



# ETUDE ET MODELISATION DU COMPORTEMENT ELASTIQUE D'UNE STRUCTURE SANDWICH DE TYPE CARTON ONDULE

S. Allaoui, Z. Aboura, M.L. Benzeggagh

► **To cite this version:**

S. Allaoui, Z. Aboura, M.L. Benzeggagh. ETUDE ET MODELISATION DU COMPORTEMENT ELASTIQUE D'UNE STRUCTURE SANDWICH DE TYPE CARTON ONDULE. 13èmes Journées nationales sur les composites (JNC13), Mar 2003, Strasbourg, France. pp.1027-1036, 2003.

**HAL Id: hal-00635284**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00635284>**

Submitted on 24 Oct 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **ETUDE ET MODELISATION DU COMPORTEMENT ELASTIQUE D'UNE STRUCTURE SANDWICH DE TYPE CARTON ONDULE**

## **STUDY AND MODELLING OF THE ELASTIC BEHAVIOUR OF CORRUGATED CARDBOARD**

Z.ABOURA<sup>\*</sup>, S.ALLAOUI<sup>\*\*</sup> et M.L.BENZEGGAGH<sup>\*\*</sup>

\* IUT de Tremblay en France Paris 8 - LAHP/ERBEM  
Rue de la Râperie 93290 Tremblay-en-France  
aboura@utc.fr

\*\* Université de Technologie de Compiègne. Laboratoire de Robervall CNRS-  
UPRESA 6066/ B.P 20529 F- 60205 Compiègne Cedex

### **RESUME**

Le but de cette étude est de déterminer les propriétés homogénéisées d'une structure sandwich de type carton ondulé. La démarche adoptée est double. Elle aborde le problème d'une part, d'un point de vue expérimental en mettant au point une procédure adaptée à ce type de matériaux. Et d'autre part, elle établit un modèle analytique capable de prédire les propriétés élastiques dans le plan en fonction des paramètres structuraux. Les résultats obtenus corrélés à l'expérience ont donné satisfaction.

### **ABSTRACT**

The main goal of this study is to determine the homogenised properties of sandwich structure : the corrugated cardboard. The problem is approached experimentally and numerically. First, an experimental procedure adapted to this type of materials permitted to measure the in plane elastic properties. Then an analytical model has been developed. It able to predict the 2D elastic properties This model has the advantage to take into account the structural parameters of the corrugated cardboard. A good correlation between experimental and theoretical results was observed.

MOTS CLES : Sandwich, Carton ondulé, Homogénéisation.

KEY WORDS : Sandwich, Corrugated cardboard, Homogenisation

### **INTRODUCTION**

« L'emballage doit protéger ce qu'il vend et vendre ce qu'il protège ». Cette citation résume les grandes fonctions de l'emballage qui est divisé en six grandes familles : le papier, le plastique, le verre, le métal, le bois et le matériau composé. Le carton ondulé faisant partie de la famille des papiers, est l'un des emballages les plus utilisés (1/4 de la production d'emballage en France en 1999) et son utilisation ne cesse d'augmenter chaque année et de s'étendre sur d'autres domaines tel que les habitations d'urgences en remplacement des tentes. Son utilisation de manière optimum nécessite la connaissance de ses caractéristiques mécaniques élastiques et à ruptures.

Le problème peut être abordé dans un premier temps, en considérant le carton ondulé en tant que structure et en le caractérisant par des normes s'apparentant aux normes relatives aux structures sandwich composites ou métalliques. Les principaux

essais étant la flexion 3 ou 4 points (ASTM C393-62), ainsi que le cisaillement (ASTM C273-61). Néanmoins, cette démarche ne permet pas d'extraire la matrice d'élasticité de ce type de matériau et par conséquent rend son homogénéisation pour un calcul de type élément finis impossible. Il est clair qu'il existe toujours la possibilité de mailler complètement la structure (peaux, âme), mais une telle démarche reste extrêmement coûteuse notamment lorsqu'il s'agit de modéliser la structure dans son ensemble. Cette étude propose une seconde alternative. Il s'agit de considérer le sandwich carton ondulé comme un matériau monolithique. Cette démarche permettra, après homogénéisation, de simplifier les approches numériques. Elle s'articule autour de deux points :

- Le premier est consacré aux différents protocoles expérimentaux mis au point afin de déterminer les caractéristiques mécaniques des constituants (peaux et âme) ainsi que ceux homogénéisés des cartons ondulés. La difficulté principale réside dans les précautions expérimentales à prendre afin d'obtenir les paramètres souhaités en l'absence de protocoles pré-établis.
- Le second point est consacré à la mise au point d'un modèle analytique capable, à partir des paramètres géométriques (pas de la cannelure, épaisseur des peaux et de l'âme) et mécaniques des constituants de remonter aux propriétés élastiques homogénéisées du carton ondulé.

Une confrontation entre les résultats expérimentaux et analytiques permettra de juger les performances du modèle. Elle sera accompagnée d'une étude paramétrique mettant en évidence l'impact des paramètres structuraux sur certaines propriétés élastiques.

## PROCEDURE EXPERIMENTALE

### Présentation des matériaux

Deux types de cartons ondulés double face ont été utilisés au cours de cette étude. Un carton ondulé de moyenne cannelure notée MC et une autre de micro cannelure notée  $\mu$ C. Les caractéristiques géométriques illustrées sur la figure 1 sont présentées sur le tableau 1.

|         | Epaisseur (mm) | Pas (mm) | Epaisseur des peaux (mm) | Nbre de cannelure/m |
|---------|----------------|----------|--------------------------|---------------------|
| MC      | 4.01           | 8        | 0.16                     | 125                 |
| $\mu$ C | 1.55           | 3.26     | 0.16                     | 307                 |

**Tableau 1** : Caractéristiques géométriques des cartons ondulés de l'étude  
*Geometric characteristics of the corrugated cardboard of this study*

Deux sens caractérisent le carton ondulé. Le premier noté MD (machine direction) correspond au sens de fabrication du matériau. Il coïncide avec l'axe OX. Le second noté CD (cross direction) correspond au sens transverse et coïncide avec l'axe OY. La préparation des éprouvettes a été faite, pour l'ensemble des essais, selon les recommandations des normes NFQ 03-002 et NFQ 03-029. Le but de cette étude étant de définir un protocole expérimental pour caractériser les cartons ondulés.

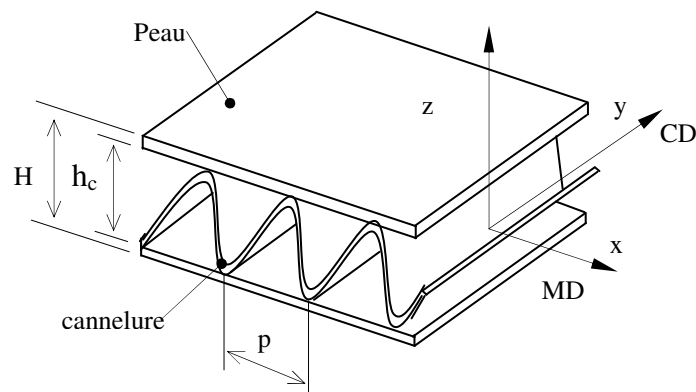


Figure 1 : Géométrie du carton ondulé  
*Board card geometry*

### Essai de traction

Les éprouvettes utilisées sont de type ISO inspirées des normes NF T51-034 et NF Q03-002 respectivement sur les caractérisations mécaniques des matériaux plastiques, des papiers et cartons. Chaque éprouvette est dotée d'une jauge bidirectionnelle permettant la mesure de la déformation longitudinale et transversale. La difficulté des tests de tractions sur des cartons ondulés réside dans l'écrasement de la tête de l'éprouvette au moment du serrage. Une rigidification de la partie des éprouvettes fixée par les mors permet d'éviter ce problème. Cette rigidification a été obtenue en injectant une résine polyester entre les cannelures et les peaux des cartons ondulés pour combler le vide existant. Une précaution toute particulière est à prendre lors de la préparation des éprouvettes dans le sens CD où la résine risque de couler dans la partie utile de celles-ci et fausser ainsi les essais. Une fois la résine polymérisée, des essais de validation ont été conduits et ont donné satisfaction.

En ce qui concerne la préparation des peaux, celle-ci a été réalisée en imbibant de résine les extrémités de l'éprouvette qui seront fixées dans les mors. Cette technique a permis d'optimiser leur utilisation et d'éviter le recours aux mors spéciaux préconisés par la norme NF Q03-002. L'ensemble des essais a été conduit à une vitesse de sollicitation de 3 m/min.

### Essais de cisaillement (bloc shear)

Les essais de cisaillement permettent de déterminer les deux modules de cisaillement transverses équivalents :  $G_{xz}$  et  $G_{yz}$ . Ces essais sont réalisés suivant la norme ASTM 273-61. Les limites suivantes, relatives à la géométrie des éprouvettes, fixées par les normes sont à respecter (Nordstrand et al.97, Desrumaux 2000)

$$h_c < b/2 \quad \text{et} \quad h_c < l/12$$

avec  $h_c$  épaisseur de l'âme du sandwich et  $b$  et  $l$  respectivement largeur et longueur de l'éprouvette. L'éprouvette est collée sur les deux plaques du dispositif illustré sur la figure 2.

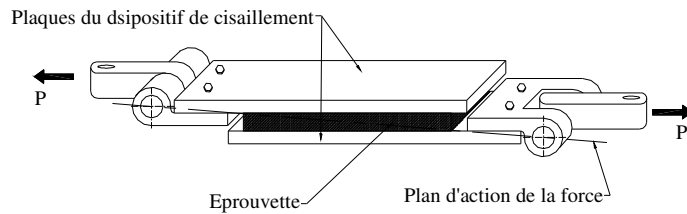


Figure 2 : Montage de cisaillement (bloc shear).  
*Bloc shear test*

Les dimensions des éprouvettes sont 300 mm x 80 mm x épaisseur. Le collage est effectué à l'aide d'une colle de type ARALDITE 2014. Ces essais ont été effectués à une vitesse de sollicitation de 2 mm/min.

## RESULTATS ET INTERPRETATION

### Traction

Les courbes issues des essais de traction présentent une partie linéaire élastique suivi d'une non-linéarité plus ou moins importante (figure 3a). Cette dernière, synonyme du début de l'endommagement de la lignine (liant), se localise principalement au niveau des peaux. Ce phénomène est plus perceptible sur les courbes charges déplacements des peaux notamment dans le sens d'orientation transverse des fibres de cellulose (CD). Il se caractérise par de petites chutes de charges (figure 3b).

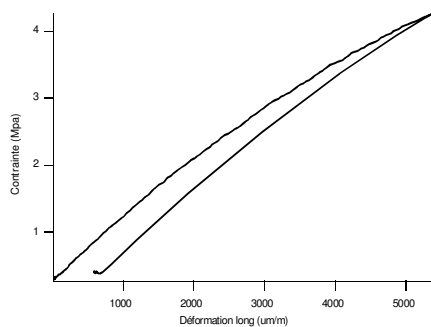


Figure 3a : Courbe de traction sur la moyenne cannelure sens MD  
*Stress-strain curve for medium fluting*

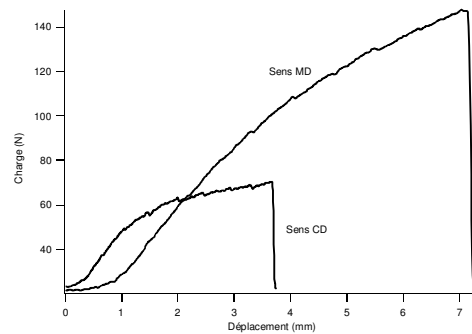


Figure 3b : Courbes de traction sur peaux  
*Liner load displacement curves.*

Ces essais de traction ont donné lieu à des résultats illustrés dans le tableau 2. Les valeurs des modules de Young et des coefficients de Poisson sont plus importantes dans le sens MD que CD ce qui reste valable aussi pour les contraintes de rupture ou

d'effondrement. Ce résultat rejoint la littérature [Nordstrand 95, Patel et al. 97, El Damatty et al. 2000).

La dispersion des résultats sur le module de Young reste acceptable avec un maximum de 15.47% pour  $E_{CD}$  de la moyenne cannelure alors qu'elle reste inférieure à 10% pour la micro cannelure et les peaux ainsi que pour les contraintes de rupture.

| $E_{MD}$ (Mpa)           | $\nu_{xy}$ | $\sigma_{MD \square rupture}$ (Mpa) | $E_{CD}$ (Mpa) | $\nu_{yx}$ | $\sigma_{CD \square rupture}$ (Mpa) |
|--------------------------|------------|-------------------------------------|----------------|------------|-------------------------------------|
| <i>Peaux</i>             |            |                                     |                |            |                                     |
| 8258,53±744,03           | 0,39±0,061 | 50,07±1,60                          | 3406,84±258,41 | 0,14±0,018 | 23,51±0,71                          |
| <i>Moyenne Cannelure</i> |            |                                     |                |            |                                     |
| 863,05±99,50             | 0,27±0,03  | 4,44±0,14                           | 554,97±85,89   | 0,220±0,03 | 2,760±0,28                          |
| <i>Micro Cannelure</i>   |            |                                     |                |            |                                     |
| 2057,53±94,040           | 0,26±0,027 | 13,56±0,49                          | 939,76±70,52   | 0,12±0,013 | 6,732±0,61                          |

Tableau 2: Résultats des essais de traction

*Tensile test results*

### Cisaillement

La série d'essais de cisaillement conduite avec le dispositif « bloc shear » a permis l'obtention des modules de cisaillements  $G_{yz}$  et  $G_{xz}$  (tableaux 3). Les valeurs des modules de cisaillement rejoignent en ordre de grandeur ceux retrouvée dans la littérature. La validité de la procédure expérimentale reste acceptable et cela vu la dispersion minimale des résultats (<10% d'erreur).

| $G_{xz}$ (Mpa)           | $G_{yz}$ (Mpa) | $G_{xz}$ (Mpa)         | $G_{yz}$ (Mpa) |
|--------------------------|----------------|------------------------|----------------|
| <i>Moyenne cannelure</i> |                | <i>Micro cannelure</i> |                |
| 2,32 ± 0,12              | 3,926 ± 0,14   | 2,022 ± 0,04           | 1,774 ± 0,11   |

Tableaux 3 :Résultats des essais de cisaillement

*Shear test results*

Analysons à présent l'allure des courbes de charge-déplacement pour ce test. L'évolution de la charge, dans le cas de la moyenne cannelure sollicitée dans le sens MD, passe par quatre étapes avant le stade d'effondrement (figure 4). Le premier stade représenté par une allure linéaire sur le graphe est le stade élastique. Une première chute de charge est alors constatée à la fin de ce premier stade. Elle correspond à l'effondrement des cannelures sous l'effet du cisaillement. Une fois l'épaisseur minimale des ondulations atteinte, le carton ondulé entre dans la troisième étape où une reprise de charge se produit. Cette phase correspond à la sollicitation en cisaillement des interfaces cannelure-peaux. Le quatrième stade se caractérise par une ruine totale du matériau. La colle d'amidon cède et provoque le décollement des peaux.

En ce qui concerne la micro cannelure, l'épaisseur réduite lui procure un comportement autre. Le comportement est quasiment linéaire jusqu'à rupture (figure 5).

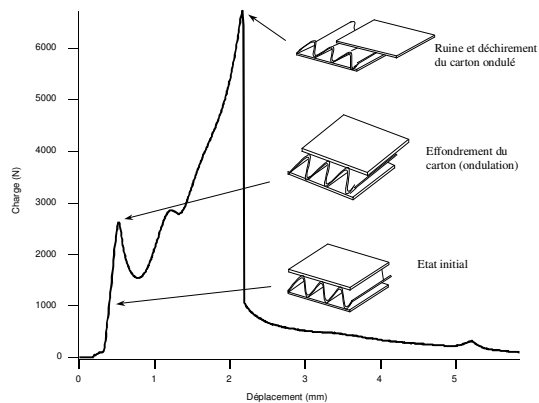


Figure 4 : Courbe charge déplacement de la moyenne cannelure sens MD  
*Load displacement curve for de medium fluting. MD direction*

Le comportement des cartons ondulés en sollicitation dans le sens CD est caractérisé par une partie élastique avant d'atteindre la charge d'effondrement correspondant au décollement des cannelures. L'allure des courbes de charge est similaire à celle de la figure 5

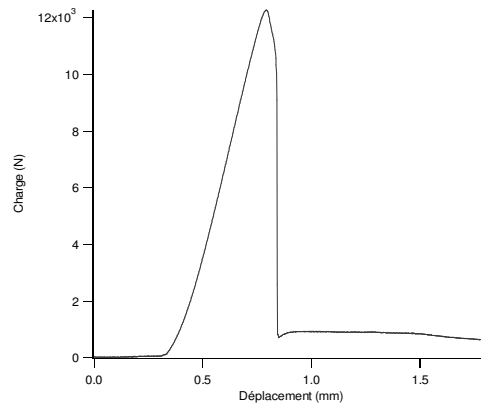


Figure 5 : Courbe charge déplacement de la micro cannelure sens MD  
*Load displacement curve for de micro fluting. MD direction*

### PROPOSITION D'UN MODELE ANALYTIQUE

Le principe du modèle proposé dans cette étude repose sur l'application de la théorie de stratification à chaque partie infinitésimale de la structure sandwich du carton ondulé. Il est inspiré de celui établi par Aboura (Aboura 93, Aboura et al 1993) pour la détermination des propriétés élastiques des matériaux composites à renfort tissé taffetas. La figure 6 présente le volume élémentaire représentatif (VER) du carton ondulé.

Les paramètres géométriques de ce VER sont :

- P : Pas ;
- $h_c$  : épaisseur de la cannelure ;
- H : épaisseur totale du carton ondulé ;
- $H_{p_i}$  : épaisseur de la  $i^{\text{ème}}$  peau.

Il est à noter que  $E_x$  et  $E_y$  représentent respectivement les modules de Young dans le sens MD et CD.

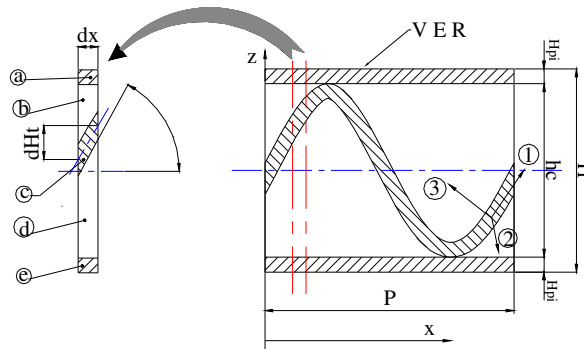


Figure 6 : Volume élémentaire représentatif  
*Representative element volume*

La fibre moyenne de l'ondulation de l'âme est approchée par une fonction sinusoïdale dans le sens MD.

$$Ht(x) = \frac{hc}{2} \sin\left(2\pi \frac{x}{P}\right)$$

$h_c$  étant l'épaisseur de l'ondulation et  $P$  le pas de l'ondulation

Le VER est discrétisé en éléments  $dx$  constitués d'un empilement de :

- (a) Peau supérieure
- (b) Vide
- (c) Ondulation
- (d) Vide
- (e) Peau inférieure

L'angle de l'ondulation est calculé à chaque pas de discrétisation par la relation :

$$\theta(x) = \text{artg} \frac{dHt(x)}{dx}$$

Pour chaque pas de discrétisation, les matrices  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  et  $D_{ij}$ , sont calculés. Une homogénéisation est établie sur l'ensemble des matrices locales ainsi déterminées.

$$(A, B, D)_{globale} = \frac{1}{P} \int_0^P A(x), B(x), D(x) dx$$

### Validation du modèle

Dans le but de valider le modèle analytique développé, il est nécessaire de comparer les caractéristiques mécaniques homogénéisées obtenues analytiquement aux résultats expérimentaux de cette étude. Les propriétés mécaniques et géométriques sont ceux présentés précédemment (tableau 1). Les essais mécaniques menés sur les peaux ont permis de déterminer les caractéristiques mécaniques  $E_{MD}$ ,  $E_{CD}$ ,  $\nu_{xy}$  et  $\nu_{yx}$  par contre le module  $G_{xy}$  reste inconnu et difficile à obtenir expérimentalement. Baum G.A et al. (Baum G.A et al. 81) proposent une approximation pour déterminer ce module que nous noterons  $G_{xy}^B$  (module de cisaillement de Baum):

$$G_{xy}^B = 0.387 \sqrt{E_x E_y}$$

La validation du modèle sur les deux catégories de cartons ondulés a donné les résultats illustrés sur le tableau 4. Dans le même tableau les caractéristiques



homogénéisées analytiques sont confrontés aux résultats expérimentaux de cette étude. Le modèle appliqué sur la moyenne cannelure a donné des résultats s'accordant assez bien avec ceux obtenu expérimentalement avec une erreur maxi de 10,57% pour le module  $E_{MD}$  et 15.8% pour  $\nu_{xy}$ . Les résultats concernant la micro cannelure s'accordent moins bien avec l'expérience. L'erreur s'étend de 19% pour la détermination de  $E_{MD}$  à 40% pour le module  $E_{CD}$ .

|                          | Résultats analytiques | Résultats expérimentaux | Anal /Expér.  |
|--------------------------|-----------------------|-------------------------|---------------|
| <i>Moyenne Cannelure</i> |                       |                         |               |
| $E_{MD}$ (Mpa)           | <b>954.34</b>         | 863.051                 | <b>10.57%</b> |
| $E_{CD}$ (Mpa)           | <b>552.02</b>         | 554.976                 | <b>-0.53%</b> |
| $\nu_{xy}$               | <b>0.314</b>          | 0.271                   | <b>15.8%</b>  |
| $G_{xy}$ (Mpa)           | <b>274.58</b>         | 267.834*                | <b>2.51%</b>  |
| <i>Micro Cannelure</i>   |                       |                         |               |
| $E_{MD}$ (Mpa)           | <b>2457.3</b>         | 2057.534                | <b>19.42%</b> |
| $E_{CD}$ (Mpa)           | <b>1315.3</b>         | 939.768                 | <b>39.96%</b> |
| $\nu_{xy}$               | <b>0.328</b>          | 0.269                   | <b>21.93%</b> |
| $G_{xy}$ (Mpa)           | <b>686.85</b>         | 538.139*                | <b>27.63%</b> |

\* résultat obtenu par la relation de Baum

Tableau 4 : Confrontation des résultats analytiques et expérimentaux  
*Comparison between analytical and experimental results*

Cet écart peut résulter d'une mauvaise estimation des paramètres géométriques. Afin d'évaluer l'impact de ces paramètres géométriques sur les résultats numériques, une simulation a été réalisée. Elle concerne la variation des propriétés élastiques en fonction du pas de l'ondulation et de l'épaisseur des constituants (peaux et âme). Les figures 7a et 7b présentent ces évolutions.

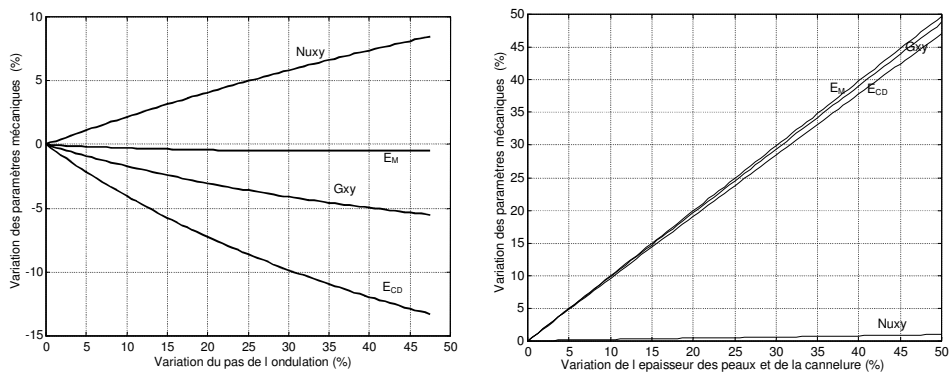


Figure 7 a et b : Influence du pourcentage d'erreur des mesures géométriques sur les propriétés élastiques.

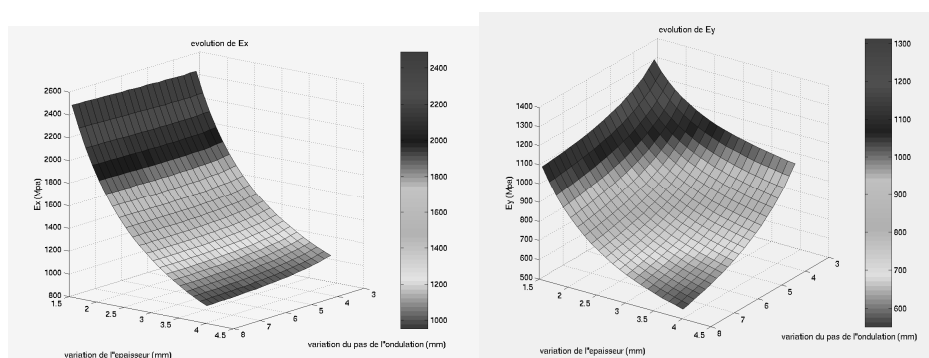
*Influence of the mistake percentage of geometric measures on the elastic properties*

Il en ressort que la variation du pas d'ondulation a peu d'influence sur le module  $E_{MD}$ , par contre les autres modules sont fortement influencés. Ainsi un écart de 20 % sur le pas de l'ondulation peut entraîner une erreur de l'ordre de 7,5% sur le module  $E_{CD}$ . Cette influence est encore plus perceptible sur la courbe 7b. Ainsi une variation de 10% de l'épaisseur entraîne une erreur de 10 % sur les modules de Young et le module de cisaillement. Sachant que 10% de l'épaisseur représente 0,016mm une attention très particulière doit être prise lors de la mesure de ces paramètres géométriques.

Les figures 8 a et 8b récapitulent l'influence combinée de l'épaisseur du carton ondulé et du pas d'ondulation sur l'évolution des caractéristiques mécaniques du matériau obtenu par le modèle analytique. Les caractéristiques géométriques des cartons ondulés moyenne et micro cannelure ont été fixées comme limites de l'intervalle à balayer par l'étude multi-paramétrique (épaisseur :  $H_1= 1.55\text{mm}$  et  $H_2=4.01\text{mm}$  et le pas de l'ondulation :  $P_1= 3.26$  et  $P_2 = 8\text{mm}$ ).

Le premier constat concerne l'influence de l'épaisseur totale du carton ondulé. Le module  $E_x$  ou  $E_{MD}$  en est fortement influencé. En effet pour un pas d'ondulation constant la chute est de l'ordre 60 % (2400 Mpa pour une épaisseur de 1,5mm contre 1000 Mpa pour une épaisseur de 4mm). Le module  $E_y$  ou  $E_{CD}$  en est un peu moins affecté puisqu'il affiche une chute de 45% (de 1100 Mpa pour 1,5mm à 600 Mpa pour 4mm).

En ce qui concerne l'influence du pas de la cannelure, il apparaît que la module  $E_x$  reste quasiment insensible à cette valeur alors que la module  $E_y$  affiche une évolution de 40 % lorsqu'on diminue le pas de la cannelure de 8 mm à 3 mm.



a

b

Figure 8 : Analyse paramétrique  
*Parametric analysis*

## CONCLUSION

Les études concernant le comportement mécanique du carton ondulé et sa modélisation sont peu nombreuses. Ces travaux s'inscrivent dans le cadre d'une contribution à l'étude de ce type de matériaux. Les résultats obtenus ont permis d'une part, de mettre au point un protocole expérimental capable d'aboutir à la caractérisation du comportement élastique dans le plan de ce matériau et d'autre part de proposer un modèle analytique capable de prédire ces mêmes propriétés avec une précision acceptable. Au cours de cette étude, le matériau a été appréhendé comme étant

monolithique. En effet, bien qu'il ait une constitution d'une structure sandwich, il ne révèle ses propriétés structurelles que lors de la constitution de l'emballage.

Les travaux futurs devront s'intéresser à l'effet de la température et l'humidité sur le comportement endommageable de ces matériaux. La modélisation devra, quant à elle, s'étendre à la troisième direction et inclure les phénomènes de cisaillements.

## BIBLIOGRAPHIE

- Aboura Z. 1993 " Etude du processus de délaminage mode I, mode II et mode mixte (I plus II) de matériaux composites à renforts tissés à différentes vitesses de sollicitation " *thèse de doctorat Université de technologie de Compiègne* 1993.
- Aboura Z., Chouchaoui C.S, et Benzeggagh M.L, 1993. " Analytical model of woven composite laminate. Superposition effect of two plies" *6ème Conférence Européenne des Matériaux Composites. ECCM 6. Bordeaux* pp 591- 596
- Desrumaux F. 2000 « Contribution à l'analyse micromécanique du comportement élastique en dommageable de composites monolithiques et sandwichs, intégration dans un code de calculs par éléments finis » *thèse de doctorat Université de technologie de Compiègne* 2000.
- El Damatty A.A., Mikhael A et. Awad A.A 2000" Finite element modelling and analysis of a cardboard shelter " *Thin-Walled Structures* 38, p 145-165.
- Nordstrand T.M, 1995 " Parametric study of the post-buckling strength of structural core sandwich panels " *Composite structures* 30, p 441-451
- Nordstrand T.M. et Carlsson L.A 1997 " Evaluation of transverse shear stiffness of structural core sandwich plates" *Composite structures* 37 , p 145-153, 1997.
- Patel P, Nordstrand T.M, et Carlsson L.A 1997 "Local buckling and collapse of corrugated board under biaxial stress " *Composite structures* 39, No 1-2, p 93-110.
- Baum G.A., Brennan D.C. et Habberger C.C. 1981 " Orthotropic elastic constants of paper " *TAPPI J* 64 pp 97-101