

# Vers une stratégie multiéchelle pour l'analyse du couplage flambage-délaminage des composites stratifiés

Karin Saavedra, Pierre Gosselet, Olivier Allix

► **To cite this version:**

Karin Saavedra, Pierre Gosselet, Olivier Allix. Vers une stratégie multiéchelle pour l'analyse du couplage flambage-délaminage des composites stratifiés. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592896

**HAL Id: hal-00592896**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00592896>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Vers une stratégie multiéchelle pour l'analyse du couplage flambage-délaminage des composites stratifiés

K. Saavedra, P. Gosselet, O. Allix

LMT-Cachan, ENS Cachan/UPMC/CNRS/PRES UniverSud Paris, France, {saavedra,gosselet,allix}@lmt.ens-cachan.fr

**Résumé** — Cette étude est dédiée au calcul 3D parallèle des phénomènes de délaminage et flambage de structures composites stratifiées. Elle vise à proposer une méthode multiéchelle garantissant l'extensibilité des simulations. Les difficultés inhérentes au problème sont tout d'abord discutées et étudiées séparément : flexion de plis élancés, instabilités géométriques et délaminage.

**Mots clés** — multiéchelle, solveur LaTIn, flambage, délaminage, composites

## 1 Introduction

Le délaminage est ici modélisé comme une dégradation de l'interface sous l'effet de contraintes hors plan (effets de bords, impacts, macrodéfauts). Dans sa phase de propagation, les surfaces délaminées peuvent atteindre une taille critique et le flambage des plis est susceptible de survenir. De plus, l'apparition du flambage augmente les contraintes interlaminaires et l'interaction flambage-délaminage peut ainsi devenir rapidement catastrophique. Les premiers travaux analytiques dans ce domaine remontent aux années 70-80, [1, 2]. Les premières analyses numériques [3] utilisaient la mécanique de la rupture inopérante pour l'analyse de la création de fissure. L'utilisation de modèles cohésifs en non-linéaire géométrique date des années 90 [4, 5]. Ces dernières années ont vu l'émergence des méthodes multiéchelle dédiées à la fois au flambage [6, 7] et au délaminage [8], en vue d'être à même de traiter des problèmes de grandes tailles aux échelles pertinentes. Ce travail est dédié à l'extension de ces méthodes pour traiter l'interaction entre flambage et délaminages multiples sur de grandes longueurs par rapport à l'épaisseur des plis. Il s'inscrit dans le cadre du projet Européen MAAXIMUS.

La stratégie non linéaire multiéchelle définie est une extension aux grandes transformations de la méthode itérative de décomposition de domaine mixte LaTIn à deux échelles décrite dans [9], déjà employée pour l'étude du délaminage [8]. La méthode LaTIn divise la structure en sous-structures liées par des interfaces surfaciques, toutes les deux étant des entités mécaniques avec leur propre groupe d'équations reliés par deux opérateurs de direction de recherche qui paramètrent la méthode. L'extensibilité numérique est obtenue par la résolution d'un problème homogénéisé sur quelques degrés de liberté d'interface qui garantit l'équilibre d'efforts macroscopiques sur la structure entière. La question de la définition des directions de recherche et du problème homogénéisé est cruciale pour les performances de la méthode.

Pour pouvoir appliquer cette stratégie à l'analyse de l'interaction flambage-délaminage, outre les difficultés liées au délaminage traitées dans [8], il faut tout d'abord s'affranchir d'un certain nombre de difficultés spécifiques liées à la nature du problème :

1. Traitement efficace de la flexion de plis élancés ( $L/h \gg 100$ )
2. Non-linéarités géométriques de type flambage
3. Actualisation pertinente des opérateurs dans le cas du délaminage

Nous présenterons de différentes améliorations sur les directions de recherche pour chacun de ces derniers scénarios avec le but de minimiser le nombre d'itérations et le temps de calcul ainsi que d'assurer l'extensibilité de la stratégie. Un premier résultat couplant l'ensemble de ces phénomènes est aussi traité.

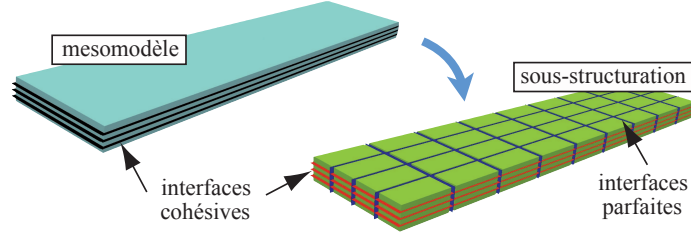


FIGURE 1 – Décomposition de domaine en sous-structures et interfaces

## 2 Problème sous-structuré

La structure stratifiée  $\mathbf{E}$  est décomposée en sous-structures et interfaces (Figure 1). Dans la configuration initiale  $C_0$ , une sous-structure  $E_0$ , définie sur un domaine  $\Omega_{E_0}$ , est connectée à une sous-structure adjacente  $E'_0$  par l'intermédiaire d'une interface  $\Gamma_{E_0E'_0} = \partial\Omega_{E_0} \cap \partial\Omega_{E'_0}$ . L'entité surfacique  $\Gamma_{E_0E'_0}$  impose des distributions d'effort  $\underline{F}_{E_0}$ ,  $\underline{F}_{E'_0}$  et de déplacement  $\underline{W}_{E_0}$ ,  $\underline{W}_{E'_0}$  à  $E_0$  et  $E'_0$  respectivement. On note  $\Gamma_{E_0} = \bigcup_{E'_0 \in \mathbf{E}} \Gamma_{E_0E'_0}$ . Dans la sous-structure  $E_0$  telle que  $\Gamma_{E_0} \cap (\partial\Omega_{F_{d_0}} \cup \partial\Omega_{U_{d_0}}) \neq \emptyset$ , les conditions aux limites  $(\underline{F}_{d_0}, \underline{U}_{d_0})$  sont transmises par introduction de l'interface  $\Gamma_{E_{d_0}}$ .

On note  $\underline{u}_{E_0}$  les déplacements,  $\underline{E}_{E_0}$  le tenseur de déformation de Green-Lagrange,  $\dot{\underline{E}}_{E_0}$  le taux de déformation Lagrangien,  $\underline{\pi}_{E_0}$  le deuxième tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff,  $\underline{F}_{E_0}$  le gradient de la transformation à chaque point de la sous-structure  $E_0$ . Dans l'interface, le saut de déplacements est défini par  $[\underline{W}_{E_0}] = \underline{W}_{E'_0} - \underline{W}_{E_0}$ , la surface moyenne par  $\langle \underline{W} \rangle_{E_0E'_0} = \frac{1}{2}(\underline{W}_{E'_0} + \underline{W}_{E_0})$  et le gradient de la transformation par  $\underline{F}_{EE'} = \underline{\nabla}_0 \langle \underline{W} \rangle_{E_0E'_0} + \underline{I}_d$ .

La solution au problème quasi statique sous-structuré ainsi défini est telle que  $s = (s_{E_0})_{E_0 \in \mathbf{E}}$  à chaque pas de temps, où  $s_{E_0} = (\underline{u}_{E_0}, \underline{\pi}_{E_0}, \underline{W}_{E_0}, \underline{F}_{E_0})$  vérifie les équations suivantes :

- Admissibilité cinématique non linéaire de chaque sous-structure  $E_0$  :

$$\underline{E}_{E_0} = \frac{1}{2} \left( \underline{\nabla}_0 \underline{u}_{E_0} + {}^t \underline{\nabla}_0 \underline{u}_{E_0} + {}^t \underline{\nabla}_0 \underline{u}_{E_0} \underline{\nabla}_0 \underline{u}_{E_0} \right), \text{ dans } \Omega_{E_0} \quad ; \quad \underline{u}_{E_0}|_{\partial\Omega_{E_0}} = \underline{W}_{E_0}|_{\Gamma_{E_0}}, \text{ dans } \Gamma_{E_0E'_0} \quad (1)$$

- Admissibilité statique de  $E_0$  :  $\forall (\underline{u}_{E_0}^*, \underline{W}_{E_0}^*) \in \mathcal{U}_{E_0}^0 \times \mathcal{W}_{E_0}^0$ ,  $\underline{u}_{E_0}^*|_{\partial\Omega_{E_0}} = \underline{W}_{E_0}^*|_{\Gamma_{E_0}}$ ,

$$\int_{\Omega_{E_0}} \underline{\pi}_{E_0} : \dot{\underline{E}}(\underline{u}_{E_0}^*) d\Omega_0 = \int_{\Omega_{E_0}} \rho_{E_0} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_{E_0}^* d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{E_0}} \underline{F}_{E_0} \cdot \underline{W}_{E_0}^* d\Gamma_0 \quad (2)$$

$$\text{où } \dot{\underline{E}}(\underline{u}_{E_0}^*) = \frac{1}{2} (\underline{\nabla}_0 \underline{u}_{E_0}^* + {}^t \underline{\nabla}_0 \underline{u}_{E_0}^* + {}^t \underline{\nabla}_0 \underline{u}_{E_0}^* \underline{\nabla}_0 \underline{u}_{E_0}^* + {}^t \underline{\nabla}_0 \underline{u}_{E_0}^* \underline{\nabla}_0 \underline{u}_{E_0}^*).$$

- Comportement hyperélastique orthotrope de  $E_0$  :

$$\underline{\pi}_{E_0} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{E}_{E_0}}, \text{ dans } \Omega_{E_0}, \quad (3)$$

où  $\psi$  est un potentiel élastique par unité de volume. Dans un premier temps,  $\psi = \frac{1}{2} \mathbf{K}_{E_0} \underline{E}_{E_0} : \underline{E}_{E_0}$  est utilisé.

- Comportement des interfaces :

$$\mathcal{R}_{E_0E'_0}([\underline{W}_{E_0}], \underline{F}_{E_0}, \underline{F}_{E'_0}, \underline{F}_{EE'}) = 0, \text{ dans } \Gamma_{E_0E'_0} \quad ; \quad \mathcal{R}_{E_{d_0}}(\underline{W}_{E_0}, \underline{F}_{E_0}) = 0, \text{ dans } \Gamma_{E_{d_0}} \quad (4)$$

La relation de comportement  $\mathcal{R}_{E_0E'_0}$  pour les interfaces cohésives en grandes transformations est définie dans [5].

### 2.1 L'échelle macroscopique

Pour assurer l'extensibilité numérique de la méthode, un problème global et linéaire peut être résolu sur un nombre réduit d'inconnues. Ce problème est ainsi défini uniquement sur les degrés de liberté macroscopiques d'interface en utilisant un comportement homogénéisé par sous-structure.

Sur chaque interface, les champs cinématiques et statiques sont séparés en une partie macroscopique notée  $\cdot^M$  et une partie microscopique notée  $\cdot^m$  :

$$\underline{F}_{E_0} = \underline{F}_{E_0}^M + \underline{F}_{E_0}^m \quad , \quad \underline{W}_{E_0} = \underline{W}_{E_0}^M + \underline{W}_{E_0}^m \quad (5)$$

Une base macroscopique commune pour les champs cinématiques et statiques est normalement choisie. Pour assurer l'extensibilité numérique de la méthode, la base macro doit extraire au moins la partie linéaire des forces d'interface (9 degrés de liberté macroscopiques en 3D). En effet, cet espace macro contient la partie des champs d'interface avec la plus grande longueur d'onde. Dans nos analyses, cette base macroscopique est employée.

### 3 Résolution : l'algorithme itératif

Le problème non linéaire sous-structuré est résolu par un algorithme itératif LaTin à chaque pas de temps. Le principe de ce solveur consiste en une séparation des équations du problème en deux groupes distincts :

- *Équations non linéaires sur les sous-structures et conditions linéaires de raccord macroscopique aux interfaces* : admissibilité cinématique non linéaire des sous-structures, Éq. (1) ; admissibilité statique des sous-structures, Éq. (2) ; comportement des sous-structures, Éq. (3) ; admissibilité macroscopique d'interface (après linéarisation des équations non linéaires).
- *Équations locales (éventuellement non linéaires) sur les interfaces* : comportement des interfaces, Éq. (4).

Les champs d'interface  $s = (s_{E_0})_{E_0 \in \mathbf{E}} = (\underline{W}_{E_0}, \underline{F}_{E_0})_{E_0 \in \mathbf{E}}$  vérifiant le premier groupe d'équations sont cherchés dans l'espace d'admissibilité  $\mathbf{A}_d$ , alors que les champs d'interface  $\hat{s} = (\hat{s}_{E_0})_{E_0 \in \mathbf{E}} = (\widehat{W}_{E_0}, \widehat{F}_{E_0})_{E_0 \in \mathbf{E}}$  vérifiant le deuxième groupe d'équations appartient à l'espace  $\Gamma$ . La solution  $s_{ref}$  est à l'intersection de ces deux espaces  $s_{ref} \in \mathbf{A}_d \cap \Gamma$ .

La solution  $s_{ref}$  est alors cherchée itérativement dans ces deux espaces : on calcule successivement des solutions  $s_n$  dans  $\mathbf{A}_d$  et  $\hat{s}_{n+\frac{1}{2}}$  dans  $\Gamma$ . Pour fermer ces deux problèmes des directions de recherche  $\mathbf{E}^+$  et  $\mathbf{E}^-$ , liant les solutions  $s$  et  $\hat{s}$  au cours des itérations, sont introduites.

**Étape locale :** L'étape locale consiste en la résolution de problèmes locaux, éventuellement non linéaires, en chaque point d'intégration des interfaces.

$$\text{Trouver } (\widehat{F}_{E_0}, \widehat{W}_{E_0}, \widehat{F}_{E'_0}, \widehat{W}_{E'_0}) \text{ tels que : } \begin{cases} \mathcal{R}_{E_0 E'_0}([\widehat{W}_{E_0}], \widehat{F}_{E_0}, \widehat{F}_{E'_0}, \widehat{F}_{EE'}) = \underline{0} \\ (\widehat{F}_{E_0} - \underline{F}_{E_0}) - k_{E_0}^+ (\widehat{W}_{E_0} - \underline{W}_{E_0}) = \underline{0} \\ (\widehat{F}_{E'_0} - \underline{F}_{E'_0}) - k_{E'_0}^+ (\widehat{W}_{E'_0} - \underline{W}_{E'_0}) = \underline{0} \end{cases} \quad (6)$$

où les deux dernières équations du système (6) sont les directions de recherche  $\mathbf{E}^+$  et les paramètres  $k_{E_0}^+$  et  $k_{E'_0}^+$  sont opérateurs locaux symétriques définis positifs. Pour les interfaces cohésives, le système est non linéaire et il est résolu par un algorithme de Newton-Raphson modifié.

Des problèmes linéaires sont à résoudre à chaque point des interfaces aux conditions limites  $\Gamma_{E_{d_0}}$  :

$$\text{Trouver } (\widehat{F}_{E_0}, \widehat{W}_{E_0}) \text{ tels que : } \begin{cases} \mathcal{R}_{E_{d_0}}(\widehat{W}_{E_0}, \widehat{F}_{E_0}) = \underline{0} \\ (\widehat{F}_{E_0} - \underline{F}_{E_0}) - k_{E_0}^+ (\widehat{W}_{E_0} - \underline{W}_{E_0}) = \underline{0} \end{cases} \quad (7)$$

**Étape globale :** L'étape globale consiste en la résolution de problèmes non linéaires sur les structures vérifiant l'admissibilité macroscopique d'interface.

La direction de recherche monoéchelle (sans l'admissibilité macroscopique)  $\mathbf{E}^-$  s'écrit localement sur les interfaces d'une sous-structure  $E_0$  :

$$(\underline{F}_{E_0} - \widehat{F}_{E_0}) + k_{E_0}^- (\underline{W}_{E_0} - \widehat{W}_{E_0}) = \underline{0}, \text{ on } \Gamma_{E_0 E'_0}, \quad (8)$$

où le paramètre  $k_{E_0}^-$  est un opérateur local symétrique défini positif. La version monoéchelle du problème non linéaire par sous-structures s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{u}_{E_0}^*, \underline{W}_{E_0}^*) \in \mathcal{U}_{E_0}^0 \times \mathcal{W}_{E_0}^0, \quad & \underbrace{\int_{\Omega_{E_0}} \mathbf{K}_{E_0} \underline{E}_{E_0}(\underline{u}_{E_0}) : \underline{\dot{E}}(\underline{u}_{E_0}^*) d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{E_0}} k_{E_0}^- \underline{W}_{E_0} \cdot \underline{W}_{E_0}^* d\Gamma_0}_{-P_{int}(\underline{u}_{E_0})} \\ & = \underbrace{\int_{\Omega_{E_0}} \rho_{E_0} f_{-d} \cdot \underline{u}_{E_0}^* d\Omega + \int_{\Gamma_{E_0}} (\widehat{\underline{F}}_{E_0} + k_{E_0}^- \widehat{\underline{W}}_{E_0}) \cdot \underline{W}_{E_0}^* d\Gamma_0}_{P_{ext}} \end{aligned} \quad (9)$$

Le problème (9) est résolu par un algorithme de Newton-Raphson tangent et l'admissibilité macroscopique est alors appliquée à chaque itération  $i$  du problème linéarisé. La vérification de l'équilibre des efforts macroscopique d'interface ( ${}^i \underline{F}_{E_0}^M + {}^i \underline{F}_{E_0}'^M = \underline{0}$ , dans  $\Gamma_{E_0 F_0}'$ ) suffit pour assurer l'extensibilité de la méthode, mais cette condition est incompatible avec la direction de recherche (8). Il est nécessaire d'introduire un multiplicateur de Lagrange ( ${}^i \widetilde{\underline{W}}_{E_0}^M$ ) $_{E_0 \in \mathbf{E}}$ , recherché dans l'espace  $\mathcal{W}_{ad}^M$ , pour imposer les conditions d'équilibre macroscopique. La recherche d'extremum de ce Lagrangien donne respectivement une équation locale de direction de recherche modifiée :

$$\forall \underline{W}_{E_0}^* \in \mathcal{W}_{E_0}^0, \quad \int_{\Gamma_{E_0}} ({}^i \underline{F}_{E_0} - \widehat{\underline{F}}_{E_0}) \cdot \underline{W}_{E_0}^* d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_{E_0}} \left( k_{E_0}^- ({}^i \underline{W}_{E_0} - \widehat{\underline{W}}_{E_0}) - k_{E_0}^- {}^i \widetilde{\underline{W}}_{E_0}^M \right) \cdot \underline{W}_{E_0}^* d\Gamma_0 = 0 \quad (10)$$

et une équation traduisant les conditions d'admissibilité macroscopique :

$$\forall ({}^i \widetilde{\underline{W}}_{E_0}^M)_{E_0 \in \mathbf{E}} \in \mathcal{W}_{ad}^M, \quad \sum_{E_0 \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{E_0}} {}^i \underline{F}_{E_0} \cdot {}^i \widetilde{\underline{W}}_{E_0}^M d\Gamma_0 = \sum_{E_0 \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_{F_d_0}} \underline{F}_{d_0} \cdot {}^i \widetilde{\underline{W}}_{E_0}^M d\Gamma_0 \quad (11)$$

Une façon de résoudre ce système d'équations consiste à calculer une relation couplant  ${}^i \underline{F}_{E_0}^M$  et  ${}^i \widetilde{\underline{W}}_{E_0}^M$  dans (11). Cette relation est dérivée à partir de l'équilibre linéarisé local par sous-structure et de la direction de recherche modifiée (10). On obtient le problème suivant, posé sur chaque sous-structure  $E_0$  :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{u}_{E_0}^*, \underline{W}_{E_0}^*) \in \mathcal{U}_{E_0}^0 \times \mathcal{W}_{E_0}^0, \quad & \int_{\Omega_{E_0}} \mathbf{K}_{E_0} \underline{E}_{E_0}({}^i \underline{u}_{E_0}) : \left( {}^i \nabla_{\underline{0}} {}^i \delta \underline{u}_{E_0} \nabla_{\underline{0}} \underline{u}_{E_0}^* + {}^i \nabla_{\underline{0}} \underline{u}_{E_0}^* \nabla_{\underline{0}} {}^i \delta \underline{u}_{E_0} \right) d\Omega_0 \\ & + \int_{\Omega_{E_0}} \mathbf{K}_{E_0} \underline{\dot{E}}({}^i \delta \underline{u}_{E_0}) : \underline{\dot{E}}(\underline{u}_{E_0}^*) d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{E_0}} k_{E_0}^- {}^i \underline{W}_{E_0} \cdot \underline{W}_{E_0}^* d\Gamma_0 = -{}^i \tilde{P}_{ext} - P_{int}({}^i \underline{u}_{E_0}) \end{aligned} \quad (12)$$

où  $\underline{\dot{E}}({}^i \underline{u}_{E_0}^*) = \frac{1}{2} (\nabla_{\underline{0}} \underline{u}_{E_0}^* + {}^i \nabla_{\underline{0}} \underline{u}_{E_0}^* + {}^i \nabla_{\underline{0}} {}^i \underline{u}_{E_0} \nabla_{\underline{0}} \underline{u}_{E_0}^* + {}^i \nabla_{\underline{0}} \underline{u}_{E_0}^* \nabla_{\underline{0}} {}^i \underline{u}_{E_0})$ ,  $\underline{\dot{E}}({}^i \delta \underline{u}_{E_0}) = \frac{1}{2} (\nabla_{\underline{0}} {}^i \delta \underline{u}_{E_0} + {}^i \nabla_{\underline{0}} {}^i \delta \underline{u}_{E_0} + {}^i \nabla_{\underline{0}} {}^i \underline{u}_{E_0} \nabla_{\underline{0}} {}^i \delta \underline{u}_{E_0} + {}^i \nabla_{\underline{0}} {}^i \delta \underline{u}_{E_0} \nabla_{\underline{0}} {}^i \underline{u}_{E_0})$ ,  ${}^i \underline{u}_{E_0}$  est connu de l'itération précédente,  ${}^{i+1} \underline{u}_{E_0} = {}^i \underline{u}_{E_0} + {}^i \delta \underline{u}_{E_0}$  et  ${}^i \tilde{P}_{ext} = P_{ext} + \int_{\Gamma_{E_0}} k_{E_0}^- {}^i \widetilde{\underline{W}}_{E_0}^M \cdot \underline{W}_{E_0}^* d\Gamma_0$ . La linéarité de (12) permet d'écrire une relation affine reliant la trace sur le bord du déplacement solution aux efforts d'interface :

$$\forall \underline{F}_{E_0}^* \in \mathcal{F}_{E_0}^0, \quad \int_{\Gamma_{E_0}} {}^i \underline{W}_{E_0} \cdot \underline{F}_{E_0}^* d\Gamma_0 = \int_{\Gamma_{E_0}} ({}^i \mathbb{H}_{E_0} (\widehat{\underline{F}}_{E_0} + k_{E_0}^- {}^i \widetilde{\underline{W}}_{E_0}^M) + {}^i \underline{W}_{E_0}^c) \cdot \underline{F}_{E_0}^* d\Gamma_0 \quad (13)$$

où  $\widehat{\underline{F}}_{E_0} = \underline{F}_{E_0} + k_{E_0}^- \widehat{\underline{W}}_{E_0}$  et l'opérateur  ${}^i \mathbb{H}_{E_0}$  est le complément de Schur dual de la sous-structure  $E_0$  augmenté par la direction de recherche à l'itération  $i$ . Le champ d'interface  ${}^i \underline{W}_{E_0}^c$  résulte de la condensation duale des efforts volumiques et de  $P_{int}({}^i \underline{u}_{E_0})$  sur l'interface  $\Gamma_{E_0}$ . Les interefforts sont alors obtenus par la partie locale de la direction de recherche (10) et projetés dans l'espace macroscopique :

$$\forall \underline{W}_{E_0}^{M*} \in \mathcal{W}_{E_0}^{M0}, \quad \int_{\Gamma_{E_0}} {}^i \underline{F}_{E_0} \cdot \underline{W}_{E_0}^{M*} d\Gamma_0 = \int_{\Gamma_{E_0}} ({}^i \mathbb{L}_{E_0}^M {}^i \widetilde{\underline{W}}_{E_0}^M + {}^i \underline{F}_{E_0}^c) \cdot \underline{W}_{E_0}^{M*} d\Gamma_0, \quad (14)$$

où :

$$\begin{aligned} \forall \underline{W}_{E_0}^{M*} \in \mathcal{W}_{E_0}^{M0}, \quad & \int_{\Gamma_{E_0}} {}^i \mathbb{L}_{E_0}^M {}^i \widetilde{\underline{W}}_{E_0}^M \cdot \underline{W}_{E_0}^{M*} d\Gamma_0 = \int_{\Gamma_{E_0}} (k_{E_0}^- - k_{E_0}^- {}^i \mathbb{H}_{E_0} k_{E_0}^-) {}^i \widetilde{\underline{W}}_{E_0}^M \cdot \underline{W}_{E_0}^{M*} d\Gamma_0 \\ \forall \underline{W}_{E_0}^{M*} \in \mathcal{W}_{E_0}^{M0}, \quad & \int_{\Gamma_{E_0}} {}^i \widetilde{\underline{F}}_{E_0}^M \cdot \underline{W}_{E_0}^{M*} d\Gamma_0 = \int_{\Gamma_{E_0}} (\widehat{\underline{F}}_{E_0} - k_{E_0}^- ({}^i \mathbb{H}_{E_0} \widehat{\underline{F}}_{E_0} + {}^i \underline{W}_{E_0}^c)) \cdot \underline{W}_{E_0}^{M*} d\Gamma_0 \end{aligned}$$

$i\mathbb{L}_{E_0}^M$  est classiquement interprété comme un opérateur homogénéisé de la sous-structure  $E_0$ . Il est calculé explicitement pour chaque sous-structure en résolvant une série de problèmes (12), en prenant les vecteurs de la base macroscopique comme chargement sur  $E_0$ .  $i\mathbb{L}_{E_0}^M$  est fonction de la configuration géométrique.

La relation (14) est finalement introduite dans l'équation traduisant l'admissibilité des efforts macroscopiques (11) afin d'obtenir le problème macroscopique :

$$\forall \underline{\tilde{W}}^{M*} \in \mathcal{W}_{\text{ad}}^M, \sum_{E_0 \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{E_0}} i\mathbb{L}_{E_0}^M \underline{\tilde{W}}^M \cdot \underline{\tilde{W}}_{E_0}^{M*} d\Gamma_0 = \sum_{E_0 \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_{F_d_0}} \underline{F}_{d_0} \cdot \underline{\tilde{W}}_{E_0}^{M*} d\Gamma_0 - \sum_{E_0 \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{E_0}} i\underline{F}_{E_0}^M \cdot \underline{\tilde{W}}_{E_0}^{M*} d\Gamma_0 \quad (15)$$

Afin de calculer le second membre, la résolution de problèmes indépendants sur chaque sous-structure (12) avec  $i\underline{\tilde{W}}^M$  nul est nécessaire. Après résolution du problème macroscopique, les problèmes par sous-structure (12) peuvent finalement être résolus avec pour chargement sur les interfaces les quantités issues de l'étape locale précédente, ainsi que le multiplicateur  $i\underline{\tilde{W}}^M$  calculé par résolution de (15). Les problèmes par sous-structure (12) sont résolus par la méthode des éléments finis.

## 4 Analyses des paramètres de la stratégie

### 4.1 Interfaces parfaites

La direction de recherche  $\mathbf{E}^-$  peut être séparée en une partie macroscopique  $\mathbf{E}^{-M}$  et une partie microscopique  $\mathbf{E}^{-m}$ . [9] a étudié le choix de la direction de recherche microscopique  $(k_{E_0}^{-m})_{E_0 \in \mathbf{E}}$  et le scalaire  $E/L_{\Gamma_{E_0}}$  a été une bonne approximation pour les structures massives, où  $E$  est le module de Young de la sous-structure et  $L_{\Gamma_{E_0}}$  une longueur caractéristique de l'interface. Pour les interfaces parfaites, si  $k_{E_0 E_0'}^{-M} \rightarrow \infty$  est choisie alors la continuité des déplacements macroscopiques est imposée. Les sections suivantes proposent une étude des paramètres locaux  $k_{E_0}^{-m}$  et la validité de la valeur  $E/L_{\Gamma_{E_0}}$  pour des structures minces.

#### 4.1.1 Flexion

Le problème en discussion est une plaque encadrée sur un de ses côtés avec une force de flexion uniformément répartie sur le côté opposé. Les dimensions sont telles que  $L_0 \gg b_0 \gg h_0$  (dans les directions  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$ , respectivement). Le coefficient d'éclatement est fixé à  $L_0/h_0 = 100$ . La sous-structuration a été faite uniquement dans la direction de  $L_0$  ( $X_1$ ). Les valeurs des directions de recherche locale et globale  $k_{E_0}^+ = k_{E_0}^-$  ont été choisies les mêmes.

Le nombre d'itérations à convergence pour 4 sous-structurations différentes est présenté dans la Figure 2. Les valeurs micro et macroscopiques sont tels que  $k_{E_0}^{-M} = k_{E_0}^{-m} = E/L_{\Gamma_{E_0}}$  pour les barres A tandis que pour les barres B  $k_{E_0}^{-M} \rightarrow \infty$ ,  $k_{E_0}^{-m} = E/L_{\Gamma_{E_0}}$  a été utilisé. Dans ces deux cas, la sous-structuration a une influence sur le taux de convergence. Une amélioration sur les directions de recherche microscopiques est proposée du fait que les contraintes et déformations en flexion dépendent fortement des directions normales et tangentielles dans le cas de structures minces. Il est possible de montrer les relations suivantes entre cisaillement et contrainte normale :  $O\left(\frac{\tau_{X_1 X_3}}{h}\right) = O\left(\frac{\sigma_{X_1 X_1}}{L}\right)$  et entre le déplacement normal et hors plan :  $O\left(\frac{u_{X_1}}{h}\right) = O\left(\frac{u_{X_3}}{L}\right)$ . Ainsi, les directions de recherche sont des quantités anisotropes :

$\frac{(k_{E_0}^m)_n}{(k_{E_0}^m)_t} = \left(\frac{L_0}{h_0}\right)^2$ , où le rapport  $L_0/h_0$  est représentatif de l'environnement de l'interface  $\Gamma_{E_0}$ . Ces valeurs anisotropes réduisent le nombre d'itérations à convergence (barres C et D de la Figure 2). En plus, le taux de convergence est indépendant de la sous-structuration quand la continuité des déplacements macroscopiques est vérifiée (barres D).

#### 4.1.2 Flambage

Dans cette partie, un exemple non linéaire géométrique avec perte de rigidité est analysé. Il s'agit d'une plaque console en compression. Les données du problème sont :  $L_0 = 10$  mm,  $h_0 = 0.1$  mm,  $b_0 = 1$

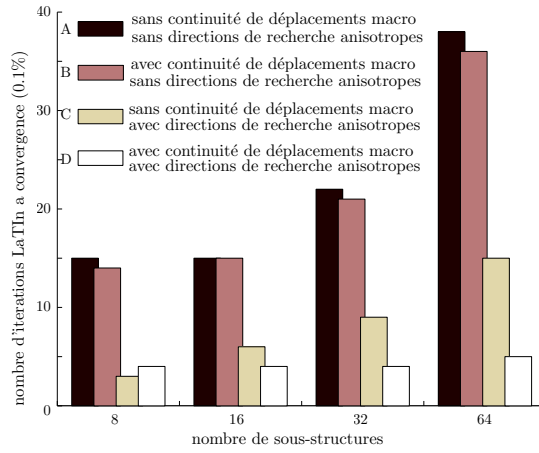


FIGURE 2 – Influence des directions de recherche et de la sous-structuration en flexion

mm et  $E = 135.000$  MPa. La sous-structuration est fixée à 40 dans la direction  $X_1$  (longueur) et à 2 dans la direction  $X_3$  (épaisseur). La même étude de directions de recherche que pour la flexion a été faite. La Figure 3 montre le nombre d'itérations LaTIn pour les premiers 20 pas de temps. Il est important de préciser que le flambage démarre près de l'incrément 6. La courbe de la force de compression en fonction du déplacement transversal du point central est présentée dans la Figure 4.

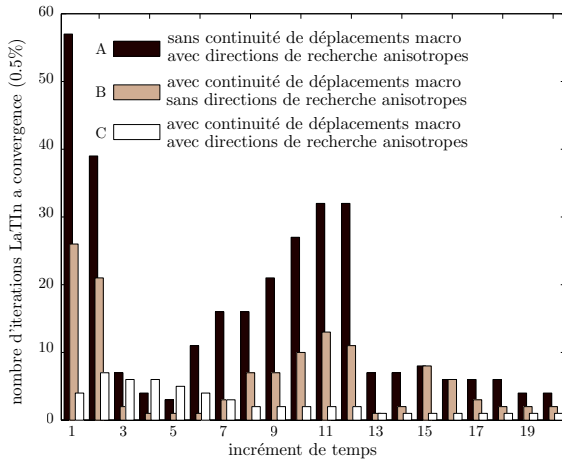


FIGURE 3 – Influence des directions de recherche en flambage

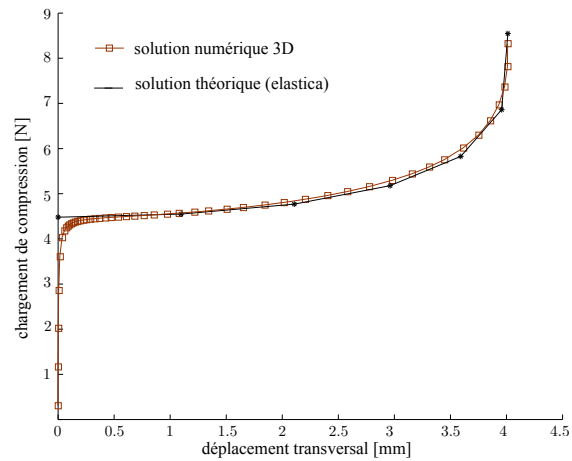


FIGURE 4 – Courbe force-déplacement d'une plaque console en compression

En utilisant les directions de recherche anisotropes sans la continuité des déplacements macroscopiques, alors la convergence de la méthode n'a été possible que si la valeur  $E/L_{\Gamma E_0}$  est amplifiée au moins 100 fois (barres A de la Figure 3). Cette modification est proche d'imposer la continuité des déplacements macroscopiques (barres B).

Un taux de convergence indépendant du moment de flambage est trouvé si la continuité des déplacements macroscopiques et les directions de recherche anisotropes sont imposées en même temps (barres C de la Figure 3).

## 4.2 Interfaces cohésives

Dans le cas d'interfaces cohésives, utiliser  $k_{E_0}^+ \rightarrow \infty$  assure la convergence de la méthode et permet une résolution directe des quantités d'interfaces à l'étape locale. En plus,  $\frac{1}{2}k_{E_0}^{-M} = k^0(1-d)$ , où  $k^0$  est la rigidité locale de l'interface assure la vérification du comportement macroscopique d'interface par les champs recherchés à l'étape linéaire. La validation numérique de ces choix est donné dans [8]. Cette étude utilise ces dernières valeurs ainsi que la valeur microscopique  $\frac{1}{2}k_{E_0}^{-m} = k^0(1-d)$ .

Pour les interfaces en cours de délaminage, la valeur optimale de  $k_{E_0}^-$  implique l'actualisation et

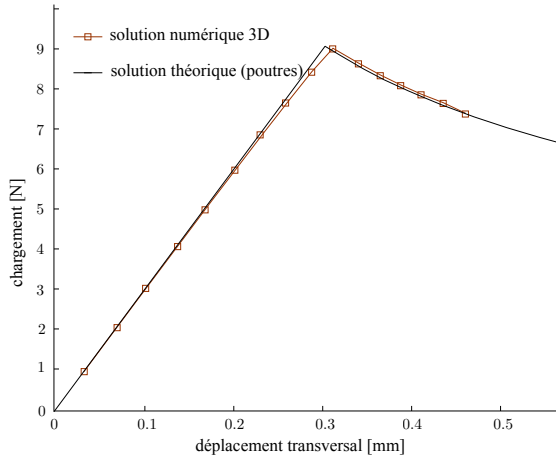


FIGURE 5 – Courbe force-déplacement d’un test DCB

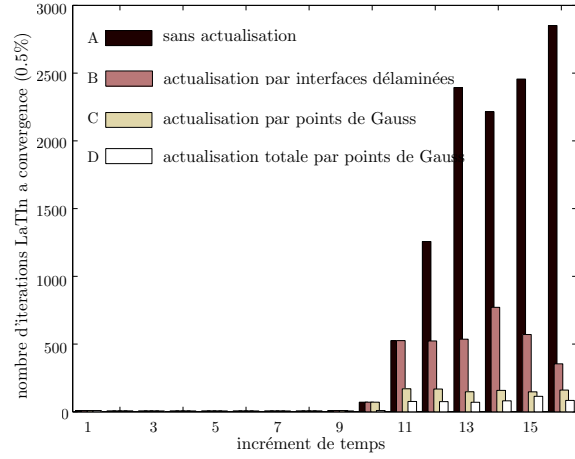


FIGURE 6 – Influence de l’actualisation des directions de recherche sur le taux de convergence

la reconstruction continue des opérateurs macroscopiques et l’augmentation du temps de calcul. Dans les travaux de [8] une actualisation exclusive sur les interfaces complètement délaminées ( $k_{E_0}^- = 0$ ) est proposée, tandis que les interfaces partiellement endommagées sont calculées avec la valeur initiale de la rigidité d’interface. Dans cette section on présente une actualisation par points de Gauss après un nombre d’itérations donné pour éviter des instabilités. Une comparaison de différentes actualisations est faite sur un exemple de DCB en petites perturbations.

Les données sont :  $L_0 = 20$  mm,  $h_0 = 0.5$  mm,  $b_0 = 2$  mm,  $a_0 = 10$  mm,  $E = 135.000$  MPa. Les paramètres d’interface cohésive de [5] sont :  $k^0 = 100.000$  N/mm<sup>3</sup>,  $\alpha = 1$  et  $Y_c = 0.4$  N/mm. La sous-structuration est fixée à 40 dans la longueur, à 2 dans la largeur et 1 sous-structure dans l’épaisseur de chaque plaque.

La réponse globale de la structure est présentée dans la Figure 5. La comparaison des actualisations selon le nombre d’itérations LaTin à chaque pas de temps est faite dans la Figure 6. Le nombre d’itérations augmente quand le premier point de Gauss est complètement endommagé (pas de temps 10). À la fin du calcul 6 interfaces sont entièrement délaminées. Les barres A de la Figure 6 correspondent au cas sans aucune actualisation de  $k_{E_0}^-$ , les barres B à une actualisation  $k_{E_0}^- = 0$  sur les interfaces endommagées et les barres C à une actualisation par point de Gauss avec la valeur actuelle de  $k_{E_0}^- = 2k^0(1 - d)$ . Pour la méthode proposée (barres C) deux actualisations par pas de temps ont été nécessaires, ainsi le nombre d’itérations a été réduit en 70% et le temps de calcul en 50% par rapport à l’actualisation par interface (barres B).

## 5 Couplage flambage-délaminage

L’exemple traite le couplage flambage-délaminage d’une plaque en compression avec une préfissure  $a_0$  et une perturbation symétrique. Les données du problème sont :  $L_0 = 20$  mm,  $h_0 = 0.2$  mm,  $b_0 = 1$  mm,  $a_0 = 10$  mm. La sous-structuration est fixée à 40 dans la longueur, à 1 dans la largeur et 1 sous-structure dans l’épaisseur de chaque plaque. Les caractéristiques matériaux sont celles de la Section 4.2.

La déformée de la plaque et l’endommagement dans l’interface sont donnés dans la Figure 7 (les points complètement endommagés ont  $d = 1$ ). La courbe force de compression versus déplacement transversal d’un des deux points centraux est présentée dans la Figure 8. La réponse de la structure atteint une charge critique de flambage, puis la géométrie déformée active le mode-I de délaminage (zone d’adoucissement de la réponse).

## 6 Conclusion

La prédiction du délaminage couplant des effets non linéaires géométriques a été traitée avec une stratégie de décomposition de domaine multiéchelle qui permet le calcul de grands systèmes d’équations non



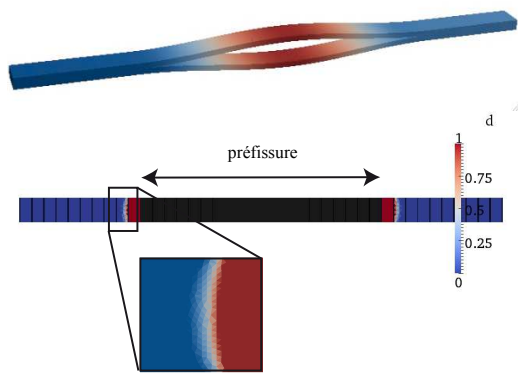


FIGURE 7 – Plaque en compression avec une pré-fissure et perturbation symétrique : déformée et front de fissure

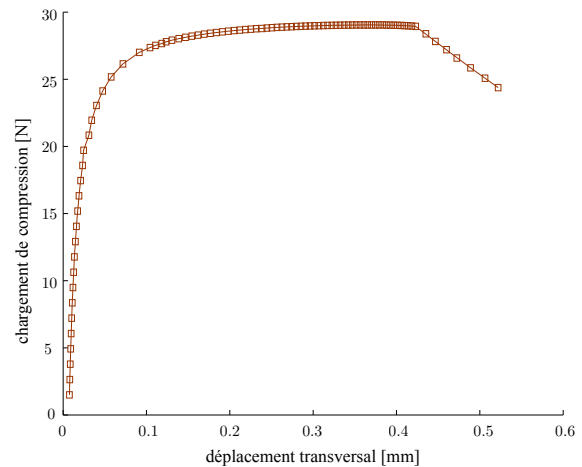


FIGURE 8 – Courbe force-déplacement d'une plaque en compression

linéaires à leurs échelles les plus appropriées. L'échelle macroscopique assurant la transmission rapide de la partie à grande longueur d'onde de la réponse par l'introduction d'un comportement homogénéisé des sous-structures et la vérification de l'équilibre macroscopique.

La stratégie multiéchelle a été améliorée afin de la rendre capable de manipuler de grands problèmes de délaminage avec délamination induite. Les paramètres de la méthode ont été adaptés pour rendre possible l'analyse de plaques minces en flexion ainsi qu'en flambage. Une nouvelle actualisation des directions de recherche a été aussi proposée pour le traitement efficace de délaminage.

Des travaux futurs sont orientés vers l'étude des interactions de flambage local et global, l'actualisation pertinente des opérateurs géométriques, le traitement du comportement orthotrope de couches composites et l'introduction de conditions de contact vrai dans les zones délaminées.

**Remerciements :** Ces recherches sont financées par le septième programme-cadre de la Communauté Européen FP7/2007-2013, contrat n°213371.

## Références

- [1] L. M. Kachanov. Separation failure of composite materials. *Polymer Mechanics*, 12 :812–815, 1976.
- [2] H. Chai, C. D. Babcock, and W. G. Knauss. One dimensional modeling of failure in laminated plates by delamination buckling. *International Journal of Solids and Structures*, 17(11) :1069–1083, 1981.
- [3] B. Storakers and B. Andersson. Nonlinear plate theory applied to delamination in composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 36(6) :689–718, 1988.
- [4] D. Bruno and A. Grimaldi. Delamination failure of layered composite plates loaded in compression. *International Journal of Solids and Structures*, 26(3) :313–330, 1990.
- [5] O. Allix and A. Corigliano. Geometrical and interfacial non-linearities in the analysis of delamination in composites. *International Journal of Solids and Structures*, 36(15) :2189–2216, 1999.
- [6] P. Cresta, O. Allix, C. Rey, and S. Guinard. Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods : Application to post-buckling analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :1436–1446, 2007.
- [7] S. Nezamabadi, H. Zahrouni, J. Yvonnet, and M. Potier-Ferry. A multiscale finite element approach for buckling analysis of elastoplastic long fiber composites. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 8(3) :287–301, 2010.
- [8] P. Kerfriden, O. Allix, and P. Gosselet. A three-scale domain decomposition method for the 3D analysis of debonding in laminates. *Computational Mechanics*, 44(3) :343–362, 08 2009.
- [9] A. Nouy and P. Ladevèze. On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3061–3087, 2004.