Euclide

Fabio Acerbi

Euclide

Le 12 mars 2010, par **Fabio Acerbi**
Chargé de recherche CNRS à l'Université de Lille 3 (**page web**)

L'article fait le point sur ce que nous savons aujourd'hui sur le personnage et les ouvrages d'Euclide. Il indique quelques pistes qui font aujourd'hui l'objet de recherches.

Les ouvrages d'Euclide

EUCLIDE est pour nous le nom de la personne à laquelle sont attribués des ouvrages mathématiques écrits en grec ancien, lesquels nous ont été transmis par des manuscrits qui ne remontent pas plus haut que le IXe siècle. Cette affirmation, quoique passablement contournée, peut paraître une lapalissade, mais les réserves qu'elle formule de façon implicite n'ont jamais été monnaie courante parmi les historiens des mathématiques. Nous allons d'abord examiner les ouvrages géométriques qu'on attribue à Euclide, pour nous tourner ensuite sur les réserves qu'on entend aujourd'hui formulées au sujet du personnage lui-même. Dans un troisième temps, on introduira quelques pistes récentes de recherche sur les ouvrages attribués à Euclide.

Euclide était, dès l'antiquité, désigné comme « l'homme des *Éléments* », selon le titre de son traité le plus connu. Ce qui est moins bien connu, c'est que les *Éléments* ne contiennent pas seulement de la géométrie. Ses 465 propositions sont en effet structurées en treize livres.

Une première partie (livres I-IV) expose bien les fondements de la géométrie plane et certaines de ses applications. Toutefois, elle est suivie par une théorie abstraite des proportions (manipulation de rapports : livre V) et par des applications géométriques de cette dernière (critères de similitude des triangles, théorie des figures semblables : livre VI). Vient ensuite l'exposé le plus articulé de théorie des nombres de tout le *corpus* mathématique grec (théorie des rapports numériques, des nombres premiers, des suites géométriques : livres VII-IX). Cet exposé est suivi par une classification aux allures monstrueuses des lignes irrationnelles (il s'agit en l'occurrence des quantités que l'on peut représenter, dans un langage algébrique et de façon très approximative, par des sommes ou des différences de deux ou plusieurs radicaux : livre X – en tout 115 propositions !).

Les trois livres suivants proposent, successivement, un *compendium* de géométrie dans l'espace (livre XI), la détermination des rapports entre certaines figures solides (un cylindre est le triple qu'un cône de même base et de hauteur égale, etc. : livre XII), , la construction des cinq polyèdres réguliers et la comparaison de leurs arêtes (livre XIII).

Euclide a écrit d'autres traités que les *Éléments*. Au premier rang, par importance, de cette production qu'on a pu dire « mineure » figurent les *Données*, l'un des ouvrages les plus mystérieux de la géométrie grecque : on y étudie les règles déductives relatives au prédicat « être donné », lequel est appliqué à des grandeurs ou à des objets géométriques. Prenons par exemple l'énoncé du théorème 5 : « Si une grandeur a un rapport donné relativement à une quelconque de ses parties, elle aura aussi un rapport donné relativement à la partie qui reste » ; en d'autres termes, si B est une partie de A et si nous connaissons le rapport

$$\frac{A}{B}$$

nous connaissons également le rapport

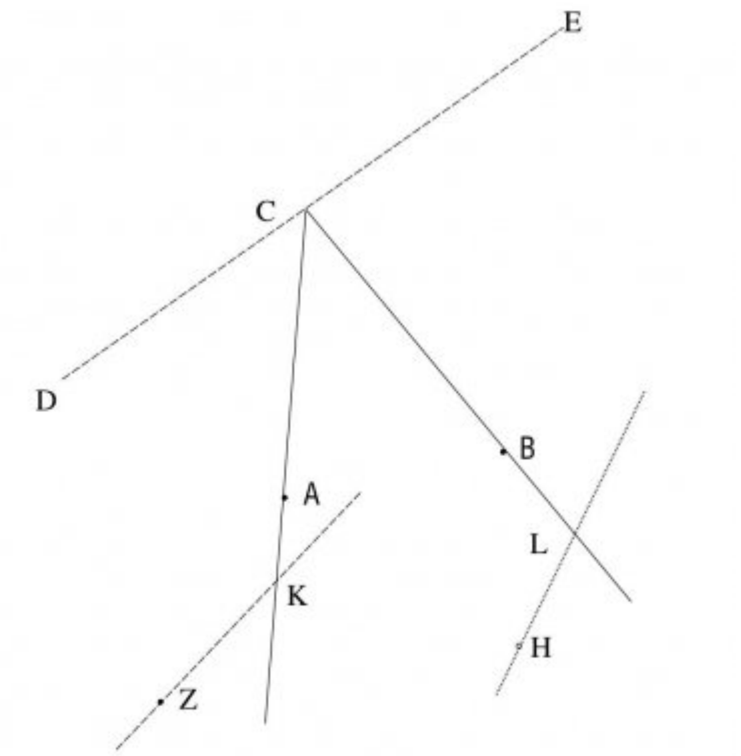
$$\frac{A}{(A-B)}$$

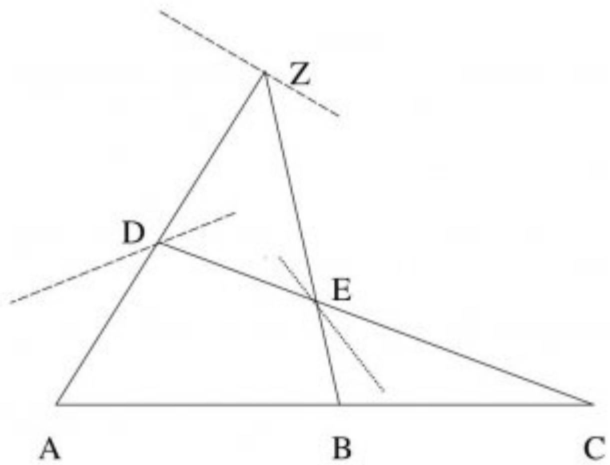
La preuve, qui pour nous se réduit à une petite manipulation de rapports en écriture symbolique, n'est pas banale car la règle du jeu est que l'on ne peut employer que des déductions qui sont elles-mêmes formulées dans le langage des « données », et donc soit les définitions placées en tête du traité soit, dans ce cas, les quatre premiers théorèmes. Le « langage des données » sert, entre autres choses, à régler la question de l'unicité des objet géométriques construits pendant une démonstration [1]. Les *Données* recueillent en un seul livre une « demi-droite » de 94 théorèmes qui peut être indéfiniment prolongée. Néanmoins, leur architecture est très soignée, car elle aborde des sujets de généralité décroissante et les propositions sont organisées par sections thématiques.

Le *corpus* euclidien contenait de surcroît des traités de niveau avancé (il se peut que ce soit pour cette raison qu'ils sont aujourd'hui perdus). Leur structure et même leur contenu sont parfois difficiles à reconstituer. On compte parmi eux :

- les *Divisions*, ouvrage qui traite de problèmes où certaines figures géométriques, en particulier des triangles et des quadrilatères, sont divisées, au moyen de droites passant par des points donnés, en des parties dont les rapports sont donnés ;
- les *Pseudaria*, un recueil de démonstrations fausses établissant des résultats erronés ;
- les *Porismes*, un genre de propositions consacrées à des relations qui persistent dans des configurations géométriques qui jouissent d'un certain nombre de degrés de liberté (voir fig. 1 et 2 [2]) ;

- les *Lieux sur une surface*, où des surfaces sont identifiées en tant que lieux géométriques. Les deux derniers ouvrages emploient de façon exclusive le langage des « données », développé dans le traité de même nom.





Mais il y a plus : le *corpus* des écrits euclidiens est une véritable encyclopédie mathématique, contenant des traités qui sont représentatifs des quatre branches du *quadrivium*, les quatre matières en lesquelles s'organisait traditionnellement le cursus scolaire « scientifique » (géométrie, arithmétique, musique, astronomie). Les deux premières disciplines sont déjà bien représentées dans les *Éléments* et les *Données*. Une théorie des intervalles musicaux est développée dans la *Sectio canonis*, tandis que le problème astronomique de la détermination de la longueur du jour en fonction de la date et de la latitude du lieu est abordé dans les *Phénomènes*.

Le *corpus* euclidien contient aussi des ouvrages portant sur des domaines de « mathématiques appliquées ». L'*Optique* expose ainsi la théorie de la vision au moyen de rayons visuels issus de l'œil – un modèle qui, d'un point de vue géométrique, est tout à fait équivalent à une description en termes de rayons de lumière –, et la *Catoptrique* étudie la vision après réflexion des rayons visuels. Ce dernier ouvrage contient la première proposition connue qui traite le sujet des miroirs ardents.

Des données biographiques inexistantes

Tournons-nous maintenant vers ce que nous savons réellement d'Euclide. De fait, le dossier biographique relatif à Euclide est constitué d'une poignée d'anecdotes racontées par des auteurs qui ont vécu des siècles après lui. L'origine de ces histoires ne peut pas être contrôlée ; il est très probable qu'elles ont été élaborées précisément pour suppléer au manque de données biographiques. Ce phénomène n'est pas spécifique à l'Antiquité : chaque époque écrit le roman savant à sa façon. La nôtre, âge de la vulgarisation et du politiquement correct, peut nous offrir des spéculations sans fondement comme un Euclide noir et grand-prêtre.

On peut contraster cette situation avec le nombre foisonnant d'anecdotes sur la vie d'Archimède, qui est à peu près contemporain d'Euclide : leur grand nombre s'explique partiellement par le fait que le Syracusain est le seul mathématicien grec dont on ait écrit une biographie peu après sa mort.

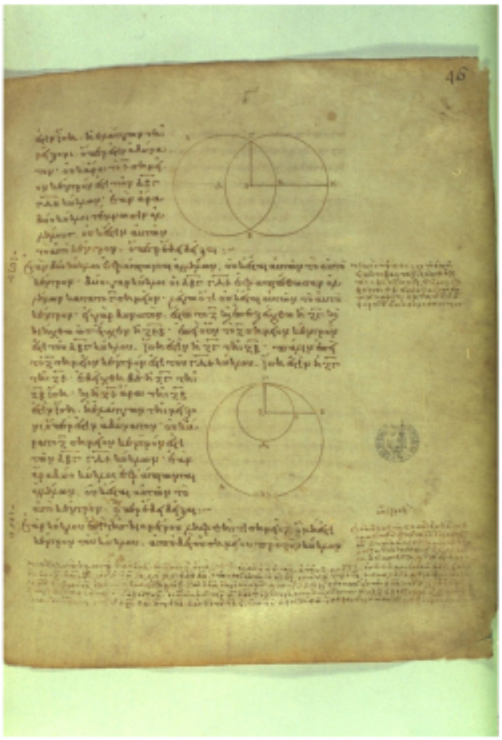
De même, il faut considérer comme relevant de la pure conjecture les représentations d'Euclide en train d'enseigner les mathématiques dans le cadre des activités didactiques qui auraient été mises en œuvre dans le célèbre Musée d'Alexandrie. La datation traditionnelle d'Euclide (début IIIe siècle av.J.C. [**3**]) et les documents les plus dignes de foi sur la date de fondation du Musée rendent cette hypothèse tout simplement impossible. Qui est plus, il n'est aucun témoignage qui nous permettrait d'affirmer qu'à l'époque hellénistique, le Musée était le siège de quelconques activités d'enseignement.

Le manque de données biographiques produisit un autre mythe, celui-ci tout à fait moderne : Euclide ne serait que le nom de plume d'une équipe d'auteurs-compilateurs sur le modèle de Bourbaki. Cette hypothèse, de fait émise pour la première fois dans les années 1950, ne peut paraître plausible qu'à quelqu'un qui n'aurait pas la moindre idée des féroces revendications d'auteur qui caractérisent toute la littérature grecque, et le domaine des mathématiques en particulier.

C'est pour l'ensemble de ces raisons que l'historien prendra plutôt comme objet d'étude le *corpus* des écrits attribués à Euclide que la vie et les intentions de son auteur. C'est également pour cela que, plus généralement, il nous est si difficile de mettre en contexte les mathématiques grecques, dans la mesure où leur univers de discours est particulièrement auto-référentiel.

Quelques pistes de recherche

Les écrits d'Euclide se situent au fondement du genre littéraire constitué par l'ensemble des traités mathématiques grecs. Ils ont joué, aux yeux des mathématiciens et des exégètes postérieurs, le rôle d'ouvrages de référence aussi bien du point de vue de leur contenu que de la pratique stylistique. Ils ont été soumis aux mêmes opérations éditoriales que celles dont a été l'objet n'importe quel produit littéraire grec depuis la période hellénistique jusqu'à l'Antiquité tardive : ils ont été annotés, commentés, revus, complétés par des générations de mathématiciens et de savants. Pour ceux-ci, Euclide donnait la « juste mesure ». Ils se consacrent donc souvent à justifier rétrospectivement ses « choix », polémiquant parfois avec des critiques, comme c'est le cas d'Apollonius ou de Géminos [**4**].



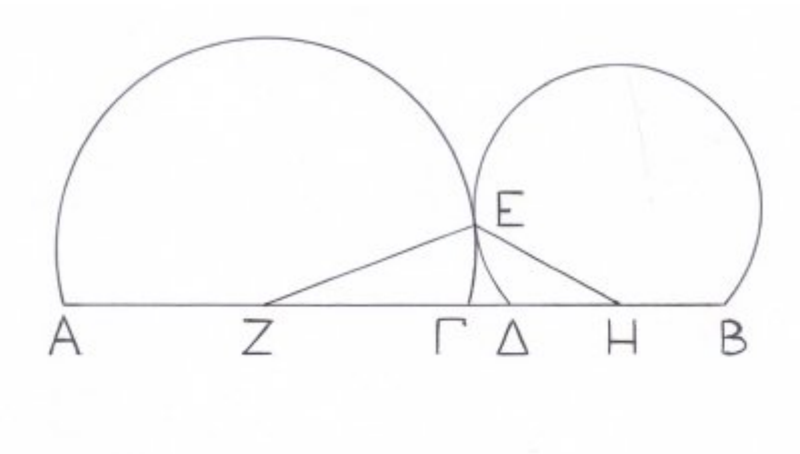
Dans les cas où le *corpus* euclidien était perçu comme présentant des « lacunes », la tradition savante s'est chargée de postuler l'existence des traités susceptibles de les combler : c'est le cas du prétendu traité euclidien en quatre livres sur les sections coniques, dont nous parle seulement un auteur tardif. Son existence a la vertu très suspecte d'expliquer certaines caractéristiques du traité des sections coniques d'Apollonius, un auteur qui a vécu après Euclide. Cela pourra surprendre le lecteur, mais même avec un auteur aussi bien connu qu'Euclide, il reste encore du travail à faire pour un historien. Voici la liste de tâches essentielles :

- 1. Analyser la transmission des œuvres et des apparats savants que la tradition nous a conservés : commentaires, annotations marginales (qu'on appelle scholies). La tâche est d'identifier d'éventuels ajouts (qu'on nomme interpolations) ou des altérations dues à une main postérieure à la rédaction originale, qu'ils soient des simples phrases, des propositions ou des lemmes. La compilation de preuves différentes que contenaient des branches différentes de la tradition manuscrite explique le phénomène, devant lequel nous nous trouvons, qu'il existe, dans le texte reçu des *Éléments*, de nombreuses preuves alternatives. Au cours de la dernière décennie, on a compris l'importance des traductions arabes qui, dans le cas des *Éléments*, présentent un texte plus austère et moins affecté par des interpolations. Il est aussi possible, grâce encore à l'intermédiaire des sources arabes, de reconstituer de façon complète le contenu, sinon les démonstrations, du traité des *Divisions*.


الأولى

مجموع مربعي الضلعين المحيطين بهما

- 2. Rechercher des morceaux résiduels d'écrits euclidiens dans des sources secondaires, même s'il ne s'agit pas de textes mathématiques *strico sensu*. C'est par exemple le cas des commentateurs tardifs des ouvrages d'Aristote, qui puisent dans un répertoire d'exemples canoniques pour clarifier des passages du Stagirite. On en a un cas intéressant avec les *Pseudaria*, dont deux propositions ont tout récemment été identifiées dans le commentaire d'Alexandre d'Aphrodise [5] aux *Topiques* d'Aristote (voir fig. 3).



- 3. Étudier la postérité des traités euclidiens, aussi bien dans le monde grec que dans la tradition mathématique arabe et au Moyen Âge latin. Une telle postérité peut simplement consister en un petit nombre de mentions chez des philosophes. C'est encore une fois le cas des *Pseudaria*.
- 4. Offrir une description des contenus et de la pratique stylistique qui soit la plus détachée possible de préjugés épistémologiques, mathématiques ou philosophiques. Si cela n'est pas toujours possible, l'historien devrait au moins se doter d'une conscience historiographique à même de lui faire apprécier le problème. Pour donner un exemple, on a abandonné

récemment une perspective exégétique qui présentait les théorèmes du livre II des *Éléments* comme de l'algèbre déguisée. Il va de soi que la dernière tâche est la plus difficile à satisfaire.

Bibliographie

La traduction de référence des *Éléments* en français est *Euclide, Les Éléments*. Traduction et commentaires par **B. Vitrac**. Vol. 1. Introduction générale. Livres I à IV (1990) ; Vol. 2. Livres V à IX (1994) ; Vol. 3. Livre X (1998) ; Vol. 4. Livres XI à XIII (2001). Paris, Presses Universitaires de France. Un cinquième volume contiendra un choix de scholies, toutes les preuves alternatives et les deux courts traités qui, pendant l'Antiquité tardive, ont été attachés aux *Éléments* pour constituer les livres XIV et XV.

Pour ceux qui connaissent l'italien, le *corpus* euclidien est présenté, traduit et commenté dans *Euclide, Tutte le Opere*. A cura di **F. Acerbi.** Milano, Bompiani 2007. Entre autres choses, on y trouve aussi une discussion complète des données biographiques sur Euclide et une reconstruction détaillée du traité sur les *Divisions*.

Les ressources en ligne offrent une traduction anglaise des *Eléments* **ici**.

Sur le quadrivium dans le monde grec voir I. Hadot, *Arts libéraux et Philosophie dans la pensée antique*. Seconde édition. Paris, Vrin 2005, et B. Vitrac, « Les classifications des sciences mathématiques en Grèce ancienne », *Archives de Philosophie* 68 (2005), pp. 269-301.

Pour les preuves alternatives dans les *Éléments,* voir **B. Vitrac,** « A Propos des Démonstrations Alternatives et Autres Substitutions de Preuves dans les Éléments d'Euclide », *Archive for History of Exact Sciences* 59 (2004), pp. 1-44 ; sur les scholies, on peut se reporter à **B. Vitrac**, « Les scholies grecques aux *Éléments* d'Euclide », *Revue d'Histoire des Sciences* 56 (2003), pp. 275-292.

Pour les *Pseudaria* voir **F. Acerbi**, « Euclid's *Pseudaria* », *Archive for History of Exact Sciences* 62 (2008), pp. 511-55.

Sur le problème de l'interprétation du livre II des Éléments, voir en premier lieu **S. Unguru**, « On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics », *Archive for History of Exact Sciences* 15 (1975-76), pp. 67-113.

Une discussion des traductions arabes des Éléments et une mise à jour bibliographique complète se trouvent dans **B. Vitrac**, « EUCLID », in N. Koertge (éd.), *New Dictionary of Scientific Biography*. Detroit, Ch. Scribner's Sons 2008, vol. II, pp. 416-421.

Voir aussi, du même auteur, "Euclide" in R. Goulet (éd.), *Dictionnaire des Philosophes antiques*. Paris, CNRS Editions 1994-, vol. III (2000), pp. 252-272.

Sur Apollonius et Géminos et leurs recherches fondationnelles voir **F. Acerbi,** « Two Approaches to Foundations in Greek Mathematics : Apollonius and Geminus », *Science in Context* 23 (2010), sous presse.

Notes

[▲**1**] Voir Euclide, *Tutte le opere*, pp. 464 et suiv. et 512 et suiv.

[▲**2**] Le contenu des *Porismes* peut être reconstitué en partie à partir de la description de l'ouvrage et des lemmes qu'en donne Pappus, mathématicien du IIIe siècle ap. J.C, dans sa *Collectio*. Les deux porismes présentés dans les figures sont les seuls dont Pappus donne l'énoncé complet.

[▲**3**] Euclide est sûrement antérieur à Apollonius, qui le cite et qui a vécu au tournant du IIe siècle av. J.C.. La datation traditionnelle se base sur les notices, de deuxième main et anecdotiques, que nous a transmises, dans son commentaire au Ier livre des *Éléments*, le philosophe néoplatonicien du Ve siècle Proclus.

[▲**4**] Apollonius est l'auteur des *Coniques*, un traité de synthèse qui expose la théorie des sections coniques. Il a aussi été le premier à s'intéresser de façon explicite à des thèmes fondationnels. Géminos est l'auteur d'un ouvrage de type encyclopédique, la *Théorie des mathématiques*. Il vécut au Ier siècle av.J.C..

[▲**5**] Alexandre d'Aphrodise est un philosophe et commentateur des ouvrages d'Aristote. Il vécut au IIème siècle ap. J.C.

Crédits images

Pour citer cet article : **Fabio Acerbi**, **Euclide**. *Images des Mathématiques*, CNRS, 2010. En ligne, URL : `http://images.math.cnrs.fr/Euclide.html`