}^n p_{ik}MG_k \text{ et } MD'_i = \sum_{k=1}^n p_{ik}MD_k.$$

$$(\text{On peut écrire symboliquement l'équation } MG'_i = MD'_i \text{ sous la forme : } E'_i = \sum_{k=1}^n p_{ik}E_k).$$

Toute équation de (S') est donc engendrée par une CLE de (S) (mettant en jeu les éléments de la matrice P). Inversement, toute équation de (S) est engendrée par une CLE de (S') (mettant en jeu les éléments de la matrice inverse P^{-1}).

Soit E une équation dérivée de (S) . E est engendrée par une CLE de (S) . Il découle de ce qui précède et du Théorème 15 que E est aussi engendrée par une CLE de (S') . Donc E est une équation dérivée de (S') .

On démontre de même que, réciproquement, si E' est une équation dérivée de (S') , alors E' est aussi une équation dérivée de (S) .

De ce fait, $\text{EQU}(S)$ et $\text{EQU}(S')$ contiennent les mêmes équations.

Et donc : $\text{EQU}(S) = \text{EQU}(S')$.

Théorème 21. Soient deux systèmes équivalents (S) et (S') : $(S) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S')$.

$$E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S) \Leftrightarrow E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S').$$

$$E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S) \Leftrightarrow E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S').$$

Preuve :

Conséquence immédiate du Théorème 20 ci-dessus puisque :

$$(S) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S') \Rightarrow \text{EQU}(S) = \text{EQU}(S').$$

5. Méthodes de résolution d'un système linéaire d'équations - Condition nécessaire et suffisante de compatibilité (critère de compatibilité CC) d'un système linéaire d'équations

Définition 22. Une méthode de résolution d'un système linéaire (S) de n équations à p inconnues est un algorithme fini (comptant donc un nombre fini d'étapes) permettant de détecter une condition d'incompatibilité de (S) , à savoir l'apparition d'une équation impossible E_{imp} (1), ou de transformer (S) en un système équivalent dont la résolution est évidente.

Autrement dit, une méthode de résolution d'un système (S) est un algorithme fini permettant de savoir si $S(S) \neq \emptyset$ ou si $S(S) = \emptyset$, et, dans ce dernier cas, de déterminer $S(S)$.

Théorème 23. Il existe (au moins) une méthode de résolution pour tout système linéaire (S) de n équations à p inconnues.

Preuve : Résultat classique.

La méthode d'élimination/substitution successive des inconnues d'un système (S) de n équations à p inconnues procède par composition de transformations de type $T[P]$ (cf. Définition 12), jusqu'à détection d'une équation impossible E_{imp} (1), (et dans ce cas $S(S) = \emptyset$), ou, jusqu'à obtention au bout d'un nombre fini d'étapes (lorsque $S(S) \neq \emptyset$), d'un système à inconnues échelonnées, équivalent à (S) , dont la résolution est évidente, (ce qui permet dès lors de déterminer $S(S)$).

Remarque :

La mise en œuvre effective d'une méthode de résolution peut s'avérer extrêmement lourde, voire quasiment impossible dans la pratique, pour des valeurs élevées de n et p . Mais c'est l'existence d'une méthode de résolution qui nous importe pour la suite de cette étude, non sa mise en application.

Théorème 24 - Réciproque du Théorème 19. Soit $\text{EQU}(S)$ l'ensemble dérivé d'un système linéaire (S) de n équations à p inconnues.

(1) (S) incompatible $\Rightarrow E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S)$.

(2) $E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S) \Rightarrow (S)$ compatible.

Preuve :

Point 2 : Le point-clé de la démonstration réside dans l'existence d'une méthode de résolution applicable à tout système linéaire de n équations à p inconnues.

-
- (1) Rappelons que la méthode de résolution choisie peut se « désintéresser » de la recherche d'éventuelles équations incompatibles (cf. Théorème 18 et Remarque à sa suite) et se contenter de détecter l'apparition d'une équation impossible E_{imp} (une seule suffit !).

Soit (S_0) un système linéaire de n équations à p inconnues.

Par hypothèse : $E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_0)$. Nous allons démontrer que, dans ce cas, (S_0) est nécessairement compatible, autrement dit que la méthode de résolution choisie aboutira forcément à un système équivalent à (S_0) dont la résolution est évidente.

L'entier fini I_{max} (1) désigne le nombre maximum d'itérations requises par l'algorithme de la méthode de résolution choisie, lorsque (S_0) est compatible.

Au cours du processus de résolution, - et toujours si (S_0) est compatible -, la méthode choisie va, à chaque itération, transformer (S_0) en un système équivalent (S_i) , $0 \leq i \leq I_{\text{max}}$, par composition de transformations de type $T[P]$ (cf. Définition 12), selon le schéma suivant :

$$(S_0) \xrightarrow{T[P(1)]} (S_1) \dots (S_{i-1}) \xrightarrow{T[P(i)]} (S_i) \dots (S_{I_{\text{max}}-1}) \xrightarrow{T[P(I_{\text{max}})]} (S_{I_{\text{max}}}).$$

Ce processus se poursuit jusqu'à obtention d'un ultime système équivalent $(S_{I_{\text{max}}})$ dont la résolution est évidente.

Raisonnons maintenant par l'absurde en supposant (S_0) non compatible. Démontrons que cette hypothèse est contradictoire avec l'axiome de départ : $E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_0)$. En effet :

$$(S_0) \text{ non compatible} \Rightarrow \exists i_0, 0 \leq i_0 \leq I_{\text{max}} \text{ tel que : } E_{\text{imp}} \in (S_{i_0}) \text{ (cf. Note (1) page 19).}$$

$$\text{Comme } (S_{i_0}) \subset \text{EQU}(S_{i_0}) : E_{\text{imp}} \in (S_{i_0}) \Rightarrow E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_{i_0}).$$

Mais les systèmes (S_{i_0}) et (S_0) sont équivalents. Donc, d'après le Théorème 20 :

$$(S_{i_0}) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_0) \Rightarrow \text{EQU}(S_{i_0}) = \text{EQU}(S_0).$$

Et finalement, d'après le Théorème 21 :

$$E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_{i_0}) \Rightarrow E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_0).$$

Contradiction avec l'hypothèse de départ et le système d'équations (S_0) donné au départ est donc nécessairement compatible.

Point 1 : Il s'agit de la contraposée du Point 2.

(1) Il importe peu que l'entier I_{max} dépende ou non du système (S_0) donné au départ, ou qu'il dépende du nombre d'équations figurant dans (S_0) (ce qui n'est généralement pas le cas) ou qu'il dépende du nombre p d'inconnues figurant dans (S_0) (ce qui est généralement le cas). L'essentiel est que cet entier fini I_{max} existe.

Théorème 25-1 - Critère de compatibilité (CC) d'un système linéaire d'équations (S) - (1^{ère} formulation). Soient (S) un système linéaire de n équations à p inconnues et EQU(S) l'ensemble dérivé de (S).

$$\begin{cases} \text{(S) incompatible} \Leftrightarrow E_{\text{imp}} \in \text{EQU(S)} \\ \text{(S) compatible} \Leftrightarrow E_{\text{imp}} \notin \text{EQU(S)} \end{cases}.$$

Preuve :

Le Théorème 25-1 rassemble en une seule proposition les résultats énoncés par les Théorèmes 19 et 24.

Théorème 25-2 - Critère de compatibilité (CC) d'un système linéaire d'équations (S) - (2^{ème} formulation). Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues, associé aux matrices A et B.

(S) s'écrit : $A \cdot X = B$, avec : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

tA désigne la matrice transposée de A. tB désigne la matrice transposée de B.

Soit (t SH) le système homogène suivant, de p équations à n inconnues (1) :

$${}^tA \cdot \Lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n, \text{ dans lequel } \Lambda = \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_i \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ désigne l'inconnue.}$$

Soit $\{\Lambda_h\}$ l'ensemble des solutions de (t SH). Alors :

(S) compatible $\Leftrightarrow$ Pour toute solution Λ_h de (SH) : ${}^tB \cdot \Lambda_h = 0$.

Preuve :

Nous allons en fait démontrer l'équivalence :

(S) incompatible $\Leftrightarrow \exists$ (au moins) une solution Λ_h de (t SH) telle que : ${}^tB \cdot \Lambda_h \neq 0$,

ou, ce qui revient au même, compte tenu du Théorème 25-1 :

$E_{\text{imp}} \in \text{EQU(S)} \Leftrightarrow \exists$ (au moins) une solution Λ_h de (t SH) telle que : ${}^tB \cdot \Lambda_h \neq 0$.

(1) (t SH) sera dénommé : système homogène transposé associé à (S). Bien noter, qu'en raison de la présence de la matrice transposée tA , (t SH) est effectivement un système linéaire de p équations à n inconnues.

En effet : $E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S) \Leftrightarrow \exists$ (au moins) une équation dérivée de (S) de la forme $0x = b, b \in K^*$.

Donc : $E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S) \Leftrightarrow \exists$ (au moins) une CLE [S] $(l_1, \dots, l_i, \dots, l_n), l_i \in B, 1 \leq i \leq n$, engendrant une équation de la forme $0x = b, b \in K^*$.

On a alors simultanément : $\sum_{i=1}^n l_i \text{MG}_i = 0x$ et $\sum_{i=1}^n l_i \text{MD}_i = b$.

Or (cf. Remarque 1 pages 13 et 14) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n l_i \text{MG}_i = 0x &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} l_1 & \dots & l_i & \dots & l_n \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow {}^t A \begin{bmatrix} l_1 \\ \dots \\ l_i \\ \dots \\ l_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \Lambda_h = \begin{bmatrix} l_1 \\ \dots \\ l_i \\ \dots \\ l_n \end{bmatrix} \text{ est solution du système} \\ &\text{homogène (} {}^t \text{SH).} \end{aligned}$$

Par ailleurs (cf. toujours Remarque 1 pages 13 et 14) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n l_i \text{MD}_i = b &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} l_1 & \dots & l_i & \dots & l_n \end{bmatrix} B = b \Leftrightarrow {}^t B \begin{bmatrix} l_1 \\ \dots \\ l_i \\ \dots \\ l_n \end{bmatrix} = b \\ &\Leftrightarrow {}^t B \Lambda_h = b, \text{ avec : } b \in K^* \\ &\Leftrightarrow {}^t B \Lambda_h \neq 0. \end{aligned}$$

La 2^{ème} formulation du critère de compatibilité (CC) d'un système d'équations (S) est ainsi démontrée.

6. Lien entre le critère de compatibilité CC d'un système linéaire d'équations et le Théorème de Rouché-Fontené - Démonstration inédite du Théorème de Rouché-Fontené

Le critère CC défini par les Théorèmes 25-1 et 25-2 représente une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système d'équations (S) soit compatible. Tel est également le cas du Théorème de Rouché-Fontené. Il est dès lors judicieux de s'interroger sur la possibilité de faire la jonction entre l'un et l'autre.

Rappelons tout d'abord l'énoncé du Théorème de Rouché-Fontené.

K désigne le corps de base, ici $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues. Nous supposons $p \geq n$ (1).

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_p = b_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_p = b_i \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_p = b_n \end{cases}$$

Les coefficients a_{ij} ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$), les scalaires b_i ($1 \leq i \leq n$) et les inconnues x_j ($1 \leq j \leq p$) sont donc des éléments de K .

La matrice A associée au membre de gauche de (S) est la matrice $[a_{ij}]$ de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

La matrice B associée au membre de droite de (S) est la matrice $[b_i]$ de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$.

Si l'on pose $X = [x_j] \in \mathcal{M}_{p,1}(K)$, (S) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$(S) \quad A \cdot X = B.$$

Soit r le rang de A et soit Δ une sous-matrice carrée principale de A . On a donc : $\delta = \det(\Delta) \neq 0$. δ est dénommé déterminant principal de A .

Les inconnues qui sont associées aux coefficients de Δ sont dénommées inconnues principales.

Les coefficients figurant dans les lignes de Δ sont empruntés à des lignes d'équation de (S) qui sont dénommées équation principales.

- (1) Si $p < n$, on considèrera le système réduit (Sr) correspondant (par exemple) aux p premières lignes d'équation et l'on cherchera à résoudre (Sr). Si (Sr) est incompatible, (S) est incompatible. Si (Sr) est compatible, et si l'on peut déterminer l'ensemble de ses solutions, on vérifiera si toutes les solutions de (Sr) sont compatibles ou non avec (S).

A noter que le critère CC s'accommode parfaitement au cas $p < n$.

Sans rien perdre en généralité, on peut toujours considérer (quitte à permuter les lignes d'équation et à renuméroter les inconnues) que les inconnues principales sont les r premières et que les équations principales sont les r premières.

Avec cette hypothèse : $\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix}$ et $\delta = \det(\Delta) \neq 0$.

Introduisons alors les $(n-r)$ déterminants γ_q ($q = r+1, \dots, n$) relatifs aux matrices d'ordre $(r+1)$ obtenues en bordant Δ de la façon suivante :

$$\gamma_q = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \dots & \Delta & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{q1} & \dots & a_{qr} & b_q \end{bmatrix}.$$

Les $(n-r)$ déterminants γ_q ($q = r+1, \dots, n$) sont dénommés déterminants caractéristiques relatifs aux équations non principales.

Théorème de Rouché-Fontené. Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues ($p \geq n$), de rang r .

- (1) si $r = n$, (S) est compatible. On donne aux $(p-n)$ inconnues non principales des valeurs quelconques et l'on résout le système de Cramer aux $r = n$ inconnues principales.
- (2) si $r < n$, et si : $\exists q (q = r+1, \dots, n)$ tel que $\gamma_q \neq 0$: (S) est incompatible.
- (3) si $r < n$, et si : $\forall q (q = r+1, \dots, n) \gamma_q = 0$: (S) est compatible.

L'apport fondamental du Théorème de Rouché-Fontené réside dans les Points (2) et (3).

Nous nous placerons donc dans l'hypothèse $r < n \leq p$ dans ce qui va suivre.

Les notations utilisées ci-après sont les mêmes que précédemment.

Preuve du lien entre le critère de compatibilité CC et le Théorème de Rouché-Fontené :

Nous nous servirons de la 2^{ème} formulation du critère CC (Théorème 25-2).

$$(S) \text{ peut s'écrire : } \begin{cases} \dots \\ MG_i = b_i \quad (1 \leq i \leq n). \\ \dots \end{cases}$$

Soient l_i ($1 \leq i \leq n$) n éléments de K .

La combinaison linéaire la plus générale des membres de gauche de (S) s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n l_i \text{MG}_i = \sum_{i=1}^n l_i \left(\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n l_i a_{ij} \right) x_j \quad (\text{Cf. Remarque 1 page 13}).$$

Il s'agit donc d'une forme linéaire sur $\mathbb{K}$, dont les coefficients sont : $\sum_{i=1}^n l_i a_{ij} \quad (1 \leq j \leq p)$.

Cette forme linéaire est la forme linéaire nulle (nous la noterons symboliquement $0x$) si et seulement si :

$\sum_{i=1}^n l_i a_{ij} = 0 \quad (1 \leq j \leq p)$. Cette condition peut également s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} l_1 & \dots & l_i & \dots & l_n \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{cf. Preuve pages 21 et 22 du Théorème 25-2}),$$

ou encore, après transposition : $({}^t\text{SH}) : {}^tA \begin{bmatrix} l_1 \\ \dots \\ l_i \\ \dots \\ l_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$.

$({}^t\text{SH})$ étant le système homogène transposé de (S) (cf. Note 1 page 21).

La matrice tA (transposée de A) s'écrit, en faisant apparaître la matrice ${}^t\Delta$:

$${}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{r1} & a_{r+1\ 1} & \dots & a_{n1} \\ \dots & {}^t\Delta & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1r} & \dots & a_{rr} & a_{r+1\ r} & \dots & a_{nr} \\ a_{1r+1} & \dots & a_{rr+1} & a_{r+1\ r+1} & \dots & a_{nr+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1p} & \dots & a_{rp} & a_{r+1\ p} & \dots & a_{np} \end{bmatrix}.$$

Bien évidemment : $\delta = \det({}^t\Delta) \neq 0$.

Nous sommes ainsi amenés à résoudre le système homogène $({}^t\text{SH})$ aux n inconnues $l_1, \dots, l_i, \dots, l_n$.

$({}^t\text{SH})$ s'écrit :

$$\begin{cases} a_{11}l_1 + \dots + a_{r1}l_r + a_{r+1\ 1}l_{r+1} + \dots + a_{n1}l_n = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1r}l_1 + \dots + a_{rr}l_r + a_{r+1\ r}l_{r+1} + \dots + a_{nr}l_n = 0 \\ a_{1r+1}l_1 + \dots + a_{rr+1}l_r + a_{r+1\ r+1}l_{r+1} + \dots + a_{nr+1}l_n = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1p}l_1 + \dots + a_{rp}l_r + a_{r+1\ p}l_{r+1} + \dots + a_{np}l_n = 0 \end{cases}.$$

Conformément à la théorie classique, $({}^t\text{SH})$ de rang r a le même ensemble de solutions que le sous-système réduit $({}^t\text{SH}_r)$ obtenu en ne retenant dans $({}^t\text{SH})$ que les r équations principales.

$({}^t\text{SH } r)$ s'écrit donc :

$$\begin{cases} a_{11}l_1 + \dots + a_{r1}l_r + a_{r+1\ 1}l_{r+1} + \dots + a_{n1}l_n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \cdot \\ a_{1\ r}l_1 + \dots + a_{rr}l_r + a_{r+1\ r}l_{r+1} + \dots + a_{nr}l_n = 0 \end{cases}$$

$({}^t\text{SH}r)$ (et donc $({}^t\text{SH})$) est toujours compatible.

Toujours conformément à la théorie classique, on peut fixer arbitrairement la valeur des $(n-r)$ inconnues non principales $l_{r+1}, \dots, l_n$.

Nous pouvons donc poser :

$l_q = \Lambda_q$ ($q = r+1, \dots, n$), où Λ_q désigne un paramètre à valeur (arbitraire) dans $\mathbb{K}$.

Le système (^tSH_r) apparaît alors comme un système de Cramer de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}l & + & \dots & + & a_{r1}l_r & = & - \sum_{q=r+1}^n a_{q1}\Lambda_q \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{1r}l & + & \dots & + & a_{rr}l_r & = & - \sum_{q=r+1}^n a_{qr}\Lambda_q \end{array} \right. .$$

(${}^t\text{SH r}$) (et donc (${}^t\text{SH}$)) admet donc la solution suivante, donnée par la formule de Cramer :

$$l_1 = -\frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} \begin{matrix} \text{colonne 1} \\ \downarrow \end{matrix} & & & & \\ \sum_{q=r+1}^n a_{q1} \Lambda_q & \dots & a_{k1} & \dots & a_{r1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{q=r+1}^n a_{qr} \Lambda_q & \dots & a_{kr} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix},$$

• • • •

$$l_k = -\frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} & & \text{colonne } k \\ & & \downarrow \\ a_{r1} & \dots & \sum_{q=r+1}^n a_{q1} \Lambda_q & \dots & a_{r1} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1r} & \dots & \sum_{q=r+1}^n a_{qr} \Lambda_q & \dots & a_{rr} \end{vmatrix},$$

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

....

$$l_r = -\frac{1}{\delta} \begin{array}{c} \text{colonne } r \\ \downarrow \\ \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & \dots & a_{k1} & \dots & \sum_{q=r+1}^n a_{q1} \Lambda_q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1r} & \dots & a_{kr} & \dots & \sum_{q=r+1}^n a_{qr} \Lambda_q \end{array} \right| \end{array}.$$

$l_1, \dots, l_k, \dots, l_r$ s'écrivent également sous la forme développée suivante, en faisant apparaître les r déterminants $d(q,1), \dots, d(q,k), \dots, d(q,r)$.

$$l_1 = -\frac{1}{\delta} \sum_{q=r+1}^n \Lambda_q d(q,1), \text{ avec : } d(q,1) = \begin{array}{c} \text{colonne } 1 \\ \downarrow \\ \left| \begin{array}{cccc} a_{q1} & \dots & a_{k1} & \dots & a_{r1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{qr} & \dots & a_{kr} & \dots & a_{rr} \end{array} \right|, \end{array}$$

...

$$l_k = -\frac{1}{\delta} \sum_{q=r+1}^n \Lambda_q d(q,k), \text{ avec : } d(q,k) = \begin{array}{c} \text{colonne } k \\ \downarrow \\ \left| \begin{array}{cccc} a_{r1} & \dots & a_{q1} & \dots & a_{r1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1r} & \dots & a_{qr} & \dots & a_{rr} \end{array} \right|, \end{array}$$

...

$$l_r = -\frac{1}{\delta} \sum_{q=r+1}^n \Lambda_q d(q,r), \text{ avec : } d(q,r) = \begin{array}{c} \text{colonne } r \\ \downarrow \\ \left| \begin{array}{cccc} a_{r1} & \dots & a_{k1} & \dots & a_{q1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1r} & \dots & a_{kr} & \dots & a_{qr} \end{array} \right|. \end{array}$$

Calculons l'expression $-\delta \sum_{i=1}^n b_i l_i$ en la scindant en deux :

$$-\delta \sum_{i=1}^n b_i l_i = -\delta \sum_{k=1}^r b_k l_k - \delta \sum_{q=r+1}^n b_q l_q.$$

D'une part :

$$\begin{aligned} -\delta \sum_{k=1}^r b_k l_k &= -\delta (b_1 l_1 + \dots + b_k l_k + \dots + b_r l_r) \\ &= \sum_{q=r+1}^n b_1 \Lambda_q d(q,1) + \dots + \sum_{q=r+1}^n b_k \Lambda_q d(q,k) + \dots + \sum_{q=r+1}^n b_r \Lambda_q d(q,r). \end{aligned}$$

D'autre part :

$$-\delta \sum_{q=r+1}^n b_q l_q = -\delta \sum_{q=r+1}^n b_q \Lambda_q.$$

Donc :

$$\begin{aligned} -\delta \sum_{i=1}^n b_i l_i &= \sum_{q=r+1}^n b_1 \Lambda_q d(q,1) + \dots + \sum_{q=r+1}^n b_k \Lambda_q d(q,k) + \dots + \sum_{q=r+1}^n b_r \Lambda_q d(q,r) - \delta \sum_{q=r+1}^n b_q \Lambda_q \\ &= \sum_{q=r+1}^n \Lambda_q [b_1 d(q,1) + \dots + b_k d(q,k) + \dots + b_r d(q,r) - b_q \delta] \end{aligned}$$

Posons :

$$C_q = b_1 d(q,1) + \dots + b_k d(q,k) + \dots + b_r d(q,r) - b_q \delta \quad (1)$$

$$= \left[\sum_{k=1}^r b_k d(q,k) \right] - b_q \delta \quad (1bis)$$

Il vient alors :

$$-\delta \sum_{i=1}^n b_i l_i = \sum_{q=r+1}^n C_q \Lambda_q \quad (2)$$

Comme on le constate, chacun des r déterminants $d(q,1), \dots, d(q,k), \dots, d(q,r)$ définis

ci-dessus contient la colonne $\begin{bmatrix} a_{q1} \\ \dots \\ a_{qr} \end{bmatrix}$, respectivement à l'indice-colonne : $1, \dots, k, \dots, r$.

Réécrivons $d(q,1), \dots, d(q,k), \dots, d(q,r)$ en déplaçant, par transposition des colonnes,

la colonne $\begin{bmatrix} a_{q1} \\ \dots \\ a_{qr} \end{bmatrix}$ en dernière position (c.-à-d. à l'emplacement de la colonne d'indice r).

Pour $d(q,1)$, l'opération nécessite $(r-1)$ transpositions.

...

Pour $d(q,k)$, l'opération nécessite $(r-k)$ transpositions.

...

Pour $d(q,r)$, l'opération nécessite 0 transposition.

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

On obtient ainsi les r déterminants $\delta(q,1), \dots, \delta(q,k), \dots, \delta(q,r)$ suivants :

$$\delta(q,1) = \begin{array}{cccccc} \text{col.1} & & \text{col.}(k-1) & \text{col.}k & \text{col.}(r-1) & \text{col.}r \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{k1} & a_{k+1\ 1} & \dots & a_{r1} & a_{q1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2r} & \dots & a_{kr} & a_{k+1\ r} & \dots & a_{rr} & a_{qr} \end{vmatrix} \end{array} = (-1)^{r-1} d(q,1),$$

...

$$\delta(q,k) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{k-1\ 1} & a_{k+1\ 1} & \dots & a_{r1} & a_{q1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1r} & \dots & a_{k-1\ r} & a_{k+1\ r} & \dots & a_{rr} & a_{qr} \end{vmatrix} = (-1)^{r-k} d(q,k),$$

...

$$\delta(q,r) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{k-1\ 1} & a_{k1} & \dots & a_{r-1\ 1} & a_{q1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1r} & \dots & a_{k-1\ r} & a_{kr} & \dots & a_{r-1\ r} & a_{qr} \end{vmatrix} = (-1)^0 d(q,r).$$

En introduisant les r déterminants $\delta(q,1), \dots, \delta(q,k), \dots, \delta(q,r)$, les coefficients C_q ($q = r+1, \dots, n$) (cf. relations (1) et (1bis)) s'écrivent :

$$C_q = (-1)^{r-1} b_1 \delta(q,1) + \dots + (-1)^{r-k} b_k \delta(q,k) + \dots + (-1)^0 b_r \delta(q,r) - b_q \delta \quad (3)$$

$$C_q = \left[\sum_{k=1}^r (-1)^{r-k} b_k \delta(q,k) \right] - b_q \delta \quad (3\text{bis})$$

Le critère de compatibilité (2^{ème} formulation) énoncé par le Théorème 25-2 stipule que, pour que le système (S) soit compatible, la condition nécessaire et suffisante suivante doit être remplie :

$$(S) \text{ compatible} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n b_i l_i = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour toutes les solutions} \\ (l_1, \dots, l_i, \dots, l_n) \\ \text{du système homogène (SH).} \end{array} \right. \quad (4)$$

Or : $-\delta \sum_{i=1}^n b_i l_i = \sum_{q=r+1}^n C_q \Lambda_q$ (d'après la relation (2) ci-dessus).

Compte tenu de ce que $\delta \neq 0$, la condition (4) s'écrit sous la forme équivalente :

$$\sum_{q=r+1}^n C_q \Lambda_q = 0, \text{ pour toutes les valeurs (arbitraires) de } \Lambda_{r+1}, \dots, \Lambda_n \quad (4\text{bis})$$

$\sum_{q=r+1}^n C_q \Lambda_q$ est un polynôme du 1^{er} degré aux $(n-r)$ indéterminées $\Lambda_{r+1}, \dots, \Lambda_n$.

Ce polynôme est nul pour toutes les valeurs (arbitraires) de $\Lambda_{r+1}, \dots, \Lambda_n$ si et seulement si ses $(n-r)$ coefficients C_q ($q = r+1, \dots, n$) sont tous nuls.

Autrement dit, la relation (4) s'écrit :

$$(S) \text{ compatible} \Leftrightarrow C_q = 0 \quad (q = r+1, \dots, n) \quad (5)$$

Nous allons démontrer que les $(n-r)$ conditions (5) sont équivalentes à celles énoncées par le Point 3 du Théorème de Rouché-Fontené.

Repartons de l'expression (3).

$$\forall q = r+1, \dots, n :$$

$$C_q = (-1)^{r-1} b_1 \delta(q,1) + \dots + (-1)^{r-k} b_k \delta(q,k) + \dots + (-1)^0 b_r \delta(q,r) - b_q \delta.$$

(5) implique que, $\forall q = r+1, \dots, n :$

$$(-1)^{r-1} b_1 \delta(q,1) + \dots + (-1)^{r-k} b_k \delta(q,k) + \dots + (-1)^0 b_r \delta(q,r) - b_q \delta = 0.$$

En factorisant $(-1)^{r-1}$, on obtient :

$$\forall q = r+1, \dots, n :$$

$$(-1)^{r-1} [b_1 \delta(q,1) + \dots + (-1)^{-k+1} b_k \delta(q,k) + \dots + (-1)^{-r+1} b_r \delta(q,r) + (-1)^{-r} b_q \delta] = 0.$$

Puis, comme $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, $(-1)^{-\alpha} = (-1)^\alpha$:

$$b_1 \delta(q,1) + \dots + (-1)^{k-1} b_k \delta(q,k) + \dots + (-1)^{r-1} b_r \delta(q,r) + (-1)^r b_q \delta = 0 \quad (6)$$

Introduisons alors les $(n-r)$ déterminants D_q ($q = r+1, \dots, n$) :

$$D_q = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{k1} & \dots & a_{r1} & a_{q1} \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ a_{1r} & \dots & a_{kr} & \dots & a_{rr} & a_{qr} \\ b_1 & \dots & b_k & \dots & b_r & b_q \end{vmatrix} \quad (7)$$

En développant D_q par rapport à la dernière ligne, on constate que :

$$D_q = (-1)^{r+2} [b_1 \delta(q,1) + \dots + (-1)^{k-1} b_k \delta(q,k) + \dots + (-1)^{r-1} b_r \delta(q,r) + (-1)^r b_q \delta]$$

$$\text{Si bien que (6) équivaut à : } D_q = 0 \quad (q = r+1, \dots, n) \quad (8)$$

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

Si l'on transpose la matrice apparaissant dans (7), - ce qui ne change pas la valeur du déterminant correspondant -, on reconnaît en D_q ($q = r + 1, \dots, n$) les $(n - r)$ déterminants caractéristiques γ_q ($q = r + 1, \dots, n$) qui interviennent dans le Théorème de Rouché-Fontené.

Le lien entre le critère de compatibilité CC énoncé par les Théorèmes 25-1 et 25-2 et le Théorème de Rouché-Fontené est ainsi établi.

En outre, le raisonnement développé ci-dessus constitue une nouvelle preuve (*a priori* inédite) du Théorème de Rouché-Fontené.