

Méthode multipôle rapide multi-niveaux en visco-élastodynamique 3D

Eva Grasso, Stéphanie Chaillat, Jean-François Semblat, Marc Bonnet

▶ **To cite this version:**

Eva Grasso, Stéphanie Chaillat, Jean-François Semblat, Marc Bonnet. Méthode multipôle rapide multi-niveaux en visco-élastodynamique 3D. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. 8 p.; Clé USB. hal-00592883

HAL Id: hal-00592883
https://hal.science/hal-00592883

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2011
10e Colloque National en Calcul des Structures
9-13 Mai 2011, Presqu'île de Giens (Var)

Méthode multipôle rapide multi-niveaux en visco-élastodynamique 3D

E. Grasso[1,2], S.Chaillat[3], J.-F. Semblat[1], M.Bonnet[2,3]

[1] *LCPC-Paris, France, semblat@lcpc.fr*
[2] *LMS (UMR CNRS-Polytechnique 7649), Ecole Polytechnique, France, grasso@lms.polytechnique.fr*
[3] *POems (UMR 7231 CNRS-ENSTA-INRIA), UMA ENSTA, Paris, France, marc.bonnet@ensta.fr, stephanie.chaillat@ensta.fr*

1 Introduction

La Méthode des Eléments de Frontière accélérée par Méthode Multipôle Rapide (*fast multipole boundary element method*, FMBEM) et sa variante multi-niveaux (ML-FMBEM) sont des outils puissants en calcul de propagation d'ondes faisant intervenir des modèles de grande taille N [1], notamment pour des domaines non bornés grâce à la prise en compte implicite des conditions de rayonnement. Cette étude concerne une extension de la ML-FMBEM, sous sa forme récemment développée pour l'élastodynamique 3D dans le domaine fréquentiel [2], à la visco-élastodynamique. L'adaptation de la ML-FMBEM aux matériaux amortissants permet de reproduire la décroissance de l'amplitude des ondes due à la dissipation intrinsèque du milieu de propagation, et de décrire l'amplitude limitée et le décalage de phase typiques des systèmes excités près de la résonance [3]. L'application visée étant l'étude de la propagation des ondes dans les sols (propagation des ondes sismiques ou de vibrations induites par le trafic ferroviaire), on se restreint à des niveaux d'amortissement faibles.

L'article est organisé comme suit. La section 2 rappelle la loi de comportement des milieux visco-élastiques linéaires isotropes pour des sollicitations harmoniques, puis définit le nombre d'onde complexe et son approximation dans le cas des milieux peu amortissants. La section 3 présente ensuite la formulation en nombre d'onde complexe pour la méthode FMBEM multi-niveaux. La section 4 détaille alors les parties de la formulation qui sont particulièrement touchées par l'introduction des paramètres complexes, comme l'évaluation numérique du développement du noyau de Helmholtz. On met en évidence les erreurs d'évaluation de ce noyau que l'on commet lorsque l'on utilise les réglages numériques classiques, i.e. ceux utilisés pour la formulation en nombre d'onde réel. L'étude menée pour pouvoir évaluer précisément cette expansion est présentée en section 5. On montre que la série définissant la fonction de transfert doit être tronquée à un ordre plus élevé et on propose une relation pour ajuster le paramètre de troncature selon le niveau d'amortissement.

2 Comportement des milieux visco-élastiques en dynamique stationnaire

Conditions de validité. Compte tenu des applications visées par ce travail, le domaine de propagation est constitué par le demi-espace du sol. Si le niveau de déformations induites dans le milieu par une sollicitation cyclique et harmonique dans le temps n'atteint pas le seuil dit de *déformations linéaires cycliques*, le comportement du sol peut être décrit du point de vue phénoménologique par la théorie de la visco-élasticité. Le seuil de déformations linéaires cycliques dépend du type du sol, et il est de l'ordre de 10^{-5} pour les sables et de 10^{-4} pour des argiles normalement consolidées, NC, avec un indice de plasticité $IP = 50$. L'hypothèse de comportement visco-élastique est bien corroborée pa l'expérience [4, 5].

Loi de comportement visco-élastique linéaire isotrope. Celle-ci s'écrit

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x},t) = \int_{-\infty}^{t} \mathcal{C}_{ijkl}(t-\tau)\,\dot{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{x},\tau)\,d\tau \tag{1}$$

$\mathcal{C}_{ijkl}$ étant le tenseur de relaxation. Pour des milieux homogènes et isotropes, ce tenseur peut se réécrire en fonction de deux coefficients de Lamé indépendants comme

$$\mathcal{C}_{ijkl}(t) = \left[\lambda(t)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(t)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\right]H(t) \tag{2}$$

(H étant la fonction échelon). Si on considère la déformation comme une fonction harmonique du temps on a :

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x},\tau) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{x})e^{-i\omega\tau}, \qquad \dot{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{x},\tau) = -i\omega\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})e^{-i\omega\tau},$$

et l'équation (1) peut être réécrite sous la forme [6] (en notant $\eta = t-\tau$)

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x},t) = \left[i\omega\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\eta)H(\eta)e^{i\omega\eta}d\eta\right]\varepsilon_{kk}(\mathbf{x})\delta_{ij}e^{-i\omega t} + 2\left[i\omega\int_{-\infty}^{\infty}\mu(\eta)H(\eta)e^{i\omega\eta}d\eta\right]\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})e^{-i\omega t},$$

où la limite inférieure de l'intégrale ci-dessus a pu être prise à $-\infty$ au lieu de 0 compte tenu de (2). Les termes entre crochets représentent ainsi les transformées de Fourier de $\lambda(t)H(t)$ et $\mu(t)H(t)$. Omettant l'exponentielle harmonique dans le temps, on peut réécrire (1) comme suit :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \lambda(\omega)\varepsilon_{kk}(\mathbf{x})\delta_{ij} + 2\mu(\omega)\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$$

La formulation pour un problème visco-élastique linéaire en régime harmonique est ainsi formellement analogue à celle élastique linéaire, à cela près que les coefficients de Lamé, la vitesse de propagation des ondes de pression P ou de cisaillement S et les nombres d'onde sont complexes et fonctions de la fréquence de sollicitation dans la formulation visco-élastique. Comme on se place dans le domaine fréquentiel, la dépendance de l'amortissement du matériau par rapport à la fréquence n'intervient pas. Une analyse dans le domaine temporel nécessiterait le choix d'un modèle rhéologique adéquat pour le sol qui prenne en compte cette dépendance.

Définition des paramètres complexes. Le nombre d'onde complexe est défini par

$$(k^\star(\omega))^2 = \frac{\rho\omega^2}{M(\omega)} \tag{3}$$

où $M(\omega)$ est le module complexe et $|M(\omega)| = \sqrt{M_r^2(\omega) + M_i^2(\omega)}$. Le nombre d'onde complexe peut être mis sous la forme $k^\star(\omega) = k(\omega) + i\alpha(\omega)$, avec $k(\omega)$ (nombre d'onde réel) et $\alpha(\omega)$ (*atténuation*, mesurant la décroissance spatiale de l'amplitude des ondes) donnés en fonction du module complexe par

$$k(\omega) = \omega\sqrt{\frac{\rho(|M| + M_r)}{2|M|^2}}, \qquad \alpha(\omega) = \omega\sqrt{\frac{\rho(|M| - M_r)}{2|M|^2}}.$$

Dans le cas de milieux faiblement dissipatifs (i.e. $\beta(\omega) \ll 1$), $\alpha(\omega)$ peut être approché par $\tilde{\alpha} = k(\omega)\beta(\omega)$, $\beta(\omega)$ étant l'*amortissement* [5]. Cette hypothèse étant vérifie dans le cadre de ce travail, on considère dans la suite l'approximation :

$$k^\star(\omega) = k(\omega) + i\tilde{\alpha}(\omega) = k(\omega)(1 + i\beta(\omega))$$

Dans un milieu visco-élastique, les constantes de Lamé complexes s'écrivent [6] :

$$\mu^\star = \mu(1 - 2i\beta_\mu), \qquad \lambda^\star = \lambda(1 - 2i\beta_\lambda)$$

On en déduit (après substitution, factorisation et troncature de la série de MacLaurin au premier terme) que

$$k_S^\star = \omega\sqrt{\frac{\rho}{\mu^\star}} = \omega\sqrt{\frac{\rho}{\mu(1 - 2i\beta_\mu)}} = k_S(1 + i\beta_\mu) + o(\beta_\mu),$$

avec $k_S = \sqrt{\mu/\rho}$. Ici, on a fait la distinction entre β_μ et β_λ, c'est-à-dire entre amortissement lié aux ondes de cisaillement ou aux ondes de pression. Dans la pratique les deux sont souvent confondus. Le nombre d'onde $k_P^\star$, le coefficient de Poisson ν et la vitesse des ondes S et P sont donnés (avec $\gamma^{\star 2} = (1 - 2\nu^\star)/(2(1 - \nu^\star))$ par :

$$k_P^\star = k_S^\star\gamma^\star, \qquad \nu^\star = \lambda^\star / (2\lambda^\star + 2\mu^\star), \qquad c_S^\star = \sqrt{\mu^\star/\rho} \qquad \text{et} \quad c_P^\star = c_S^\star/\gamma^\star.$$

3 Formulation en nombre d'onde complexe pour la ML-FMBEM

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ une région occupée par un solide tridimensionnel isotrope, homogène et à comportement visco-élastique. On considère une distribution de tractions t^D imposée sur une partie de la frontière $\partial\Omega$ avec une dépendance harmonique du type $e^{-i\omega t}$, ω étant la pulsation. Dans la suite, on expose brièvement la partie de formulation de la FMBEM multi-niveaux affectée par l'extension à la visco-élastodynamique. Pour une explication détaillée de la méthode complète et du formalisme utilisé dans ce travail on renvoie à [2].

La méthode FM-BEM multi-niveaux en visco-élastodynamique. La méthode des Eléments de Frontière par collocation (CBEM) amène à la résolution d'un système du type

$$(\mathcal{K}u)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \tag{4}$$

où l'opérateur linéaire $\mathcal{K}$ et le second membre f sont, pour un problème de Neumann, définis par

$$(\mathcal{K}u)(\mathbf{x}) = c_{ik}(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x}) + (P.V.)\int_{\partial\Omega} u_i(\mathbf{y})T_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega)dS_y\,, \quad f(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} t_i^D(\mathbf{y})U_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega)dS_y \qquad (\mathbf{x} \in \partial\Omega),$$

où $U_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega)$ et $T_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega)$ représentent la i-ème composante du déplacement et du vecteur contrainte associés à la solution fondamentale visco-élastodynamique générée en un point $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ par une source ponctuelle appliqué au point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ dans la direction k, données par

$$U_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega) = \frac{1}{k_S^{\star 2}\mu^\star}\left((\delta_{qs}\delta_{ik} - \delta_{qk}\delta_{is})\frac{\partial}{\partial x_q}\frac{\partial}{\partial y_s}G(|\mathbf{y}-\mathbf{x}|;k_S^\star) + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_k}G(|\mathbf{y}-\mathbf{x}|;k_P^\star)\right), \tag{5a}$$

$$T_i^k(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega) = C_{ijhl}\frac{\partial}{\partial y_l}U_h^k(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega)n_j(\mathbf{y}), \tag{5b}$$

où les composantes du tenseur du quatrième ordre C_{ijhl} valent :

$$C_{ijhl} = \mu^\star\left[\frac{2\nu^\star}{1-2\nu^\star}\delta_{ij}\delta_{hl} + \delta_{ih}\delta_{jl} + \delta_{jh}\delta_{il}\right]$$

Les solutions fondamentales (5b) sont des combinaisons linéaires de dérivées de la fonction de Green pour l'équation de Helmholtz $G(|\mathbf{r}|;k^\star)$ ($\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ étant le vecteur position). La méthode multipôle rapide multi-niveaux se base sur un développement multipôle de $G(|\mathbf{r}|;k^\star)$. Dans ce travail on a utilisé la *formulation diagonale*, qui découle de l'application du théorème d'addition de Gegenbauer au noyau de Helmholtz et une décomposition du vecteur position $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x} = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + \mathbf{r}_0 + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$, avec $\mathbf{r}' < \mathbf{r}$ (Figure 1) et s'écrit :

$$G(|\mathbf{r}|;k^\star) = \frac{e^{ik^\star|\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}|} = e^{-\beta k|\mathbf{r}|}\frac{e^{ik|\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}|} = \lim_{L\to+\infty}\int_{\hat{\mathbf{s}}\in\mathcal{S}} e^{ik^\star\hat{s}.(\mathbf{y}-\mathbf{y}_0)}\mathcal{G}_L(\hat{\mathbf{s}};|\mathbf{r}_0|;k^\star)e^{ik^\star\hat{s}.(\mathbf{x}_0-\mathbf{x})}d\hat{\mathbf{s}} = \lim_{L\to+\infty} G_L(|\mathbf{r}|;k^\star), \tag{6}$$

$\mathcal{S} = \left\{\hat{\mathbf{s}}\in\mathbb{R}^3/\|\hat{\mathbf{s}}\| = 1\right\}$ étant la sphère unité et $\mathcal{G}_L(\hat{\mathbf{s}};\mathbf{r}_0;K)$ la fonction de transfert :

$$\mathcal{G}_L(\hat{\mathbf{s}};\mathbf{r}_0;k^\star) = \frac{ik^\star}{16\pi^2}\sum_{\ell=1}^{L}(2\ell+1)i^\ell h_\ell^{(1)}(k^\star|\mathbf{r}_0|)P_\ell(cos(\hat{\mathbf{s}},\mathbf{r}_0)) \tag{7}$$

où $h_\ell^{(1)}(z)$ sont les fonctions de Hankel sphériques de première espèce et P_ℓ les polynômes de Legendre. En pratique, la décomposition (6) est exploitée sous sa forme tronquée à L fini donnant une valeur approchée $G_L(|\mathbf{r}|;k^\star)$ de $G(|\mathbf{r}|;k^\star)$, et le choix de L est crucial pour la précision et l'efficacité de tout l'algorithme multipôle.

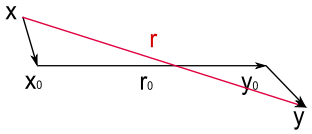


FIGURE 1 – Décomposition du vecteur position $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$.

La ML-FMBEM est basée sur la subdivision récursive d'un cube englobant le domaine Ω (niveau ℓ^0) en $2\times2\times2 = 8$ cellules cubiques (niveaux $\ell^1, \ell^2 \ldots$). Le procédé de subdivision s'arrête lorsque la taille linéaire d des cellules les plus petites devient inférieure à une valeur seuil $d_{min} = \alpha\lambda_S$ correspondant à une certaine fraction α de la longueur d'onde de cisaillement. Le niveau $\bar{\ell}$ le plus profond de la subdivision, tel que $d^{(\bar{\ell}+1)} \leq d_{min} \leq d^{(\bar{\ell})}$, est dit *niveau feuille*. La valeur de cette limite inférieure est liée à la divergence des fonction de Hankel pour des tailles de cellules trop petites. La valeur du paramètre d'arrêt α doit être évaluée au moyen de tests numériques. En élastodynamique il a été trouvé expérimentalement que $\alpha = 0.3$ est une valeur correcte [2]. Dans cette structure hiérarchique, $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{y}_0$ sont situés aux centres de cellules cubiques.

L'étude de (6) pour $L\to\infty$ montre que la convergence pour $L\to\infty$ est assurée quand $\mathbf{y}, \mathbf{y}_0$ et $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0$ proviennent de cellules non adjacentes (ne se touchant pas, même par un coin) [7]. L'algorithme multipôle rapide utilise donc la représentation (6) pour évaluer l'influence des points $\mathbf{y}$ proches d'un pôle local $\mathbf{y}_0$ sur les points de collocation $\mathbf{x}$ proches d'un pôle $\mathbf{x}_0$ ($\mathbf{y}_0$ et $\mathbf{x}_0$ étant les centres de cellules non adjacentes). L'accélération permise par la ML-FMBEM repose sur (i) la réduction du volume total d'intégrations sur $\partial\Omega$ résultant de la séparation de variables dans la décomposition (6), et (ii) le partitionnement optimal des tâches permis par la subdivision récursive.

Le paramètre de troncature L dépend de la taille des cellules à chaque niveau. Plusieurs formules semi-empiriques ont été proposées dans la littérature, voir par exemple [7, 8]. En élastodynamique, on utilise

$$L = L_0(kD) = kD + C\ Log_{10}(kD+\pi) \tag{8}$$

(avec $D = \sqrt{3}d$), où la constante C a été trouvée empiriquement $C = 7.5$ [2]. L'importance du choix de L réside dans son influence sur la convergence de (6) ainsi que sur le temps de calcul (l'intégration numérique sur la sphère unité $\hat{\mathbf{s}}$ nécessitant $O(L^2)$ points) et la mémoire.

4 Evaluation de la fonction de transfert à nombre d'onde complexe

Dans la littérature peu de travaux abordent le sujet de l'algorithme multipôle pour l'équation de Helmholtz à nombre d'onde complexe (voir l'état de l'art présenté dans [9]). Même si la forme diagonale classique (6) reste valable, l'introduction du nombre d'onde complexe affecte le comportement de l'approximation du noyau de Helmholtz. La perte de précision due à l'évaluation numérique des fonctions $h_\ell^{(1)}(k^\star|\mathbf{r}_0|)$ est partiellement compensée par la présence de la fonction exponentielle $e^{-\beta k|\mathbf{r}|}$. Par contre, la valeur de L permettant de maintenir un niveau de précision constant sur $G(|\mathbf{r}|,k^\star)$ est une fonction croissante de β. Le comportement numérique des fonctions de Hankel sphériques avec argument complexe est étudié dans [10, 11]. La formule de récurrence directe à trois termes proposée dans [12] est stable et peut être utilisée dans l'évaluation des $h_\ell^{(1)}$ pour ℓ croissant.

Limitations de la relation du paramètre de troncature dans le cas à nombre d'onde réel. L'erreur induite par le choix de L fini dans la représentation (6) et le remplacement de l'intégration sur $\mathcal{S}$ par une quadrature numérique (à $O(L^2)$ points) dépend de $\mathbf{r}'$ (position des points $\mathbf{x},\mathbf{y}$ relativement aux pôles $\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0$), de $k^\star d$ (taille des cellules), de $\mathbf{r}_0$ (distance entre cellules) et de l'intégration $\mathcal{S}$. La combinaison la plus défavorable, conduisant à l'approximation du noyau de Helmholtz la moins précise, correspond au cas où $\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0$ sont les centres de cellules feuilles non-adjacentes les plus proches possibles (figure 2). Pour une configuration donnée de points, l'augmentation de l'amortissement β conduit à une perte de précision dans l'évaluation de G, comme le montrent les figures 2 représentant l'erreur relative $\varepsilon_{rel} = |G_L - G_{an}|/|G_{an}|$ d'évaluation de la solution fondamentale en fonction de $|k^\star d|$ et L pour des valeurs croissantes de β. La valeur de L définie par (8) n'est pas optimale pour les nombres d'onde complexes et doit être ajustée en fonction de β. Afin d'étudier l'erreur introduite dans l'approximation $G_L(k^\star, |\mathbf{r}_0+\mathbf{r}'|)$ de $G(k^\star, |\mathbf{r}|)$ par le choix (6) de L, on introduit l'erreur relative définie par

$$\varepsilon_r^2(\beta) = \left(\sum_{|k^\star d|} \sum_{|\mathbf{r}'|} |G - G_L|^2 \right) \Big/ \left(\sum_{|k^\star d|} \sum_{|\mathbf{r}'|} |G|^2 \right) \tag{9}$$

Ici, les cellules feuilles sont les plus proches non adjacentes ($\mathbf{r}_0 = 2d$). Pour obtenir une répartition réaliste des points à l'intérieur de chaque cellule, on a considéré d'une part un nuage de points $\mathbf{r}$ uniformément répartis, d'autre part un nuage à distribution gaussienne, tous deux de moyenne $k^\star d$. La précision sur G diminue progressivement dans les deux cas quand β augmente (Fig. 4, courbes en trait plein), la précision étant meilleure dans le cas gaussien. Dans la suite on propose une adaptation de la formule (8) pour déterminer L permettant la prise en compte de la dépendance en β et réalisant une précision constante pour G dans la plage $0 \leq \beta \leq 0.1$ jugée pertinente ici.

Proposition d'une nouvelle relation pour le paramètre de troncature. On propose une relation inspirée du cas des nombres d'onde réels :

$$L = L(k^\star D; \beta, C_1, C_2) = k^\star D + (7.5 + C_1\beta)\, Log_{10}(k^\star D + \pi) + C_2\beta. \tag{10}$$

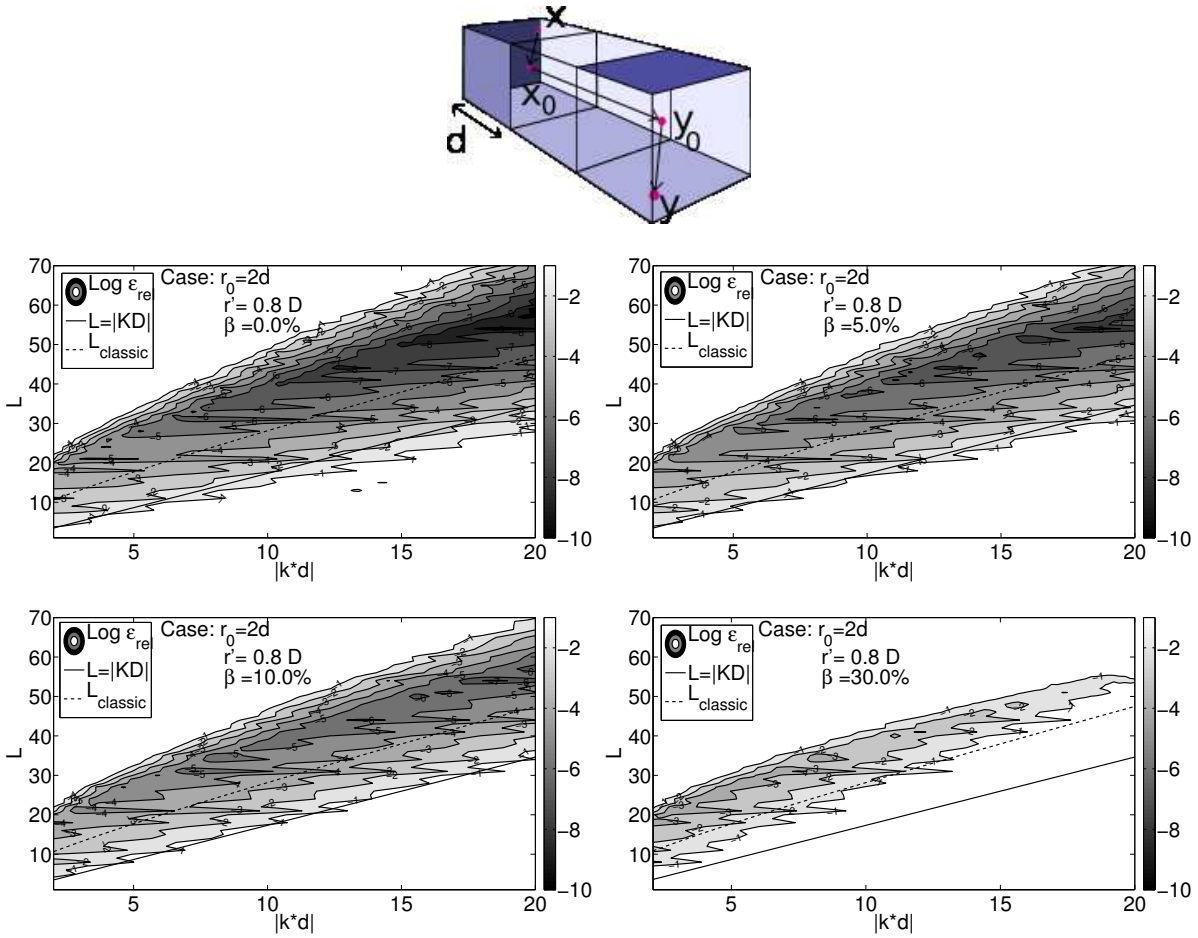


FIGURE 2 – Carte des isovaleurs de l'erreur relative $\varepsilon_{rel} = |G_L - G_{an}|/|G_{an}|$ entre deux points fixés ($\mathbf{r}' = 0.8D$) positionnés dans deux cellules les plus proches non-adjacentes : influence de l'amortissement β.

Cette relation dépend de deux constantes C_1 et C_2, et redonne (8) quand $\beta = 0$. L'erreur relative (9) peut alors être redéfinie comme

$$\varepsilon_r(C_1,C_2) = \sqrt{\frac{\sum_\beta \sum_{|k^\star d|} \sum_{|\mathbf{r}'|} \left|G - G_L\right|^2}{\sum_\beta \sum_{|k^\star d|} \sum_{|\mathbf{r}'|} |G|^2}} \tag{11}$$

Pour identifier les valeurs des constantes C_1, C_2 on a mené des tests purement empiriques. La figure 3 montre les isolignes de $\varepsilon_r(C_1,C_2)$ pour $0 \leq C_1, C_2 \leq 50$ (en bleu) et la valeur $L(k^\star D;\beta,C_1,C_2)$. Elle indique que plusieurs combinaisons de C_1, C_2 peuvent donner la même erreur relative, et aussi qu'à erreur donnée il apparaît plus efficace en termes de L de considérer que $C_1 = 0$ dans la relation (10). La figure 4 montre le comportement de $\varepsilon_r(C_1,C_2)$ pour deux choix du couple (C_1,C_2). Vu que le choix $(C_1,C_2) = (60,0)$ permet sur toute la plage d'amortissement une erreur sur G inférieure ou égale (par rapport à la distribution choisi pour $\mathbf{r}'$) à celle produite par $L = L_0(k^\star D)$, on a choisi de supprimer la constante C_2 et d'ajuster L selon la relation

$$L = L(k^\star D;\beta,C) = k^\star D + (7.5 + C\beta)\, Log_{10}(k^\star D + \pi) \tag{12}$$

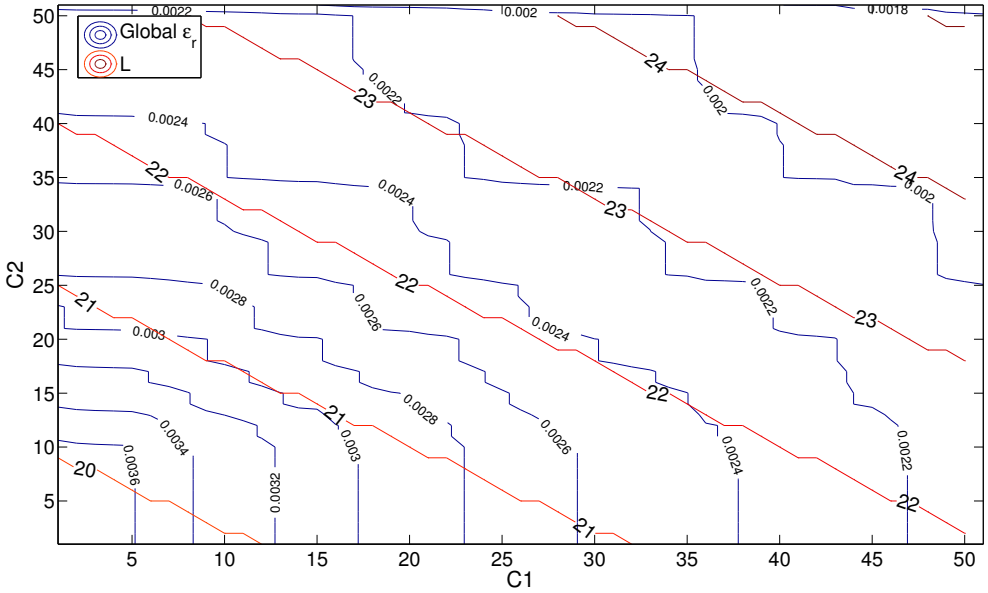


FIGURE 3 – Isolignes de l'erreur relative pour différentes combinaisons de C_1 et C_2 (bleue) et du nombre moyenne des termes correspondant L (rouge).

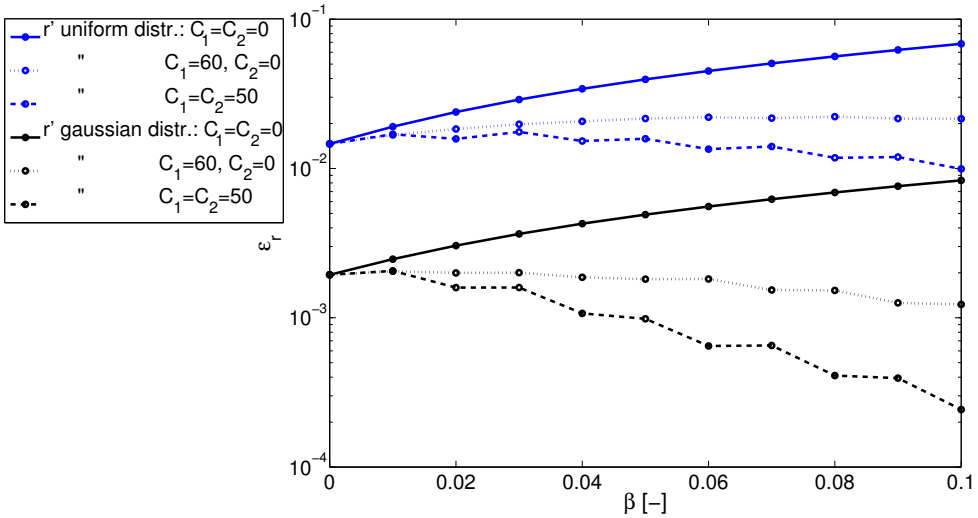


FIGURE 4 – Erreur relative dans l'approximation du noyau G pour deux distributions de nuages de points $\mathbf{r}'$ et une distance entre cellules fixée à $\mathbf{r}_0 = 2(k^\star d)$: influence des constantes C_1, C_2.

5 Validation de la formulation ML-FMBEM complète

Pour valider l'ajustement (12) en fonction de β, on considère deux exemples académiques pour lesquels la solution exacte est connue. Le premier problème consiste en une cavité sphérique contenue dans un milieu infini isotrope visco-élastique linéaire, soumise à une pression interne constante harmonique. Le deuxième problème considère la diffraction d'un champ d'ondes planes P incidentes par la même cavité, dont la paroi interne est maintenant libre. Les propriétés du matériau sont fixées (module de cisaillement $\mu = 2$, densité $\rho = 2$, coefficient de Poisson $\nu = 0.25$ et $\gamma = k_P/k_S = 0.58$), et différentes fréquences adimensionnelles $\eta_P = k_P R/2\pi$ (R étant la taille de la cellule de niveau $\ell^{(0)}$) sont considérées. Les maillages (tableau 1) sont ajustés pour présenter une densité constante de 10 points par longueur d'onde S (cavité sous pression) ou 13 points par longueur d'onde S (problème de diffraction).

Maillage	sphere3	sphere4	sphere5
Noeuds	2 562	10 242	40 962
DDLs	7 686	30 726	122 886

TABLE 1 – Taille des maillages utilisés pour les tests de validation.

La figure 5 montre les résultats obtenus (erreur relative de solution, temps de calcul par itération, nombre d'itérations) pour les deux exemples traités, avec L déterminé par (8). Dans ce cas la précision reste la même sur toute la plage d'amortissement. Ce résultat ne surprend pas, en raison du fait que quand β augmente l'importance des contributions lointaines diminue progressivement dans l'évaluation des fonction de Green sur chaque point

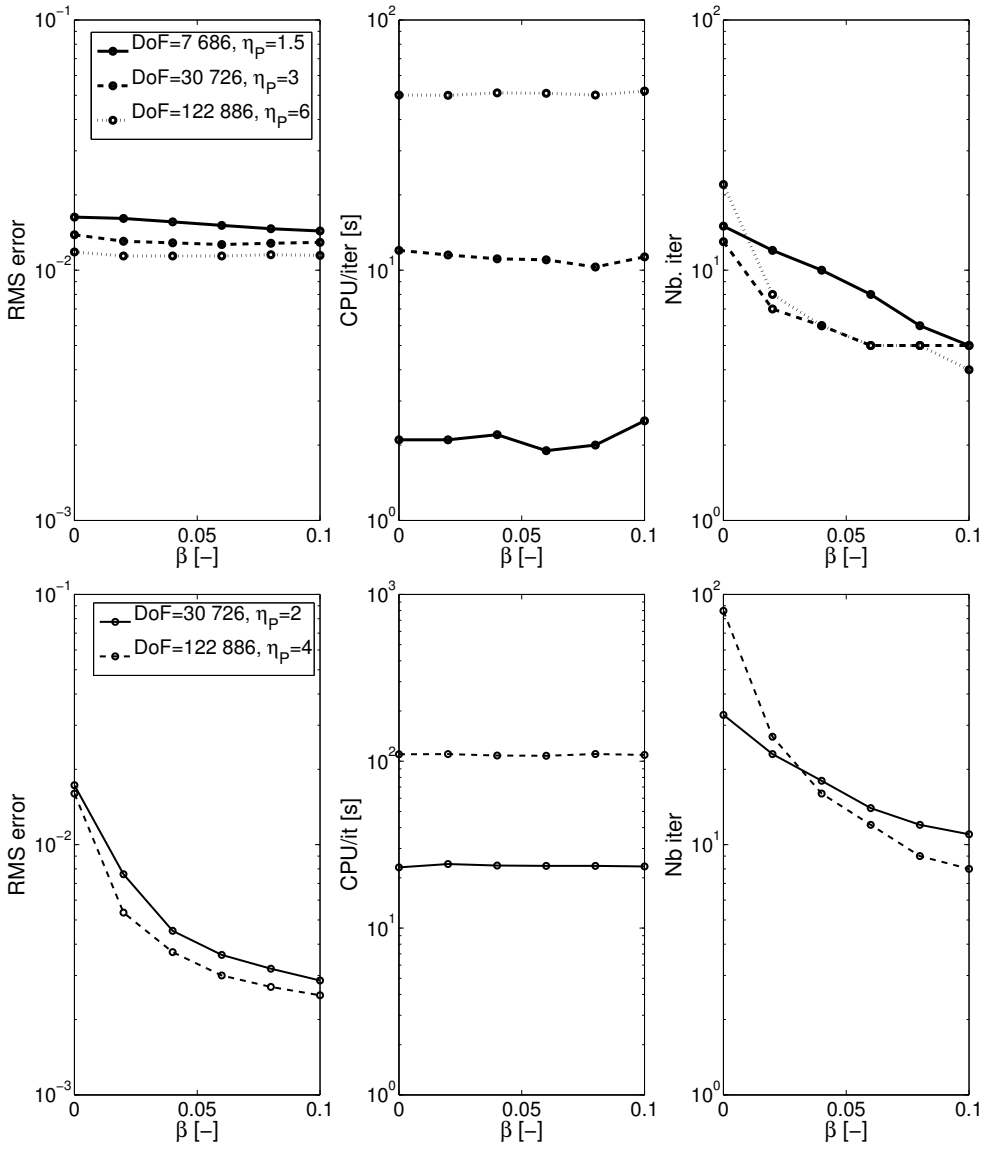


FIGURE 5 – Limitations de la relation (8) : cavité sous pression (haut) et diffraction d'une onde incidente P verticale par une cavité sphérique (bas).

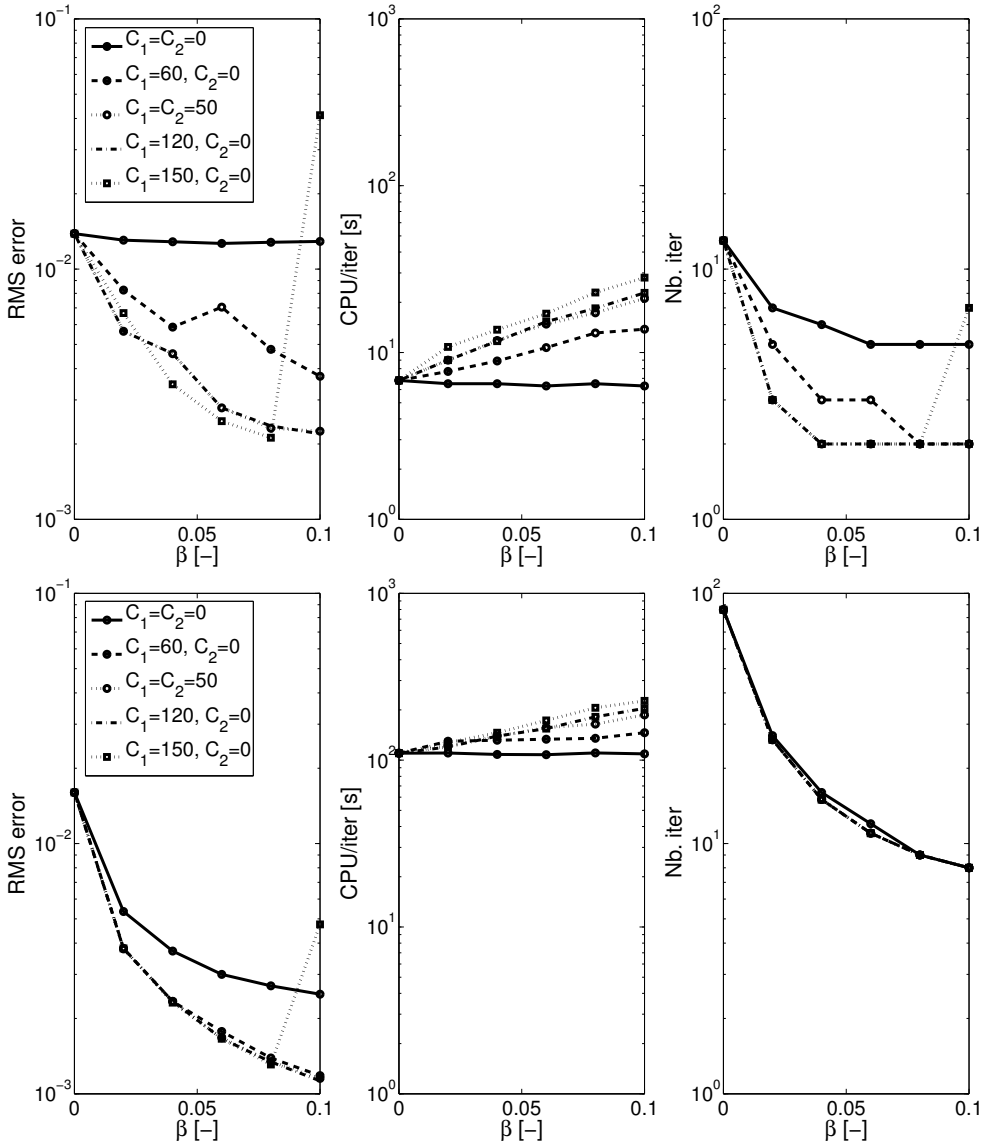


FIGURE 6 – Influence de différentes combinaisons de (C_1, C_2), avec $\alpha = 0.3$: cavité sous pression (haut, $\eta_P = 3$) et diffraction d'une onde incidente P verticale par une cavité sphérique (bas,$\eta_P = 4$).

de collocation. Par conséquent, la perte de précision dans l'approximation du noyau, soulignée et corrigée en section 4, est compensée par cet effet au niveau de l'algorithme complet multi-niveaux, et ne se fait donc pas sentir dans les résultats de la Fig. 5.

On considère ensuite plusieurs combinaisons pour les constantes C_1, C_2 dans (10). On observe (Fig. 6) que les combinaisons $(C_1, C_2) = (50, 50)$ et $(C_1, C_2) = (120, 0)$ produisent la même erreur relative de solution, la première étant plus chère en termes de nombre d'opérations et de mémoire. Le cas $(C_1, C_2) = (150, 0)$ correspond par ailleurs à un nombre de termes trop élevé dans (7), entraînant une dégradation de l'erreur relative de solution. La relation (12) s'est avérée satisfaisante sur un ensemble de tests plus large menés sur la formulation ML-FMBEM complète. La figure 7 montre par exemple le déplacement total suite à la diffraction d'un train d'ondes P incidentes, le long de quatre directions radiales d'observation différentes spécifiées par l'angle θ avec la direction d'incidence.

En conclusion, en visco-élastodynamique on propose d'utiliser la relation :

$$L = k^* D + (7.5 + 60\beta)\, Log_{10}(k^* D + \pi) \tag{13}$$

La subdivision récursive de l'octree s'arrête lorsque la taille des cellules situées au niveau inférieur passe le seuil $d_{min} = \alpha \lambda_S$, où α est le le paramètre d'arrêt. En élastodynamique il a été trouvé expérimentalement $\alpha = 0.3$ [2]. Avec $\alpha = 0.15$ (ajout d'un niveau à l'arbre), on perd généralement un ordre de grandeur en précision (erreur globale relative par rapport à la solution analytique du problème). L'amélioration de la précision dans l'approximation de la fonction de Green avec la nouvelle relation conduit à des résultats plus précis avec l'augmentation de β, ce qui permet parfois d'ajouter un niveau à l'arbre tout en gardant l'erreur $\varepsilon_r(\beta > 0)$ inférieur ou égal à $\varepsilon_r(\beta = 0)$. Cependant, on n'a pas réussi à obtenir un critère satisfaisant d'ajustement de α en fonction de β, donc cette possibilité reste pour l'instant à évaluer au cas par cas par rapport au problème traité.

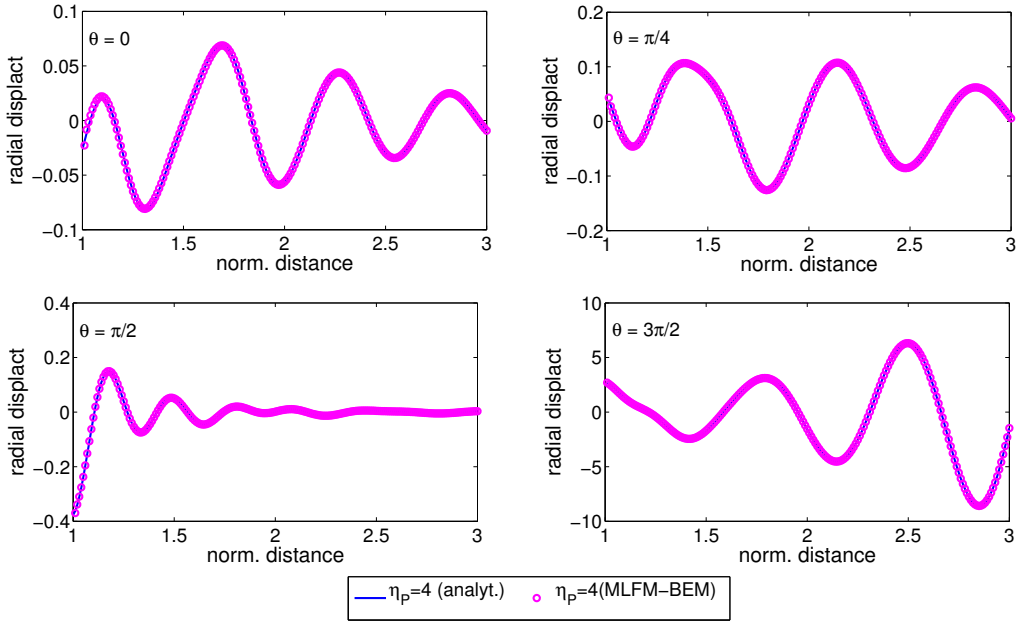


FIGURE 7 – Diffraction par une cavité sphériques. DDL=122 886, $\eta_P = k_P R/\pi = 4$ et $\beta = 0.1$.

6 Conclusion

Cette étude concerne une extension de la ML-FMBEM, sous sa forme récemment développée pour l'élastodynamique 3D dans le domaine fréquentiel [2], à la visco-élastodynamique. Dans celle-ci, les coefficients de Lamé, la vitesse de propagation des ondes de pression P, de cisaillement S et les nombres d'onde sont complexes. On a mis en évidence les erreurs d'évaluation du développement multipôle commises lorsque l'on utilise les réglages numériques classiques, i.e. ceux utilisés pour la formulation en nombre d'onde réel. Enfin, on a proposé et validé une relation pour le choix du paramètre de troncature du noyau de Helmholtz dépendant du niveau d'amortissement.

Références

[1] Chew, W.C., H.Y. Chao, T.J. Cui, S. Ohnuki, Y.C. Pan, J.M. Song, S. Velamparambil et J.S. Zhao. Fast integral equation solvers in computational electromagnetics of complex structures. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27 :803–823, 2003.

[2] Chaillat, S., Bonnet, M. et Semblat, J.-F. A multi-level fast multipole BEM for 3-D elastodynamics in the frequency domain. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 197 :4233–4249, 2008.

[3] Gaul, L. The influence of damping on waves and vibrations. *Mechanical Systems And Signal Processing*, 13(1) :1–30, 1999.

[4] Kramer, S.L. Geotechnical earthquake engineering. *Prentice-Hall International Series in Civil Engineering and Engineering Mechanics*, 1996.

[5] Lai, C. et Rix, G.J. Simultaneous inversion of Rayleigh phase velocity and attenuation for near-surface site characterization. *National Science Foundation and U.S. Geological Survey, Georgia Institute of Technology*, 1998.

[6] Dominguez, J. *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications, Southampton Boston, Elsevier Applied Science, 1993.

[7] Darve, E. The Fast Multipole Method I : Error Analysis and Asymptotic Complexity. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 38 :98–128, 2000.

[8] Coifman, R., Rokhlin, V. et Wandzura, S. The Fast Multipole Method for the wave equation : a pedestrian description. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 35(3) :7–12, 1993.

[9] Frangi, A. et Bonnet, M. On the application of the Fast Multipole Method to Helmholtz-like problems with complex wavenumber. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 1 :11-34, 2000.

[10] du Toit., C.F. The numerical computation of Bessel functions of the first and second kind for integer orders and complex arguments. *IEEE Transactions On Antennas And Propagation*, 38 :1341–1349, 1990.

[11] Heckmann, D.L. et Dvorak, S.L. Numerical computation of Hankel functions of integer order for complex-valued arguments. *Radio Science*, 36(6) :1265–1270, 2001.

[12] Abramowitz, M. and Stegun, I. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* Dover Publications, 1964.