

# Découplage de système lent/rapide appliqué en Economie et Econophysique

Aurélien Hazan

► **To cite this version:**

Aurélien Hazan. Découplage de système lent/rapide appliqué en Economie et Econophysique. Revue des Nouvelles Technologies de l'Information, Hermann, 2012, p.1. <hal-00660806v2>

**HAL Id: hal-00660806**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00660806v2>**

Submitted on 12 Apr 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Découplage de système lent/rapide appliqué en Economie et Econophysique

Aurélien Hazan\*

\* LISSI - Université Paris-Est Créteil (UPEC), IUT de Sénart-Fontainebleau  
aurelien.hazan@u-pec.fr,  
<http://www.lissi.fr>

**Résumé.** La compréhension des phénomènes économiques nécessite de prendre en compte plusieurs échelles de temps simultanément. Nous étudions le cas d'un modèle simple d'épargne, où plusieurs échelles de temps caractéristiques coexistent. Nous montrons qu'il est possible de séparer les contributions lentes et rapides confondues dans une même variable observée en nous appuyant d'une part sur une linéarisation de la dynamique (stochastique et nonlinéaire) autour d'un point d'équilibre, et d'autre part sur un découplage via la transformation de Chang, issue de la théorie de la commande.

Cette approche est originale car elle s'appuie non pas sur les méthodes des séries temporelles (décomposition en tendance, saisons et résidu) mais sur une étude analytique.

Dans un second temps, nous abordons le problème de l'agrégation du comportement d'un grand nombre d'agents, sous l'angle du découplage des composantes lentes/rapides. Nous rendons compte des critiques adressées dans la littérature aux modèles DSGE<sup>1</sup> et examinons la possibilité de découpler un système multi-agents, puis un modèle éconophysique de condensation de la richesse.

## 1 Introduction

De très nombreux phénomènes physiques ou sociaux-économiques sont caractérisés par la coexistence de plusieurs échelles de temps caractéristiques, parfois très distinctes les unes des autres. En économie on peut citer les échelles temporelles suivantes (Blanchard, 2002) : court terme (e.g. marché des biens de consommation, marchés financiers), moyen terme (e.g. marché du travail, monnaie), et long-terme (e.g. croissance, progrès technologique, accumulation du capital, production).

Souvent, on ne dispose pas de modèle mais de données de mesure. Elles mélangent et rendent indiscernables des contributions ayant des échelles de temps caractéristiques différentes. Pour pallier l'absence de modèle, le statisticien proposera d'estimer un modèle paramétrique issu de la théorie des séries temporelles (Brockwell et Davis, 1991). Celui-ci permettra ensuite de séparer la tendance, les fluctuations saisonnières et un résidu aléatoire, qui correspondent à des échelles temporelles distinctes. On peut obtenir des résultats plus précis en suivant la

---

1. Dynamic Stochastic General Equilibrium.

même démarche si on dispose d'un modèle analytique à temps continu dont on pourra tirer un modèle approximé à temps discret de type autorégressif (Box et al., 2008, 11.3.3), tel que :

$$X_t = \sum_{i=0}^p a_i X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (1)$$

A l'inverse dans cet article, pour séparer ces différentes contributions, nous proposons d'utiliser d'une part un modèle analytique à temps continu ainsi qu'un ensemble d'outils tirés de la théorie de la commande, et plus particulièrement de l'analyse des échelles temporelles<sup>2</sup> (Naidu, 2002).

Nous illustrons l'importance de ce point de vue à l'aide du modèle de Solow-Swan, employé aussi bien en Macroéconomie pour décrire les phénomènes de croissance qu'en Microéconomie pour modéliser l'épargne.

Ce modèle sera brièvement décrit en 2. Le principe du découplage des composantes lentes et rapides sera exposé en 3. Des résultats de simulations seront exposés en 4. Dans un second temps, nous abordons le problème de l'agrégation du comportement d'un grand nombre d'agents, du point de vue du découplage. La compatibilité de notre démarche avec des modèles alternatifs tirés notamment des systèmes multi-agents et de l'Econophysique sera évoquée en 5.1 avant de discuter en 6 des perspectives dégagées par ce travail.

## 2 Modèle de Solow-Swan

Nous nous plaçons en temps continu, dans le cas simplifié d'une économie fermée (Barro et Sala-i Martin, 2004) sans dépense publique<sup>3</sup> :

$$Y(t) = C(t) + I(t) \quad (2)$$

où  $Y(t)$  est la production,  $C(t)$  la consommation et  $I(t)$  l'investissement. La production est utilisée en partie pour la consommation et en partie pour investir.

L'équation d'accumulation du capital s'écrit :

$$\dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - \delta K(t) \quad (3)$$

où  $K(t)$  est le capital accumulé, et  $\delta$  le taux de dépréciation du capital. La variation du capital est donc positivement influencée par l'investissement, et négativement par la dépréciation.

Nous posons une fonction de production néoclassique de type AK, avec chocs stochastiques :

$$Y(t) = A e^{z(t)} K^\alpha(t) \quad (4)$$

où  $\alpha$  est l'élasticité,  $A$  une constante et  $z(t)$  un terme de choc autorégressif<sup>4</sup> d'espérance nulle. Le quantité de travail est ici implicitement considérée comme constante.

---

2. "Time Scale Analysis".

3. voir Barro et Sala-i Martin (2004, 1.1) pour une économie ouverte avec dépense publique.

4. i.e. dont la valeur à l'instant  $t$  dépend de ses valeurs passées.

Dans le modèle de Solow-Swan, la consommation et donc l'investissement sont des fonctions linéaires de la production, dont les proportions respectives sont fixées par une constante  $s \in [0, 1]$ , le taux d'épargne. En posant pour simplifier  $A = 1$ , on a :

$$C(t) = (1 - s)Y(t) \quad (5)$$

$$\dot{K}(t) = se^{z(t)}K^\alpha(t) - \delta K(t) \quad (6)$$

On fait l'hypothèse que les chocs productifs sont aléatoires, et obéissent à l'équation suivante :

$$\dot{z}(t) = -rz(t) + \sigma \dot{W}(t) \quad (7)$$

où  $W(t)$  est un bruit blanc<sup>5</sup> centré,  $r > 0$ ,  $\sigma > 0$ . Cette équation correspond à une marche aléatoire (terme  $\dot{W}$ ) amortie de manière exponentielle par le terme  $-rz(t)$ .

Le système ci-dessus, muni de conditions initiales appropriées, admet un équilibre stable qu'on peut approximer en négligeant la partie aléatoire pour  $\sigma$  faible. En fixant  $z(t) = 0$  et  $\dot{K}(t) = 0$ , on obtient :

$$K_\infty \approx \exp\left(\frac{\log \frac{\delta}{s}}{\alpha - 1}\right) \quad (8)$$

Le modèle de Solow est simple mais néanmoins très utilisé pour étudier les phénomènes de croissance au niveau macroéconomique.

Il a été généralisé dans Mankiw et al. (1992), en introduisant la notion de capital humain. Ceci équivaut à ajouter une équation du même type que eq.(6), ce qui ne change pas fondamentalement les propriétés du système, mais a des avantages du point de vue de la régression dans un cadre macro-économique.

Le modèle peut aussi être généralisé comme suit : l'hypothèse de consommation linéaire est abandonnée au profit d'un modèle d'optimisation d'une fonction d'utilité. Le modèle obtenu, dit de Ramsey, peut être ramené à un problème de commande optimale au moyen d'une approximation linéaire quadratique de la fonction d'utilité au voisinage de l'équilibre. Le cas du temps discret est par exemple traité dans Heer et Maussner (2005) mais ne sera pas examiné ici.

### 3 Système lent/rapide et découplage

Le comportement du modèle économique décrit en 2 résulte de l'interaction des deux équations (6,7). Les deux phénomènes associés, accumulation du capital et choc, ont des temps caractéristiques distincts : un choc peut laisser son empreinte plusieurs années dans l'économie, alors qu'un épargnant adaptera son comportement en quelques semaines ou quelques mois. Pour en tenir compte nous introduisons la notion de système lent/rapide.

Soit un système dynamique régi par un système d'équations différentielles linéaire  $\dot{x} = Ax$ ,  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Si les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$  peuvent être réparties en deux groupes clairement distincts, on dira que le système est *lent/rapide*, ou encore qu'il y a *séparation d'échelle*. Dans un cadre non-linéaire, on peut étendre la définition précédente en linéarisant le système en un point.

5. i.e. sa valeur à l'instant  $t$  ne dépend pas de ses valeurs à d'autres instants de temps.

## Découplage de système lent/rapide appliqué en Economie et Econophysique

Pour certaines valeurs des paramètres du modèle de Solow-Swan (6,7), le système devient lent-rapide, pourvu qu'on le linéarise en un point, par exemple l'équilibre qui vérifie l'équation (8) de manière approchée. On en donne quelques exemples dans le tableau Tab.1.

$\alpha$	$\delta$	$r$	$\lambda_1 = \delta(\alpha - 1)$	$\lambda_2 = -r$
0.1	0.9	0.01	-0.81	-0.01
0.9	0.01	1	-0.001	-1

TAB. 1 – Paramètres du modèle et valeurs propres  $\lambda_i$  du système linéarisé autour de l'état d'équilibre ( $K = K_\infty, z = 0$ ). On remarque que  $s$  n'intervient pas dans  $\lambda_{1,2}$ , mais dans le couplage des systèmes.

La première ligne donne l'exemple d'une faible élasticité du capital dans la fonction de production, avec un taux de dépréciation important. Dans ce cas, la valeur propre de l'équation en  $K$  est plus grande en valeur absolue que celle du terme de choc.  $K(t)$  est donc le terme rapide, et  $z(t)$  le terme lent. La deuxième ligne montre une situation renversée. Dans les deux cas on constate que les valeurs propres ont des ordres de grandeur distincts, et que donc le système dans son ensemble a la propriété de séparation d'échelle.

Le problème qui nous intéresse est de séparer les contributions lentes et rapides qui s'influencent l'une l'autre. En particulier, le système lent influencera de manière durable le système rapide, ce qui nous empêchera de distinguer sa réponse propre à un choc.

Pour pallier ce problème, nous exposons en 3.1 le principe de la transformation de Chang qui permet de découpler deux systèmes linéaires dépendants et donc de les observer séparément l'un de l'autre. En 3.2 nous rappelons quelques applications classiques de cette transformation dans le domaine de la commande. En 4 nous proposons des simulations numériques.

### 3.1 Transformation de Chang

Cette transformation<sup>6</sup> est une diagonalisation par blocs d'un système linéaire. Soient  $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$  les états lent et rapide qui vérifient le système différentiel linéaire suivant :

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) \quad (9)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) \quad (10)$$

Moyennant la transformation :

$$x_s(t) = (I_s - ML)x_1(t) - Mx_2(t) \quad (11)$$

$$x_f(t) = Lx_1(t) + I_f x_2(t) \quad (12)$$

le système se met sous la forme suivante (Naidu, 2002) :

$$\dot{x}_s(t) = A_s x_s(t) + B_s u(t) \quad (13)$$

$$\dot{x}_f(t) = A_f x_f(t) + B_f u(t) \quad (14)$$

Sous cette dernière expression, on voit donc que  $x_s(t)$  ne dépend plus de  $x_f$ , et réciproquement.

6. on la trouve associée à différents auteurs dans la littérature (Riccati, Sibuya, Harris).

Pour y parvenir, il est nécessaire de calculer les matrices  $L$  et  $M$ , qui sont des inconnues. Lorsque ces solutions existent, elles répondent à deux équations matricielles <sup>7</sup>.

$$LA_{11} + A_{21} - LA_{12}L - A_{22}L = 0 \quad (15)$$

$$A_{11}M - A_{12}LM - MA_{22} - MLA_{12} + A_{12} = 0 \quad (16)$$

La principale condition d'existence est l'inversibilité de  $A_{22}$ . Plusieurs algorithmes de résolution numérique sont disponibles dans la littérature (Gajić et Lim, 2001, 1.1). Nous emploierons dans cet article un algorithme de point fixe.

### 3.2 Applications classiques : contrôle et filtrage de système lent/rapide

La transformation (11,12) fonde un grand nombre de méthodes développées en théorie de la commande <sup>8</sup> pour les systèmes lent/rapides <sup>9</sup>. La plupart des systèmes techniques présentent la propriété de séparation d'échelle. Par exemple, un système mécanique asservi par une commande électronique peut y être assimilé, étant donné l'écart entre les temps caractéristiques de ces deux types d'artefacts.

L'une des théories les plus utilisées, la théorie de la commande optimale, a été étendue à ce type de système, grâce à la transformée de Chang (Kokotović et al., 1999).

Parallèlement, le problème du filtrage - l'estimation statistique optimale de l'état d'un système observé de manière imparfaite - a également été étendu dans le cas lent/rapide à l'aide de cette transformation. Ceci permet notamment de traiter des problèmes de prédiction de l'état d'un systèmes lent/rapide.

A notre connaissance, ce type d'outil a été très peu employé pour l'étude de systèmes socio-économiques, malgré le fait qu'ils présentent souvent la propriété de séparation d'échelle. Nous illustrons leur application dans le cas du modèle de Solow-Swan en 4.

## 4 Simulations numériques

### 4.1 Simulation et linéarisation du modèle de Solow-Swan continu

Les solutions du système (6,7) écrit en 2 ne peuvent être trouvées aisément de manière analytique. Nous proposons de les approximer grâce à un schéma de discrétisation d'Euler. De plus, afin d'appliquer notre algorithme de découplage, nous linéarisons le modèle au point d'équilibre ( $K_\infty, z_\infty = 0$ ). Ces deux étapes sont détaillées en Annexe.

La Fig. 1 permet de comparer l'approximation en temps discret du système nonlinéaire et du système linéarisé. En bleu, on a tracé la trajectoire du schéma de discrétisation du système non-linéaire (6,7). On constate que le système atteint un état d'équilibre, autour duquel il se déplace aléatoirement sous l'influence du bruit.

En vert, on constate que le système évolue autour du même point d'équilibre dès le début de la simulation, ce qui est cohérent avec la linéarisation. Le système linéarisé est une bonne approximation du système non-linéaire une fois que celui-ci relaxe vers l'état d'équilibre.

7. on parle d'équations nonlinéaires algébriques de Riccati.

8. ensemble de théories en mathématiques et sciences de l'ingénieur, dédié au comportement des systèmes dynamiques, et à leur contrôle. cf [http://en.wikipedia.org/wiki/Control\\_theory](http://en.wikipedia.org/wiki/Control_theory)

9. plus spécifiquement pour des systèmes lent/rapides qualifiés de "singulièrement perturbés" c'est-à-dire quand l'équation rapide du système différentiel se présente sous la forme  $\varepsilon \dot{x}_2(t) = g(x_1, x_2, \varepsilon, t)$ , où  $\varepsilon \ll 1$

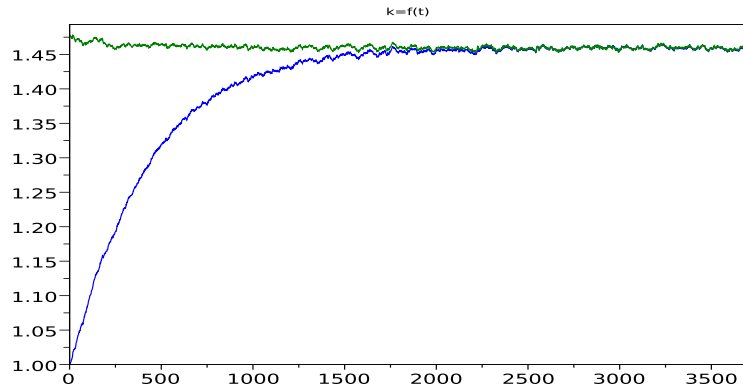


FIG. 1 – Capital  $K = f(t_k)$ . Approximation du modèle de Solow-Swan nonlinéaire (en bleu) et linéarisé autour du point d'équilibre (en vert).

## 4.2 Découplage

Nous supposons ici que l'évolution du capital  $K(t)$  est lente par rapport aux chocs  $z(t)$ . Nous souhaitons vérifier que la transformation de Chang nous permet de séparer la partie spécifique lente  $K_s(t)$  du terme  $K(t)$ .

Pour cela nous appliquons la transformation (11,12) à la version linéarisée du système (6, 7) autour du point d'équilibre  $(K_\infty, z = 0)$ . Nous obtenons un système du type (13, 14), que nous discrétisons à l'aide d'un schéma d'Euler. Les résultats sont résumés par la Fig. 2. Nous constatons bien que les chocs  $z$  ont un temps caractéristique plus court que celui du capital.

Cependant le capital  $K(t_k)$  et sa composante lente spécifique  $K_s(t_k)$  obtenue par la transformation de Chang sont indiscernables à cette échelle. La Fig. 3(haut) permet d'observer le résultat à une échelle plus fine. En vert on a tracé l'état simulé du système, et en bleu la composante lente uniquement. On observe que d'une part celle-ci ne contient plus de terme d'évolution rapide, et que d'autre part elle suit le mouvement lent de la courbe verte. En calculant  $K(t_k) - K_s(t_k)$ , on obtiendrait donc la composante rapide. Ceci se confirme en comparant Fig. 3(haut) et Fig. 3(bas). On en déduit que la transformation a isolé le terme lent spécifique  $K_s(t_k)$  qui est perturbé par l'influence de  $z$  dans  $K(t_k)$ , conformément à l'objectif fixé.

## 4.3 Intepretation

De tels résultats auraient pu être obtenus avec des méthodes purement statistiques, sans prendre en compte le modèle sous-jacent. Par exemple, une simple moyenne mobile (moyennant le choix de la largeur du filtre), ou la régression de  $K$  par rapport à  $z$ , auraient pu donner des résultats satisfaisants.

Cependant, en augmentant la dimension, en complexifiant les modèles et en augmentant le niveau du bruit, il est probable que les techniques statistiques classiques se trouvent mises en défaut. Nous réaliserons une comparaison plus détaillée dans des travaux ultérieurs.

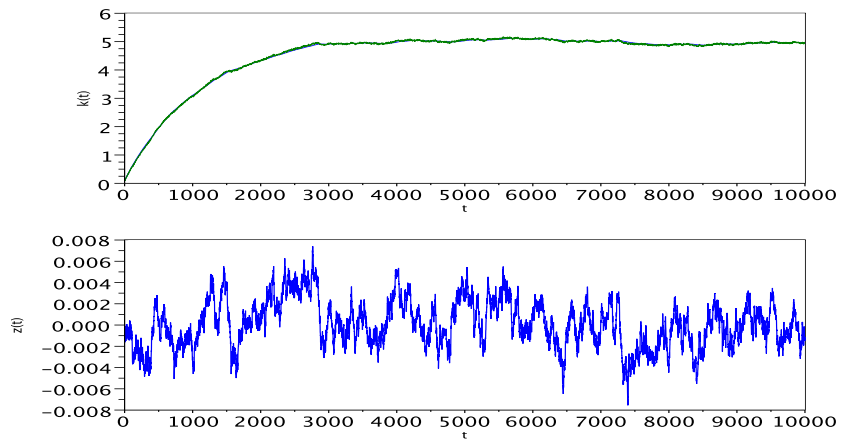


FIG. 2 – Capital  $K(t_k)$  et choc  $z(t_k)$ . (haut) :  $K(t_k)$  en vert, et en bleu sa composante lente spécifique  $K_s(t_k)$  obtenue par la transformation de Chang. (bas) : chocs  $z(t_k)$ .

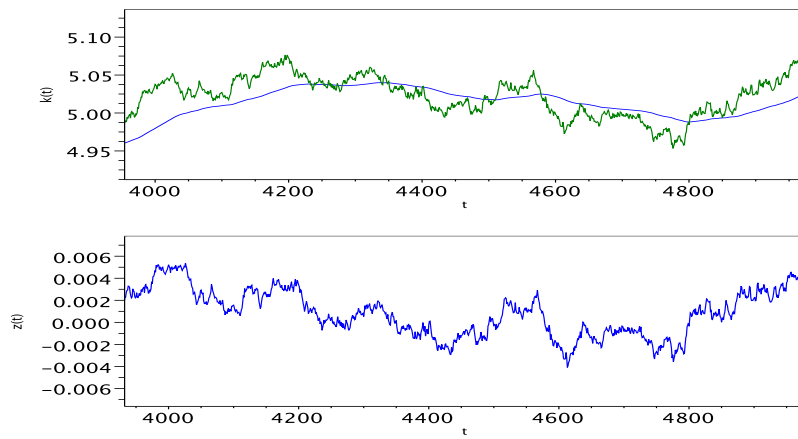


FIG. 3 – Capital  $K(t_k)$  et choc  $z(t_k)$ . (haut) :  $K(t_k)$  en vert, et en bleu sa composante lente spécifique  $K_s(t_k)$  obtenue par la transformation de Chang. (bas) : chocs  $z(t_k)$ .



## 5 Relations avec l'éconophysique et les modèles multi-agents

Dans cette partie nous cherchons à relier la méthode de découplage de système lent/rapide à des modèles économiques plausibles.

Les modèles exposés en 2 présentent un intérêt historique et ont constitué des étapes importantes de la modélisation économique, mais ils sont insuffisants pour rendre compte des phénomènes réels. De multiples développements sont survenus depuis en macroéconomie (cf Heer et Maussner (2005); Smets et Wouters (2003)).

Parallèlement, de nombreuses critiques (Kirman, 2010; Bouchaud, 2008) ont visé l'application de ce type de modèles en macroéconomie, mettant en cause d'une part l'hypothèse de rationalité, et d'autre part celle de l'agent représentatif. Selon celle-ci, chaque type d'agent est représenté par une unique équation, recouvrant ainsi un nombre potentiellement très grand d'agents.

Dans cette partie, nous explorons les pistes permettant d'appliquer dans le futur les techniques de découplage lent/rapide à des modèles n'appartenant pas à la famille DSGE. Pour cela des approches alternatives rattachées à l'éconophysique et aux modèles multi-agents en économie sont évoquées (cf 5.1), avant de questionner leurs liens formels avec ce qui précède (cf 5.2) ainsi que les conséquences pour le filtrage.

### 5.1 Quelques modèles à base d'agents, et tirés de l'Econophysique

Deux catégories de modèles sont citées ici. Les modèles à base d'agents sont employés en sciences sociales depuis la fin des années 70, avec par exemple les travaux de Schelling (1978) sur la ségrégation résidentielle. Des thèmes aussi divers que la violence, les normes et opinions ont fait l'objet de modélisations à base d'agents (Axelrod et Tesfatsion, 2006). En économie, de nombreux travaux portent sur l'échange et le commerce (Kirman et Vriend, 2001), mais aussi sur la gestion de systèmes éco-sociaux (Janssen et Ostrom, 2006), le financement d'infrastructure, ou encore les stratégies industrielles, dans le cas de l'innovation technologique par exemple (Nelson et Winter, 1982).

Leur validation pose plusieurs problèmes, notamment celui du grand nombre de paramètres impliqués qui peut entraîner un surapprentissage<sup>10</sup>. Ces modèles sont parfois validés à plusieurs échelles de temps et d'espace (LeBaron et Tesfatsion, 2008), ce qui semble facilité lorsque leur conception s'appuie sur de nombreuses observations de terrain et en laboratoire (Janssen et Ostrom, 2006).

Un second problème est celui de l'agrégation : existe-t-il des grandeurs macroscopiques décrivant le comportement d'ensemble du système, et sait-on écrire explicitement leurs équations d'évolution ? Evoquer l'agrégation à propos de modèles spécifiquement micro-économiques peut paraître inapproprié pour un économiste, pourtant la relation entre macro-économie et micro-économie constitue un véritable problème scientifique. Ce type de questionnement n'est pas propre à l'Economie, il est rencontré dans de nombreuses disciplines, notamment en Physique, Chimie, et sciences Mathématiques, qui fournissent des méthodes pour le traiter (Givon et al., 2004; Kevrekidis et al., 2004).

---

10. en anglais *overfitting*, bien connu dans le champ des statistiques, de l'apprentissage automatique et des réseaux de neurones.

Pour ces raisons, nous nous tournons également vers des modèles empruntés à la Physique Statistique et à l'Econophysique, où le souci d'obtenir une expression analytique macroscopique des lois d'évolution est plus souvent satisfait que dans le domaine des modèles à base d'agents.

L'Econophysique aborde depuis les années 1990 des thèmes variés parmi lesquels :

- les mécanismes de marché (Lux et Marchesi, 1999).
- la répartition de la richesse en fonction des mécanismes de production, d'échange, d'épargne, de prélèvement (Chatterjee et al., 2005).
- la croissance d'une firme, d'un réseau de firmes (Fujiwara et al., 2006).
- les phénomènes de transport (véhicules, foules, marchandises) et les réseaux de production (voir les travaux de D. Helbing et co-auteurs).
- la reformulation thermodynamique des concepts clefs de l'Economie (travail, capital, . . . voir Mimkes (2006) ; mais aussi la valeur, et l'information dans Cockshott et al. (2009)).

De très nombreux travaux portent sur les marchés et le trading, du fait peut être de la prédominance de l'échange dans une économie capitaliste, mais aussi du fait de la facilité d'accès grandissante à des données de prix et de transactions sur différents marchés, à des fréquences de plus en plus élevées.

Considérons par exemple le modèle d'échange de richesse de Bouchaud et Mézard (2000) : soient  $N$  agents caractérisés par leur richesse  $W_i(t)$ , laquelle obéit à l'équation suivante :

$$\forall i \in [1, N], \frac{dW_i}{dt} = \eta_i(t)W_i(t) + \sum_{j \neq i} J_{ij}W_j - \sum_{j \neq i} J_{ji}W_i \quad (17)$$

où  $\eta_i$  est un bruit gaussien  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ,  $J_{ij}$  la proportion de la richesse de l'agent  $j$  transférée à l'agent  $i$  et inversement. Le terme  $\eta_i(t)W_i(t)$  rend compte de la croissance ou décroissance spontanée de la richesse de l'agent  $i$ , dues à un ensemble de phénomènes sans lien avec les autres agents (production, investissement, dépréciation, etc. . .).

Cette représentation s'inspire de la dynamique des populations (Lotka-Volterra), à temps continu, ce qui ne rend pas compte du caractère discret et parfois aléatoire des transactions. Toutefois, ce modèle a les avantages suivants :

- il admet une résolution analytique, sous certaines hypothèses simplificatrices de type champ moyen.
- il permet dans ce cas d'exprimer la densité de probabilité de  $W$  dans la population, en passant par l'équation de Fokker-Planck, et sa solution à temps infini. La queue de distribution suit une loi de puissance, ce qui permet de retrouver une des grandes observations empiriques de l'Economie, la distribution des revenus de Pareto.

Nous verrons dans la section 5.2 comment la question posée au début de la partie 5 à propos de l'extension du découplage à des modèles plus réalistes peut bénéficier de ces résultats.

## 5.2 Lien avec le découplage de système lent/rapide et conséquences pour le filtrage

Le modèle (17) nous intéresse dans la perspective d'un découplage lent/rapide car il permet de passer d'un système composé d'un grand nombre d'agents (ce qui n'était pas le cas en 2) à un petit nombre d'équations ayant les caractéristiques d'un système lent/rapide. En effet, sous l'hypothèse d'homogénéité du taux d'échange  $J_{ij} = J/N$ , Bouchaud et Mézard déduisent de

## Découplage de système lent/rapide appliqué en Economie et Econophysique

(17) ce qui suit :

$$\frac{dW_i}{dt} = \eta_i(t)W_i + J(\bar{W} - W_i) \quad (18)$$

$$\bar{W}(t) = \bar{W}(0) \exp((m + \sigma^2)t) \quad (19)$$

où  $\bar{W} = 1/N \sum_i W_i$ .

En notant que (19) peut se mettre sous forme d'une équation différentielle du type  $d\bar{W}/dt = a\bar{W}$ , le système obtenu est alors proche de (9,10). La présence du terme  $\eta_i(t)W_i$  multiplicatif nous empêche néanmoins d'appliquer directement la méthode de la partie 3.1 à l'heure actuelle.

Toutefois, il semble possible, à partir d'un modèle comportant un très grand nombre d'agents, de se placer dans un cadre proche des conditions d'application de la transformée de Chang. Ceci permettrait dans ce cas de séparer les composantes lentes et rapides de la richesse d'un agent donné  $W_i$ , et d'en tirer par exemple la composante rapide, indépendamment de  $\bar{W}$ . Il serait aisé d'en déduire la suppression de tendance (detrending), ou la prédiction de l'état futur, qui tiendrait compte de la dynamique lente/rapide du système. La Fig. 4 résume ces différentes étapes.

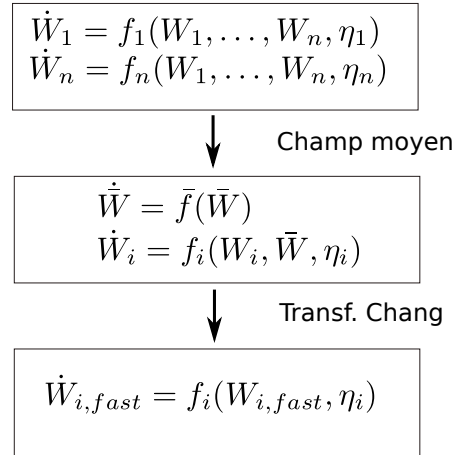


FIG. 4 – Schéma prospectif du passage entre les équations d'un grand nombre d'agents et le découplage de la composante rapide  $W_{i,fast}$  d'un agent  $i$ .

Dans des travaux ultérieurs, nous appliquerons l'ensemble de la démarche à un modèle économique simplifié semblable à celui de Bouchaud et Mézard (2000). Le domaine de la mécanique statistique dépendant du temps (Chorin et Hald, 2009, 6) recèle potentiellement des cas répondant à ces contraintes.

## 6 Conclusions et perspectives

Dans cet article nous considérons un phénomène économique comme résultant de l'interaction de plusieurs contributions ayant des échelles de temps caractéristiques très différentes les

unes des autres. Pour certaines valeurs de ses paramètres, le modèle classique de Solow-Swan est un système lent/rapide.

Nous montrons dans cet article comment séparer les contributions lentes et rapides en partant du modèle analytique. Cette approche est distincte de l'approche statistique où l'on disposerait des données uniquement, à partir desquelles un modèle autorégressif serait estimé, afin de séparer la tendance, les composantes saisonnières, et un résidu.

Nous suggérons pour cela d'appliquer des outils spécifiquement développés pour les systèmes lents/rapides, issus de la théorie de la commande, notamment la transformation de Chang. Notre propos a été illustré par des simulations numériques dans un cas très simple, qui permet d'apprécier les capacités de découplage de la transformation.

Dans un second temps, concernant le problème de l'agrégation, nous remarquons que de nombreux travaux dans le champ de la macroéconomie remettent en cause les approches DSGE. Des points de vue alternatifs sont comparés, notamment les modèles multi-agents et éconophysiques.

Les modèles multi-agents ne se prêtent pas au découplage, car l'obtention d'expressions analytiques de leur dynamique temporelle n'est pas aisée. En revanche, les premiers étapes d'une application à des modèles tirés de l'Econophysique sont décrites, dans le cas d'un problème de condensation de richesse en grande dimension inspiré de la dynamique des populations.

Les perspectives de ce travail sont les suivantes :

- proposer un système test de grande dimension, crédible du point de vue économique, permettant de poursuivre la démarche de découplage jusqu'à son terme, i.e. obtenir un découplage, un filtrage et éventuellement une prédiction des données futures.
- inventorier les systèmes issus de l'Econophysique, des systèmes multi-agents, ou de la Physique Statistique qui sont compatibles avec ce découplage, et leur étendre la démarche. Leur pertinence sera questionnée pour la modélisation des phénomènes socio-économiques, notamment ce qui relève des structures hétérogènes, hiérarchiques, imbriquées qui peuvent être difficiles à modéliser dans ce cadre. Ils devront se mettre sous la forme du système (9,10).
- explorer les extensions aux cas nonlinéaires, de type filtre particulière lent/rapide.
- sélectionner des données réelles économétriques disponibles à plusieurs niveaux d'agrégation (e.g. croissance, consommation, comptabilité nationale, production industrielle) afin de valider expérimentalement notre approche.

## Remerciements

Je remercie O. Aboura pour son aide précieuse au sujet du schéma de discrétisation de l'EDS, et du terme correctif du développement de Taylor stochastique.

Merci à J. Randon-Furling à propos du calcul de la solution du modèle de condensation, et aux membres du comité éditorial pour leurs commentaires.

## Références

- Axelrod, R. et L. Tesfatsion (2006). A guide for newcomers to agent-based modeling in the social sciences. In L. Tesfatsion et K. Judd (Eds.), *Handbook of computational economics Vol.2*. North Holland.
- Barro, R. et X. Sala-i Martin (2004). *Economic Growth*. Cambridge, MA. : MIT Press.
- Blanchard, O. (2002). *Macroeconomics*. Cambridge, MA. : MIT Press.
- Bouchaud, J.-P. (2008). Economics needs a scientific revolution. *Nature* 455, 1181–+.
- Bouchaud, J.-P. et M. Mézard (2000). Wealth condensation in a simple model of economy. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 282(3-4), 536 – 545.
- Box, G. E. P., G. M. Jenkins, et G. C. Reinsel (2008). *Time Series Analysis : Forecasting and Control*. Wiley.
- Brockwell, P. et R. Davis (1991). *Time series : theory and methods. 2nd ed.* Springer.
- Chatterjee, A., S. Yarlagadda, et B. Chakrabarti (Eds.) (2005). *Econophysics of wealth distribution*. Springer.
- Chorin, A. et O. Hald (2009). *Stochastic tools in mathematics and science. 2nd ed.* Springer.
- Cockshott, W., A. Cottrell, G. Michaelson, I. Wright, et V. Yakovenko (Eds.) (2009). *Classical econophysics*. Routledge.
- Fujiwara, Y., H. Aoyama, et W. Souma (2006). Growth of firms and networks. In B. Chakrabarti, A. Chakraborti, et A. Chatterjee (Eds.), *Econophysics and Sociophysics. Trends and perspectives*. Wiley.
- Gajić, Z. et M.-T. Lim (2001). *Optimal control of singularly perturbed linear systems and applications*. Marcel Dekker.
- Givon, D., R. Kupferman, et A. Stuart (2004). Extracting macroscopic dynamics : model problems and algorithms. *Nonlinearity* 17, 55–+.
- Heer, B. et A. Maussner (2005). *Dynamic General Equilibrium Modelling*. Springer.
- Janssen, M. et E. Ostrom (2006). Governing social-ecological systems. In L. Tesfatsion et K. Judd (Eds.), *Handbook of computational economics Vol.2*. North Holland.
- Kevrekidis, I. G., C. W. Gear, et G. Hummer (2004). Equation-free : The computer-aided analysis of complex multiscale systems. *AIChE Journal* 50(7), 1346–1355.
- Kirman, A. (2010). The economic crisis is a crisis for economic theory. *CESifo Economic Studies* 56(4), 498–535.
- Kirman, A. P. et N. J. Vriend (2001). Evolving market structure : An ace model of price dispersion and loyalty. *Journal of Economic Dynamics and Control* 25(3-4), 459–502.
- Kokotović, P., H. Khalil, et J. O'Reilly (1999). *Singular perturbation methods in control. Analysis and design*. SIAM Classics in Applied Mathematics.
- LeBaron, B. et L. Tesfatsion (2008). Modeling macroeconomics as open-ended dynamic systems of interacting agents. *American Economic Review* 98(2), 246–250.
- Lux, T. et M. Marchesi (1999). Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market. *Nature* 397, 498–500.

- Mankiw, N. G., D. Romer, et D. N. Weil (1992). A contribution to the empirics of economic growth. *Quarterly Journal of Economics* 107(2), 407–437.
- Mimkes, J. (2006). A thermodynamic formulation of economics. In B. Chakrabarti, A. Chakraborti, et A. Chatterjee (Eds.), *Econophysics and Sociophysics. Trends and perspectives*. Wiley.
- Naidu, D. (2002). Singular perturbations and time scales in control theory and applications : an overview. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B : Applications and Algorithms* 9(2), 233–278.
- Nelson, R. et S. Winter (1982). *An Evolutionary Theory of Economic Change*. Cambridge, MA : Harvard U Press.
- Schelling, T. (1978). *Micromotives and macrobehavior*. New York : Norton.
- Smets, F. et R. Wouters (2003). An estimated dynamic stochastic general equilibrium model of the euro area. *Journal of the European Economic Association* 1(5), 1123–1175.

## Annexe

Le schéma de discrétisation d'Euler des équations (6,7) s'écrit :

$$z(i+1) = z(i)(1-rh) + W(i+1) - W(i) \quad (20)$$

$$K(i+1) = K(i) + h \left[ se^{z(i)} K^\alpha(i) - \delta K(i) \right] \quad (21)$$

où  $h$  est le pas de discrétisation.

Au point d'équilibre ( $K_\infty, z_\infty = 0$ ), la linéarisation s'écrit en temps continu :

$$\dot{K}(t) = \delta(\alpha - 1) K(t) + sK_\infty^\alpha z(t) + (1 - \alpha) sK_\infty^\alpha \quad (22)$$

$$\dot{z}(t) = -r z(t) + \dot{W}(t) \quad (23)$$

La linéarisation est ici effectuée à l'aide d'un développement de Taylor en dimension 2, bien que de manière rigoureuse un développement de Ito-Taylor soit nécessaire. Le système linéarisé continu est également discrétisé à l'aide du schéma d'Euler.

## Summary

There are several competing space and time-scales in economic phenomena, and it takes appropriate tools to understand their coupling. We study a simple model of savings where several time-scales coexist. We show that slow and fast components can be separated thanks first to linearization of the dynamics (nonlinear and stochastic) close to an equilibrium point, then to control-theoretic tools such as the Chang decoupling transform.

Secondly we tackle the issue of the aggregation of the behaviors of a large number of agents, from the point of view of slow/fast decoupling. We review criticism addressed to DSGE models, then consider the possibility to decouple first a multi-agent system, and then a wealth condensation model taken from econophysics.