

Obtention de bornes strictes et pertinentes sur une quantité d intérêt en dynamique

Julien Waeytens, Ludovic Chamoin, Pierre Ladevèze

► **To cite this version:**

Julien Waeytens, Ludovic Chamoin, Pierre Ladevèze. Obtention de bornes strictes et pertinentes sur une quantité d intérêt en dynamique. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB, 2011. <hal-00592905>

HAL Id: hal-00592905

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00592905>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Obtention de bornes strictes et pertinentes sur une quantité d'intérêt en dynamique

J. Waeytens¹, L. Chamoin¹, P. Ladevèze^{1,2}

¹ LMT-Cachan (ENS-Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris), France, {waeytens,chamoin,ladeveze}@lmt.ens-cachan.fr

² EADS Foundation Chair "Advanced Computational Structural Mechanics"

Résumé — L'objet de l'étude est la vérification locale des calculs numériques pour les problèmes de dynamique transitoire. A partir de la notion d'erreur en relation de comportement (erreur en dissipation) et de la résolution d'un problème adjoint, il a été montré que des bornes garanties de l'erreur sur une quantité d'intérêt pouvaient être obtenues. Dans cette présentation, nous nous focalisons sur des techniques permettant d'améliorer la pertinence des bornes. Une illustration sur un cas-test 2D est présentée.

Mots clés — vérification, dynamique, quantité d'intérêt, fonctions de Green

1 Introduction

Dans l'industrie, la simulation numérique prend une place de plus en plus importante. Ainsi, elle permet de remplacer certains essais expérimentaux très coûteux et de réduire le temps de conception du produit. Cependant, peut-on faire confiance à la simulation numérique ? Deux thématiques de recherche appelées validation et vérification tentent de répondre à cette question. Dans le domaine de la vérification, l'objectif est d'estimer l'erreur commise entre la solution du modèle mathématique (généralement hors de portée) et celle fournie par un modèle numérique, *i.e.* l'erreur de discrétisation.

Dans un premier temps, des estimateurs d'erreur globale, donnant une information globale sur la qualité de la solution, ont été introduits. De nos jours, l'attention est portée sur les estimateurs d'erreur locale, fournissant une information sur l'erreur sur une quantité d'intérêt. Ces estimateurs d'erreur locale sont particulièrement utiles pour l'ingénieur afin de dimensionner des structures à condition qu'ils soient **garantis**, *i.e.* ils majorent l'erreur réelle, et **pertinents**, *i.e.* ils sont proche de l'erreur réelle.

2 Obtention de bornes garanties sur une quantité d'intérêt

Nous nous intéressons aux problèmes de viscoélastodynamique. Dans ce travail, nous considérons un problème de dynamique avec le modèle de comportement matériau de Maxwell sous l'hypothèse des petites perturbations. Il s'écrit :

Trouver le champ de déplacement $\underline{u}(\underline{x}, t)$ et le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$, avec $t \in [0, T]$ et $\underline{x} \in \Omega$, qui vérifient :

- \underline{u} cinématiquement admissible (CA) :

$$\underline{u} \in \mathcal{U}^{[0, T]}; \quad \underline{u}|_{\partial_1 \Omega} = \underline{0}, \quad \forall t \in [0, T] \quad (1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\xi}}^e + \underline{\underline{\xi}}^v, \quad \forall \underline{x} \in \Omega, \quad \forall t \in [0, T] \quad (2)$$

- $(\underline{\underline{\dot{u}}}, \underline{\underline{\sigma}})$ dynamiquement admissible (DA) :

$$\sigma \in \mathcal{S}^{[0, T]}; \quad - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}}(\underline{u}^*) d\Omega + \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{|\partial_2 \Omega} \underline{E}_d \cdot \underline{u}^* dS = \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{\dot{u}}} \cdot \underline{u}^* d\Omega \quad (3)$$

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \forall t \in [0, T]$$

- équation d'état :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \Lambda \underline{\underline{\sigma}}, \forall \underline{x} \in \Omega, \forall t \in [0, T] \quad (4)$$

- équation d'évolution :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^v = B \underline{\underline{\sigma}}, \forall \underline{x} \in \Omega, \forall t \in [0, T] \quad (5)$$

- conditions initiales :

$$\underline{u}(t=0) = \underline{0}, \underline{\dot{u}}(t=0) = \underline{0}, \underline{\underline{\sigma}}(t=0) = \underline{0} \quad (6)$$

$\mathcal{U}^{[0,T]}$ est l'espace des champs de déplacement à énergie finie défini sur $\Omega \times [0, T]$, $\mathcal{U}_0^{[0,T]}$ est l'espace défini par $\mathcal{U}_0^{[0,T]} = \{\underline{u} \in \mathcal{U}^{[0,T]}; \underline{u}|_{\partial_1 \Omega} = \underline{0}, \forall t \in [0, T]\}$ et $\mathcal{S}^{[0,T]}$ est l'espace des champs de contrainte à énergie finie, défini sur $\Omega \times [0, T]$. Dans ce problème, deux relations de comportement sont présentes :

- l'équation d'état correspond à la loi d'élasticité ;
- l'équation d'évolution correspond à la loi de viscosité aussi appelée loi de dissipation. Elle est liée au caractère dissipatif du matériau.

ε^e et ε^v sont les variables internes de déformation élastique et visqueuse.

L'objectif de ce travail est d'encadrer de façon **garantie** et **pertinente** la valeur exacte des quantités d'intérêt linéaires s'exprimant sous la forme :

$$I = \int_0^T \int_{\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\Sigma}}} + \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_{\Sigma} + \rho \underline{\dot{u}} \cdot \underline{\tilde{\Gamma}}_{\Sigma} \right) d\Omega dt$$

où $\underline{\underline{\dot{\Sigma}}}$, $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_{\Sigma}$ et $\underline{\tilde{\Gamma}}_{\Sigma}$ sont des extracteurs choisis suivant la quantité d'intérêt retenue. Dans un premier temps, la méthode classique d'obtention de bornes garanties sur une quantité d'intérêt est présentée. Dans un second temps, divers stratégies sont proposées afin d'améliorer la qualité de l'encadrement.

2.1 Méthode classique

Dans [1], les auteurs ont prouvé que des bornes garanties de l'erreur de discrétisation sur I pouvaient être obtenues en utilisant l'estimateur d'erreur globale en relation de comportement appelé "erreur en dissipation", la résolution d'un problème adjoint et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. L'encadrement de la quantité d'intérêt exacte I_{ex} est de la forme :

$$\boxed{\hat{I}_h + \hat{I}_{hh} - E_{CRE} \tilde{E}_{CRE} \leq I_{ex} \leq \hat{I}_h + \hat{I}_{hh} + E_{CRE} \tilde{E}_{CRE}} \quad (7)$$

où :

- \hat{I}_h est la quantité d'intérêt approchée, calculée à partir de la solution approchée du problème qui est obtenue en pratique avec la méthode des éléments finis et un schéma d'intégration temporel de Newmark ;
- \hat{I}_{hh} est un terme correcteur dépendant de la solution du problème de référence et du problème adjoint ;
- E_{CRE} (resp. \tilde{E}_{CRE}) représente l'erreur en dissipation associée au problème de référence (resp. problème adjoint).

Il est important de souligner que cette méthode basée sur la notion d'erreur en relation de comportement nécessite la reconstruction de champs dit "admissibles" (notés avec un \wedge). Ces champs doivent satisfaire l'ensemble des équations excepté l'équation d'évolution (5). Pour plus de détails, on peut consulter [2, 3, 4].

2.2 Amélioration de la pertinence des bornes

Afin d'améliorer la pertinence des bornes, divers approches sont envisagées :

- raffiner la discrétisation du problème adjoint. Cette méthode est facile à mettre en œuvre. Cependant, elle est coûteuse ;

- utiliser un autre encadrement obtenu avec une inégalité de type Legendre-Fenchel. L'avantage de cet encadrement est la possibilité d'introduire une fonction de pondération choisie en fonction du type de quantité d'intérêt étudiée ;
 - enrichir la solution du problème adjoint à l'aide de fonctions analytiques (fonctions de Green).
- Seuls les deux dernières approches sont détaillées ici.

2.2.1 Encadrement avec l'inégalité de Legendre-Fenchel

Dans le cadre de la dynamique linéaire, on peut montrer que l'encadrement avec l'inégalité de Legendre-Fenchel est voisin de l'encadrement (7) :

$$\boxed{\hat{I}_h + \hat{I}_{hh}^{LF} - E_{CRE}^a \tilde{E}_{CRE}^{\tilde{a}} \leq I_{ex} \leq \hat{I}_h + \hat{I}_{hh}^{LF} + E_{CRE}^a \tilde{E}_{CRE}^{\tilde{a}}} \quad (8)$$

Pour les détails sur l'obtention de cet encadrement, on peut se reporter à [6].

La différence majeure concerne le produit des erreurs en dissipation. En effet, il est remplacé par le produit des erreurs en dissipation pondérées par une fonction $a(t)$ pour le problème de référence et $\tilde{a}(t)$ pour le problème adjoint. Il est important de préciser que la fonction de pondération $a(t)$ doit vérifier certaines propriétés :

- $a(t)$ doit être positive sur toute la plage temporelle ;
- la fonction a s'annule à l'instant final ;
- sa dérivée doit être négative sur toute la plage temporelle ;

Concernant la fonction $\tilde{a}(t)$, elle est déterminée par dualité à partir de la fonction de pondération du problème de référence $a(t)$.

2.2.2 Enrichissement de la solution du problème adjoint

D'après l'encadrement (7), on constate qu'une diminution de l'erreur en dissipation associée au problème adjoint entraîne une amélioration de la pertinence des bornes sur la quantité d'intérêt. Dans cette partie, nous choisissons d'affiner la solution du problème adjoint. Pour cela, la solution est décomposée en une partie "handbook" analytique, déterminée à partir des fonctions de Green de dynamique en milieu infini, et une partie résiduelle, déterminée numériquement à l'aide de la méthode des éléments finis et d'un schéma d'intégration temporel :

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{u}} &= \tilde{\underline{u}}_{PUM}^{hand} + \tilde{\underline{u}}^{res} \\ \tilde{\underline{\sigma}} &= \tilde{\underline{\sigma}}_{PUM}^{hand} + \tilde{\underline{\sigma}}^{res} \end{aligned} \quad (9)$$

où :

- $\tilde{\underline{u}}_{PUM}^{hand}$ représente le déplacement enrichi, défini sur $\Omega_1^{PUM} \cup \Omega_2^{PUM}$, ces domaines sont définis sur la Figure 1 :

$$\tilde{\underline{u}}_{PUM}^{hand} = \phi \underline{u}^{hand} \quad (10)$$

\underline{u}^{hand} est le déplacement "handbook", déterminé à partir des solutions fondamentales viscoélastodynamiques, et ϕ est une fonction de pondération permettant de satisfaire les conditions aux limites en déplacement (1) :

$$\phi = \begin{cases} 1, & \text{in } \Omega_1^{PUM} \\ p \in]0, 1[, & \text{in } \Omega_2^{PUM} \end{cases} \quad (11)$$

$\tilde{\underline{\sigma}}_{PUM}^{hand}$ est la contrainte associée ;

- $(\tilde{\underline{u}}^{res}, \tilde{\underline{\sigma}}^{res})$ représente la partie résiduelle de la solution.

Une illustration des fonctions de Green de dynamique en 2D sous l'hypothèse de contraintes planes est donnée sur la Figure 2.

Enfin, en utilisant une solution du problème adjoint de la forme (9), nous pouvons montrer que l'encadrement garanti sur la quantité d'intérêt exacte devient :

$$\boxed{\hat{I}_h + \hat{I}_{hh}^G - E_{CRE} \tilde{E}_{CRE}^{res} \leq I_{ex} \leq \hat{I}_h + \hat{I}_{hh}^G + E_{CRE} \tilde{E}_{CRE}^{res}} \quad (12)$$

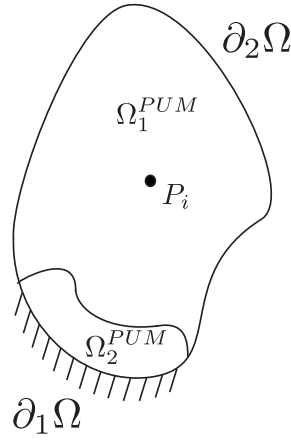


FIG. 1 – Définition des zones d'enrichissement Ω_1^{PUM} et Ω_2^{PUM}

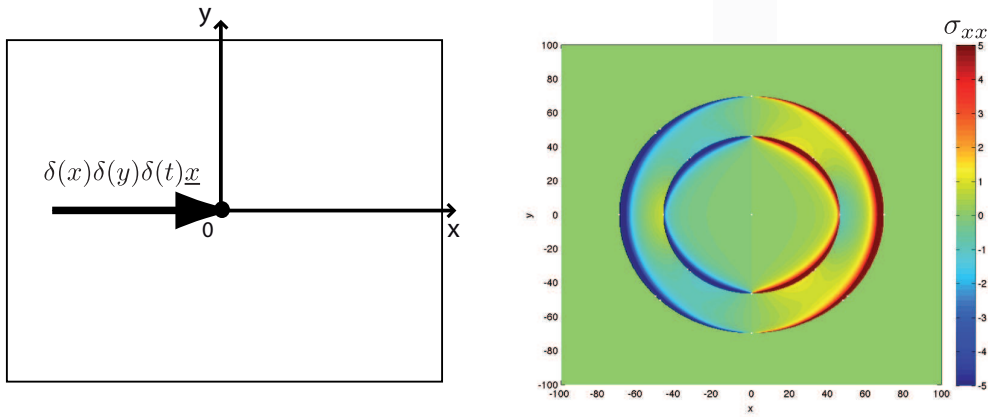


FIG. 2 – Chargement (à gauche) et solution de Green de dynamique en 2D (à droite), δ représentant la distribution de Dirac

On note que :

- la solution handbook analytique (déterminée en milieu infini) vérifie l'ensemble des équations excepté les conditions aux limites. Par conséquent, l'erreur en dissipation du problème adjoint correspond à l'erreur en dissipation de la partie résiduelle ;
- le terme correcteur \hat{I}_{hh}^G dépend de cette solution handbook analytique. Il faut donc accorder une attention particulière à l'intégration numérique.

3 Exemples numériques

3.1 Exemple 1

La Figure 3 représente le problème de dynamique à résoudre sous l'hypothèse de contraintes planes. Le modèle rhéologique de Maxwell est utilisé, avec un module d'Young $E = 10^9 Pa$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0,3$. Un amortissement proportionnel de Rayleigh de la forme $B = \frac{1}{\tau}\Lambda$ est considéré. Le temps caractéristique de viscosité est $\tau = 10^{-3}s$. Le chargement N_d est appliqué sur la partie droite de la structure. De plus, son évolution temporelle est linéaire, de $0 Pa$ au temps $t = 0$ à $N_0 = 10^7 Pa$ au temps $t = 10^{-2} s$.

La quantité d'intérêt étudiée est :

$$I = \frac{1}{mes(\omega)} \int_{\omega} \epsilon_{xx}^v d\omega \quad (13)$$

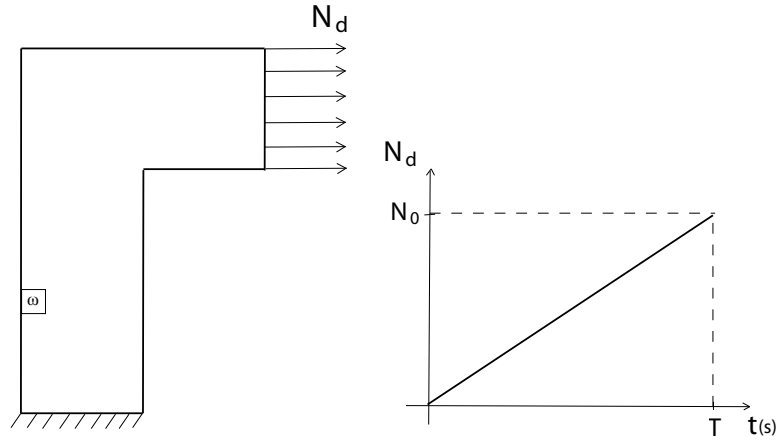


FIG. 3 – Problème de référence et zone d'intérêt ω

\hat{I}_h	\hat{I}_{hh}	E_{CRE}	\tilde{E}_{CRE}	$\bar{\xi}^-$	$\bar{\xi}^+$
$2,9230 \cdot 10^{-2}$	$4,1 \cdot 10^{-5}$	46,4	$1,26 \cdot 10^{-4}$	0,800	1,202

TAB. 1 – Détail des différents termes des bornes avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la quantité d'intérêt de l'exemple 1 - Discrétisation identique pour le problème de référence et le problème adjoint

Pour résoudre ce problème, on utilise une méthode des éléments finis avec des éléments quadrangles à 4 noeuds (QUA4) et le schéma de Newmark des accélérations linéaires ($\alpha = 1/2$, $\beta = 1/6$). La discrétisation du problème de référence est fixée : 902 *ddl* en espace et 140 pas de temps (paramètre CFL de 0,9).

3.1.1 Méthode classique : encadrement avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

En utilisant la même discrétisation pour le problème adjoint et pour le problème de référence, on obtient l'encadrement garanti du Tableau 1. $(\bar{\xi}^-, \bar{\xi}^+)$ représente les bornes normalisées définies par :

$$\begin{cases} \bar{\xi}^- = \frac{\xi^-}{I_{qex}} \\ \bar{\xi}^+ = \frac{\xi^+}{I_{qex}} \end{cases} \quad (14)$$

(ξ^-, ξ^+) étant les bornes sur la quantité d'intérêt et I_{qex} étant la quantité d'intérêt "quasi-exacte" obtenue en raffinant la discrétisation du problème de référence jusqu'à convergence.

Avec la méthode classique, sans raffiner la discrétisation du problème adjoint, des bornes normalisées à $\pm 20\%$ sont obtenues.

3.1.2 Méthode améliorée : encadrement avec l'inégalité de Legendre-Fenchel

Dans [6], nous avons montré que l'encadrement de Legendre-Fenchel avec une fonction de pondération linéaire décroissante de la forme

$$a(t) = 1 - \frac{t}{T} \quad (15)$$

permettait d'obtenir un encadrement plus pertinent pour des quantités d'intérêt dépendant de l'histoire, *e.g* déformation visqueuse.

Dans le Tableau 2, les différents termes des bornes avec l'inégalité de Legendre-Fenchel pour la quantité d'intérêt (13) sont fournis. On conserve la discrétisation de la partie précédente.

Dans notre cas, nous constatons une amélioration de la qualité des bornes normalisées de 5%. En effet, avec l'encadrement de Legendre-Fenchel et la fonction de pondération de type linéaire, des bornes normalisées à $\pm 15\%$ sont obtenues.

\hat{I}_h	\hat{I}_{hh}^{LF}	E_{CRE}^a	\tilde{E}_{CRE}^a	ξ^-	ξ^+
$2,9230 \cdot 10^{-2}$	$5,1 \cdot 10^{-5}$	20,3	$2,28 \cdot 10^{-4}$	0,842	1,156

TAB. 2 – Détail des différents termes des bornes avec l'inégalité de Legendre-Fenchel pour la quantité d'intérêt n°2 - Discrétisation identique pour le problème de référence et le problème adjoint

\hat{I}_h (m/s)	\hat{I}_{hh}^G (m/s)	E_{CRE}	\tilde{E}_{CRE}	ξ^-	ξ^+
25,48	$7,43 \cdot 10^{-2}$	82,04	$4,53 \cdot 10^{-2}$	0,855	1,145

TAB. 3 – Détail des différents termes des bornes adimensionnées pour la quantité d'intérêt A

3.2 Exemple 2

Dans cette partie, on s'intéresse à l'amélioration de la pertinence des bornes par l'enrichissement de la solution du problème adjoint. Cette technique est particulièrement adaptée aux quantités d'intérêt ponctuelles.

Dans un premier temps, une structure carrée en 2D contraintes planes, encastrée à sa base et sollicitée en cisaillement sur sa partie supérieure est étudiée. Pour ce problème, schématisé sur la Figure 4, la quantité d'intérêt retenue est la vitesse horizontale moyenne sur $[t_0, t_1]$ au point M_i .

Le problème adjoint associé à cette quantité d'intérêt est représenté sur la Figure 4. Son chargement est singulier car la quantité d'intérêt est ponctuelle. Pour résoudre le problème adjoint, on décompose la solution en une partie handbook analytique et une partie résiduelle numérique (voir équation (9)).

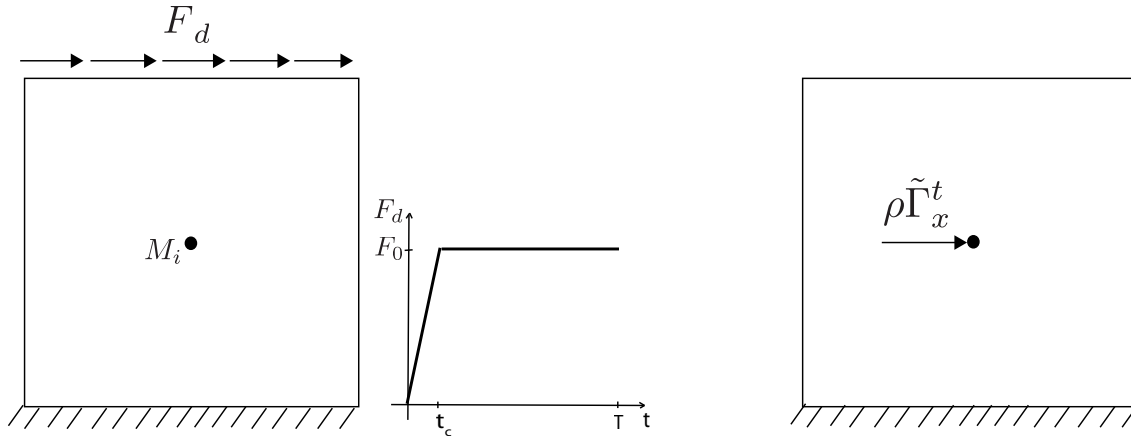


FIG. 4 – Problème de référence (à gauche) et problème adjoint (à droite) de l'exemple 2

Après la résolution du problème de référence et du problème adjoint, des bornes garanties sur la quantité d'intérêt sont calculées. Pour une structure fortement amortie (amortissement associé au premier mode d'environ 100%), des bornes à $\pm 15\%$ sont obtenues. Le détail des différents termes est fourni dans le Tableau 3.

Par contre, les bornes sur la quantité d'intérêt sont peu pertinentes lorsque l'amortissement est moins important. En effet, pour un amortissement modal de 10%, les bornes normalisées sont à $\pm 55\%$. Dans ce cas afin d'améliorer la qualité des bornes, on pourrait envisager d'introduire des fonctions analytiques plus riches prenant en compte la première réflexion d'onde sur la frontière de la structure [7].

4 Conclusion

Nous avons présenté une méthode afin d'obtenir des bornes garanties sur une quantité d'intérêt pour des problèmes de viscoélastodynamique. Celle-ci est basée sur le concept d'erreur en relation de comportement et sur la résolution d'un problème adjoint. Bien que ces bornes soient garanties, elles ne sont pas toujours pertinentes. Afin de pallier ce problème, divers stratégies ont été proposées :

- la plus simple à mettre en œuvre est l'amélioration de la qualité de la solution du problème adjoint

- en raffinant sa discrétisation ;
- pour des quantités d'intérêt dépendant de l'histoire, nous avons vu qu'un encadrement basé sur l'inégalité de Legendre-Fenchel permettait d'obtenir un encadrement plus pertinent ;
 - la dernière approche consiste à améliorer la solution du problème adjoint en introduisant de manière explicite une solution analytique. Des premiers résultats encourageants ont été obtenus pour une quantité d'intérêt ponctuelle en espace sur une structure académique fortement amortie.

Références

- [1] P. Ladevèze. *Strict upper error bounds for computed outputs of interest in computational structural dynamics*, Computational Mechanics, volume 42, pages 271-286, 2008.
- [2] P. Ladevèze, J-P. Pelle. *La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire*, 2001.
- [3] P. Ladevèze, J. Waeytens. *Model verification in dynamics through strict upper error bounds*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, volume 198, pages 1775-1784, 2009.
- [4] F. Pled, L. Chamoin, P. Ladevèze. *On the techniques for constructing admissible stress fields in model verification : performance on engineering examples*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011.
- [5] L. Chamoin, P. Ladevèze. *Bounds on history-dependent or independent local quantities in viscoelastic problems solved by approximate methods*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, volume 71, pages 1387-1411, 2007.
- [6] J. Waeytens. *Contrôle des calculs en dynamique : bornes strictes et pertinentes sur une quantité d'intérêt*, Thèse de doctorat, ENS de Cachan, 2010.
- [7] M. E. Taylor. *Propagation, reflection, and diffraction of singularities of solutions to wave equations*, Bulletin of the American Mathematical Society, volume 84, number 4, 1978.