

# Implémentation de la méthode des développements asymptotiques raccordés dans le cas d'une fine couche d'hétérogénéités

Giuseppe Geymonat, Sofiane Hendili, Françoise Krasucki, Marina Vidrascu

► **To cite this version:**

Giuseppe Geymonat, Sofiane Hendili, Françoise Krasucki, Marina Vidrascu. Implémentation de la méthode des développements asymptotiques raccordés dans le cas d'une fine couche d'hétérogénéités. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. 8 p. hal-00592877

HAL Id: hal-00592877

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00592877>

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Implémentation de la méthode des développements asymptotiques raccordés dans le cas d'une fine couche d'hétérogénéités

G. Geymonat<sup>1</sup>, S. Hendili<sup>2,3</sup>, F. Krasucki<sup>3</sup>,  
M. Vidrascu<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LMGC, Université Montpellier 2/CNRS, France, [geymonat@univ-montp2.fr](mailto:geymonat@univ-montp2.fr)

<sup>2</sup> EPI MACS, INRIA Rocquencourt, France, [\[marina.vidrascu,soufiane.hendili\]@inria.fr](mailto:[marina.vidrascu,soufiane.hendili]@inria.fr)

<sup>3</sup> I3M, Université Montpellier 2/CNRS, France, [\[krasucki,shendili\]@math.univ-montp2.fr](mailto:[krasucki,shendili]@math.univ-montp2.fr)

**Résumé** — Dans le cadre des développements asymptotiques raccordés, on propose une méthode efficace et robuste pour modéliser le comportement élastique linéaire d'une structure contenant une fine couche d'hétérogénéités disposées périodiquement. Le problème limite obtenu, caractérisé par des conditions de saut particulières, est résolu numériquement par une méthode de décomposition de domaine.

**Mots clés** — Multi-matériaux, Multi-échelles, Analyse asymptotique, Elasticité.

## 1 Introduction

On s'intéresse à des structures caractérisées par une fine couche d'hétérogénéités, centrée autour d'un plan  $\Gamma$ . La simulation numérique de ces structures multi-matériaux et à fort caractère multi-échelle, présentes dans différents domaines industriels, est difficile. En effet, un maillage comme celui de la Figure 1 est délicat à réaliser (en particulier l'équivalent en 3D) et comporte un grand nombre de degrés de liberté.

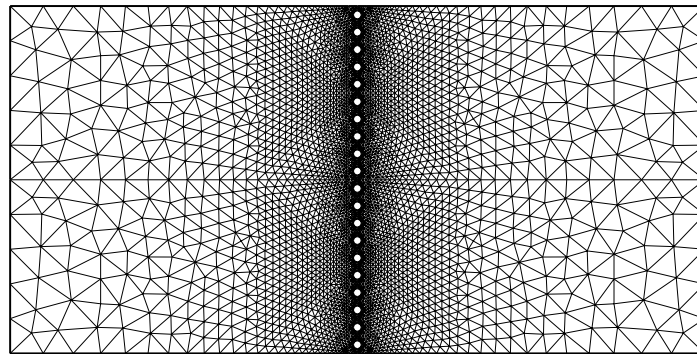


FIGURE 1 – Structure 2D : taille des inclusions  $\frac{H}{20}$  ( $H$  = hauteur),  $ddl = 35690$  (approximation P2)

Il est important de noter qu'on ne peut pas négliger ces hétérogénéités. Leur présence, même restreinte dans une petite zone du domaine, entraîne des phénomènes locaux significatifs ayant une influence non négligeable sur le comportement global de la structure.

L'objectif est de développer, d'analyser et d'implémenter une méthode efficace et robuste pour différents types d'hétérogénéités : cavités, inclusions rigides, ...

On adapte la méthode des développements asymptotiques raccordés introduite dans [4], pour remplacer la couche contenant les hétérogénéités par des conditions de transmission convenables sur la surface  $\Gamma$ .

Dans la suite de ce document, les tenseurs et les vecteurs seront désignés en caractère gras. De plus on adoptera la convention de l'indice répété, et on notera  $\otimes$  le produit tensoriel et  $\otimes_S$  le produit tensoriel symétrisé, i.e.  $\mathbf{e}_1 \otimes_S \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$

## 2 Position du problème

Dans un repère orthonormé  $(O, e_1, e_2, e_3)$ , on considère une structure tridimensionnelle élastique linéaire comportant une fine couche d'épaisseur  $\varepsilon$  centrée sur le plan  $\Gamma$ . On suppose que des inclusions **indentiques** sont réparties périodiquement dans cette couche, avec une période d'ordre  $\varepsilon$  (voir Figure 2). La forme et la fraction volumique des inclusions sont supposées indépendantes de  $\varepsilon$ . On s'intéresse au cas des cavités et à celui des inclusions rigides.

La structure occupe, dans sa position de référence, le volume  $\Omega \setminus I^\varepsilon$  où  $\Omega = \{-L, L\} \times \{-H, H\} \times \{-P, P\}$  et  $I^\varepsilon$  est l'ensemble des inclusions. On note  $\partial\Omega$  le bord de  $\Omega$  et  $\partial\Omega_u$  le bord encastré. La partie complémentaire  $\partial\Omega_F$  de  $\partial\Omega$  est soumise à un chargement surfacique  $F$ . Les conditions de bord sur  $\partial I^\varepsilon$ , caractérisant le type d'inclusions considérées, sont explicitées dans le paragraphe suivant. Afin de simplifier la présentation des calculs, on néglige les forces volumiques.

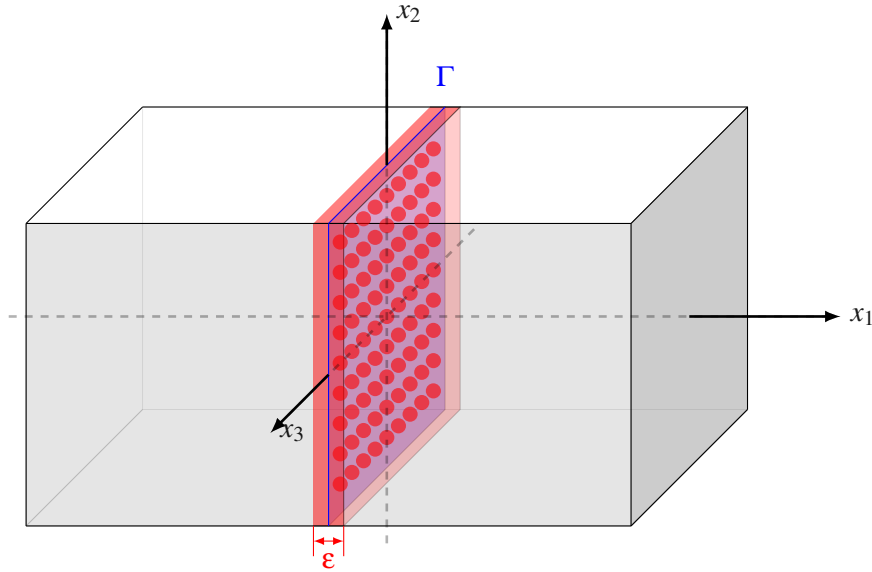


FIGURE 2 – Exemple de structure tridimensionnelle étudiée

Les champs de déplacement  $u^\varepsilon$  et de contrainte  $\sigma^\varepsilon$  sont solutions du problème  $P^\varepsilon$  suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma^\varepsilon = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \setminus I^\varepsilon \\ \sigma^\varepsilon = A\gamma(u^\varepsilon) & \text{dans } \Omega \setminus I^\varepsilon \\ \sigma^\varepsilon n = F & \text{sur } \partial\Omega_F \\ u^\varepsilon = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (1)$$

+ conditions au bord sur  $I^\varepsilon$  :

dans le cas des cavités : $\sigma^\varepsilon n = \mathbf{0}$	dans le cas des inclusions rigides : $u^\varepsilon \in \mathcal{R}$ $\int_{\partial I^\varepsilon} \sigma^\varepsilon n_C = \mathbf{0}$ $\int_{\partial I^\varepsilon} \sigma^\varepsilon n_C \wedge x = \mathbf{0}$
--	--

où  $\gamma$  est le tenseur linéarisé des déformations et  $\mathcal{R}$  est l'ensemble des déplacements rigides, i.e.

$$\mathcal{R} := \{v = (v_1, v_2, v_3) / v = a + b \wedge x, a, b \in \mathbb{R}^3\}. \quad (2)$$

### 3 Modèle asymptotique

En suivant [4], on introduit deux développements asymptotiques afin de capter le comportement des champs  $\mathbf{u}^\varepsilon$  et  $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$  dans toute la structure :

i) un développement *intérieur*, valable uniquement au voisinage des inclusions :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{v}^i(\hat{\mathbf{x}}, y_1, \hat{\mathbf{y}}) \\ \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \boldsymbol{\tau}^i(\hat{\mathbf{x}}, y_1, \hat{\mathbf{y}}) \end{cases} \quad (3)$$

où  $y_i = \frac{x_i}{\varepsilon}$ ,  $\hat{\mathbf{y}} = (y_2, y_3)$  et les champs  $\mathbf{v}^i$  and  $\boldsymbol{\tau}^i$  sont 1-périodiques par rapport à  $(y_2, y_3)$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^i(\hat{\mathbf{x}}, y_1, \hat{\mathbf{y}} + p\mathbf{e}_2 + q\mathbf{e}_3) &= \mathbf{v}^i(\hat{\mathbf{x}}, y_1, \hat{\mathbf{y}}) \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}^2 \\ \boldsymbol{\tau}^i(\hat{\mathbf{x}}, y_1, \hat{\mathbf{y}} + p\mathbf{e}_2 + q\mathbf{e}_3) &= \boldsymbol{\tau}^i(\hat{\mathbf{x}}, y_1, \hat{\mathbf{y}}) \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Notons que les champs  $\mathbf{v}^i$  and  $\boldsymbol{\tau}^i$  sont définis pour  $\hat{\mathbf{x}} \in \Gamma$  et pour  $\hat{\mathbf{y}}$  appartenant à une période représentative. Pour fixer les notations, on suppose que  $(y_1, \hat{\mathbf{y}}) \in Y \setminus I$  où  $Y := \mathbb{R} \times \hat{Y}$  et  $\hat{Y} = ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  (voir Figure 3).

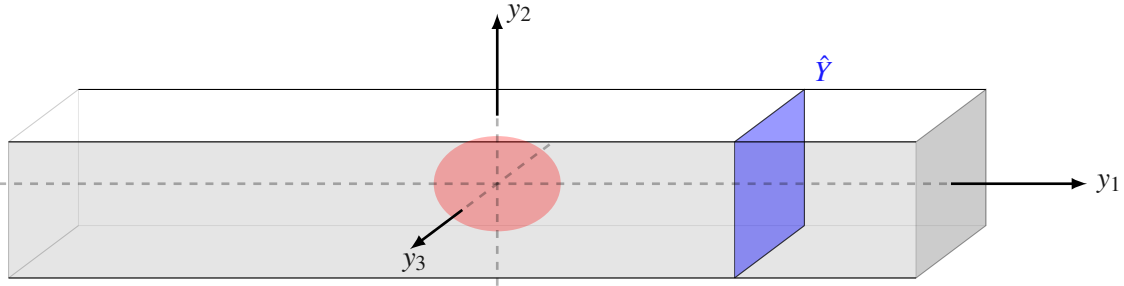


FIGURE 3 – Cellule  $Y$

ii) un développement *extérieur*, valable loin des inclusions :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{u}^i(x_1, x_2, x_3) \\ \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \boldsymbol{\sigma}^i(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (5)$$

La compatibilité des champs  $\mathbf{u}^\varepsilon$  et  $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$  est assurée en écrivant le raccord des deux développements (3) et (5). En suivant le raisonnement de [5], ces conditions sont obtenues par l'hypothèse suivante : "*limite intérieure (limite extérieure) = limite extérieure (limite intérieure)*". Dans notre cas, aux ordres 0 et 1, les conditions de raccord s'écrivent :

– pour les déplacements

$$\lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \left( \int_{\hat{Y}} \mathbf{v}^0(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) d\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{u}^0(0\pm, \hat{\mathbf{x}}) \right) = 0 \quad (6)$$

$$\lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \left( \int_{\hat{Y}} \mathbf{v}^1(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) d\hat{\mathbf{y}} - (\mathbf{u}^1(0\pm, \hat{\mathbf{x}}) + y_1 \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1}(0\pm, \hat{\mathbf{x}})) \right) = 0 \quad (7)$$

– pour les contraintes

$$\lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \left( \int_{\hat{Y}} \boldsymbol{\tau}^0(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) d\hat{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\sigma}^0(0\pm, \hat{\mathbf{x}}) \right) = 0 \quad (8)$$

$$\lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \left( \int_{\hat{Y}} \boldsymbol{\tau}^1(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) d\hat{\mathbf{y}} - (\boldsymbol{\sigma}^1(0\pm, \hat{\mathbf{x}}) + y_1 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1}(0\pm, \hat{\mathbf{x}})) \right) = 0 \quad (9)$$

La spécificité de notre étude, détaillée dans [2] dans le cas des cavités, est de proposer une modification de la méthode originale de [4] utilisée aussi dans [1] et [3], permettant de traiter de façon unitaire le cas des cavités et des inclusions rigides. Plus précisément, il est courant de simplifier l'application de la condition de raccord (7) en effectuant l'hypothèse suivante :

$$\mathbf{v}^1(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = y_1 \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{v}^\#(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \quad (10)$$

Cependant la condition (7), de caractère asymptotique, est vérifiée uniquement loin des hétérogénéités alors que la décomposition (10) est valable dans tout le domaine  $Y \setminus I$ . Afin de prendre en compte la condition de raccord (7) uniquement pour  $y_1 \rightarrow \infty$ , on suppose que :

$$\mathbf{v}^1(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = f(y_1; a, b) \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{v}^*(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \quad (11)$$

où  $f(y_1; a, b)$  est une fonction impaire de classe  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  avec

$$f(y_1; a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < |y_1| \leq a \\ y_1 & \text{si } |y_1| \geq b \end{cases} \quad (12)$$

où,  $D$  est le diamètre de l'inclusion  $I$ , vérifiant  $D < 2a < 2b$ . Afin d'alléger l'écriture, on adoptera dans la suite la notation  $f(y_1)$ .

En utilisant la linéarité du problème, on réécrit (11) :

$$\mathbf{v}^1(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = f(y_1) \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\mathbf{x}}) + \frac{\partial \mathbf{u}_i^0}{\partial x_j}(0, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{V}^{ij} + \check{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (13)$$

où  $\check{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}})$  est calculé par :

$$\check{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^1(0^+, \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{u}^1(0^-, \hat{\mathbf{x}})) \quad (14)$$

et où les champs  $\mathbf{V}^{ij}$  sont les uniques solutions des 9 problèmes élémentaires définis par :

(a) pour  $(l, k) = (2, 2); (3, 3); (1, 2); (1, 3); (2, 3); (3, 2)$  :

$$\mathbf{P}^{lk} \begin{cases} \mathbf{div}_y \mathbf{T}^{lk} = 0 & \text{dans } Y \setminus I \\ \mathbf{T}^{lk} = \mathbf{A} \boldsymbol{\gamma}_y(\mathbf{V}^{lk}) & \text{dans } Y \setminus I \\ \mathbf{V}^{lk} \text{ et } \mathbf{T}^{lk} \mathbf{n} \text{ périodique} & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial \hat{Y} \\ \lim_{y_1 \rightarrow \pm \infty} \mathbf{T}^{lk}(y_1, \hat{\mathbf{y}}) \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} & \text{pour } \hat{\mathbf{y}} \in \hat{Y} \end{cases} \quad (15)$$

dans le cas des cavités :

dans le cas des inclusions rigides :

---


$$\begin{aligned} (\mathbf{T}^{lk} \mathbf{n})_i &= -A_{ijkl} n_j \text{ sur } \partial I & \mathbf{V}^{lk} &\in \mathcal{R} \text{ sur } \partial I \\ & & \int_{\partial I} \mathbf{T}^{lk} \mathbf{n} \, d\Gamma &= - \int_{\partial I} (A_{ijkl} n_j) \mathbf{e}_i \, d\Gamma \text{ sur } \partial I \\ & & \int_{\partial I} \mathbf{T}^{lk} \mathbf{n} \wedge \mathbf{y} \, d\Gamma &= - \int_{\partial I} (A_{ijkl} n_j) \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{y} \, d\Gamma \text{ sur } \partial I \end{aligned}$$


---

(b) pour  $(l, 1), l = 1, 2, 3$  :

$$\mathbf{P}^{lk} \begin{cases} (\mathbf{div}_y \mathbf{T}^{l1})_i = -f''(y_1) A_{i1l1} & \text{dans } Y \setminus I \\ \mathbf{T}^{l1} = \mathbf{A} \boldsymbol{\gamma}_y(\mathbf{V}^{l1}) & \text{dans } Y \setminus I \\ \mathbf{V}^{l1} \text{ et } \mathbf{T}^{l1} \mathbf{n} \text{ périodique} & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial \hat{Y} \\ \lim_{y_1 \rightarrow \pm \infty} \mathbf{T}^{l1}(y_1, \hat{\mathbf{y}}) \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} & \text{pour } \hat{\mathbf{y}} \in \hat{Y} \end{cases} \quad (16)$$

dans le cas des cavités :      dans le cas des inclusions rigides :

$$\begin{aligned} (T^{l1} \mathbf{n})_i &= 0 \text{ sur } \partial I & V^{l1} &\in \mathcal{R} \text{ sur } \partial I \\ & & \int_{\partial I} T^{l1} \mathbf{n} \, d\Gamma &= 0 \text{ sur } \partial I \\ & & \int_{\partial I} T^{l1} \mathbf{n} \wedge \mathbf{y} \, d\Gamma &= 0 \text{ sur } \partial I \end{aligned}$$

**Remarque 1:**

- Les problèmes  $(V^{ij}, T^{ij})$  sont élémentaires au sens où ils peuvent être résolus une fois pour toutes pour une cellule  $Y$  donnée et une inclusion  $I$  donnée.
- Les champs  $T^{ij}$  décroissent exponentiellement vers zéro et les champs  $V^{ij}$  tendent vers un vecteur constant, noté  $V^{ij\pm}$ , lorsque  $y_1$  tend vers  $\pm\infty$ ;

$$\lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} T^{ij} = \mathbf{0} \quad (17)$$

$$\lim_{y_1 \rightarrow +\infty} V^{ij}(\mathbf{y}) = V^{ij+}, \quad \lim_{y_1 \rightarrow -\infty} V^{ij}(\mathbf{y}) = V^{ij-} \quad (18)$$

Dans la suite on notera :

$$[V^{ij}]^\infty := V^{ij+} - V^{ij-} \quad (19)$$

En utilisant (13), on montre que

$$\boldsymbol{\tau}^0(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \mathbf{G}(y_1; \mathbf{u}^0(0, \hat{\mathbf{x}})) + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0, \hat{\mathbf{x}}) T^{ij}(\mathbf{y}) \quad (20)$$

avec

$$\mathbf{G}(y_1; \mathbf{u}^0(0, \hat{\mathbf{x}})) = \mathbf{A} \left( \gamma_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}^0(0, \hat{\mathbf{x}})) + \gamma_{\mathbf{y}} \left( f(y_1) \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\mathbf{x}}) \right) \right) \quad (21)$$

Les problèmes permettant de calculer les deux premiers ordres des développements (3) et (5) sont énoncés ci-dessous sous forme de proposition. La démonstration de ces résultats est détaillée dans [2] dans le cas des cavités.

**Proposition 1** On détermine  $\mathbf{u}^0$  et  $\boldsymbol{\sigma}^0$  en résolvant le problème extérieur à l'ordre 0 défini par :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{A} \gamma(\mathbf{u}^0) & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{n} = \mathbf{F} & \text{sur } \partial_F \Omega \\ \mathbf{u}^0 = \mathbf{0} & \text{sur } \partial_u \Omega \end{cases} \quad (22)$$

**Remarque 2:**  $\mathbf{v}^0$  est donné par la relation suivante

$$\mathbf{v}^0(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \mathbf{v}^0(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{u}^0(0, \hat{\mathbf{x}})$$

**Proposition 2** On détermine  $\mathbf{u}^1$  et  $\boldsymbol{\sigma}^1$  en résolvant le problème extérieur à l'ordre 1 défini par :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \\ \boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{A} \gamma(\mathbf{u}^1) & \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \\ \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial_F \Omega \\ \mathbf{u}^1 = \mathbf{0} & \text{sur } \partial_u \Omega \end{cases} \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{u}^1](\hat{\mathbf{x}}) = u_{i,j}^0(0, \hat{\mathbf{x}}) [V^{ij}]^\infty \quad \text{sur } \Gamma \\ [\boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{e}_1](\hat{\mathbf{x}}) = |I| \operatorname{div}_x \left( \mathbf{A} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_2}(0, \hat{\mathbf{x}}) \otimes_S \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_3}(0, \hat{\mathbf{x}}) \otimes_S \mathbf{e}_3 \right) \right) \\ \quad - \operatorname{div}_x \left( \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0, \hat{\mathbf{x}}) \int_{Y \setminus I} T^{ij}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right) \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (24)$$

où  $|I|$  est le volume d'une inclusion et les  $(\mathbf{V}^{ij}, \mathbf{T}^{ij})$  sont solutions des problèmes (15)-(16).

## 4 Etude numérique

La validation numérique de la méthode asymptotique décrite précédemment est caractérisée par :

- i) une étude paramétrique des coefficients  $[\mathbf{V}^{ij}]$  et  $\int_{Y \setminus I} \mathbf{T}^{ij}(\mathbf{y})$  :  
cette étude a été effectuée et a permis de montrer la robustesse de ces coefficients, d'une part par rapport au choix des paramètres  $a$  et  $b$  de la fonction  $f(y_1, a, b)$  introduite dans (12), et d'autre part par rapport à la longueur de la cellule  $Y$  dans la direction  $y_1$ .
- ii) une étude comparative entre la solution  $\mathbf{u}^\varepsilon$  du problème de départ (1) et la solution du modèle asymptotique (3)-(9) :  
cette étude est en cours de réalisation. La méthodologie adoptée et les premiers résultats de cette étude sont détaillés ci-dessous.

### 4.1 Méthodologie

La solution du modèle asymptotique, définie par (3), (5) et (6) - (9), est calculée numériquement en utilisant les étapes principales suivantes :

- (1) résolution des problèmes de cellules définis par (15) et (16),
- (2) résolution du problème  $P^0$  défini dans la proposition 1 ,
- (3) résolution du problème  $P^1$  défini dans la proposition 2,
- (4) reconstruction des champs  $\mathbf{v}^1$  et  $\boldsymbol{\tau}^0$  définis respectivement par (13) et (20)

La première et la deuxième étape ne présentent pas de difficultés : les problèmes élémentaires et le problème  $P^0$  sont résolus par une méthode d'éléments finis classique. A noter que le domaine de la cellule est infini dans la direction  $x_1$ . La vérification numérique de la propriété (18) permet de déterminer une valeur convenable de la longueur de la cellule dans la direction  $y_1$ .

La principale difficulté apparaît dans la troisième étape lors de la prise en compte des conditions de transmission (24) dans le calcul de  $\mathbf{u}^1$  et  $\boldsymbol{\sigma}^1$ .

Le problème  $P^1$  est résolu par une méthode de décomposition de domaine qui est une adaptation de l'algorithme classique de Neumann-Neumann détaillé dans [7]. La particularité de notre méthode est qu'elle permet de traiter un problème où les conditions de transmission sont données.

Les conditions de saut (24) dépendent des champs  $\mathbf{V}^{ij}$ ,  $\mathbf{T}^{ij}$  et  $\mathbf{u}^0$  mais le calcul numérique de ces champs ne suffit pas à alimenter l'algorithme de décomposition de domaine décrit ci-dessus. En effet, l'approximation de la solution du problème  $P^0$  est de classe  $C^0$ . Il faut donc réaliser un "lissage" des valeurs des dérivées de  $\mathbf{u}^0$  pour en obtenir une bonne approximation en chaque noeud de l'interface  $\Gamma$ .

Indépendamment des étapes décrites ci-dessus, une résolution numérique du problème de départ (1) doit être effectuée. Cette résolution est soit réalisée par une méthode d'éléments finis classique soit, pour les cas les plus coûteux, par une méthode de décomposition de domaine "classique". Cette étape est essentielle car elle permet d'obtenir les solutions numériques de références de  $\mathbf{u}^\varepsilon$  pour différentes valeurs de  $\varepsilon$ .

### 4.2 Essais et résultats

Le modèle asymptotique a été appliqué et résolu numériquement dans le cas d'un problème 2D élasto-statique linéaire. La structure modélisée occupe dans sa position de référence un domaine  $\Omega \setminus I^\varepsilon$  où  $\Omega = \{-L, L\} \times \{-H, H\}$  et  $I^\varepsilon$  est le domaine occupé par  $N$  disques disposés périodiquement le long de  $\Gamma$ . Le bord  $\partial\Omega_u$  de la structure est encastré et on applique un chargement surfacique sur la partie complémentaire  $\partial\Omega_F$  (voir figure). Les résultats présentés ci-dessous sont obtenus pour :

$$L = 1, H = 0,5, \mathbf{F} = e_1 + 3e_2, E = 1, \nu = 0,25, N = 20 \quad (25)$$

où  $E$  est le module d'Young du matériau et  $\nu$  son coefficient de Poisson. La linéarité du problème étudié rend "globalement" l'observation des résultats indépendante du choix de  $E$  et  $\nu$ . Ceci explique notre choix qui ne correspond pas à des matériaux réels.

Les problèmes de cellule décrits précédemment sont résolus sur le domaine  $Y \setminus I$  avec  $Y = \{-l, l\} \times \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$  et  $I$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $r = 0.25$ . Une étude paramétrique sur  $l$  permet d'en fixer la valeur ( $l = 15$ ) en s'appuyant sur la propriété (18). Les paramètres matériau sont les mêmes que ceux donnés précédemment.

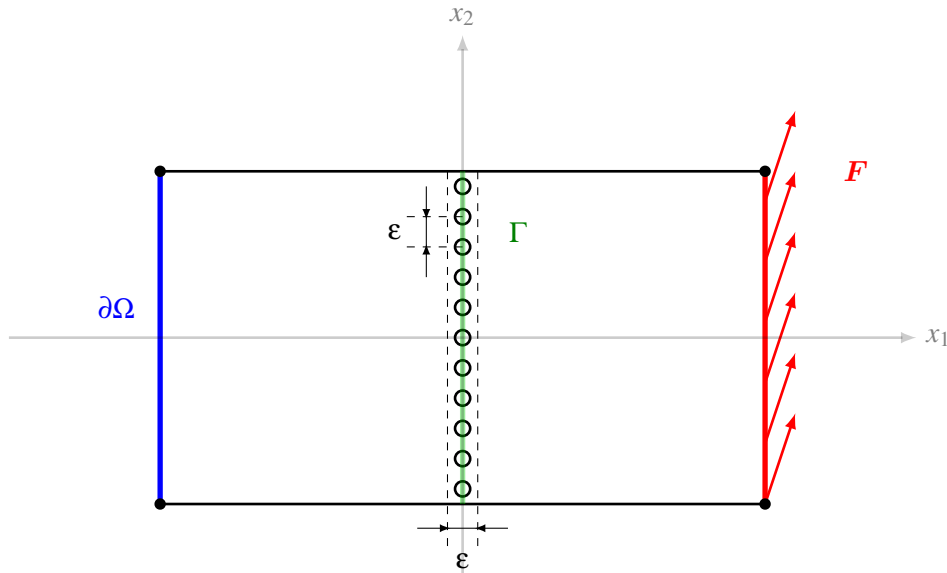


FIGURE 4 – Paramètres du problème étudié

Les premiers résultats numériques obtenus montrent que notre modèle permet de préciser l'influence des hétérogénéités sur le comportement global de la structure. C'est plus précisément la prise en compte du second ordre du développement asymptotique (5) qui traduit cette influence. On compare le déplacement maximal de  $\mathbf{u}^0 + \varepsilon \mathbf{u}^1$  avec celui de  $\mathbf{u}^0$  (ceci revient à comparer la structure étudiée avec une structure équivalente sans hétérogénéités). Les résultats de cette comparaison, retranscrits dans le tableau (1), sont cohérents : ils montrent que la structure saine est affaiblie par les trous et qu'elle est renforcée par les inclusions rigides.

	Inclusions rigides		Sans inclusion	Inclusions vides	
	$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\varepsilon$	$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \varepsilon \mathbf{u}^1$	$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0$	$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \varepsilon \mathbf{u}^1$	$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\varepsilon$
$u_1^{max}$	12.78	12.74	12.83	13.01	13.07
$u_2^{max}$	37.71	37.30	37.85	38.31	38.44

TABLE 1 – Valeurs maximales des champs de déplacement

## 5 Conclusion et perspectives

La résolution numérique du problème  $P^\varepsilon$  présente des difficultés dues aux différentes échelles de calcul. Dans certain cas, lorsque les contrastes géométriques sont importants, la résolution des équations (1) par une méthode d'éléments finis classique ne peut aboutir. L'objectif de notre étude est de proposer un modèle qui permet de contourner ces difficultés en s'appuyant sur la méthode des développements asymptotiques raccordés. La particularité de cette méthode est de reformuler le modèle de départ pour remplacer la couche d'hétérogénéités par une frontière interne, sur laquelle des conditions particulières



de saut sont imposées, le domaine de calcul est décomposé en deux sous domaines.

Une étude numérique, en cours de réalisation, a été entreprise afin de justifier une telle modélisation. Le problème (1) a été résolu, dans un cas bi-dimensionnel (cf. section 4.2 page 6), par une méthode d'éléments finis classique. Les problèmes (1) et (2) correspondants ont également été résolus : le premier par une méthode d'éléments finis classique alors que le deuxième a nécessité l'implémentation d'une méthode de décomposition de domaine adaptée. Ces calculs ont permis de déterminer, d'une part les champs de référence  $\mathbf{u}^\varepsilon$  et  $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ , et d'autre part les champs extérieurs  $\mathbf{u}^0$ ,  $\mathbf{u}^1$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^0$  et  $\boldsymbol{\sigma}^1$  (champs de déplacement et de contrainte loin des inclusions). La comparaison entre ces solutions (cf. Tableau 1 page 7) donne une justification, certes incomplète, mais significative de l'intérêt de ce modèle.

Les calculs numériques en cours sont consacrés à la reconstruction des champs intérieurs. Cette implémentation est délicate car elle doit impérativement prendre en compte les passages entre les deux échelles microscopique et macroscopique.

**Remerciements.** Ce travail est en partie financé par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) dans le cadre du projet *epsilon* (BLAN08-2\_312370) "*Décomposition de domaines et calculs multi-échelles de singularités dans les structures mécaniques*"

## Références

- [1] R. Abdelmoula et J. J. Marigo. *The effective behavior of a fiber bridged crack*. J. Mech. Phys. Solids 48(11), 2419 – 2444, 2000.
- [2] G. Geymonat, S. Hendili, F. Krasucki et M. Vidrascu. *The matched asymptotic expansion for the computation of the effective behavior of an elastic structure with a thin layer of holes*, Journal for Multiscale Computational Engineering, à paraître.
- [3] J.J. Marigo et C. Pideri. *The effective behavior of elastic bodies containing microcracks or microholes localized on a surface*, International Journal of Damage Mechanics, à paraître.
- [4] G. Nguetseng et E. Sanchez-Palencia *Stress concentration for defects distributed near a surface*. P. Ladevèze (ed.) : Local Effects in the Analysis of Structures. Elsevier, Amsterdam, 1986.
- [5] J. Sanchez Hubert, E. Sanchez Palencia. *Vibration and coupling of continuous systems. Asymptotic Methods*. Springer Verlag, 1989.
- [6] E. Sanchez Palencia. *Nonhomogeneous media and vibration theory*, Springer Verlag, Berlin, 1980.
- [7] P. Le Tallec, Y. H. De Roecket et M. Vidrascu. *Domain-decomposition methods for large linearly elliptic three dimensional problems*, J. of Computational and Applied Mathematics, 1991.