# Optimisation en poids de structures composites stratifiées

## *Weight optimisation of composite laminated structures*

**Marco Montemurro[1,2], Angela Vincenti[1], Paolo Vannucci[1] et Ahmed Makradi[2]**

1 : Institut Jean Le Rond d'Alembert CNRS UMR 7190
Université Paris 6 « Pierre et Marie Curie » (UPMC) – F - 75252 PARIS CEDEX 05
e-mail : angela.vincenti@upmc.fr, paolo.vannucci@upmc.fr

2 : Centre de Recherche Public « Henri Tudor »
29, avenue J.F. Kennedy – L-1855 Luxembourg-Kirchberg LUXEMBOURG
e-mail : marco.montemurro@tudor.lu, ahmed.makradi@tudor.lu

## Résumé

Les structures en matériaux composites ont souvent la caractéristique d'être de structures modulaires, c'est-à-dire constituées par l'assemblage de plusieurs unités élémentaires. Par exemple, un composite stratifié est composé d'une séquence de plusieurs couches, et un panneau composite raidi est une plaque renforcée par plusieurs raidisseurs (toutes ces composantes étant à leur tour constituées de composites stratifiés).
L'optimisation en poids de cette classe de structures représente un intérêt primordial surtout quand on s'intéresse aux applications aéronautiques ou aérospatiales, et afin de réaliser une optimisation en poids efficace il est alors nécessaire de prendre en compte le nombre d'éléments constitutifs de la structure parmi les variables de l'optimisation. Cela introduit des complications aussi bien dans la formulation que dans la résolution des problèmes d'optimisation associés.
Dans ce travail, on s'intéresse à l'optimisation en poids, avec et sans contraintes, de structures composites modulaires en prenant en compte le nombre des modules constitutifs parmi les variables du problème. Les exemples d'applications choisies sont la recherche de plaques composites stratifiées à nombre minimal de couches et la minimisation en poids sous contrainte de résistance au flambage pour des panneaux raidis en matériau composite, couramment utilisés dans les applications aéronautiques.

## Abstract

Composite structures are often modular structures, that is to say they are made of the assembly of several elementary units (modules). For instance, a composite laminate is made of a stack of several layers, and a stiffened composite panel is a plate reinforced by several stiffeners (on their turn, each stiffener and the plate are built as a composite laminate).
Weight optimization of such structures is a fundamental issue, especially when they are meant for aeronautical and aerospace applications. In this case, it is necessary to take into account the number of constitutive units as a variable in the optimization process in order to perform an effective weight optimization. This is a source of difficulties in both the formulation and resolution of such optimization problems. In this paper, we deal with weight optimization of modular composite structures, with or without additional optimization constraints, where the number of constitutive modules is considered as an optimization variable. Examples of applications are optimal design of composite laminates with minimum number of layers and weight minimization of composite stiffened panels with a constraint on their minimum buckling limit.

**Mots Clés :** optimisation en poids, propriétés élastiques, flambage, stratifiés, structures modulaires, algorithme génétique
**Keywords :** weight optimisation, elastic properties, buckling, laminates, modular structures, genetic algorithm

## 1. Introduction

Dans un grand nombre de problèmes d'optimisation en ingénierie, les objets à optimiser peuvent souvent être considérés comme des systèmes modulaires, c'est-à-dire constitués de l'assemblage de plusieurs modules ou unités élémentaires.
Ceci est le cas des composites stratifiés, qui sont constitués de l'assemblage de couches de base anisotropes, chaque couche étant considérée comme un module unitaire et le stratifié étant défini en termes de nombre de couches et de propriétés (épaisseur et matériau) de chaque couche.
Un autre exemple de structure modulaire est représenté par les panneaux raidis en matériaux composites, souvent utilisés dans les structures aéronautiques : ces structures sont composées d'une

plaque stratifiée renforcée longitudinalement par un ensemble de poutres (raidisseurs), aussi réalisés en matériaux composites. Ainsi ces structures sont décrites par les propriétés géométriques et matériau de la plaque et de chaque raidisseur, mais aussi par le nombre de raidisseurs.
Le poids est la propriété fondamentale à optimiser pour ce type de structures, surtout quand on traite d'applications aéronautiques et aérospatiales, et il est alors évident que le nombre de modules constitutifs élémentaires doit aussi être considéré comme une variable du problème d'optimisation, tout comme les propriétés de chaque module. Ceci représente une difficulté majeure dans le processus d'optimisation puisque le nombre de modules constitutifs est une valeur entière, c'est-à-dire une variable discrète de l'optimisation, et le domaine d'optimisation est donc peuplé de points qui représentent des structures modulaires composées de nombres différents d'unités élémentaires. En conséquence, le nombre de paramètres constitutifs (variables du problème d'optimisation) peut différer d'un point à l'autre et le problème d'optimisation associé est donc défini sur un domaine de vecteurs de dimensions variables.
Un effort particulier est donc nécessaire pour donner une formulation opportune et surtout pour élaborer une stratégie efficace de résolution de ces problèmes d'optimisation. Dans cet article, on présente la formulation de deux problèmes d'optimisation en poids de structures composites modulaires : la recherche de composites stratifiés à nombre minimal de couches qui respectent des symétries élastiques données, et la minimisation du poids de panneaux composites raidis sous la contrainte d'une résistance minimale au flambage (panneaux raidis en compression).
La résolution de ces problèmes est possible grâce à l'utilisation de stratégies numériques adaptées, et on présente ici les résultats obtenus par un algorithme génétique que l'on a développé à ces fins.

## 2. Conception optimale de symétries élastiques pour composites stratifiés de poids minimal

La recherche de composites stratifiés, à nombre de couches fixées, possédant des symétries élastiques données (découplage, orthotropie ou isotropie en membrane et/ou en flexion) est réalisée dans le cadre de la méthode polaire de représentation de l'élasticité bidimensionnelle anisotrope [1-3], mais aucune preuve générale, analytique ou numérique, existe quant au nombre minimal de couches nécessaire à l'existence d'une solution pour une combinaison donnée de symétries élastiques. Au contraire, la pratique courante d'utiliser des séquences de stratification symétriques pour assurer le découplage ne permet pas d'atteindre ces solutions à nombre minimal de couches (de nombreuses solutions découplées non symétriques sont connues [1]). Or, la recherche de stratifiés à nombre minimal de couches vérifiant des symétries élastiques données est nécessaire dans le cadre de l'optimisation en poids de stratifiés.
Dans ce cas, la minimisation du poids des stratifiés est formulée comme un problème d'optimisation sans contraintes, où la fonction objectif $f(n,t,\delta)$ est une fonction semi-définie positive que l'on écrit comme le produit de deux termes : le premier, $F(t,\delta)$, exprime les conditions de symétries élastiques, issu de la formulation polaire telle que introduite en [1-3] et dépendant des variables d'orientation $\delta$, d'épaisseur $t$ et des propriétés élastiques des couches élémentaires ; et le deuxième, dépendant du nombre de couches $n$, est un terme de pénalisation (l'exposant de pénalisation $s$ dans l'équation (1) peut varier entre 1 et 4). L'expression du problème d'optimisation est donc la suivante :

$$\min f(n,t,\delta) \quad \text{où :} \quad f(n,t,\delta) = F(t,\delta)\cdot n^{s} \qquad \text{(Eq. 1)}$$

Les variables de l'optimisation sont alors tous les paramètres constitutifs du stratifié (matériau, orientations et épaisseurs des couches) ainsi que le nombre total de couches $n$.
La fonction $F(t,\delta)$ est écrite comme une forme semi-définie positive des composantes polaires du stratifié (composantes des tenseurs élastiques homogénéisés de membrane $\mathbf{A}^*$, de couplage $\mathbf{B}^*$ et de flexion $\mathbf{D}^*$) liées aux propriétés de symétries élastiques (voir [1-3]), à leur tour dépendant des paramètres constitutifs du stratifiés (matériau, orientations et épaisseurs des couches) à travers les

relations de la théorie classique des plaques stratifiées. Les zéros de cette fonction sont aussi les solutions du problème, c'est-à-dire ils correspondent à des stratifiés possédant les propriétés de symétries élastiques recherchées. Par exemple, dans le cas de la recherche d'un stratifié découplé, isotrope en membrane et orthotrope en flexion, la fonction $F(t,\delta)$ s'écrit sous la forme suivante [3] :

$$F(t,\delta)=\left[\left(\frac{\|\mathbf{B}^*\|}{\|\mathbf{Q}\|}\right)^2+\left(\frac{R_0^{A^*2}+4R_1^{A^*2}}{R_0^{Q^2}+4R_1^{Q^2}}\right)+\left(\frac{\Phi_0^{D^*}-\Phi_1^{D^*}-K^{D^*}\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}\right)^2\right], \qquad \text{(Eq. 2)}$$

où chaque terme de la somme représente un objectif partiel de symétrie élastique (dans l'ordre, le découplage, l'isotropie de membrane et l'orthotropie de flexion). La signification des symboles utilisés est la suivante : $\|\mathbf{B}^*\|$ et $\|\mathbf{Q}\|$ sont respectivement les normes du tenseur de couplage homogénéisé $\mathbf{B}^*$ et du tenseur de rigidité de la couche élémentaire $\mathbf{Q}$ ; $R_0^{A^*}$ et $R_1^{A^*}$ sont les modules de la partie anisotrope du tenseur homogénéisé de membrane $\mathbf{A}^*$, alors que $R_0^{Q}$ et $R_1^{Q}$ sont les équivalents pour le tenseur de rigidité $\mathbf{Q}$ de la couche élémentaire ; et finalement, $\Phi_0^{D^*}$ et $\Phi_1^{D^*}$ sont les angles polaires de flexion et $K^{D^*}$ est le paramètre de la forme d'orthotropie ($K^{D^*}$ = 0 ou 1) pour le tenseur homogénéisé de flexion $\mathbf{D}^*$.

La fonction objectif globale $f(n,t,\delta)$ est construite de telle manière à garder les mêmes propriétés que la fonction $F(t,\delta)$ exprimant les conditions de symétries élastiques, c'est-à-dire qu'elle est aussi une fonction semi-définie positive et les zéros, qui correspondent aux solutions du problème d'optimisation, sont les mêmes que pour la fonction $F(t,\delta)$. Le terme dépendant du nombre de couches est introduit comme une sorte de terme de pénalisation, et l'exposant de pénalisation $s$ peut être choisi par l'utilisateur (après plusieurs tests numériques, on a trouvé que la valeur plus adaptée est $s = 2$).

## 3. Minimisation du poids de panneaux composites raidis avec contrainte sur la charge critique de flambage

Dans les structures aéronautiques, on utilise souvent des panneaux composites renforcés longitudinalement par des poutres (raidisseurs), qui peuvent aussi être réalisés en matériaux composites. Ce type de panneaux est utilisé, par exemple, pour le caisson alaire dans les avions. Comme dans toutes les applications aéronautiques et aérospatiales, le poids est une propriété critique dans le souci de réaliser des structures de plus en plus légères. D'autre part, il faut aussi tenir compte d'autres conditions de tenue mécanique (résistance, stabilité, etc.) et dans le cas des panneaux raidis pour caissons alaires, qui subissent des sollicitations en compression, il faut assurer une charge de flambage assez élevée.

On trouve des travaux en littérature qui traitent du problème de conception optimale de panneaux raidis en compression de poids minimal [4, 5]. Ces travaux généralement considèrent le cas de panneaux métalliques (matériau isotrope) et ils sont basés sur l'assomption que la structure en compression de poids minimale est celle pour laquelle les phénomènes d'instabilité, locaux et globaux, ont lieu au même niveau de sollicitation. Néanmoins, cette théorie est fondée sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, l'une d'entre elles étant que les raidisseurs soient tous identiques.

Dans ce travail, on formule le problème du panneau raidi en compression de poids minimal de manière très générale en considérant tous les paramètres descriptifs de la structure comme possibles variables de l'optimisation, y compris le nombre $N^{(s)}$ de raidisseurs ($s$ = *stiffeners*). Evidemment, les caractéristiques géométriques de la plaque (épaisseur $t^{(p)}$) et des raidisseurs (épaisseur $t^{(s)}$ et hauteur

$h^{(s)}$) peuvent aussi être des variables actives de l'optimisation (éventuellement, on peut aussi chercher à concevoir des raidisseurs optimaux tous différents les uns des autres).
Finalement, le matériau constitutif peut être choisi et fixé (par exemple un matériau isotrope et homogène, tel qu'un alliage d'aluminium, largement utilisé en aéronautique), mais aussi on peut chercher à optimiser le matériau constitutif en considérant que la plaque et les raidisseurs soient construits en composites stratifiés : dans le présent travail, on considère que la plaque et les raidisseurs sont constitués de stratifiés découplés, orthotropes et homogènes (tenseurs homogénéisés de membrane $\mathbf{A}^*$ et de flexion $\mathbf{D}^*$ identiques). Dans ce cas, les modules élastiques homogénéisés de ces stratifiés, représentés par les composantes polaires correspondantes, sont aussi considérés comme des variables de l'optimisation selon l'approche de conception optimale de l'anisotropie des structures composites proposée par Vincenti et Julien [3].
La formulation du problème d'optimisation est alors la suivante :

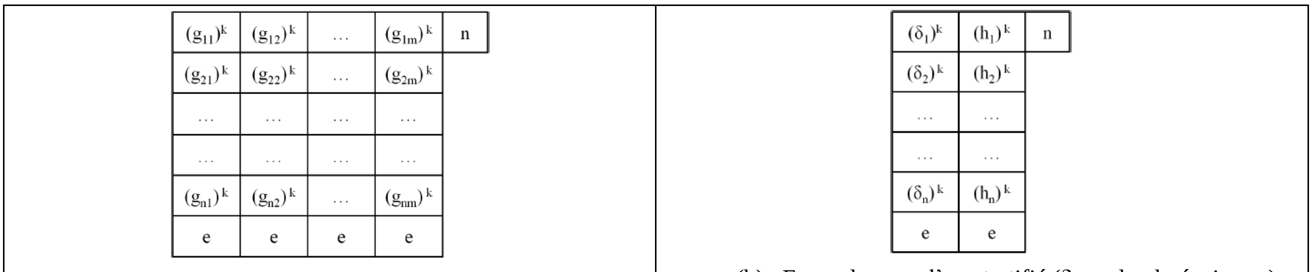
$$\begin{aligned} &\min W\left(t^{(p)}, R_0^{(p)}, R_1^{(p)}, N^{(s)}, t^{(s)}, h^{(s)}, R_0^{(s)}, R_1^{(s)}\right) \\ &\text{avec :} \qquad \lambda_{cr} \geq \bar{\lambda} \end{aligned} \qquad \text{(Eq. 3)}$$

où $W$ est le poids total du panneau, $\lambda_{\mathrm{cr}}$ la charge de flambage, $t$ une épaisseur et $h$ une hauteur, $R_0$ et $R_1$ sont les modules polaires anisotropes des stratifiés (les apex ($p$) et ($s$) correspondent à la plaque et aux raidisseurs, respectivement). Les modules $R_0$ et $R_1$ doivent aussi respecter les conditions d'existence thermodynamiques (voir [3]) qui sont traitées comme des contraintes ultérieures du problème d'optimisation (3).
Une fois ce problème résolu, la recherche des séquences stratifiées correspondantes aux paramètres matériaux optimaux peut être réalisée selon la formulation présentée en [3] et citée dans le paragraphe précédent.

## 4. Stratégie de résolution : un algorithme génétique avec croisement d'espèces

La résolution de problèmes d'optimisation en poids de structures modulaires, tels que ceux présentés dans les sections précédentes, demande des stratégies numériques adaptées. En fait, les points de l'espace d'optimisation correspondent à des structures avec nombres de modules différents, et donc avec nombres différents de paramètres constitutifs : le domaine d'optimisation est composé de vecteurs de dimension variable.
Il est évident que les méthodes de gradient classiques ne sont pas adaptées à cause de la nature discrète de ces problèmes, ainsi que pour leur nature souvent non convexe, et l'alternative plus efficace est d'utiliser des algorithmes génétiques ou évolutionnaires [4, 5]. D'abord, dans les algorithmes génétiques on peut traiter des variables de différente nature (continue, discrète ou groupée) et, de plus, il s'agit de méthodes d'ordre zéro (pas de calcul de dérivées) : même des vecteurs de dimensions différentes peuvent être comparés sur la base de leurs valeurs de fonction objectif.
Vincenti et Vannucci ont développé un algorithme génétique, BIANCA, initialement conçu pour résoudre des problèmes d'optimisation de composites stratifiés [6], mais ensuite étendu pour traiter plus généralement des problèmes d'optimisation en mécanique avec ou sans contraintes d'optimisation [7].
L'une des caractéristiques de l'algorithme génétique BIANCA est la représentation et la gestion de l'information [6, 7] : un point dans le domaine d'optimisation est représenté par un tableau de chromosomes (modules) et gènes (paramètres constitutifs de chaque module) et on l'appelle un individu dans le jargon des algorithmes génétiques (Figure 1). Par exemple, dans la description d'un stratifié, chaque couche est un chromosome et les caractéristiques, épaisseur et orientation, de chaque couche sont les gènes (variables de l'optimisation).

Les opérateurs génétiques de croisement et mutation dans BIANCA s'appliquent gène par gène, en assurant un profond mélange de l'information pour une meilleure exploration de l'espace de recherche des solutions.



(a) Matrice « individu » dans BIANCA

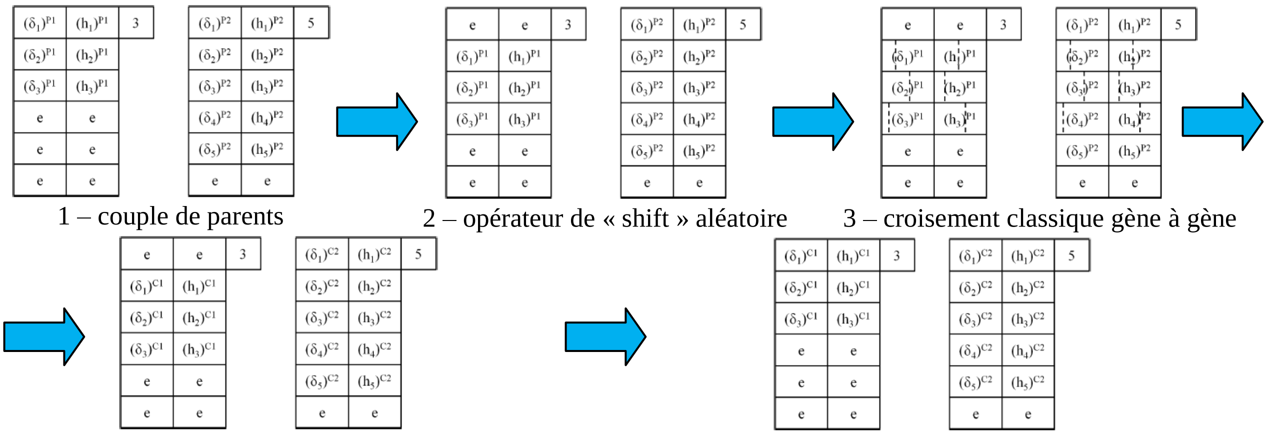
(b) Exemple : cas d'un stratifié (δ, angle ; h, épaisseur)

*Fig. 1. Structure d'un individu dans BIANCA : n, nombre de chromosomes/modules ; m, nombre de gènes par chromosome ; $g_{nm}$, gène de place n-m dans la matrice/individu ; e, « empty location » (gène vide).*

Or, quand on traite d'optimisation de structures constituées de nombres différents de modules, on a des individus constitués de nombres différents de chromosomes, et donc appartenant à des espèces différentes, qui doivent être croisés entre eux.

Il a été nécessaire d'ultérieurement développer BIANCA par l'introduction de nouveaux opérateurs génétiques pour permettre au même temps l'évolution des individus et des espèces. Le croisement a été modifié par les opérateurs de « shift » (translation aléatoire de la position des chromosomes) et « reorder » (réarrangement de la position des chromosomes une fois que la phase classique de croisement a été appliquée), alors que les opérateurs de mutation du nombre de chromosomes et de « addition/deletion » (ajout/suppression aléatoire d'un chromosome) viennent modifier la phase de mutation classique. Ces opérateurs sont appliqués avec une probabilité donnée et ils correspondent à la phase d'évolution des espèces (nombre de chromosomes). Les opérateurs classiques de croisement et mutation gène par gène continuent d'être appliqués pour garantir l'évolution des individus. La nouvelle phase de croisement est illustrée en Figure 2.

Une description plus détaillée de l'algorithme génétique BIANCA et des opérateurs génétiques peut être trouvée dans [6, 7].



1 – couple de parents

2 – opérateur de « shift » aléatoire

3 – croisement classique gène à gène

4 – résultat après croisement classique

5 – opérateur de « reorder » et individus « enfants »

*Fig. 2. Exemple d'illustration de la nouvelle phase de croisement d'individus d'espèces différentes (cas des stratifiés).*

De plus, afin de permettre le traitement de problèmes d'optimisation de structures, on a introduit une interface pour l'appel de programmes externes, permettant par exemple l'évaluation des fonctions objectif ou de contraintes par lancement d'un code aux éléments finis (cette fonctionnalité est nécessaire pour la résolution du problème d'optimisation en poids du panneau raidi en compression défini en section 3).

## 5. Résultats numériques : conception optimale de stratifiés à nombre minimal de couches

Dans cette section et dans la suivante, on donne des exemples d'application de l'algorithme génétique BIANCA pour la résolution des problèmes d'optimisation en poids des structures composites. On commence par illustrer le cas de la recherche de stratifiés à nombre minimal de couches avec des symétries élastiques fixées défini en section 2.
Les calculs sont réalisés en considérant une couche de base fortement anisotrope : le carbone-époxyde T300/5208 [8] (modules $E_1$ = 181 GPa, $E_2$ = 10.3 GPa, $G_{12}$ = 7.17 GPa, $n_{12}$ = 0.27, épaisseur 0.125 mm).
Les symétries élastiques recherchées dans les calculs, dont on illustre ici les résultats, sont celles indiquées en section 3 (découplage, isotropie de membrane et orthotropie de flexion). Pour cette combinaison de symétries, on cherche le stratifié de poids (ou nombre $n$ de couches) minimal. La formulation du problème est donc celle décrite par les fonctions objectif (1) et (2) (l'exposant de pénalisation est fixé pour ces calculs : $s$ = 2). Il s'agit d'un problème d'optimisation sans contraintes.
Les variables du problème d'optimisation sont le nombre $n$ de couches, variable discrète pouvant prendre les valeurs entières dans l'intervalle [9,16], et les angles d'orientation $\delta_k$ des couches ($k$ = 1, …, $n$), aussi traités ici comme variables discrètes (valeurs entières entre -90° et 90°). Les épaisseurs $t_k$ des couches sont définies ici comme un paramètre fixé ($t_k$ = 0.125 mm, épaisseur de la couche élémentaire en carbone-époxyde), mais elles peuvent aussi être traitées comme variables du problème (des calculs de ce type ont été réalisés, mais on ne présente pas ici les résultats puisqu'ils ne correspondent pas aux exigences des applications).
Le nombre minimal de couches, $n_{opt}$ = 11, nécessaire pour assurer la combinaison recherchée de symétries élastiques est confirmé par des nombreux lancements de BIANCA donnant tous ce même résultat. La meilleure solution trouvée par BIANCA est :

$$[-8/18/-58/68/68/-60/-46/46/89/16/-15] \quad , \quad \text{avec} : n_{opt} = 11 \qquad \text{(Eq. 4)}$$

Les diagrammes polaires (valeur du module en fonction de la direction $\theta$) des composantes $A^*_{11}(\theta)$, $B^*_{11}(\theta)$ et $D^*_{11}(\theta)$ sont donnés en Figure 3, illustrant le bon respect des propriétés de symétrie élastique recherchées (valeur du résidu de 1,3272 $10^{-2}$ pour la solution de l'Eq. (4)).

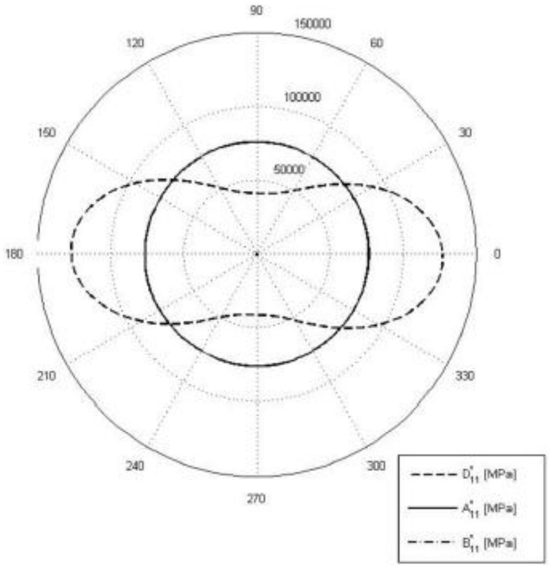



*Fig. 3. Diagrammes polaires des modules élastiques pour le stratifié solution donné en Eq. (4).*

L'exemple donné montre l'efficacité de la formulation élaborée et de la stratégie numérique de résolution développée pour traiter les problèmes de minimisation de poids des composites stratifiés.

Le problème est ainsi traité d'une manière très générale, sans besoin d'introduire d'hypothèse simplificatrice, et au même temps d'une manière simple, étant le problème d'optimisation mono-objectif et sans contraintes. Evidemment, des contraintes ultérieures pourraient être introduites afin de tenir en compte d'autres propriétés demandées pour les stratifiés : résistance au flambage, tenue mécanique, etc.

## 6. Résultats numériques : minimisation du poids de panneaux composites raidis soumis à des chargements en compression

Le problème introduit en section 4 selon la formulation décrite par l'Eq. (3) est un problème d'optimisation avec contraintes. On l'a résolu en utilisant l'algorithme génétique BIANCA pour l'optimisation de structures modulaires (croisement d'espèces), en exploitant les stratégies présentes dans cet algorithme pour le traitement de contraintes (Automatic Dynamic Penalisation, [7]) ainsi que la fonctionnalité d'appel de codes externes pour l'évaluation de fonctions d'optimisation. En fait, dans le cas du panneau raidi en compression de poids minimal, la fonction objectif (poids) est calculée analytiquement, mais la fonction de contrainte, portant sur la charge critique de flambage, nécessite un calcul aux éléments finis.
Dans ces calculs, les variables de l'optimisation sont les caractéristiques géométriques de la plaque (épaisseur $t^{(p)}$) et des raidisseurs (épaisseur $t^{(s)}$ et hauteur $h^{(s)}$), le nombre $n^{(s)}$ de raidisseurs et les propriétés élastiques du matériau constitutif de la plaque et de celui des raidisseurs, considérés comme des matériaux orthotropes équivalents à des composites stratifiés. Les épaisseurs sont aussi définies comme variables discrètes : les valeurs admissibles sont les multiples entiers de l'épaisseur de la couche élémentaire ($t_{EL}$ = 0,125 mm).
On a effectué un premier calcul avec raidisseurs tous différents, et on réalisera un calcul aussi avec des raidisseurs considérés tous identiques.
Le modèle éléments finis (Figure 4) est réalisé avec des éléments de coque à 8 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud (élément présent dans le code ANSYS utilisé pour les calculs présentés ici).

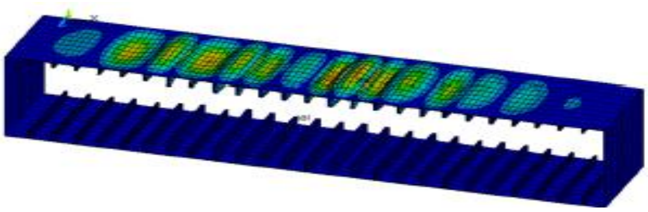


*Fig. 4. Exemple de simulation de flambage pour un panneau raidi optimal (ANSYS).*

Les résultats des calculs montrent une nette amélioration par rapport à la solution de référence (pour la solution de référence, poids : $W_{ref}$ = 134,33 Kg, et charge critique de flambage $N_{ref}$ = 1860 N/mm) : pour le meilleur résultat trouvé actuellement, on a le poids optimal $W_{opt}$ = 67,5 Kg, et charge critique de flambage pour la solution optimale $N_{ref}$ = 1940 N/mm.
D'autres calculs sont en cours, et on peut attendre des meilleurs résultats.

## 7. Conclusions

Dans ce travail, on a présenté la formulation et la stratégie numérique de résolution de problèmes d'optimisation en poids de structures composites modulaires (composites stratifiés et panneaux raidis en compression). On a illustré l'efficacité de l'approche proposée en montrant des résultats sur la recherche de composites stratifiés à nombre de couches minimal. On a aussi présenté des résultats partiels pour le cas du panneau raidi en compression de poids minimal, et on présentera en conférence des résultats plus récents et détaillés.

## Remerciements

M. Montemurro est finance par le FNR (Fond National de la Recherche) du Luxembourg dans le cadre d'une bourse de Doctorat Aides à la Formation Recherche 09-139.

**Références**

[1] P. Vannucci, « Plane anisotropy by the polar method », *Meccanica*, 40, 437-454 (2005).
[2] A. Vincenti, P. Vannucci, R. Ahmadian, « Optimisation of laminated composites by using genetic algorithm and the polar description of plane anisotropy », accepted for publication in *Mech of Adv Mater and Struct* (2010).
[3] C. Julien, « Conception de l'anisotropie dans les structures stratifiées à rigidité variable par la méthode polaire-génétique », Thèse de doctorat en Mécanique, Université Paris 6 «Pierre et Marie Curie» (2010).
[4] D. E. Goldberg, « Genetic algorithms ». Addison and Wesley, 1994.
[5] Z. Michalewicz, « Genetic algorithms + data structures = evolutionary programming ». Springer, 1994.
[6] A. Vincenti, « Conception et optimization de composites par méthode polaire et algorithmes génétiques », Thèse de doctorat en Mécanique, Université de Bourgogne (2002).
[7] A. Vincenti, R. Ahmadian, P. Vannucci « BIANCA: a genetic algorithm to solve hard combinatorial optimisation problems in engineering », *J of Glob Optim*, 48, 399-421 (2010).
[8] S. W. Tsai, T. Hahn, « Introduction to composite materials ». Technomic, 1980.