



**HAL**  
open science

# Rapport de Master-recherche: Estimation de canal à évanouissements lents pour les communications radio-mobiles

Soukayna Ghandour - Haidar

► **To cite this version:**

Soukayna Ghandour - Haidar. Rapport de Master-recherche: Estimation de canal à évanouissements lents pour les communications radio-mobiles. 2010. hal-00579723

**HAL Id: hal-00579723**

**<https://hal.science/hal-00579723>**

Submitted on 24 Mar 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **INSTITUT POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

## **RAPPORT DE STAGE**

pour obtenir le grade de

Master 2R de l'Institut polytechnique de Grenoble

**Spécialité : "Signal, Image, Parole, Télécommunications"**

préparé au laboratoire Grenoble Image Parole Signal et Automatique

dans le cadre de l'École Doctorale EEATS

**" Électronique, Électrotechnique, Automatique, Télécommunications, Signal "**

présentée et soutenue publiquement

par

**Soukayna GHANDOUR**

le 25 Juin 2010

**Titre :**

**Estimation de canal à évanouissements lents pour les communications radio-mobiles**

**Maître de stage : Laurent ROS**

**Deuxième encadrant : Jean-Marc BROSSIER**

### **JURY**

|          |                |                 |
|----------|----------------|-----------------|
| Monsieur | Gang FENG      | Président       |
| Monsieur | Olivier MICHEL | Examineur       |
| Monsieur | Laurent ROS    | Maître de stage |

## Abstract

Ce rapport de stage de Master Recherche traite du problème de l'estimation du canal de transmission en communication radio-mobile. Les domaines d'applications visés concernent plus généralement les communications sans fil (WIFI, UMTS, WIMAX, 4G, LTE, ..). Le " modèle de Rayleigh à spectre Doppler de Jakes " est le modèle aléatoire le plus largement accepté dans la littérature pour modéliser les variations temporelles (ou évanouissements , " fading ") du gain complexe du canal équivalent en bande de base. Ce modèle n'est cependant pas toujours commode à manipuler dans les algorithmes extrêmement importants qui servent à surmonter les problèmes d'estimation et d'égalisation de ce canal. Par ailleurs, un modèle basé sur une représentation d'état du problème est plus facile à exploiter dans les algorithmes. C'est pourquoi les chercheurs en traitement du signal ont proposé un modèle autorégressif d'ordre  $p$ , AR- $p$  (utilisé le plus souvent avec  $p=1$ ), pour approcher le canal et faciliter sa manipulation. Notamment, cette approximation AR- $p$  a été largement utilisée par les chercheurs et ingénieurs en communication numérique pour estimer le vrai canal à l'aide du filtre de Kalman, vu l'optimalité du filtre de Kalman dans un modèle dit " linéaire Gaussien ". Mais dans certaines situations, les résultats obtenus se sont montrés d'une certaine manière décevants, en particulier quand le canal est à évanouissements lents et donc théoriquement plus facile à estimer. Et c'est là que la question se pose: pourquoi l'estimation de ce canal à l'aide d'un filtre de Kalman présente parfois une variance d'estimation beaucoup plus élevée que la borne théoriquement atteignable (Bornes de Cramer Rao Bayésienne)? N'est-ce pas peut être par faute de modélisation? Ne devrait-on pas choisir un autre modèle plus proche du vrai canal? Dans ce rapport de stage, on a présenté le modèle général du canal, on a ensuite étudié et tracé les Bornes de Cramer Rao Bayésiennes pour le problème d'estimation de ce canal (à 1 seul trajet de propagation) en présence de bruit additif Gaussien. Ensuite on a présenté le modèle autorégressif d'ordre  $p$ , et les équations du filtre de Kalman appliqué à ce modèle. On a mesuré par simulations Monte-Carlo les variances des erreurs d'estimation du filtre de Kalman pour les cas AR1 et AR2, et on a effectivement remarqué qu'on était loin des bornes dans le cas de faibles fréquences Doppler. Par la suite, on a fait une étude théorique détaillée des performances asymptotiques de l'algorithme de Kalman basé sur modèle AR1, en établissant l'expression mathématique de la variance de l'erreur d'estimation (composée d'une partie dynamique et d'une partie statique) en fonction des divers paramètres : fréquence Doppler normalisée, Rapport signal à bruit, paramètre du modèle AR1. Grâce à cette étude, des propositions d'amélioration par rapport aux choix standards de la littérature ont pu être proposées à la fin.

## Mots Clés:

Erreur Quadratique Moyenne EQM, Bornes de Cramer Rao Bayésiennes BCRB, Modèle autorégressif d'ordre  $p$  AR- $p$ , Filtre de Kalman, Gain de Kalman, Erreur d'estimation, Spectre de Jakes, Fonction de Bessel, Autocorrélation, Fréquence Doppler, Rapport Signal sur Bruit SNR.

## Abstract

This MSc Report deals with the problem of channel estimation in radio-mobile transmission, applied in wireless communication (WIFI, UMTS, WIMAX, 4G, LTE, ..). The " Rayleigh fading channel model with Jakes' Doppler spectrum" is the most accepted random model to represent temporal variations (fading) of the equivalent baseband channel complex gain. However, this model is not always convenient to use in highly important algorithms applied to overcome the estimation and equalization problems. That's why researchers in signal processing proposed an autoregressive model AR-p (usually used with  $p=1$ ) to approach this channel to facilitate its manipulation. This approximation AR-p has been widely used by researchers and engineers in digital communication to estimate the real channel by using the Kalman Filter, regarding to the optimality of this filter in a "Gaussian Linear" model. But in some situations, the results were disappointing, especially when the channel is slow fading and therefore theoretically easier to estimate. And there is the question: why the estimated channel using a Kalman filter presents sometimes an estimation variance much higher than the theoretically attainable lower bound (Bayesian Cramer-Rao Bounds)? Is it due to a modeling error? Should we not choose another model closer to the true channel? In this report, we have presented the general channel model, studied and plotted the Bayesian Cramer-Rao Bounds of this channel estimation problem (single-path channel only) with an Additive White Gaussian Noise (AWGN). Then we presented the autoregressive model AR-p and the associated Kalman filter equations. By Monte-Carlo simulations, we measured the error variance estimation by the Kalman filter applied for AR1 and AR2 models. We noticed that we were far from the bounds in case of low Doppler frequencies. We made then a detailed theoretical study of the asymptotic performance of the Kalman algorithm based on AR1 model, by computing the mathematical expression of the estimation error (composed by dynamic and Static parts) based on various parameters: Normalized Doppler Frequency, Signal to noise Ratio, and the AR1 parameter. With this study, some proposals for improvement, compared to the standard choices of literature, have been proposed at the end.

## Keywords:

Mean Square Error , Bayesian Cramer-Rao Bounds, Autoregressif model , Kalman Filter, Kalman Gain, Estimation error, Jakes' spectrum, Bessel function, Autocorrelation, Doppler Frequency, Signal to Noise Ratio.

# Remerciements

Avant tout développement sur cette expérience, il apparaît opportun de commencer ce rapport de stage par des remerciements, à ceux qui m'ont beaucoup appris au cours de ce stage, et même à ceux qui ont eu la gentillesse de faire de ce stage un moment très profitable.

Mes remerciements s'adressent tout d'abord à Mr Jean Marc BROSSIER, je lui adresse toute ma profonde gratitude pour son soutien durant la période de travail. J'apprécie bien son aide précieuse, ses suggestions et ses conseils judicieux qu'il a pu me prodiguer au cours de ce stage.

Je remercie Mr Laurent ROS, mon maître de stage qui m'a formé et accompagné tout au long de cette expérience professionnelle avec beaucoup de patience et de pédagogie. Je lui manifeste ma grande admiration pour ses compétences, ses qualités humaines et mon accueil avec amabilité et simplicité habituelles malgré ses nombreuses occupations.

Je suis particulièrement reconnaissante envers Mr Gang FENG, responsable de la spécialité Signal, Image, Parole, Télécom, qui a rendu possible le déroulement du travail en assurant les bonnes conditions.

Au GIPSA-Lab, l'ambiance qui règne est tout simplement exceptionnelle. Je tiens donc à remercier toutes les personnes grâce auxquelles ce fut un grand plaisir de venir au boulot tous les matins. Je tiens à remercier tous mes professeurs, pour l'expérience enrichissante et pleine d'intérêt qu'ils m'ont fait vivre durant cette année.

A la fin, je me permets d'envoyer un grand merci à mes parents et à Jamal, pour m'avoir soutenue tout au long de cette année, et je leur dédie ce travail.

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Remerciements</b>   | <b>4</b>  |
| <b>Liste des notations</b>   | <b>7</b>  |
| <b>Liste des sigles</b>  | <b>9</b>  |
| <b>Introduction</b>  | <b>12</b> |
| <b>1 Modèle général et problème d'estimation</b>                                   | <b>15</b> |
| 1.1 Introduction . . . . .   | 15        |
| 1.2 Bornes de Cramer Rao Bayésiennes . . . . .                                     | 19        |
| 1.2.1 Différence entre les bornes Bayésiennes et les bornes classiques . . . . .   | 19        |
| 1.2.2 Calcul des bornes de Cramer Rao Bayésiennes . . . . .                        | 20        |
| 1.2.3 Tracé des bornes par simulation et discussion . . . . .                      | 21        |
| <b>2 Algorithme basé sur une approximation Auto-Régressive et filtre de Kalman</b> | <b>25</b> |
| 2.1 Estimateurs Autoregressifs . . . . .   | 25        |
| 2.1.1 Motivation . . . . .   | 25        |
| 2.1.2 Filtrage de Kalman . . . . .   | 27        |
| 2.1.3 Filtre de Kalman basé sur un modèle AR1 . . . . .                            | 28        |
| 2.1.4 Filtre de Kalman basé sur un modèle AR2 . . . . .                            | 29        |
| 2.2 Résultats de simulations et interprétations . . . . .                          | 31        |
| 2.2.1 EQM en fonction de la fréquence Doppler . . . . .                            | 31        |
| 2.2.2 EQM en fonction du rapport signal sur bruit . . . . .                        | 33        |
| 2.3 Analyse de l'erreur . . . . .  | 35        |
| 2.3.1 Motivation . . . . .   | 35        |
| 2.3.2 Gain asymptotique du modèle AR1 . . . . .                                    | 36        |
| 2.3.3 Erreur EQM . . . . .   | 40        |
| 2.4 Proposition d'optimisation . . . . .   | 45        |
| 2.5 conclusion . . . . .   | 47        |

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Conclusion et perspectives</b>   | <b>50</b> |
| <b>Annexe A - Calcul des bornes de Cramer Rao Bayésiennes</b>               | <b>52</b> |
| <b>Annexe B - Calcul des <math>a_p</math> et de <math>\sigma_p^2</math></b> | <b>56</b> |
| <b>Annexe C - Gain de Kalman asymptotique</b>                               | <b>58</b> |
| Cas du modèle AR1 . . . . .   | 58        |
| Cas du modèle AR2 . . . . .   | 59        |
| <b>Annexe D - Calcul de EQM1 et EQM2</b>                                    | <b>61</b> |
| Aides sur le calcul de EQM1: variance d'erreur dynamique . . . . .          | 61        |
| Calcul de la bande équivalente de bruit BL . . . . .                        | 62        |

# Liste des notations

|                   |   |
|-------------------|---|
| $\alpha_k$        | Echantillon numéro $k$ du gain complexe discret                       |
| $\hat{\alpha}_k$  | Estimé de $\alpha_k$  |
| $\alpha$          | Bloc des gains à estimer  |
| $y_k$             | Echantillon d'observation numéro $k$                                  |
| $y$               | Bloc des observations   |
| $b_k$             | Echantillon du bruit blanc complexe circulaire gaussien d'observation |
| $e_k$             | Echantillon du bruit du modèle gaussien complexe                      |
| $\sigma_\alpha^2$ | Variance du gain complexe   |
| $\sigma_b^2$      | Variance de l'erreur d'observation                                    |
| $\sigma_p^2$      | Variance de l'erreur du modèle ARp                                    |
| $\sigma_e^2$      | Variance de l'erreur du modèle AR1                                    |
| $a_k$             | Coefficient numéro $k$ du modèle ARp                                  |
| $a$               | Coefficient du modèle AR1   |
| $K_{asympt}$      | Gain asymptotique   |
| $J_0(\cdot)$      | Fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0                       |
| $T$               | période du symbole (d'un échantillon)                                 |
| $f_d$             | Fréquence Doppler   |
| $f_d T$           | Fréquence Doppler normalisée  |
| $SNR$             | Rapport signal sur bruit en dB  |
| $K$               | Taille du bloc d'observation  |
| $f_0$             | Fréquence porteuse  |
| $v_m$             | Vitesse du mobile   |
| $c$               | Célérité de l'onde radio-électrique                                   |
| $\delta_k$        | Symbole de Kronecker - échantillon de la fonction de dirac au point 0 |

---

|                      |  |
|----------------------|--|
| $R_{cont}$           | Fonction d'autocorrélation continue  |
| $R_{\alpha}$         | Fonction d'autocorrélation du gain complexe discret  |
| $R_{xx}$             | Autocorrélation de l'approximation $x$ de $\alpha$ par le modèle ARp                           |
| $\Gamma_{\alpha}(f)$ | Transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation continue $R_{cont}$                    |
| $R_{\alpha}$         | Matrice d'autocorrélation du vecteur de gains  |
| $R_b$                | Matrice d'autocorrélation du vecteur bruit   |
| $J$                  | Matrice d'information à inverser   |
| $I_K$                | Matrice d'identité $K \times K$  |
| $L(z)$               | Fonction de transfert erreur   |
| $T(z)$               | Fonction de transfert entre le vrai paramètre bruité et le paramètre estimé                    |
| $tr(\cdot)$          | Trace de la matrice  |
| $det(\cdot)$         | Déterminant de la matrice  |
| $(\cdot)^*$          | Opérateur de conjugaison   |
| $(\cdot)^T$          | Opérateur de transposition   |
| $(\cdot)^H$          | Opérateur de transposition-conjugaison   |
| $\nabla_x$           | Opérateur différentiel d'ordre 1   |
| $\Delta_y^x$         | Opérateur Différentiel d'ordre 2   |
| $E_{\alpha}$         | Espérance moyenne sur $\alpha$   |
| $E_{\alpha,y}$       | Espérance moyenne sur $\alpha$ et $y$  |
| $NC(\mu, \Sigma)$    | Loi de distribution complexe gaussienne circulaire, de moyenne $\mu$ et de covariance $\Sigma$ |
| $ddp(\cdot)$         | Densité de probabilité   |
| $\rho$               | Module du gain complexe  |
| $\Phi$               | Phase du Gain complexe   |

# Liste des sigles

|       |   |
|-------|---|
| AWGN  | Additif White Gaussien Noise                          |
| BCRB  | Bornes de Cramer-Rao Bayésiennes                      |
| CDMA  | Code Division Multiple Access                         |
| DDP   | Densité de probabilité                                |
| EQM   | Erreur Quadratique Moyenne                            |
| EQM1  | Erreur Quadratique Moyenne due au modèle              |
| EQM2  | Erreur Quadratique Moyenne due au bruit d'observation |
| KF    | Kalman Filter   |
| LURGA | Localisation d'Urgence Reconfigurable par GALILEO     |
| ARp   | Modèle autorégressif d'ordre p                        |
| OFDM  | Orthogonal Frequency Division Multiplexing            |
| SNR   | Rapport Signal sur Bruit                              |

# Table des figures

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Fonction d'autocorrélation continue d'un canal de Jakes pour différentes valeurs de la fréquence Doppler $f_d$ .   | 16 |
| 1.2 | Spectre de Jakes pour une fréquence Doppler $f_d$ .  | 17 |
| 1.3 | DDP du module de $\alpha$  | 17 |
| 1.4 | DDP de la phase de $\alpha$  | 18 |
| 1.5 | BCRB en fonction de la taille du bloc $K$ , pour différents rapports Signal sur Bruit (20,35 et 50 dB), $f_d T = 1e - 4$ , pour $K \geq 80$ on atteint la limite de la borne.                  | 22 |
| 1.6 | BCRB en fonction de la taille du bloc $K$ , pour différents rapports Signal sur Bruit (20,35 et 50 dB), $f_d T = 1e - 3$ , pour $K \geq 80$ on atteint la limite de la borne.                  | 22 |
| 1.7 | BCRB en fonction de la taille du bloc $K$ , pour différents rapports Signal sur Bruit (20,35 et 50 dB), $f_d T = 0.01$ , pour $K \geq 60$ on atteint la limite de la borne.                    | 23 |
| 2.1 | Exemple d'évolution de $\alpha$ et estimation en présence de bruit à l'aide des deux modèles AR1 et AR2 - $f_d T = 10^{-4}$ et $SNR = 20dB$ .  | 31 |
| 2.2 | Exemple d'évolution de $\alpha$ et estimation en présence de bruit à l'aide des deux modèles AR1 et AR2 - $f_d T = 10^{-3}$ et $SNR = 20dB$ .  | 32 |
| 2.3 | Exemple d'évolution de $\alpha$ et estimation en présence de bruit à l'aide des deux modèles AR1 et AR2 - $f_d T = 10^{-3}$ et $SNR = 10dB$ .  | 32 |
| 2.4 | BCRB et Erreur quadratique donnée par l'algorithme AR1 et AR2 en fonction de la fréquence Doppler normalisée $f_d T$ comprise entre $5 \cdot 10^{-4}$ et $10^{-1}$ pour $SNR = 30dB$ .         | 33 |
| 2.5 | BCRB et Erreur quadratique donnée par l'algorithme AR1 et AR2 en fonction du rapport SNR pour $f_d T = 10^{-3}$ .  | 33 |
| 2.6 | BCRB et Erreur quadratique donnée par l'algorithme AR1 et AR2 en fonction du rapport SNR, $f_d T = 0.001$ dans les deux cas : a) SNR faible entre 0 et 30 dB et b) haut SNR entre 50 et 100 dB | 34 |
| 2.7 | Les fonctions d'autocorrélation du vrai Jakes et des modèles AR-p pour différents p - $f_d T = 0.1$  | 35 |
| 2.8 | Les fonctions d'autocorrélation du vrai Jakes et des modèles AR-p pour différents p - $f_d T = 0.001$  | 36 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.9  | Une réalisation du filtre de Kalman sur le modèle AR1 montrant le gain et la variance de l'erreur d'estimation, $f_d T = 0.001$ et $SNR = 30dB$ . . . . .  | 36 |
| 2.10 | Valeurs par simulation du gain asymptotique du filtre de Kalman basé sur un modèle AR1 en fonction de SNR . . . . .  | 37 |
| 2.11 | Valeurs par simulation du gain asymptotique du filtre de Kalman basé sur un modèle AR1 en fonction de $f_d T$ . . . . .  | 38 |
| 2.12 | Gain Asymptotique (simulation et théorie (éq (2.18))) pour filtre de Kalman basé sur un modèle AR1 en fonction de SNR . . . . .  | 39 |
| 2.13 | $ L(e^{j2\pi f T}) ^2 =  1 - T(e^{j2\pi f T}) ^2$ en fonction de $f$ pour différentes valeurs de $f_d T$ . . . . .   | 41 |
| 2.14 | $ T(e^{j2\pi f T}) ^2$ en fonction de $f_d T$ pour différentes valeurs de $f_d T$ . . . . .  | 41 |
| 2.15 | Variation de l'erreur élémentaire $ L(e^{j2\pi f T}) ^2 \cdot \Gamma_\alpha(f)$ en variant SNR et $f_d T$ . . . . .  | 43 |
| 2.16 | Variation de l'erreur élémentaire $ T(e^{j2\pi f T}) ^2 \cdot \sigma_b^2$ en variant SNR et $f_d T$ . . . . .  | 43 |
| 2.17 | Variation de $EQM1$ et $EQM2$ en fonction de SNR, en variant $f_d T$ . . . . .   | 44 |
| 2.18 | EQM calculée par simulation, par théorie(intégration numérique) et par l'approximation de la théorie (équations (2.27) et (2.29)) pour différentes valeurs de SNR en fonction de $f_d T$ . . . . .                         | 46 |
| 2.19 | EQM calculée par simulation pour les deux cas pris de $a$ dans la littérature et dans notre cas (équation(2.33)), ainsi que par théorie (équation(2.34)), pour différentes valeurs de SNR en fonction de $f_d T$ . . . . . | 48 |
| 2.20 | Comparaison dans les deux cas (littérature et notre optimisation) des EQM calculées par simulation avec les bornes de Cramer Rao Bayésiennes, pour différentes valeurs de SNR en fonction de $f_d T$ . . . . .             | 49 |

# Introduction

Au cours des dernières années, les systèmes de communication sans fil ont réalisé une véritable révolution. En raison de leur faible coût relatif, et à cause des exigences dues au milieu de propagation (dans des endroits où l'emploi de câbles semble être difficile), la connexion radio a été mise en place, et les systèmes de communication sans fil ont gagné une grande popularité. Ils ont été utilisés dans de nombreuses applications (traitements multimédias, UMTS, WIFI, WiMax, 4G, LTE....).

Dans la plupart de ces systèmes, la transmission se fait à travers un canal dit "radio-mobile". Cela signifie que l'on a une transmission radiofréquence de l'information entre la station de base et le mobile en présence des différents obstacles, qui sont donc le siège d'un phénomène de propagation multi-trajets (diffusions, diffractions, réflexions), et par suite les conditions de propagation sont très variables. C'est là qu'apparaît le problème de maintenance d'une communication fiable, dont dérive les problèmes d'estimation de canal, de synchronisation (estimation du délai de propagation et du déphasage), et d'égalisation. Les techniques de traitement du signal jouent un rôle extrêmement important pour surmonter ces problèmes. Notons que les variations de phase du canal complexe équivalent en bande de base sont généralement beaucoup plus "rapides" que les variations du délai ([9], [10]) (dû au rapport élevé entre la fréquence porteuse et la bande passante), et donc le problème le plus crucial est celui de l'estimation de la phase [11] ou du gain complexe (incluant module et phase du canal).

Mais avant d'aborder les solutions de ces problèmes, il est intéressant de modéliser ce canal, afin de le traiter ultérieurement. Dans la littérature scientifique des communications sans fil, il est très largement accepté de modéliser le canal physique (en fait son enveloppe complexe) de transmission en mobilité (à vitesse  $v_m$ ) par un canal de type Rayleigh à spectre de Jakes à fréquence maximale  $f_d = \frac{v_m}{c} f_0$ , appelée fréquence Doppler ( $c$  est la célérité des ondes radio, et  $f_0$  est la fréquence porteuse). Chaque trajet de ce canal possède un gain  $\alpha$  complexe variable (que ça soit durant un intervalle symbole  $T$  ou bien entre les symboles) ayant un spectre Doppler sous la forme d'un spectre de Jakes, et sa loi de probabilité suit une loi de Rayleigh (pour le module, voir le chapitre

1 pour plus de détails). Pour l'appliquer sur des algorithmes d'estimation, ce modèle ne semble pas être très commode, et donc on a traditionnellement recours à des simplifications à l'aide d'un modèle autorégressif d'ordre  $p$  [1], avec le plus souvent  $p=1$  (AR1) [4], qu'on nomme encore "processus de Gauss-Markov de premier ordre" (les gains en fonction du temps représenteront une série de Markov de premier ordre).

Dans la littérature, on trouve l'utilisation de cette approximation AR1 pour approcher la dynamique du canal dans la plupart des cas. Par exemple, on peut citer son utilisation dans les systèmes single-carrier modulation utilisés pour le "uplink ou lien montant" de LTE (Long Term Evolution) [13] (voir page 95), dans les accès multiples CDMA utilisés dans les schémas HSDPA de la troisième génération de mobiles UMTS [14], dans les systèmes OFDM (orthogonal frequency division multiplexing) où l'on applique un filtre de Kalman AR1 pour estimer la fonction de transfert du canal [2], ou encore [3] qui utilise un modèle AR d'ordre  $p$  (avec  $p=2$  pour les simulations) pour estimer le canal discret équivalent.

Cette approche paraît complètement efficace dans le cas de variations (relativement) rapides du canal à l'échelle d'une période symbole  $T$ , c'est à dire lorsque l'on a une fréquence Doppler normalisée par la période symbole telle que  $f_d T > 10^{-2}$ . On peut citer le cas d'estimation de canal radio-mobile à évolution rapide dans les systèmes à modulation OFDM où le filtre de Kalman - AR1 atteint bien la borne de Cramer Rao ([9], [10]) (voir page 112). Mais cette approche, bien que largement utilisée, ne semble pas forcément la meilleure dans le cas pourtant le plus usuel de faible fréquence Doppler normalisée ( $f_d T < 10^{-2}$ ) où il y a une grande corrélation entre deux symboles consécutifs. Ce point a été mis en évidence récemment dans [5] concernant l'estimation des gains complexes du canal physique multi-trajet en OFDM, ou encore dans [7] pour le cas du problème de localisation (estimation conjointe de délai et amplitude complexe) traité pour le projet LURGA.

Ce projet LURGA (Localisation d'Urgence Reconfigurable par GALILEO) était notre point de départ pour ce stage de Master-Recherche. Dans ce projet, une modulation à phase continue (CPM) du signal était utilisée telle que celle du GSM.

Un algorithme d'estimation de retard de propagation en présence d'un canal à évanouissements non sélectif en fréquence (modèle dit "flat fading", ne comportant qu'un seul trajet de Rayleigh avec spectre Doppler de Jakes), basé sur l'algorithme EM (Expectation Maximisation) a été proposé [7] et [8]. Il revient finalement à une procédure itérative travaillant sur une trame de symboles GSM connue (séquence d'apprentissage), revenant pour chaque itération à : faire une (nouvelle) estima-

---

tion de la trajectoire de l'amplitude complexe en supposant une connaissance préalable du retard, suivi d'une (nouvelle) estimation du retard en supposant connu la trajectoire de l'amplitude complexe. L'algorithme est initialisé avec une estimation grossière du retard (par position du maximum de corrélation). Cet algorithme a donné des résultats très satisfaisants en ce qui concerne l'estimation du retard (utile pour la localisation), mais l'estimation de la trajectoire de l'amplitude complexe demeure de faible qualité, et loine de la borne d'estimation théoriquement atteignable (Borne de Cramer Rao). Notons que pour cette étude en GSM on avait  $f_d T = 0.000738$  ( $f_0 = 1.8 \text{ GHz}$ ,  $1/T = 270 \text{ kbit/sec}$ ,  $v_m = 120 \text{ km/h}$ ).

Après une phase d'étude bibliographique et discussion autour de ces problèmes d'estimation, le sujet qui a été finalement retenu pour mon travail de stage était d'abord d'étudier et d'apporter une explication théorique détaillée concernant les performances de l'estimation du gain complexe d'un canal de Rayleigh à spectre de Jakes à partir de l'algorithme de Kalman basé sur l'approximation AR1. Ensuite si possible, de proposer et d'explorer des points d'amélioration à l'approche standard. Pour cela on s'est concentré dans le stage sur le modèle le plus basique (observation bruitée d'un trajet de Rayleigh à estimer) mais fondamental, et à la base des études diverses les plus complexes d'estimation de canal.

Dans le premier chapitre, on présentera le modèle du canal en général, et on va chercher les bornes d'erreur minimales qui peuvent être atteintes (bornes de Cramer Rao Bayésiennes).

Dans le second chapitre, on va étudier le filtre de Kalman utilisé pour estimer le signal modélisé par un modèle AR1. Une étude sur l'origine des erreurs sera faite.

Des propositions de méthodes d'amélioration et des perspectives seront menées à la fin.

# Chapitre 1

## Modèle général et problème d'estimation

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier l'estimation d'un canal de propagation de type Rayleigh à spectre de Jakes. Supposons dans un premier temps que le canal est un canal monotrajet à retard nul, caractérisé par le gain  $\alpha$  de variance normalisée  $\sigma_\alpha^2 = 1$ , et qui varie d'un symbole à un autre, mais fixe pendant une durée symbole  $T$ . Soit  $f_d$  la fréquence Doppler maximale, ce canal est un canal à variations lentes à l'échelle du temps symbole, et donc, pour que cette hypothèse soit valide, il faut que  $f_d T$  soit inférieure que  $10^{-2}$ , mais notre étude pourra considérer des valeurs de  $f_d T$  supérieures, comprises entre  $10^{-4}$  et  $10^{-1}$ .

Les gains d'un tel canal continu et stationnaire au sens large sont corrélés temporellement d'après la fonction d'autocorrélation continue donnée par:

$$R_{cont}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} E(\alpha(t)\alpha^*(t-\tau)) = \sigma_\alpha^2 J_0(2\pi f_d \tau) \quad (1.1)$$

où  $J_0(\cdot)$  est la fonction Bessel de première espèce d'ordre zéro.

La figure (FIG. 1.1) montre cette fonction d'autocorrélation. Dans cette figure, on a normalisé  $f_d$  et  $\tau$  par rapport à  $T$ . On remarque bien que quand  $f_d$  augmente, la valeur de  $J_0(2\pi f_d \tau)$  est plus proche de 1 (moins serrée). Le premier zéro est atteint pour  $\tau = \frac{3}{f_d}$ .

Le spectre Doppler de ce canal, ou autrement dit la densité spectrale de puissance (DSP) du processus stationnaire  $\alpha$ , est défini comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation

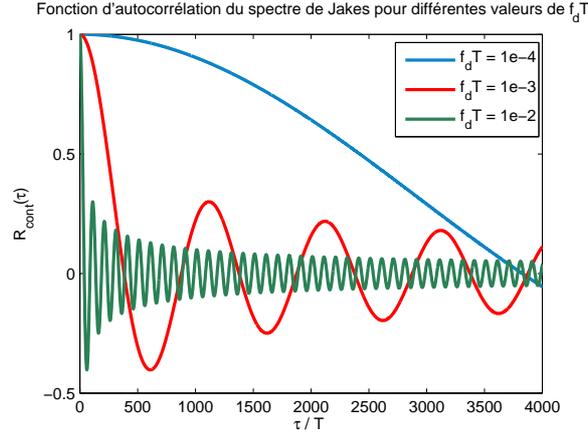


FIG. 1.1 – Fonction d'autocorrélation continue d'un canal de Jakes pour différentes valeurs de la fréquence Doppler  $f_d$ .

$R_{cont}(\tau)$ . C'est un spectre de Jakes, il est donné par la figure (FIG. 1.2) où

$$\Gamma_{\alpha}(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_{\alpha}^2}{\pi f d \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} & \text{si } |f| < f d \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Physiquement, un tel spectre peut résulter d'une superposition de très nombreux trajets de retards quasiment identiques mais d'angles d'arrivée  $\theta^{(l)}$  différents uniformément répartis sur  $[-\pi; \pi]$ , dont pour chacun on a  $f_d^{(l)} = f_d \cos(\theta^{(l)})$  avec  $f_d$  la fréquence Doppler définie par:

$$f_d = \frac{v_m}{c} f_0$$

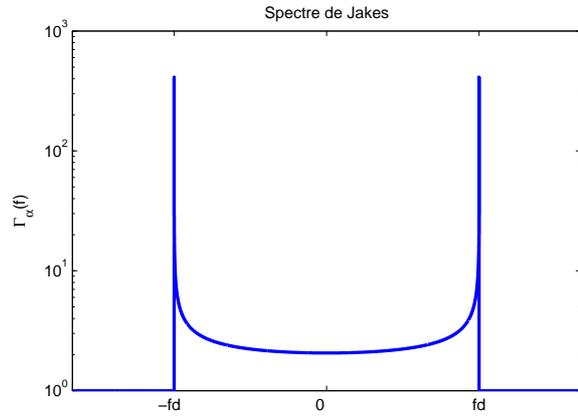
où  $v_m$  est la vitesse de déplacement uniforme du mobile entre l'émetteur et le récepteur,  $c$  la célérité de l'onde radio-électrique, et  $f_0$  la fréquence porteuse [9]. La figure (FIG. 1.2) illustre un spectre de Jakes pour une fréquence  $f_d$  donnée.

D'après le modèle considéré, pour un indice temporel donné  $k$  (symbole numéro  $k$ ),  $\alpha_k$  est une variable aléatoire complexe gaussienne et circulaire, qu'on note  $\alpha_k \sim CN(0, \sigma_{\alpha}^2)$ :

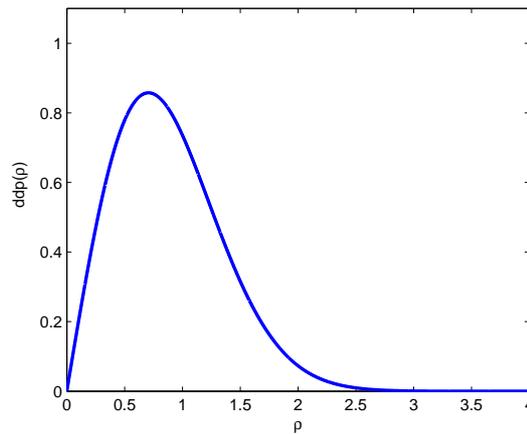
- Les parties réelle et imaginaire sont toutes les deux complexes gaussiennes centrées de variance  $\frac{\sigma_{\alpha}^2}{2}$ , et elles sont indépendantes entre elles.
- Son module  $\rho = |\alpha|$  suit une loi de Rayleigh de densité de probabilité

$$ddp(\rho) = \begin{cases} \frac{2\rho}{\sigma_{\alpha}^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{\sigma_{\alpha}^2}\right) & \text{si } \rho \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Sa phase  $\Phi = \arg(\alpha)$  suit une loi uniforme sur  $[-\pi, \pi]$

FIG. 1.2 – Spectre de Jakes pour une fréquence Doppler  $f_d$ .

Ceci est illustré sur les figures (FIG. 1.3) et (FIG. 1.4).

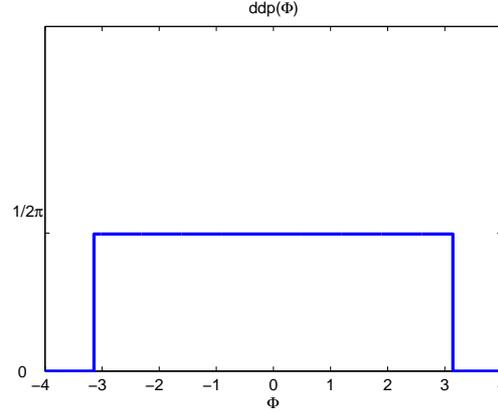
FIG. 1.3 – DDP du module de  $\alpha$ 

La fonction d'autocorrélation du processus discret  $\alpha_k$  est définie par:

$$R_\alpha[l] \stackrel{\text{def}}{=} E(\alpha_n \alpha_{n-l}^*)$$

Elle peut être déduite à partir de la fonction de corrélation du processus continu  $R_{cont}(\tau)$  échantillonnée pour  $\tau = lT$ :

$$R_\alpha[l] = R_{cont}(\tau)|_{\tau=lT}$$

FIG. 1.4 – DDP de la phase de  $\alpha$ 

Soit  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K]$  un bloc de  $K$  échantillons de gains qu'on cherche à estimer.  $K$  représente la taille de la fenêtre d'observation exprimée en nombre de symboles. La fonction autocorrélation entre les gains  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  est donnée par :

$$R_\alpha[i - j] = \sigma_\alpha^2 J_0(2\pi f_d T \cdot (i - j)) \quad (1.2)$$

La matrice d'autocorrélation de ce vecteur sera donc donnée par :

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} J_0(2\pi f_d T \cdot (0)) & J_0(2\pi f_d T \cdot (-1)) & \dots & \dots & J_0(2\pi f_d T \cdot (-(K-1))) \\ J_0(2\pi f_d T \cdot (1)) & J_0(2\pi f_d T \cdot (0)) & \dots & \dots & J_0(2\pi f_d T \cdot (-(K-2))) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_0(2\pi f_d T \cdot (K-1)) & J_0(2\pi f_d T \cdot (K-2)) & \dots & \dots & J_0(2\pi f_d T \cdot (0)) \end{bmatrix}$$

$$(\sigma_\alpha^2 = 1 \text{ et } [R_\alpha]_{i,j} = R_\alpha[i - j] = [R_\alpha]_{j,i})$$

Ce canal est bruité additivement par un bruit blanc complexe circulaire gaussien  $b_k$ , centré et de variance  $\sigma_b^2$ . Les  $b_k$  sont tous décorrélés entre eux. On note  $b_k \sim CN(0, \sigma_b^2)$ .

Soit  $b = [b_1, b_2, \dots, b_K]$  un bloc des  $K$  échantillons de bruits ajoutés. La matrice d'autocorrélation de ce vecteur sera donc donnée par:

$$R_b = \begin{bmatrix} \sigma_b^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \sigma_b^2 \end{bmatrix} = \sigma_b^2 I_K$$

En communication numérique, le signal observé est généralement de la forme

$$y_k = s_k \alpha_k + b_k$$

où  $s_k$  sera le signal utile qui dépend des données transmises et du type de modulation.

On a souvent besoin d'estimer conjointement  $\alpha_k$  et les données.

Mais ici nous supposons que  $s_k = 1$  et nous nous focalisons sur le problème de base d'estimation de  $\alpha_k$  comme expliqué dans l'introduction. Notre modèle de base est donc simplement:

$$y_k = \alpha_k + b_k \tag{1.3}$$

On définit le rapport signal / bruit par  $SNR = 10 \log_{10} \left( \frac{1}{\sigma_b^2} \right)$  (en dB).

## 1.2 Bornes de Cramer Rao Bayésiennes

Afin d'évaluer la performance d'un algorithme proposé pour l'estimation du gain  $\alpha$  en terme d'erreur quadratique moyenne, nous allons calculer la borne minimale de référence qui est la borne de Cramer Rao Bayésienne.

### 1.2.1 Différence entre les bornes Bayésiennes et les bornes classiques

Les problèmes d'estimation sont présents dans presque tous les domaines scientifiques et en particulier dans les systèmes de communication numérique. Dans des problèmes de synchronisation, il faut estimer des délais et des décalages de phase et de fréquence. En radiocommunication, il faut estimer le canal de propagation. Dans des systèmes de navigation, il faut estimer la position d'un récepteur mobile, etc. Un point crucial dans les problèmes d'estimation est l'obtention de bornes minimales de performance, qui nous servent comme référence pour savoir si l'on a un "bon estimateur" ou non.

Il y a deux approches possibles pour caractériser les problèmes d'estimation :

- Estimation classique, non-Bayésienne : on suppose que les paramètres à estimer sont des inconnus déterministes.
- Estimation Bayésienne : on suppose que les paramètres à estimer sont des variables aléatoires avec une densité de probabilité a priori. Dans cette catégorie on peut inclure l'estimation hybride, adaptée au mélange de paramètres aléatoires et déterministes. On appelle bornes Bayésiennes, les bornes associées à un problème d'estimation Bayésien.

(Pour plus de détails, voir chapitre 2 de [11]).

Ici on traite le problème d'estimation de  $\alpha_k$  qui est une variable aléatoire ayant une densité de probabilité normale supposée connue. Donc il est intéressant dans ce cas de calculer les bornes de Cramer Rao Bayésiennes.

### 1.2.2 Calcul des bornes de Cramer Rao Bayésiennes

Soit  $\hat{\alpha}(y)$  un estimateur du vecteur  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K]^T$  basé sur l'observation de  $y = [y_1, y_2, \dots, y_K]^T$

La matrice d'erreur quadratique  $E$  de l'estimateur  $\hat{\alpha}(y)$  est définie par [6]:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} E_{\alpha, y}[(\hat{\alpha}(y) - \alpha)(\hat{\alpha}(y) - \alpha)^H]$$

Et on a

$$E \geq J^{-1}$$

où  $X \geq Y$  est interprété dans le sens que la matrice  $X - Y$  est une matrice semidéfinie positive. Avec dans notre cas:

$$\begin{aligned} [J]_{i,j} &\stackrel{\text{def}}{=} E_{\alpha, y}[\nabla_{\alpha_i} \ln p(y, \alpha) \nabla_{\alpha_j}^T \ln p(y, \alpha)] \\ &= E_{\alpha, y}[-\Delta_{\alpha_i}^{\alpha_j} \ln p(y, \alpha)] \\ &= E_{\alpha, y}[-\Delta_{\alpha_i}^{\alpha_j} \ln p(y | \alpha)] + E_{\alpha}[-\Delta_{\alpha_i}^{\alpha_j} \ln p(\alpha)] \end{aligned}$$

Notons que

$$p(y | \alpha) = \frac{1}{|\pi R_b|} \exp(-(y - \alpha)^H R_b^{-1} (y - \alpha)) = \frac{1}{(\pi \sigma_b^2)^K} \exp(-\frac{1}{\sigma_b^2} (y - \alpha)^H (y - \alpha)) \quad (1.4)$$

Et

$$p(\alpha) = \frac{1}{|\pi R_{\alpha}|} \exp(-\alpha^H R_{\alpha}^{-1} \alpha) \quad (1.5)$$

avec:  $\Delta_{\alpha_i}^{\alpha_j}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (\frac{\partial}{\partial \alpha_j} (\cdot))$

$\alpha_i$  étant complexe, on définit la pseudo-dérivée par rapport aux complexes par :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_i^R} - j \frac{\partial}{\partial \alpha_i^I} \right]$$

où  $\alpha_i^R$  et  $\alpha_i^I$  sont respectivement les parties réelle et imaginaire de  $\alpha_i$ .

La fonction  $\alpha_i$  est supposée dérivable (elle satisfait les conditions de Cauchy) et donc la pseudo-dérivée coïncide avec la vraie dérivée.

Le calcul nous donne (voir annexe A)

$$E_{\alpha, y}[-\Delta_{\alpha_i}^{\alpha_j} (\ln p(y | \alpha))] = +\frac{1}{\sigma_b^2} \delta_{ij}$$

Et:

$$E_{\alpha}[-\Delta_{\alpha_i}^{\alpha_j}(\ln p(\alpha))] = [R_{\alpha}^{-1}]_{i,j}$$

Et donc:

$$[J]_{i,j} = \frac{1}{\sigma_b^2} \delta_{ij} + [R_{\alpha}^{-1}]_{i,j} \quad (1.6)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de kronecker

D'où:

$$J = \left[ \frac{1}{\sigma_b^2} I_K + R_{\alpha}^{-1} \right] \quad (1.7)$$

Pour chercher la borne, on peut:

- Soit prendre la trace de  $J$ , la borne sera dite une borne "bloc off-line".
- Soit prendre l'élément au milieu de la diagonale de  $J$ , la borne sera dite une borne "milieu du bloc".
- Soit prendre l'élément  $[J]_{K,K}$ , la borne sera dite une borne "on-line".

Notons que la borne on-line concerne l'erreur quadratique minimale qui se fait sur l'estimation de  $\alpha_K$  à partir de toutes les observations présente et précédentes  $[y_1, \dots, y_K]$ , alors que la borne off-line représente l'erreur minimale en terme de moyenne quadratique, pour l'estimation de tout le bloc  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_K]$  à partir de toutes les observations  $y = [y_1, \dots, y_K]$ .

### 1.2.3 Tracé des bornes par simulation et discussion

Sur MatLab on a fait des simulations pour voir l'évolution de la borne de Cramer Rao en fonction de la taille du bloc  $K$  pour plusieurs valeurs de SNR et de  $f_d T$ . Les figures (FIG. 1.5) et (FIG. 1.6) et (FIG. 1.7) représentent respectivement la BCRB en fonction de la taille du bloc  $K$  pour différents  $f_d T$  ( $10^{-4}$ ,  $10^{-3}$  et  $10^{-2}$ ). Dans les trois figures, on a pris trois cas de SNR (20, 35, et 50 dB).

Voici ce qu'on peut remarquer d'après ces figures:

1. On remarque que la borne off-line est inférieure (meilleure) que celle on-line. La borne "milieu du bloc" est la meilleure. Prenons par exemple  $K = 61$ , la borne "on-line" est l'erreur

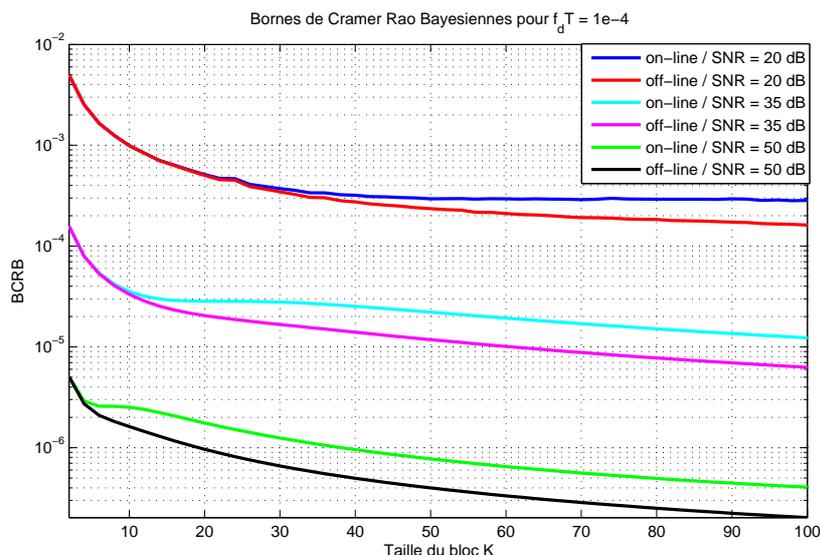


FIG. 1.5 – BCRB en fonction de la taille du bloc  $K$ , pour différents rapports Signal sur Bruit (20,35 et 50 dB),  $f_d T = 1e - 4$ , pour  $K \geq 80$  on atteint la limite de la borne.

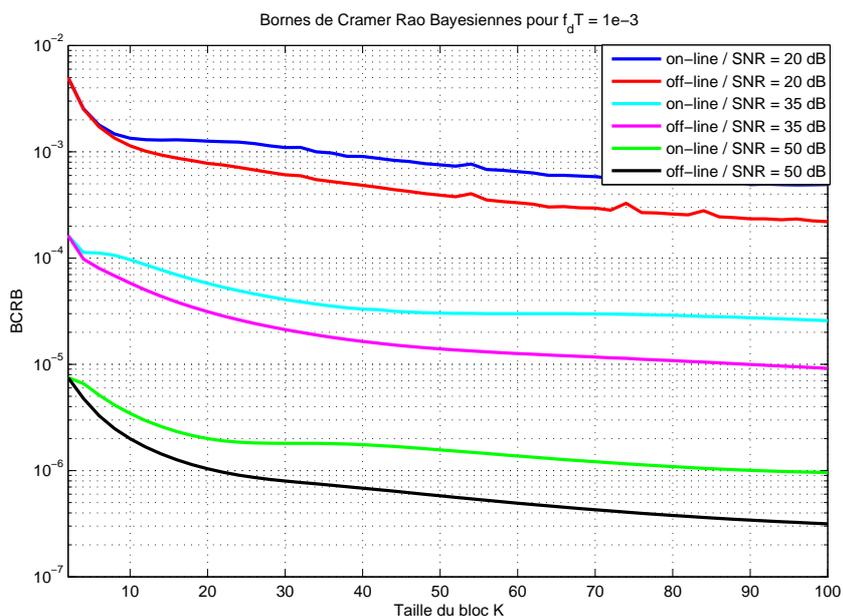


FIG. 1.6 – BCRB en fonction de la taille du bloc  $K$ , pour différents rapports Signal sur Bruit (20,35 et 50 dB),  $f_d T = 1e - 3$ , pour  $K \geq 80$  on atteint la limite de la borne.

quadratique minimale possible sur l'estimation de  $\alpha_K$  à partir de l'observation présente et 60 observations précédentes dont disons 10 n'ont plus d'intérêt car trop éloignés (faiblement corrélées). Par contre, la borne "milieu du bloc" utilise 30 observations précédentes et 30 suivantes toutes intéressantes dans cet exemple, et donc cela permet une meilleure estimation.

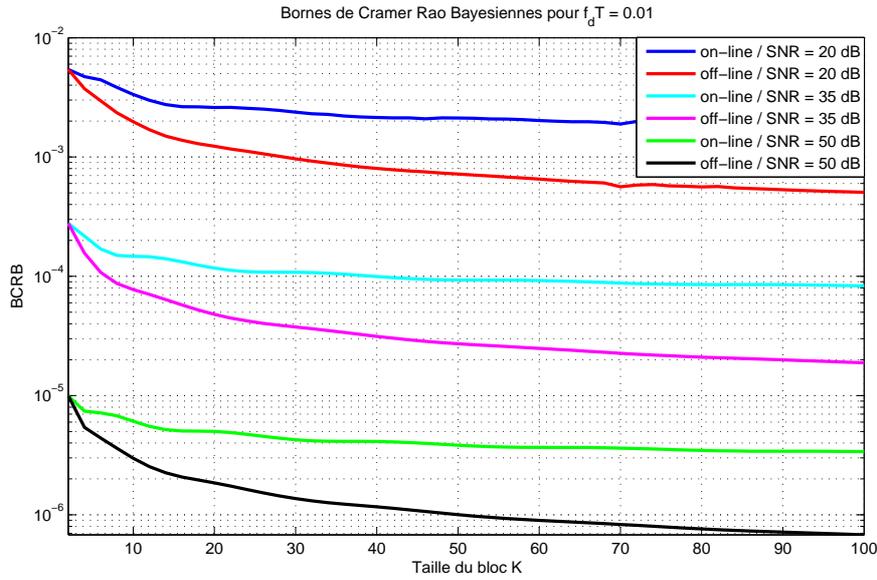


FIG. 1.7 – BCRB en fonction de la taille du bloc  $K$ , pour différents rapports Signal sur Bruit (20,35 et 50 dB),  $f_d T = 0.01$ , pour  $K \geq 60$  on atteint la limite de la borne.

2. Quand la taille du bloc  $K$  augmente, la borne sera meilleure, elle diminue, jusqu'à atteindre presque une limite. En fait, le nombre d'observations considérés pour l'estimation de  $\alpha_K$  augmente avec  $K$  et par suite l'estimation sera meilleure, et à un certain moment, l'addition d'observations précédentes mais trop éloignées (faiblement corrélées) n'apporte pas une grande amélioration.
3. Quand la valeur de  $f_d T$  augmente, on atteint à peu près la limite de la borne plus rapidement. Par exemple pour  $f_d T = 0.01$ , il suffit de prendre  $K = 40$ , alors que pour  $f_d T = 1e-3$ , on doit prendre  $K = 60$  pour atteindre presque une limite. On peut déduire qu'on a intérêt à utiliser les observations précédentes encore plus si  $f_d T$  est faible. De plus, pour un même rapport signal sur bruit, la borne est inférieure quand  $f_d T$  est inférieure.
4. Lorsque le rapport signal sur bruit SNR augmente, et donc  $\sigma_b^2$  diminue, la valeur de cette borne diminue encore. On peut vérifier cette propriété théoriquement d'après la formule (1.7). En fait  $J$  varie linéairement en fonction de  $\frac{1}{\sigma_b^2}$  et par suite avec le SNR, et donc la borne BCRB est à peu près inversement proportionnelle au SNR. Lorsque SNR augmente de 10 dB, BCRB

diminue de 10 dB.

Dans la suite de notre travail, on va prendre  $K = 80$  pour calculer les bornes car pour cette valeur de  $K$  la limite est presque atteinte quelquesoient pour toutes les valeurs du SNR et de  $f_d T$ .

# Chapitre 2

## Algorithme basé sur une approximation Auto-Régressive et filtre de Kalman

### 2.1 Estimateurs Autoregressifs

#### 2.1.1 Motivation

En vue d'utiliser un algorithme "on-line" séquentiel, on s'intéresse à une modélisation d'état du problème.

Dans cette partie, on approche le canal de Jakes avec un modèle autoregressif d'ordre  $p$  aussi appelé "Gauss-Markov Model". Et donc on suppose que  $\alpha_k \approx \alpha_k^{ARp}$  avec:

$$\alpha_k^{ARp} = \sum_{m=1}^p a_m \alpha_{k-m}^{ARp} + e_k \quad (2.1)$$

Pour simplifier l'écriture, on notera  $x_k$  au lieu de  $\alpha_k^{ARp}$ .

Où  $e_k$  est le bruit du modèle, supposé Gaussien complexe et centré, de variance  $\sigma_p^2$ .

Le choix des coefficients  $a_i$  est soumis aux deux conditions suivantes:

1. Les coefficients  $a_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, p$  sont calculés traditionnellement d'après les équations de Yule-Walker, afin de minimiser la variance de l'erreur du modèle  $\sigma_p^2$  (Voir annexe B):

$$R_{xx}[k] = \begin{cases} \sum_{m=1}^p a_m R_{xx}[k-m] & k \geq 1 \\ \sum_{m=1}^p a_m R_{xx}[-m] + \sigma_p^2 & k = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

2. Le choix standard de la littérature ([1], [9], [13]) est d'imposer aussi que la fonction d'auto-corrélation du processus AR soit :

$$R_{xx}[k] = J_0(2\pi f_d T |k|) \text{ pour } k \in \{-p, \dots, 0, 1, \dots, p\} \quad (2.3)$$

Ce choix impose donc que la fonction d'autocorrélation discrète du processus AR coïncide avec la fonction d'auto-corrélation du vrai processus  $R_{cont}(kT)$  (1.1) pour les  $2p + 1$  échantillons d'indice  $k \in \{-p, \dots, 0, 1, \dots, p\}$ .

Et donc on aura d'après la première condition (équations de Yule-Walker (2.2)):  $R_{xx}a = v$ .

D'où la solution:

$$a = R_{xx}^{-1}v \quad (2.4)$$

Où:

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} R_{xx}[0] & R_{xx}[-1] & \dots & \dots & R_{xx}[-(p-1)] \\ R_{xx}[1] & R_{xx}[0] & \dots & \dots & R_{xx}[-(p-2)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{xx}[p-1] & R_{xx}[p-2] & \dots & \dots & R_{xx}[0] \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_p \end{bmatrix}^T$$

$$v = \begin{bmatrix} R_{xx}[1] & R_{xx}[2] & \dots & \dots & R_{xx}[p] \end{bmatrix}^T$$

Et par suite

$$\sigma_p^2 = R_{xx}[0] - \sum_{k=1}^p a_k R_{xx}[k] \quad (2.5)$$

On obtient donc une modélisation du problème avec une équation d'état et une équation d'observation suivantes:

$$\begin{cases} X_k = \Phi_k X_{k-1} + \Gamma_k e_k \\ z_k = H_k X_k + b_k \end{cases}$$

avec:

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et:

$$\begin{cases} X_k = [x_k & x_{k-1} & x_{k-2} & \dots & x_{k-p+1}]^T \\ \Gamma_k = [1 & 0 & 0 & \dots & 0]^T \\ H_k = [1 & 0 & 0 & \dots & 0] \end{cases}$$

Un tel système est dit "linéaire gaussien", car les équations d'observation et d'évolution d'état sont linéaires vis à vis de l'état, et les bruits du système et de mesure, sont des bruits blancs additifs et Gaussiens (AWGN), le paramètre à estimer est  $X_k$ .

Une solution optimale au sens de l'EQM à ce problème d'estimation - dans le cas où le canal serait exactement un processus AR au lieu du processus de Jakes - peut être obtenue à l'aide du filtre de Kalman. Mais rappelons que dans notre cas le vrai canal n'est pas exactement un processus AR, et donc la solution qu'on cherchera à l'aide du filtre de Kalman ne sera pas forcément la meilleure, et que l'on pourra alors chercher d'autres solutions améliorées.

### 2.1.2 Filtrage de Kalman

On considère un système dynamique modélisé par les deux équations suivantes : une équation d'état, qui détermine l'évolution des paramètres inconnus, et une équation d'observation qui exprime le lien entre les observations et les états. Soit alors :

$$\begin{aligned}x_k &= f_k(x_{k-1}; v_{k-1}) \\y_k &= h_k(x_k; n_k)\end{aligned}$$

Le problème d'estimation optimale est celui de l'obtention récursive d'une estimée des états à partir des observations. On peut considérer trois cas différents :

- Filtrage : on veut estimer l'état à l'instant  $k$ ,  $x_k$ , à partir des observations jusqu'à cet instant,  $y_{1:k}$ .
- Lissage : on veut estimer l'état à l'instant  $k$ ,  $x_k$ , à partir d'observations passées et futures,  $y_{1:K}$ , avec  $K > k$ .
- Prédiction : on veut prédire l'état à l'instant  $k+L$ , avec  $L > 0$ ,  $x_{k+L}$ , à partir des observations jusqu'à l'instant  $k$ ,  $y_{1:k}$ .

Le cas le plus simple, est celui des systèmes linéaires Gaussiens, qui est notre cas. Dans ce cas, la solution est le filtre de Kalman (KF), largement utilisé dans de multiples applications. Le KF donne la solution optimale, pour estimer les états d'une façon récursive : prédiction des états et correction à partir de la dernière observation obtenue [11]. Le filtre de Kalman va être utilisé dans la suite. On s'intéresse donc au problème d'estimation "on-line".

Le système des équations récursives du gain et de l'erreur d'estimation, ainsi que de l'estimée sont données par [12]:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_k = P_{k|k-1} H_k^T [H_k P_{k|k-1} H_k^T + \sigma_b^2]^{-1} \\ \hat{P}_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \\ \hat{X}_{k|k} = X_{k|k-1} + K_k (z_k - H_k X_{k|k-1}) \\ P_{k+1|k} = \Phi_k \hat{P}_{k|k} \Phi_k^T + \Gamma_k \sigma_e^2 \Gamma_k^T \\ X_{k+1|k} = \Phi_k (I - K_k H_k) X_{k|k-1} + \Phi_k \hat{X}_{k|k} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

avec:

- $K_k$  le gain du filtre de Kalman à l'itération  $k$ .
- $\hat{P}_{k|k}$  la matrice de covariance de l'erreur de prédiction corrigée, à l'itération  $k$ .
- $\hat{X}_{k|k}$  le vecteur d'état estimé après correction, à l'itération  $k$ .
- $P_{k+1|k}$  la matrice de covariance de l'erreur prédite à un pas.
- $X_{k+1|k}$  le vecteur d'état prédit à un pas.
- $\Phi_k$  est la matrice de transition d'état.
- $\Gamma_k$  est la matrice de bruit.
- $H_k$  est la matrice d'observation.

L'erreur de prédiction sur l'estimation de  $X_k = tr(P_{k|k})$

### 2.1.3 Filtre de Kalman basé sur un modèle AR1

Dans cette partie, on approche le canal de Jakes avec un modèle autoregressif d'ordre 1. Et donc on suppose que  $\alpha_k \approx \alpha_k^{AR1}$  avec:

$$\alpha_k^{AR1} = a_1 \cdot \alpha_{k-1}^{AR1} + e_k \quad (2.7)$$

Pour simplifier l'écriture, on notera  $x_k$  au lieu de  $\alpha_k^{AR1}$ .

$e_k$  est le bruit du modèle de variance  $\sigma_e^2$  et le coefficient  $a_1$  est noté  $a$  dans la suite .

La solution de l'équation (2.4) est:

$$a = \frac{R_{xx}[1]}{R_{xx}[0]} \quad (2.8)$$

Et la solution de l'équation (2.5) est:

$$\sigma_e^2 = 1 - a^2 \quad (2.9)$$

Et en imposant de plus le choix standard (2.3) de la littérature, les équations amenant (2.8) et (2.9) deviennent respectivement pour un AR1:

$$a = J_0(2\pi f_d T) \quad (2.10)$$

et:

$$\sigma_e^2 = 1 - (J_0(2\pi f_d T))^2 \quad (2.11)$$

Notons que pour les valeurs de  $f_d T$  considérées,  $a$  est proche de 1 d'après le choix (2.10), et  $\sigma_e^2$  proche de 0. Le tableau suivant illustre ces valeurs.

| $f_d T$      | $10^{-4}$       | $10^{-3}$       | $10^{-2}$       | $10^{-1}$  |
|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------|
| $a$          | 0.99999990      | 0.99999013      | 0.99901328      | 0.90371264 |
| $\sigma_e^2$ | $0.19739207e-6$ | $0.19739063e-4$ | $0.19724603e-2$ | 0.18330346 |

TAB. 2.1 – Valeurs de  $a$  et de  $\sigma_e^2$  pour les  $f_d T$  concernées

On obtient donc une modélisation du problème avec une équation d'état et une équation d'observation suivantes: 
$$\begin{cases} x_k = ax_{k-1} + e_k \\ z_k = x_k + b_k \end{cases}$$

Le paramètre à estimer est  $x_k$ .

Les équations récursives du gain et de l'erreur d'estimation, ainsi que de l'estimée sont données par:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_k = P_{k|k-1} / [P_{k|k-1} + \sigma_b^2] \\ \hat{P}_{k|k} = (1 - K_k) P_{k|k-1} \\ \hat{x}_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k (z_k - \hat{x}_{k|k-1}) \\ P_{k+1|k} = a^2 \hat{P}_{k|k} + \sigma_e^2 \\ x_{k+1|k} = ax_{k|k} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

#### 2.1.4 Filtre de Kalman basé sur un modèle AR2

Dans cette partie, on approche le canal de Jakes avec un modèle autoregressif d'ordre 2. Et donc on suppose que  $\alpha_k \approx \alpha_k^{AR2}$  avec:

$$\alpha_k^{AR2} = a_1 \alpha_{k-1}^{AR2} + a_2 \alpha_{k-2}^{AR2} + e_k \quad (2.13)$$

Où  $e_k$  est le bruit du modèle supposé gaussien et  $a_1$  et  $a_2$  sont calculés à partir du système de Yule-Walker. Pour simplifier l'écriture, on notera  $x_k$  au lieu de  $\alpha_k^{AR2}$ .

Et donc le système d'équations de Yule-Walker pour un système Autorégressif d'ordre 2 devient (voir l'équation (2.4)):

$$\begin{bmatrix} R_{xx}[0] & R_{xx}[-1] \\ R_{xx}[1] & R_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx}[1] \\ R_{xx}[2] \end{bmatrix}$$

La solution de ce système est alors:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{R_{xx}[1] \cdot [R_{xx}[0] - R_{xx}[2]]}{R_{xx}^2[0] - R_{xx}^2[1]} \\ a_2 = \frac{R_{xx}[0] \cdot R_{xx}[2] - R_{xx}^2[1]}{R_{xx}^2[0] - R_{xx}^2[1]} \end{cases} \quad (2.14)$$

On a dans ce cas la variance de l'erreur du modèle  $\sigma_e^2$  donnée par (voir l'équation(2.5)):

$$\sigma_e^2 = R_{xx}[0] - a_1 R_{xx}[1] - a_2 R_{xx}[2] \quad (2.15)$$

Et en imposant de plus le choix standard (2.3) de la littérature, les équations (2.14) et (2.15) deviennent respectivement pour un AR2:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{J_0(2\pi f_d T) \cdot [1 - J_0(4\pi f_d T)]}{1 - (J_0(2\pi f_d T))^2} \\ a_2 = \frac{J_0(4\pi f_d T) - (J_0(2\pi f_d T))^2}{1 - (J_0(2\pi f_d T))^2} \end{cases}$$

Et:

$$\sigma_e^2 = 1 - a_1 J_0(2\pi f_d T) - a_2 J_0(4\pi f_d T)$$

La solution à ce problème d'estimation consiste à utiliser le filtre de Kalman avec l'équation d'état et l'équation d'observation suivantes:

avec:

$$\begin{cases} X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{bmatrix} \\ \Phi_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Gamma_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Les solutions récursives sont alors les mêmes que le système (2.6).

## 2.2 Résultats de simulations et interprétations

L'erreur quadratique moyenne mesurée est :

$$EQM = \frac{1}{K} \sum_{n=1}^K |\hat{\alpha}_n - \alpha_n|^2$$

La taille du bloc est de  $K = 80000$  échantillons. Mais dans le calcul des bornes, on s'est contenté de prendre  $K = 80$  car c'était suffisant pour nous comme on l'a vu dans les figures (FIG. 1.5), (FIG. 1.6) et (FIG. 1.7).

Les figures (FIG. 2.1) et (FIG. 2.3) illustrent des trajectoires d'évolution de  $\alpha$  et de ses estimations  $\alpha^{AR1}$  et  $\alpha^{AR2}$  en fonction du temps pour différentes valeurs de SNR et de  $f_d T$ . On remarque que lorsque  $f_d T$  diminue, ((FIG. 2.1) et (FIG. 2.2)), l'estimation ne semble pas s'améliorer, au contraire. Par contre, en augmentant SNR ((FIG. 2.3) et (FIG. 2.2)) l'estimation s'améliore logiquement.

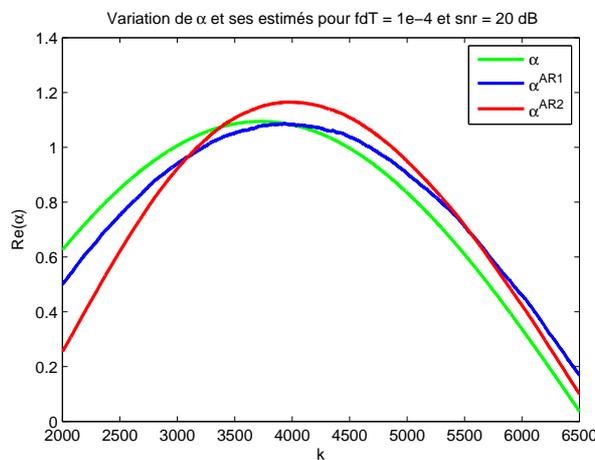


FIG. 2.1 – Exemple d'évolution de  $\alpha$  et estimation en présence de bruit à l'aide des deux modèles AR1 et AR2 -  $f_d T = 10^{-4}$  et  $SNR = 20dB$

### 2.2.1 EQM en fonction de la fréquence Doppler

Les simulations sur Matlab ont donné la figure (FIG. 2.4) des erreurs quadratiques moyennes (EQM) en fonction de la fréquence Doppler  $f_d T$  pour  $SNR = 30dB$ .

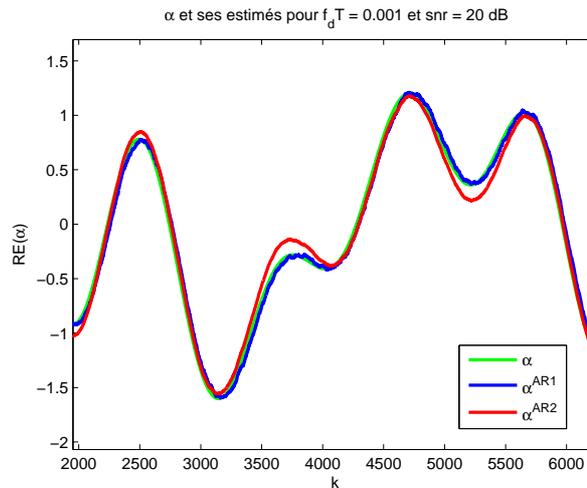


FIG. 2.2 – Exemple d'évolution de  $\alpha$  et estimation en présence de bruit à l'aide des deux modèles AR1 et AR2 -  $f_d T = 10^{-3}$  et  $SNR = 20dB$

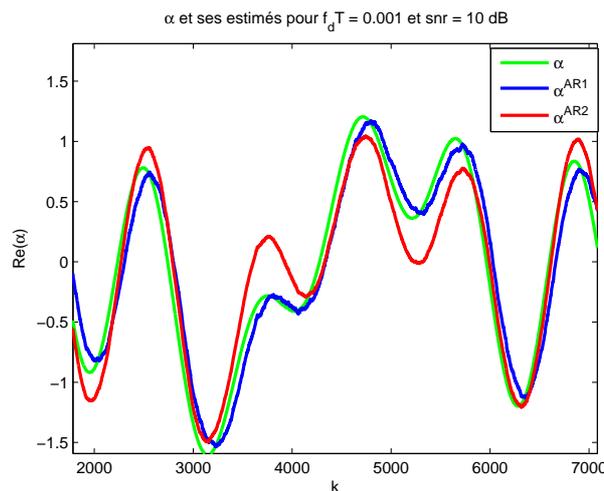


FIG. 2.3 – Exemple d'évolution de  $\alpha$  et estimation en présence de bruit à l'aide des deux modèles AR1 et AR2 -  $f_d T = 10^{-3}$  et  $SNR = 10dB$

L'analyse peut être divisée en deux parties:

1. A faibles fréquences Doppler ( $f_d T \leq 10^{-2}$ ): la modélisation avec un modèle AR1 est meilleure que celle du modèle AR2, mais nous sommes toujours loin de la borne de Cramer Rao.
2. A hautes fréquences Doppler: Le modèle AR2 ne convient pas plus que le modèle AR1 qui est devenu meilleur. Mais en fait, nous sommes plus proches de la borne de Cramer Rao qui logiquement a augmenté avec  $f_d T$ .

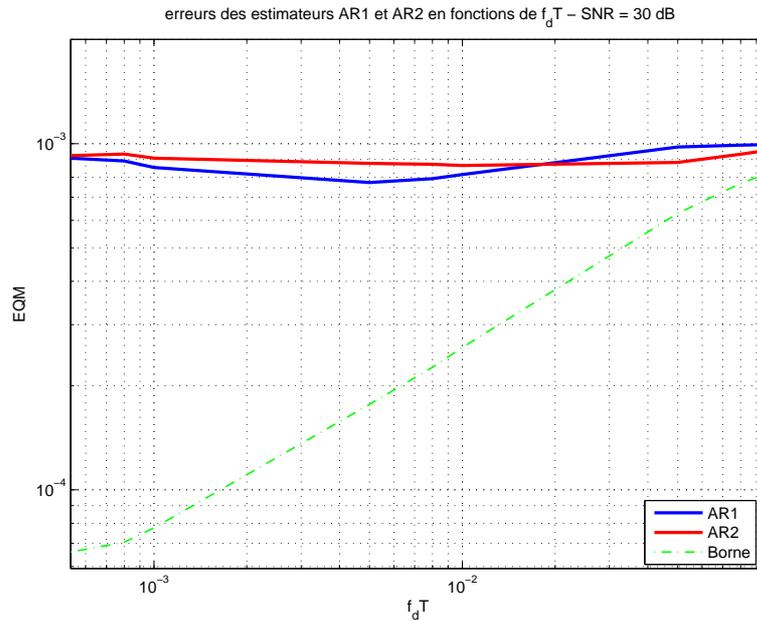


FIG. 2.4 – BCRB et Erreur quadratique donnée par l’algorithme AR1 et AR2 en fonction de la fréquence Doppler normalisée  $f_d T$  comprise entre  $5 \cdot 10^{-4}$  et  $10^{-1}$  pour  $SNR = 30dB$ .

### 2.2.2 EQM en fonction du rapport signal sur bruit

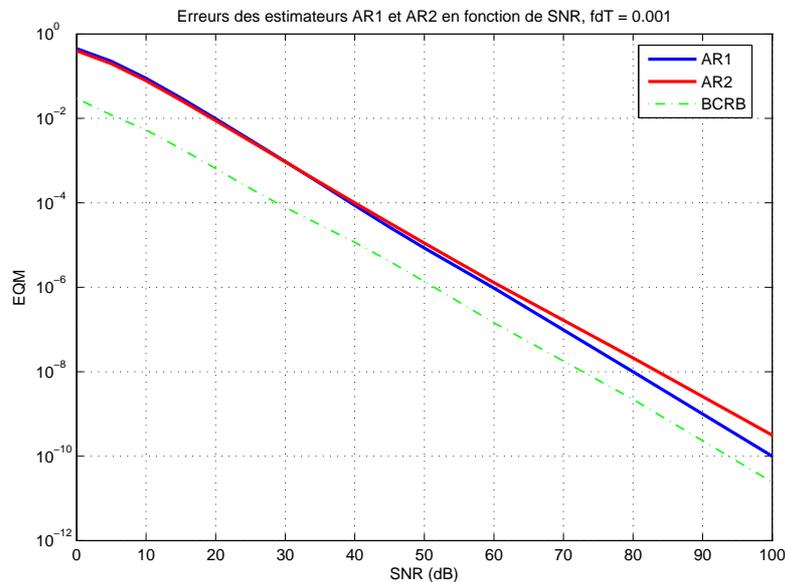


FIG. 2.5 – BCRB et Erreur quadratique donnée par l’algorithme AR1 et AR2 en fonction du rapport SNR pour  $f_d T = 10^{-3}$ .

Les simulations sur Matlab ont donné la figure (FIG. 2.5) des erreurs quadratiques moyennes

(EQM) en fonction de SNR pour  $f_d T = 10^{-3}$ .

L'analyse peut encore être divisée en deux parties:

1. A faible SNR ((FIG. 2.6) - partie a): Dans ce cas la modélisation avec un modèle AR2 est meilleure que celle du modèle AR1, mais nous sommes toujours loin de la borne de Cramer Rao.
2. A haut SNR ((FIG. 2.6) - partie b): Le modèle AR2 ne convient plus, et le modèle AR1 devient meilleur. Nous sommes plus proches de la borne de Cramer Rao.

La figure (FIG. 2.6) montre en détails les erreurs pour les deux cas: faible et haut SNR.

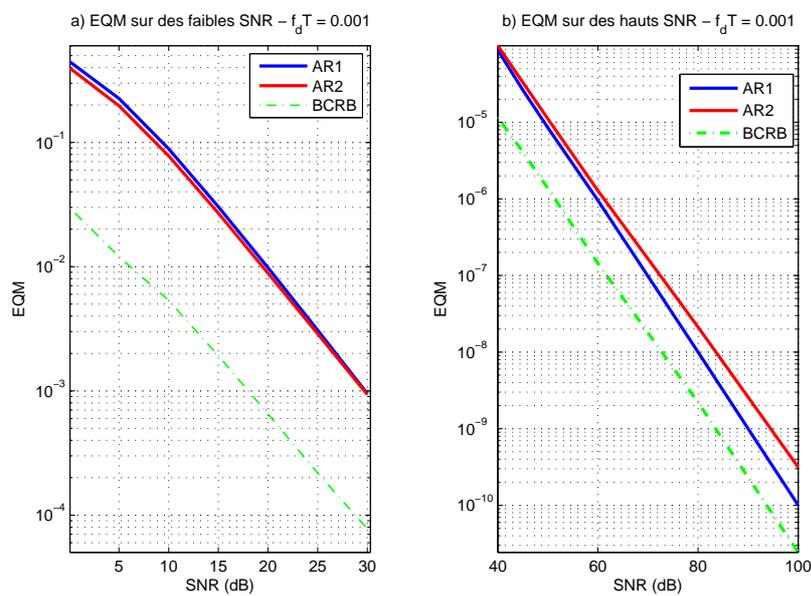


FIG. 2.6 – BCRB et Erreur quadratique donnée par l'algorithme AR1 et AR2 en fonction du rapport SNR,  $f_d T = 0.001$  dans les deux cas : a) SNR faible entre 0 et 30 dB et b) haut SNR entre 50 et 100 dB

On remarque que le modèle AR2 ne donne pas de très bons résultats. Ceci est dû à des problèmes d'inversion de la matrice  $R_{xx}$  dans le système de Yule-Walker (équation 2.4), où cette matrice peut être non régulière, surtout à faibles valeurs de  $f_d T$ , car dans ce cas la fonction  $J_0(\cdot)$  est très serrée et donc  $R_{xx}(0)$  et  $R_{xx}(1)$  sont très proches de 1. Une solution utilisée dans la littérature, consiste à ajouter un  $\varepsilon$  sur la diagonale de  $R_{xx}$  avant de l'inverser dans l'équation (2.4).

## 2.3 Analyse de l'erreur

### 2.3.1 Motivation

On a vu que l'EQM dans les deux cas des modèles AR1 et AR2 est loin de la borne pour de faibles valeurs de  $f_d T$ . Il paraît naturel que la modélisation AR- $p$  de la littérature convienne mieux (pour de faibles valeurs de  $p$ ) pour des valeurs relativement grandes de  $f_d T$ , étant donnée la forme de la fonction d'autocorrélation résultant de la condition de l'équation (2.3). Ceci est clair d'après les figures ((FIG. 2.7) et (FIG. 2.8)) qui comparent, respectivement pour  $f_d T = 10^{-1}$  et pour  $f_d T = 10^{-3}$ , la fonction d'autocorrélation du processus AR pour  $p = 1, 2, 3$ , avec la fonction d'autocorrélation du vrai processus de Jakes (fonction de Bessel). Néanmoins, avant de chercher des solutions d'amélioration, il paraît opportun d'analyser théoriquement pour le modèle AR1 (le plus simple et le plus utilisé), les différentes composantes de cette erreur. On cherchera en particulier les expressions mathématiques de l'erreur en fonction des paramètres d'intérêt ( $f_d T$ , SNR et du paramètre  $a$  du modèle AR1). On s'intéressera au cas des faibles SNR (entre  $0dB$  et  $30dB$ ) et aux faibles fréquences Doppler (entre  $10^{-4}$  et  $10^{-2}$ ). Dans un premier temps, on calcule le gain asymptotique, puis on cherche à séparer l'erreur en deux parties: l'une provenant de la dynamique du modèle, et l'autre du bruit d'observation.

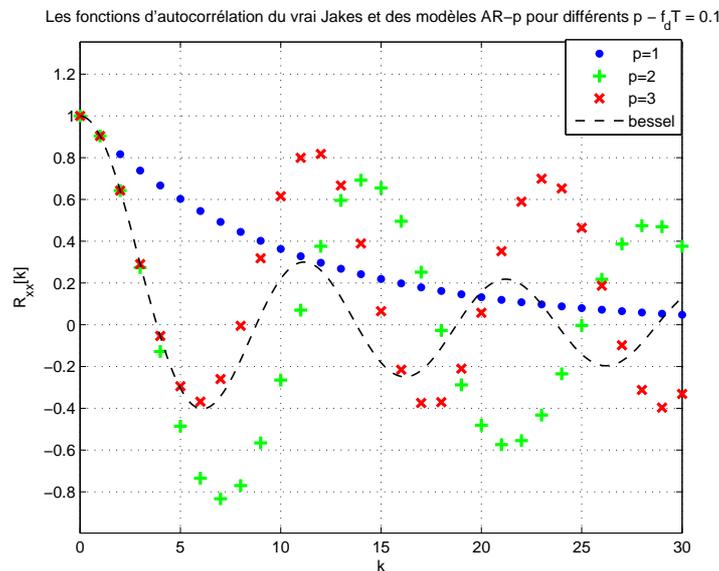


FIG. 2.7 – Les fonctions d'autocorrélation du vrai Jakes et des modèles AR- $p$  pour différents  $p - f_d T = 0.1$

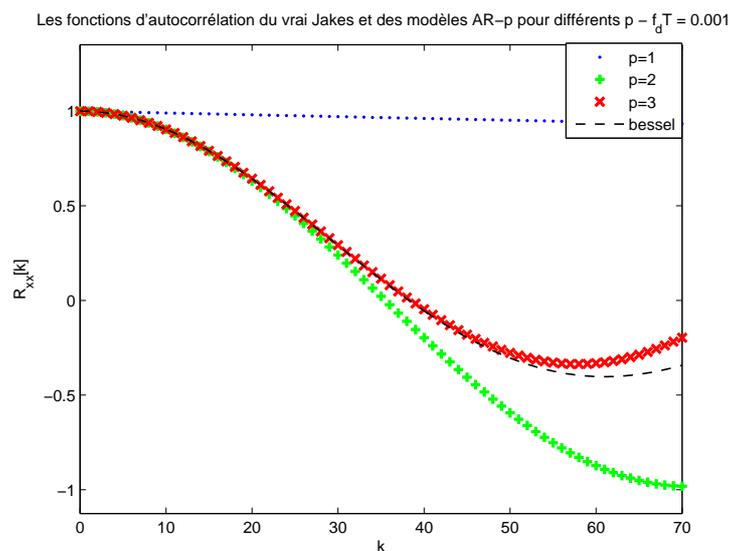


FIG. 2.8 – Les fonctions d'autocorrélation du vrai Jakes et des modèles AR-p pour différents p -  $f_d T = 0.001$

### 2.3.2 Gain asymptotique du modèle AR1

Quand on parle de filtre de Kalman, on pense toujours à chercher le gain asymptotique et la variance de l'erreur d'estimation asymptotique.

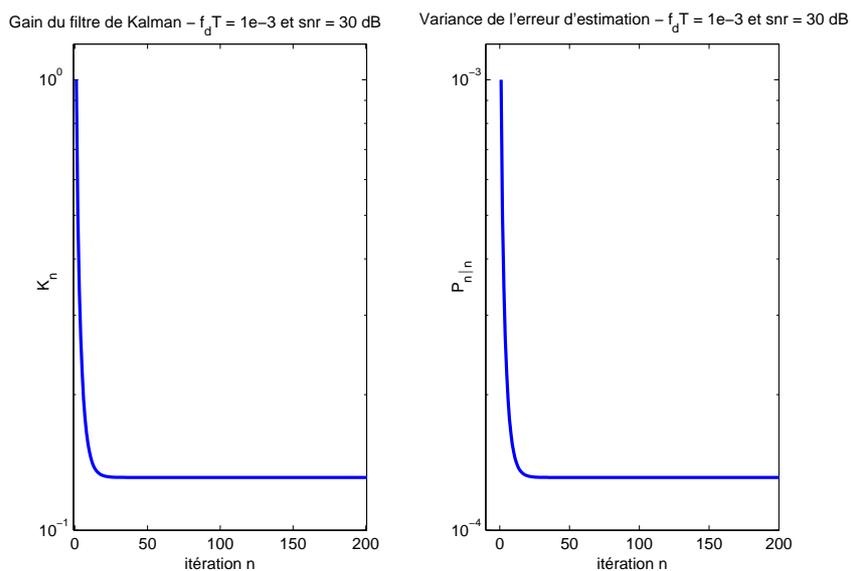


FIG. 2.9 – Une réalisation du filtre de Kalman sur le modèle AR1 montrant le gain et la variance de l'erreur d'estimation,  $f_d T = 0.001$  et  $SNR = 30$  dB

Le gain asymptotique est le gain du filtre de Kalman  $K_n$ , et l'erreur d'estimation asymptotique est l'erreur quadratique moyenne entre la vraie valeur du vecteur d'état à estimer  $X_n$  (qui est dans ce cas  $\alpha_n^{AR1}$ ), et son estimation  $\hat{X}_{n|n}$  (ou encore  $\hat{\alpha}_n^{AR1}$ ) lorsque  $n \geq N_0$  (avec  $N_0$  est le début du régime asymptotique).

La figure (FIG. 2.9) montre une courbe d'exemple sur le gain et l'erreur d'estimation dans le cas du modèle AR1. On remarque bien que le régime asymptotique est atteint très rapidement.

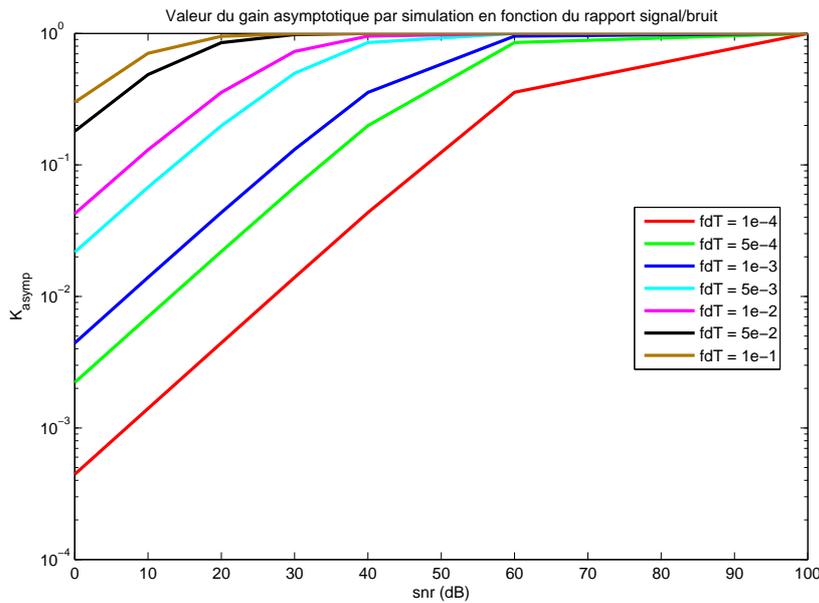


FIG. 2.10 – Valeurs par simulation du gain asymptotique du filtre de Kalman basé sur un modèle AR1 en fonction de SNR

Les deux figures (FIG. 2.10) et (FIG. 2.11) montrent le gain asymptotique du modèle AR1 en échelle logarithmique en fonction de SNR et de  $f_d T$  respectivement. Dans les deux cas, on a d'abord cherché le gain asymptotique par simulation. On remarque qu'il est linéaire en fonction de SNR et en fonction de  $\log_{10}(f_d T)$  pour les valeurs faibles de ces deux. Il nous faut maintenant de justifier cela théoriquement.

Le calcul du gain asymptotique qui est plus compliqué dans le cas du modèle AR2, est simple dans le cas de modèle AR1. On aboutit alors aux résultats théoriques suivants: (On s'est basé sur un raisonnement par l'absurde en supposant qu'en régime asymptotique,  $K_n = K_{n+1} = \bar{K}$ ,  $\hat{P}_{n|n} = \hat{P}_{n+1|n+1} = \bar{P}$ , et  $P_{n|n-1} = P_{n+1|n} = \bar{P}$ , et on a appliqué ceci sur les équations récursives du filtre de Kalman. Voir Annexe C pour plus de détails)

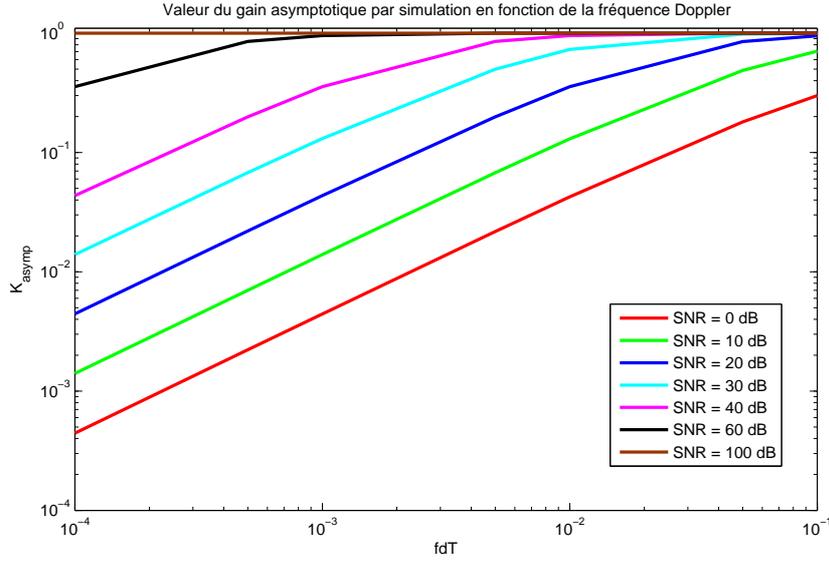


FIG. 2.11 – Valeurs par simulation du gain asymptotique du filtre de Kalman basé sur un modèle *AR1* en fonction de  $f_d T$

1. Pour l'erreur asymptotique, on obtient:

$$\bar{P} = \frac{\sigma_b^2(a^2 - 1) - \sigma_e^2 + \sqrt{\Delta}}{2a^2} \quad (2.16)$$

$$\text{Avec: } \begin{cases} a &= J_0(2\pi f_d T) \\ \sigma_e^2 &= 1 - a^2 \\ \Delta &= (\sigma_b^2 + \sigma_e^2 - a^2 \sigma_b^2)^2 + 4a^2 \sigma_b^2 \sigma_e^2 \\ &= (\sigma_e^2 + \sigma_e^2 \sigma_b^2)^2 + 4\sigma_b^2 \sigma_e^2 - 4\sigma_b^2 \sigma_e^4 \end{cases}$$

2. Le gain asymptotique est par suite déduit:

$$\bar{K} = K_{asympt} = \frac{a^2 \bar{P} + \sigma_e^2}{a^2 \bar{P} + \sigma_e^2 + \sigma_b^2} \quad (2.17)$$

Dans le cas de faible SNR, et à faible fréquence Doppler,  $\sigma_e^2 \ll \sigma_e \ll \sigma_b \leq 1$ .

Par suite:

$$\begin{aligned} \Delta &\approx (\sigma_e^2)^2 + 4\sigma_b^2 \sigma_e^2 \approx 4\sigma_b^2 \sigma_e^2 \\ a^2 \bar{P} &= \frac{-\sigma_e^2(1 + \sigma_b^2) + \sqrt{\Delta}}{2} \approx \frac{-\sigma_e^2 + 2\sigma_b \sigma_e}{2} \approx \sigma_b \sigma_e \end{aligned}$$

Et donc, une approximation de l'équation (2.17) devient alors:

$$K_{asympt} \approx \frac{\sigma_b \sigma_e + \sigma_e^2}{\sigma_b \sigma_e + \sigma_b^2 + \sigma_e^2} \approx \frac{\sigma_b \sigma_e}{\sigma_b^2} = \sqrt{\frac{\sigma_e^2}{\sigma_b^2}} \quad (2.18)$$

En échelle logarithmique, on a:

$$\log_{10}(K_{asympt}) = \frac{1}{2} [\log_{10}(\sigma_e^2) - \log_{10}(\sigma_b^2)] = \frac{1}{2} \log_{10}(\sigma_e^2) + \frac{SNR}{20} \quad (2.19)$$

avec  $SNR = 10 \log_{10} \frac{1}{\sigma_b^2}$  (en dB)

Rappelons que [15]:

$$\sigma_e^2 = 1 - a^2 = 1 - [J_0(2\pi f_d T)]^2 = 1 - [1 - (\pi f_d T)^2 + \frac{(\pi f_d T)^4}{2} - \dots]^2 \approx 2(\pi f_d T)^2 \quad (2.20)$$

et par suite

$$\frac{1}{2} \log_{10}(\sigma_e^2) \approx \log_{10}(2\pi f_d T) = \log_{10}(f_d T) + Cte$$

Donc les approximations faites sont encore linéaires.

Pour vérifier, on peut chercher le gain asymptotique théoriquement, et par simulation. La figure

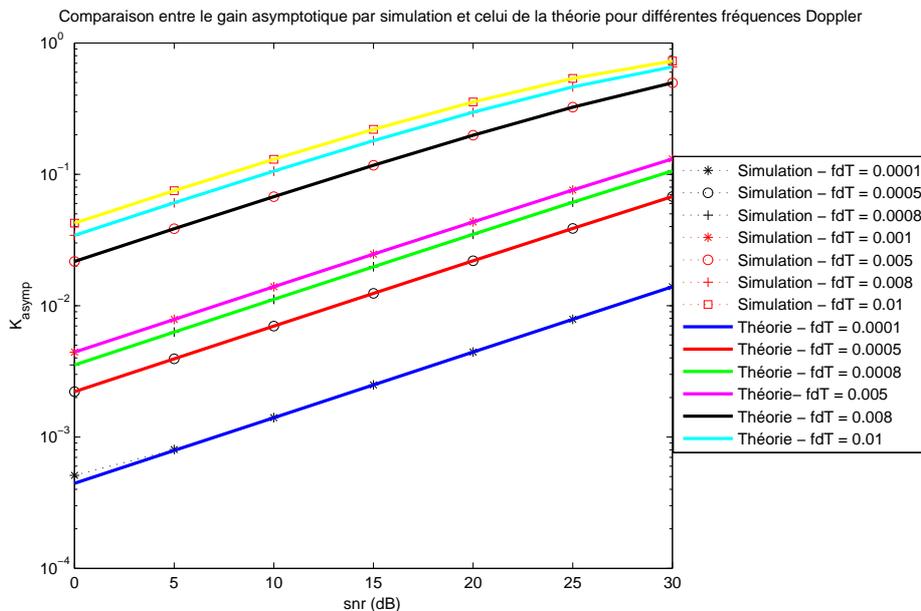


FIG. 2.12 – Gain Asymptotique (simulation et théorie (éq (2.18))) pour filtre de Kalman basé sur un modèle AR1 en fonction de SNR

(FIG. 2.12) valide l'équation (2.18). Elle montre que les résultats théoriques et les résultats par simulation sont quasiment les mêmes. Dans la suite, on prendra alors le gain asymptotique donné par l'équation (2.18), et travaillera à faibles SNR et faibles fréquences Doppler (scénario où on est le plus éloigné de la borne).

### 2.3.3 Erreur EQM

Le modèle traité est très simple, on a l'équation d'observation suivante:

$$y_k = \alpha_k + b_k \quad (2.21)$$

Travaillons dans le régime asymptotique. La solution est donnée d'après la 3<sup>eme</sup> et la 5<sup>eme</sup> équation du système d'équations (2.12) du filtre de Kalman:

$$\hat{\alpha}_k = \alpha_{k|k-1} + K_{asympt}(y_k - a\hat{\alpha}_{k-1}) = a\hat{\alpha}_{k-1} + K_{asympt}(y_k - a\hat{\alpha}_{k-1}) \quad (2.22)$$

Passons aux transformées en  $z$  :

$$\Rightarrow \hat{\alpha}(z) = \left[ \frac{K_{asympt}}{1 - a(1 - K_{asympt})z^{-1}} \right] [\alpha(z) + B(z)]$$

Posons:

$$T(z) = \frac{K_{asympt}}{1 - a(1 - K_{asympt})z^{-1}} \quad (2.23)$$

$T(z)$  est la fonction de transfert entre le vrai paramètre bruité et le paramètre estimé.

On a:

$$\Rightarrow \alpha(z) - \hat{\alpha}(z) = \varepsilon(z) = [1 - T(z)]\alpha(z) - T(z)B(z)$$

Et on pose:

$$L(z) = 1 - T(z) = \frac{(z - a)(1 - K_{asympt})}{z - a(1 - K_{asympt})} \quad (2.24)$$

$L(z)$  est la fonction de transfert "erreur".

L'erreur d'estimation résulte donc d'un filtrage passe-bas (voir(FIG. 2.14)) du bruit d'observation par la fonction de transfert  $T(z)$ , et d'un filtrage passe-haut (voir (FIG. 2.13)) du processus aléatoire  $\alpha$  par la fonction  $L(z) = 1 - T(z)$ .

En observant le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $L(z)$ , on remarque que dans la plage d'intérêt des fréquences (fréquences comprises entre 0 et  $f_d$ ), elle présente une pente de  $+20dB/dec$  et donc,  $|L(e^{-j2\pi fT})|^2$  est de la forme  $|A.f^2|$ .

Notons que dans le cas de  $f_d T = 10^{-2}$ , on va négliger la partie constante

$$\left( |L(z=1)|^2 = \left| \frac{(1-a)(1-K_{asympt})}{1-a(1-K_{asympt})} \right|^2 \approx \left| \frac{(a-1)}{a} \right|^2 \right)$$

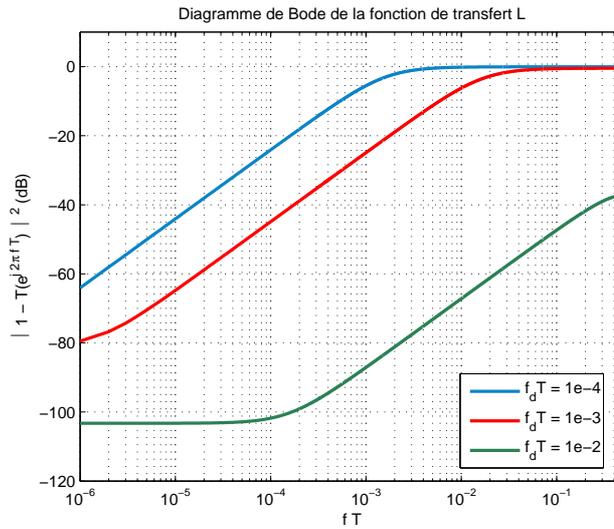


FIG. 2.13 –  $|L(e^{j2\pi f T})|^2 = |1 - T(e^{j2\pi f T})|^2$  en fonction de  $f$  pour différentes valeurs de  $f_d T$

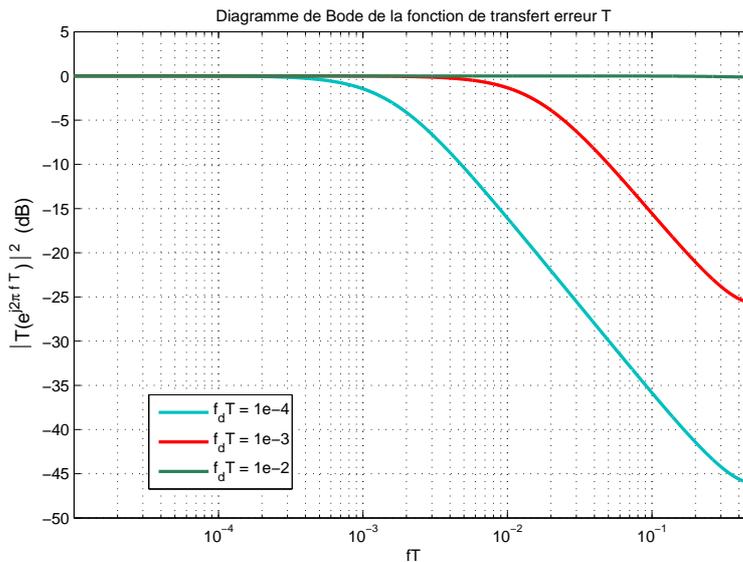


FIG. 2.14 –  $|T(e^{j2\pi f T})|^2$  en fonction de  $f_d T$  pour différentes valeurs de  $f_d T$

qui vaut presque  $-100dB$ , surtout parce qu'elle correspond à 1% de l'intervalle à intégrer.

Théoriquement, pour des faibles fréquences,  $z = e^{j2\pi f T} = e^{pT} \approx 1 + pT$  où  $p = j2\pi f$ .

On a donc  $|L(e^{-j2\pi f T})|^2 = \frac{(1 - K_{asympt})^2 \cdot |1 - a + pT|^2}{|1 + pT - a + aK_{asympt}|^2}$ .

Or pour des faibles fréquences :  $a \approx 1$  et  $1 + pT \approx 1$ , et donc :

$$|L(e^{-j2\pi fT})|^2 \approx \frac{(1 - K_{asymp})^2}{K_{asymp}^2} |pT|^2$$

Avec  $K_{asymp} \approx \sqrt{\frac{\sigma_e^2}{\sigma_b^2}}$  (d'après l'équation 2.17).

D'où

$$\frac{(1 - K_{asymp})^2}{K_{asymp}^2} \approx 1 + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2} - 2\sqrt{\frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2}} \approx \frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2}$$

car  $\sigma_e^2 \ll \sqrt{\sigma_e^2} \ll 1$ .

Et donc on déduit la formule intéressante:

$$|L(e^{-j2\pi fT})|^2 \approx \frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2} \cdot (4\pi^2 T^2) \cdot f^2 \quad (2.25)$$

La valeur de l'erreur quadratique moyenne peut être calculée à l'aide de ces deux fonctions de transfert:

$$\begin{aligned} EQM \stackrel{\text{def}}{=} E [|\alpha - \hat{\alpha}|^2] = \sigma_\varepsilon^2 &= \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} |L(e^{j2\pi fT})|^2 \cdot \Gamma_\alpha(f) df + \sigma_b^2 \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} |T(e^{j2\pi fT})|^2 df \\ &= \sigma_{mod}^2 + \sigma_{bruit}^2 \\ &= EQM1 + EQM2 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \Gamma_\alpha(f) = \frac{\sigma_\alpha^2}{\pi f_d \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} \text{sur} ] - f_d; f_d [$$

- $EQM1$  représente la variance d'erreur dynamique (due aux variations de  $\alpha$ ).
- $EQM2$  représente la variance d'erreur statique (due au bruit additif).

Les figures (FIG. 2.15) et (FIG. 2.16) montrent comment varient les valeurs de  $|L(e^{j2\pi fT})|^2 \cdot \Gamma_\alpha(f)$  et  $\sigma_b^2 \cdot |T(e^{j2\pi fT})|^2$  respectivement, en augmentant le rapport SNR et en augmentant  $f_d T$ . En fait  $EQM1$  et  $EQM2$  dépendent de  $K_{asymp}$  et donc de SNR et de  $a$  ou implicitement  $f_d T$ . Pour chercher ces courbes, on a pris  $a = J_0(2\pi f_d T)$ . Pour déduire  $EQM1$  et  $EQM2$ , il suffit de calculer l'intégrale de ces courbes sur toutes les fréquences normalisées  $fT$  allant de 0 à 0.5. Lorsque le rapport signal sur bruit augmente (passage de la courbe rouge à la courbe bleue), on remarque que  $EQM1$  et  $EQM2$  diminuent, mais lorsqu'on garde le même SNR, et on augmente  $f_d T$ , (passage de la courbe bleue à la courbe verte), on remarque que  $EQM1$  diminue et  $EQM2$  augmente. (voir encore figure (FIG. 2.17))

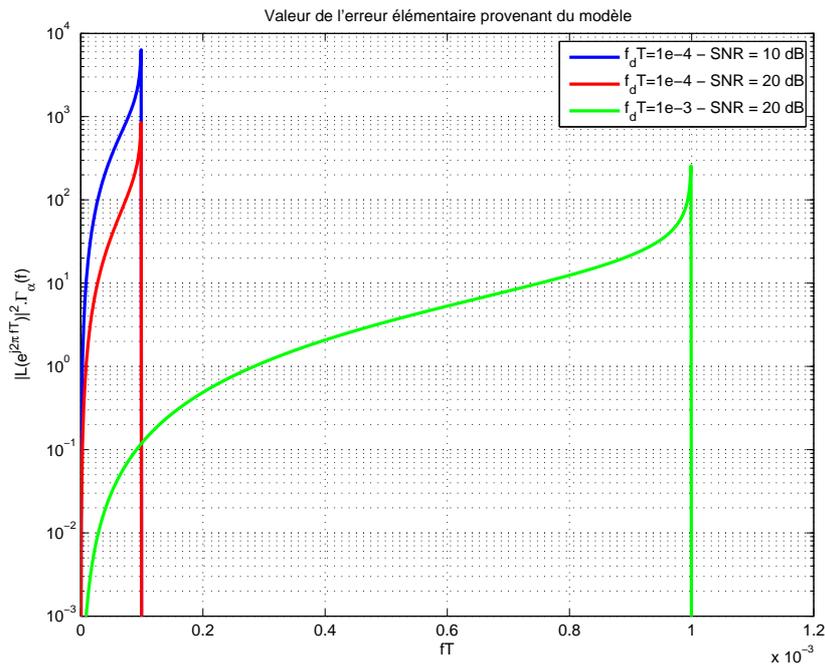


FIG. 2.15 – Variation de l'erreur élémentaire  $|L(e^{j2\pi fT})|^2 \cdot \Gamma_\alpha(f)$  en variant SNR et  $f_d T$

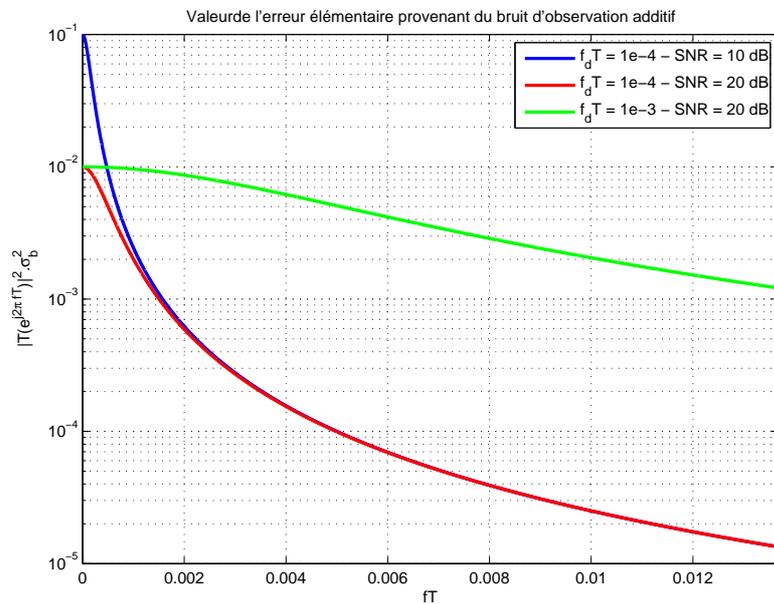


FIG. 2.16 – Variation de l'erreur élémentaire  $|T(e^{j2\pi fT})|^2 \cdot \sigma_b^2$  en variant SNR et  $f_d T$

Observons les variations de  $EQM1$  et  $EQM2$  en fonction de SNR et de  $f_d T$ . La figure (FIG. 2.17)

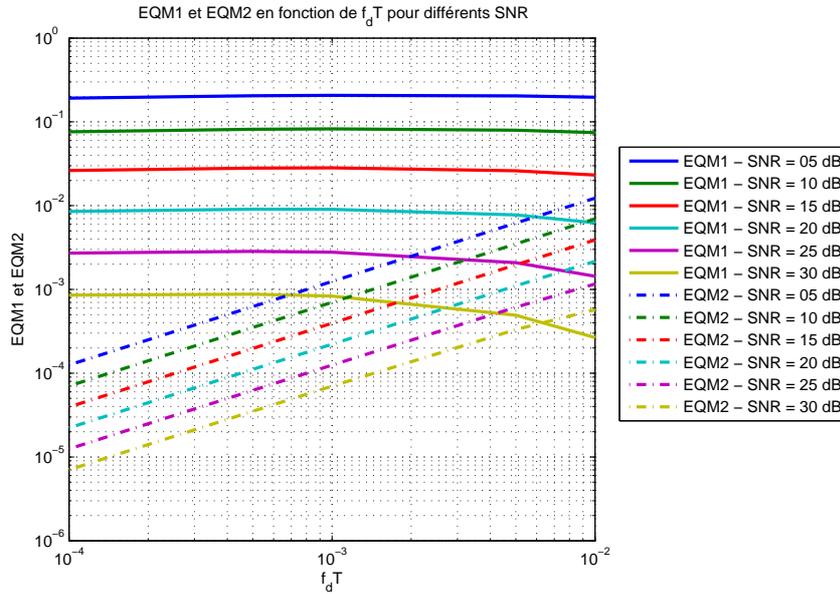


FIG. 2.17 – Variation de  $EQM1$  et  $EQM2$  en fonction de SNR, en variant  $f_d T$

illustre ces variations:

- On observe que la valeur de  $EQM1$  est quasiment constante par rapport à  $f_d T$ , par contre,  $EQM2$  augmente avec  $f_d T$  (on a une pente de  $+10dB/dec$ ).
- Les valeurs de  $EQM1$  et  $EQM2$  dépendent de SNR, quand SNR augmente, ces deux valeurs diminuent.
- $EQM1 \gg EQM2$ , pour des faibles  $f_d T$ , surtout pour des faibles SNR, et donc l'erreur est principalement due au modèle AR1 utilisé et non pas au bruit d'observation, car le filtre de Kalman a relativement "éliminé" ce dernier.

On peut approximer les deux valeurs de  $EQM1$  et  $EQM2$ . Pour cela on aura recours aux valeurs de  $|L(e^{j2\pi f T})|^2$  et  $|T(e^{j2\pi f T})|^2$ . On approche donc les valeurs de  $EQM1$  et  $EQM2$ :

- Pour  $EQM1$ , d'après l'équation (2.25), on aura la formule de  $EQM1$  en fonction du paramètre  $a$  du modèle AR1 (2.7)(voir annexe D):

$$EQM1 \approx (4\pi^2 T^2) \frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2} \left[ \frac{\sigma_\alpha^2}{\pi f_d} \int_{-f_d}^{f_d} \frac{f^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} df \right] \approx \frac{2(\pi f_d T)^2 \sigma_b^2}{1 - a^2} \quad (2.26)$$

Et en posant le choix standard de  $a$  de l'équation(2.10), d'après(2.20), on aura:

$$EQM1 \approx \sigma_b^2 \quad (2.27)$$

Ce résultat est en accord avec (FIG. 2.17).

– Pour  $EQM2$ , on sait que la bande équivalente de bruit  $BL$  du filtre  $T(z)$  vaut (voir annexe D):

$$BL = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} |T(e^{j2\pi fT})|^2 df \approx \frac{1}{2T} \sqrt{\frac{\sigma_e^2}{\sigma_b^2}}$$

Et on a :

$$EQM2 = \sigma_b^2 . T . BL$$

On aura donc, en fonction de  $a$ :

$$EQM2 \approx \frac{\sqrt{(1-a^2)}\sigma_b^2}{2} \quad (2.28)$$

De même, en supposant prendre le choix standard de  $a$  donné par l'équation (2.10), d'après (2.20), on aura:

$$EQM2 \approx \frac{\sqrt{\sigma_e^2 \sigma_b^2}}{2} \approx \frac{\pi f_d T \sigma_b}{\sqrt{2}} \quad (2.29)$$

Ce résultat est en accord avec (FIG. 2.17) où  $EQM2$  croît linéairement avec  $f_d T$ .

Pour vérifier la théorie, on compare l'erreur quadratique moyenne donnée par simulation, l' $EQM$  calculée par théorie (calcul ainsi que ces approximations). Les résultats obtenus sont illustrés sur la figure (FIG. 2.18).

Pour des valeurs de SNR très faibles et pour  $f_d T$  encore très faible, l'approximation est bonne.

## 2.4 Proposition d'optimisation

Cette partie présente une proposition de choix pour le paramètre du modèle autorégressif du premier ordre, différent de celui généralement retenu dans la littérature. Cette partie méritera d'être développée et approfondie ultérieurement, mais elle permet déjà de montrer une piste intéressante.

D'après les équations (2.26) et (2.28), on a:

$$EQM(a) = \frac{A}{1-a^2} + B \cdot \sqrt{1-a^2} \quad (2.30)$$

avec:

$$A = 2(\pi f_d T)^2 \sigma_b^2 \quad (2.31)$$

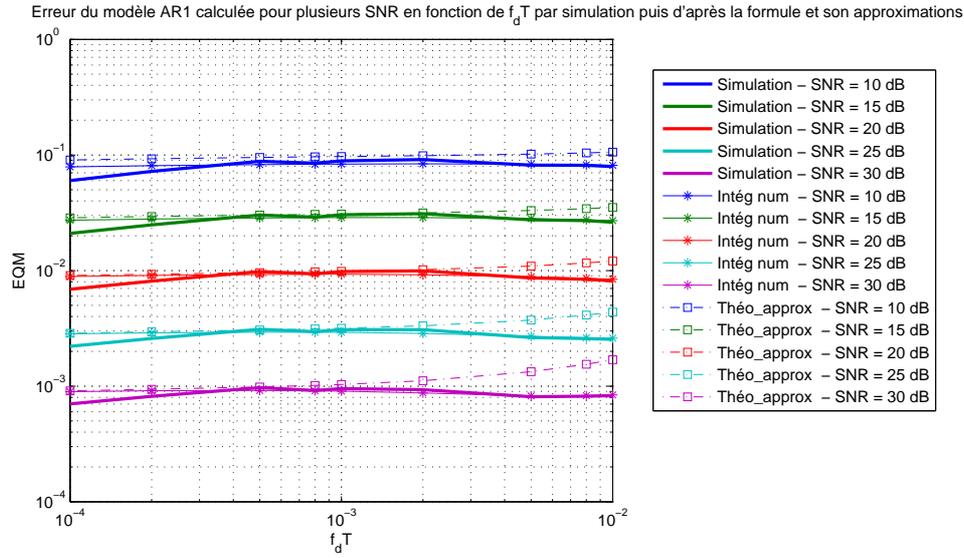


FIG. 2.18 –  $EQM$  calculée par simulation, par théorie(intégration numérique) et par l'approximation de la théorie (équations (2.27) et (2.29)) pour différentes valeurs de SNR en fonction de  $f_d T$

et

$$B = \frac{\sqrt{\sigma_b^2}}{2} \quad (2.32)$$

Essayons de voir pour quelle valeur de  $a$ ,  $EQM$  est minimisée. Pour cela, on a recours à la dérivée par rapport à  $a$ :

$$\frac{\partial EQM}{\partial a} = \frac{2Aa}{(1-a^2)^2} - \frac{aB}{\sqrt{1-a^2}}$$

avec les conditions suivantes:

1.  $0 < a < 1$
2.  $a$  proche de 1

$$\frac{\partial EQM}{\partial a} = 0 \Rightarrow \frac{2Aa}{(1-a^2)^2} = \frac{aB}{\sqrt{1-a^2}} \Rightarrow (1-a^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2A}{B}$$

alors:

$$a^* = \sqrt{1 - \left(\frac{2A}{B}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

Et en remplaçant  $A$  et  $B$  par leurs valeurs données dans (2.31) et (2.32), on aura:

$$a^* = \sqrt{1 - \sqrt[3]{(2\pi f_d T)^4 \sigma_b^2}} \quad (2.33)$$

Dans ce cas, l'erreur  $EQM$  optimale, théoriquement calculée est obtenue en remplaçant  $a$  par  $a^*$  dans l'équation (2.30):

$$EQM_{opt} = EQM(a^*) = \frac{A}{1 - (a^*)^2} + B\sqrt{1 - (a^*)^2} = A \left[ \frac{2A}{B} \right]^{\frac{-2}{3}} + B \left[ \frac{2A}{B} \right]^{\frac{1}{3}}$$

Ou encore, en remplaçant  $A$  et  $B$  par leurs valeurs données dans les équations (2.31) et (2.32), on trouve la valeur optimale de  $EQM$  en fonction des différents paramètres ( $\sigma_b^2$  et  $f_d T$ ), valable pour  $f_d T \ll 1$ :

$$EQM_{opt} = \frac{3}{2} (\pi f_d T \sigma_b^2)^{\frac{2}{3}} \quad (2.34)$$

La figure (FIG. 2.19) montre les résultats de ce compromis: on voit bien que lorsqu'on utilise la valeur optimale de  $a$ ,  $a = a^*$ , on peut gagner une diminution de la variance de l'erreur d'estimation d'un facteur de 10 par rapport au cas de la littérature (équation (2.10)), dans la cas de SNR extrêmement faible, et pour des fréquences Doppler  $f_d T$  faibles aussi. Ceci étant vérifié par théorie et par simulation. Une comparaison avec les bornes de Cramer Rao Bayésiennes est mise en évidence dans la figure (FIG. 2.20). On remarque très bien qu'on s'approche de la borne dans la cas de  $a^*$ .

## 2.5 conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié le filtre de Kalman utilisé pour estimer un modèle AR1 remplaçant le modèle de Jakes. On a vérifié au début que les résultats donnés par la simulation au niveau de la variance de l'erreur ne sont pas très bons pour des faibles valeurs de  $f_d T$ , comparativement à la borne minimale théoriquement atteignable. C'est pour cela que l'on s'est concentré dans la suite de faire l'analyse détaillée de cette erreur.

L'étude théorique de l'EQM en fonction de  $f_d T$ , du paramètre  $a$  du modèle AR1, et du SNR ainsi que des formules approximatives a été faite. Dans le cas général on a vu que  $EQM$  était une somme de deux parties:  $EQM1$  (partie dynamique) qui varie comme  $\frac{1}{1-a^2}$ , et  $EQM2$  (partie statique) qui varie comme  $\sqrt{1-a^2}$ .

Avec le choix standard de la littérature,  $a = J_0(2\pi f_d T)$ , et dans la plage qui nous intéresse, on voit que l'erreur statique est négligeable par rapport à l'erreur dynamique, c'est-à-dire  $EQM2 \ll$

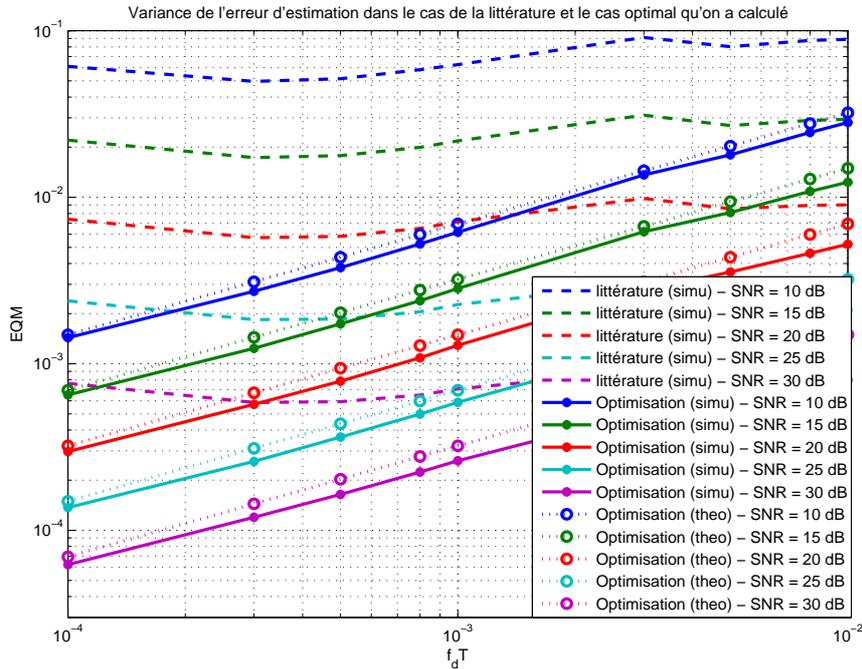


FIG. 2.19 –  $EQM$  calculée par simulation pour les deux cas pris de  $a$  dans la littérature et dans notre cas (équation(2.33)), ainsi que par théorie (équation(2.34)), pour différentes valeurs de SNR en fonction de  $f_d T$

$EQM1$ , avec  $EQM1 \approx \sigma_b^2 \approx Cte$ . Mais le choix supposé de  $a$  ne permet pas de minimiser globalement l' $EQM$  pour  $f_d T$  faibles.

Si l'on suppose changer la valeur de  $a$  pour une fréquence Doppler donnée  $f_d T$  et un rapport signal sur bruit donné, on pourra améliorer l'erreur totale  $EQM$ . En fait, si l'on diminue la valeur de  $a$   $EQM1$  diminue, et  $EQM2$  augmente. On pourra chercher la meilleure valeur de  $a$  qui nous mènera à un compromis. C'est ce qui a été traduit dans la dernière partie.

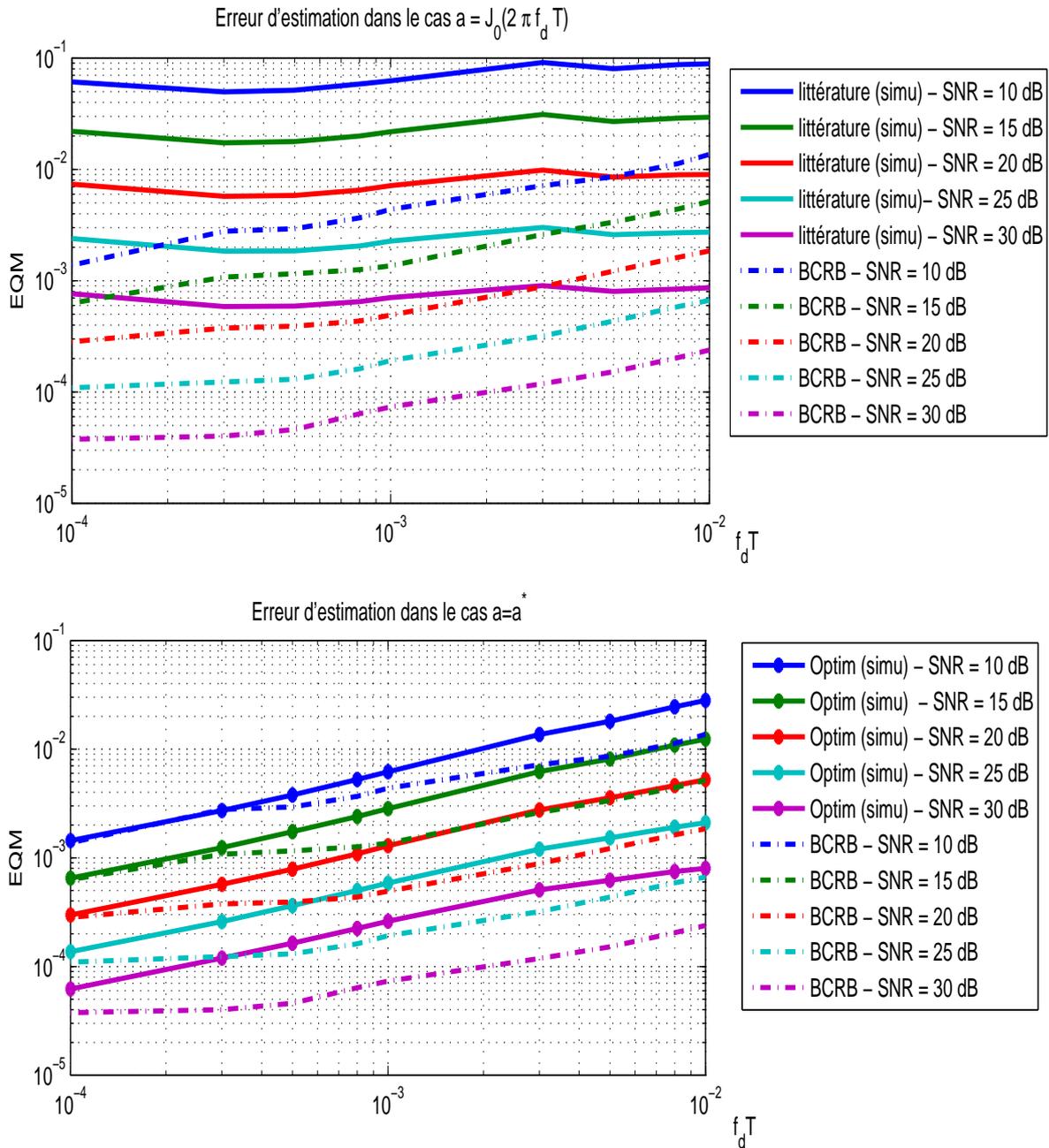


FIG. 2.20 – Comparaison dans les deux cas (littérature et notre optimisation) des EQM calculées par simulation avec les bornes de Cramer Rao Bayésiennes, pour différentes valeurs de SNR en fonction de  $f_d T$

# Conclusion et perspectives

Dans cette étude, on a d'abord présenté le modèle de canal de propagation le plus utilisé pour modéliser la transmission radio-mobile (modèle de Rayleigh à spectre Doppler de Jakes), et notre étude s'est restreinte au cas " flat fading " (1 seul macro-trajet de propagation). Pour le problème d'estimation de ce canal en présence d'un bruit blanc additif Gaussien, on a cherché les bornes d'erreur minimales qui peuvent être atteintes (bornes de Cramer Rao Bayésiennes), et on vu leur variation en fonction des différents paramètres. Le modèle autorégressif d'ordre  $p$  (AR- $p$ ) ainsi que le filtre de Kalman associé, ont été présentés. Notons que contrairement à ce que l'on avait supposé en début de stage, l'augmentation de l'ordre du modèle autorégressif (AR2 vs AR1) avec les choix standards de la littérature, ne donne pas toujours une amélioration. On s'est concentré dans la suite de faire l'étude du filtre de Kalman utilisé pour estimer le signal modélisé par un modèle AR1, et on a mené à une étude sur l'origine des erreurs. Nous avons mis en évidence que le choix de la littérature convient bien pour les fréquences Doppler normalisées élevées ( $f_d T \geq 10^{-2}$ ), mais n'est pas optimal lorsque le canal a des variations plus lentes. On a pu à la fin trouver une méthode d'amélioration qui a pu diminuer la variance de l'erreur d'estimation d'un facteur de 10 pour le cas de SNR extrêmement faibles, et  $f_d T$  faibles.

L'étude ne s'arrête pas là. Le modèle présenté était simple, mais il est aussi fondamental, et est à la base des diverses études plus complexes d'estimation de canal qui pourront être envisagées. Cette étude peut être étendue aussi pour étudier le cas d'un canal réel qui n'aurait bien sûr pas exactement les caractéristiques du modèle de Rayleigh à spectre de Jakes (robustesse de la méthode?). Aussi on peut se poser la question de quoi faire si la fréquence Doppler n'est pas connue à la réception. Des méthodes d'estimation de fréquence Doppler ou directement du paramètre du modèle autorégressif (paramètre  $a$ ) doivent être proposées. De plus, on peut chercher une méthode d'amélioration indépendante du SNR qui, lui aussi, n'est pas toujours connu (ou bien estimé).

Concernant maintenant les algorithmes basés sur le modèle AR2, une technique d'amélioration consiste dans la littérature à ajouter un  $\varepsilon$  sur la diagonale de la matrice d'autocorrélation du processus AR2 calculé exactement selon la fonction de Bessel. Mais nous pensons que l'amélioration peut être encore bien meilleure en optimisant directement les paramètres de l'AR2 similairement à ce

que nous avons proposé pour l'AR1 afin de minimiser directement l'EQM en régime asymptotique. D'autres perspectives peuvent aussi être mises à table de discussion.

# Annexe A - Calcul des bornes de Cramer Rao Bayésiennes

On part du modèle de base qui est tout simplement:

$$y_k = \alpha_k + b_k$$

$\alpha_k$  est une variable aléatoire complexe gaussienne et circulaire, qu'on note  $\alpha_k \sim CN(0, \sigma_\alpha^2)$ , et  $b_k$  est un bruit blanc gaussien complexe circulaire centré et de variance  $\sigma_b^2$ .

On cherche à calculer les bornes de Cramer Rao minimales d'un estimateur utilisé pour estimer  $\alpha_k$ .

$$\begin{aligned} [J]_{i,j} &\stackrel{\text{def}}{=} E_{\alpha,y}[\nabla_{\alpha_i} \ln p(y, \alpha) \nabla_{\alpha_j}^T \ln p(y, \alpha)] \\ &= E_{\alpha,y}[-\Delta_{\alpha_i}^{\alpha_j} \ln p(y, \alpha)] \\ &= E_{\alpha,y}[-\Delta_{\alpha_i}^{\alpha_j} \ln p(y | \alpha)] + E_{\alpha}[-\Delta_{\alpha_i}^{\alpha_j} \ln p(\alpha)] \end{aligned}$$

$$p(y | \alpha) = \frac{1}{|\pi R_b|} \exp(-(y - \alpha)^H R_b^{-1} (y - \alpha)) = \frac{1}{(\pi \sigma_b^2)^K} \exp(-\frac{1}{\sigma_b^2} (y - \alpha)^H (y - \alpha))$$

Et

$$p(\alpha) = \frac{1}{|\pi R_\alpha|} \exp(-\alpha^H R_\alpha^{-1} \alpha)$$

Avec:

$\Delta_{\alpha_i}^{\alpha_j}(\cdot) = \nabla_{\alpha_i}(\nabla_{\alpha_j}^T(\cdot))$  l'opérateur différentiel seconde,

et  $\nabla_{\alpha_i} = [\frac{\partial}{\partial \alpha_i^1}, \frac{\partial}{\partial \alpha_i^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \alpha_i^M}]^T$  où  $\alpha_i^l$  est la composante numéro  $l$  du vecteur  $\alpha_i$ .

Les  $\alpha_i$  étant des scalaires,  $\nabla_{\alpha_i}$  sera formé d'un seul élément, on l'écrit sous la forme  $\frac{\partial}{\partial \alpha_i}$ . Et comme  $\alpha_i$  est complexe, on définit la dérivée par rapport aux complexes par :  $\frac{\partial}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{2} [\frac{\partial}{\partial \alpha_i^R} - j \frac{\partial}{\partial \alpha_i^I}]$ , où  $\alpha_i^R$  et

$\alpha_i^l$  sont respectivement les parties réelle et imaginaire de  $\alpha_i$ .

– Calcul du premier terme

$$\begin{aligned} E_{\alpha,y}[-\Delta_{\alpha_i}^{\alpha_j}(\ln p(y | \alpha))] &= -E_{\alpha,y}\left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}(Cte - \frac{1}{\sigma_b^2}(y - \alpha)^H(y - \alpha))\right] \\ &= \frac{1}{\sigma_b^2}E_{\alpha,y}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\frac{\partial}{\partial \alpha_j}(y - \alpha)^H(y - \alpha)\right] \end{aligned}$$

– Première dérivée partielle:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} [(y - \alpha)^H(y - \alpha)] &= \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_j}(y^H - \alpha^H) \right] \cdot (y - \alpha) + (y - \alpha)^H \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_j}(y - \alpha) \right] \\ &= M_1 + M_2 \end{aligned}$$

– Calcul de  $M_1$

On a:  $\frac{\partial}{\partial \alpha_j^R}(y^H - \alpha^H) = [0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0]$  (le  $-1$  se trouvant à la position "j")

et:  $\frac{\partial}{\partial \alpha_j^I}(y^H - \alpha^H) = [0, \dots, 0, +j, 0, \dots, 0]$  (le  $+j$  se trouvant à la position "j")

Donc:  $\frac{\partial}{\partial \alpha_j}(y^H - \alpha^H) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_j^R}(y^H - \alpha^H) - j \frac{\partial}{\partial \alpha_j^I}(y^H - \alpha^H) \right] = [0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0]$

D'où:  $M_1 = 0$

– Calcul de  $M_2$

On a:  $\frac{\partial}{\partial \alpha_j^R}(y - \alpha) = [0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0]^T$  (le  $-1$  se trouvant à la position "j")

et:  $\frac{\partial}{\partial \alpha_j^I}(y - \alpha) = [0, \dots, 0, -j, 0, \dots, 0]^T$  (le  $-j$  se trouvant à la position "j")

Donc:  $\frac{\partial}{\partial \alpha_j}(y - \alpha) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_j^R}(y - \alpha) - j \frac{\partial}{\partial \alpha_j^I}(y - \alpha) \right] = [0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0]^T$

D'où:  $M_2 = -(y_j^* - \alpha_j^*)$

– Deuxième dérivée partielle

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} [(y - \alpha)^H(y - \alpha)] = -\frac{\partial}{\partial \alpha_i}(y_j^* - \alpha_j^*)$$

On a:  $\frac{\partial}{\partial \alpha_j^k} (y_j^* - \alpha_j^*) = -\delta_{i,j}$

et:  $\frac{\partial}{\partial \alpha_j^l} (y_j^* - \alpha_j^*) = -j\delta_{i,j}$

Donc:  $-\frac{\partial}{\partial \alpha_i} (y_j^* - \alpha_j^*) = -\frac{1}{2}(-\delta_{i,j} + j^2\delta_{i,j}) = -\delta_{i,j}$

où  $\delta_{i,j}$  est le symbole de kronecker

Et donc on aura au total:

$$E_{\alpha,y}[-\Delta_{\alpha_i}^{\alpha_j}(\ln p(y | \alpha))] = +\frac{1}{\sigma_b^2}\delta_{ij}$$

où  $\delta_{i,j}$  est le symbole de kronecker

– Calcul du second terme

$$\begin{aligned} E_{\alpha}[-\Delta_{\alpha_i}^{\alpha_j}(\ln p(\alpha))] &= -E_{\alpha}\left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}(\text{Cte} - \alpha^H R_{\alpha}^{-1} \alpha)\right] \\ &= E_{\alpha}\left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}(\alpha^H R_{\alpha}^{-1} \alpha)\right] \end{aligned}$$

– Première dérivée partielle:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_j}(\alpha^H R_{\alpha}^{-1} \alpha) &= \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \alpha^H\right] \cdot (R_{\alpha}^{-1} \alpha) + \alpha^H R_{\alpha}^{-1} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \alpha\right] \\ &= N_1 + N_2 \end{aligned}$$

– Calcul de  $N_1$

On a:  $\frac{\partial}{\partial \alpha_j^k} \alpha^H = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$  (le 1 se trouvant à la position "j")

et:  $\frac{\partial}{\partial \alpha_j^l} \alpha^H = [0, \dots, 0, -j, 0, \dots, 0]$  (le  $-j$  se trouvant à la position "j")

Donc:  $\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \alpha^H = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_j^k} \alpha^H - j \frac{\partial}{\partial \alpha_j^l} \alpha^H \right] = [0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0]$

D'où:  $N_1 = 0$

– Calcul de  $N_2$

On a:  $\frac{\partial}{\partial \alpha_j^R} \alpha = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$  (le 1 se trouvant à la position "j")  
 et:  $\frac{\partial}{\partial \alpha_j^I} \alpha = [0, \dots, 0, +j, 0, \dots, 0]^T$  (le +j se trouvant à la position "j")  
 Donc:  $\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \alpha = \frac{1}{2}[0, \dots, 0, 1 - j^2, 0, \dots, 0]^T = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$

D'où:  $N_2 = \sum_{m=1}^K [R\alpha^{-1}]_{m,j} \cdot \alpha_j$

– Deuxième dérivée partielle

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_j} (\alpha^H R \alpha^{-1} \alpha) \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \sum_{m=1}^K [R\alpha^{-1}]_{m,j} \cdot \alpha_j$$

On a:  $\frac{\partial}{\partial \alpha_j^R} \sum_{m=1}^K [R\alpha^{-1}]_{m,j} \cdot \alpha_j = [R\alpha^{-1}]_{i,j}$

et:  $\frac{\partial}{\partial \alpha_j^I} \sum_{m=1}^K [R\alpha^{-1}]_{m,j} \cdot \alpha_j = j[R\alpha^{-1}]_{i,j}$

Donc:  $\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \sum_{m=1}^K [R\alpha^{-1}]_{m,j} \cdot \alpha_j = \frac{1}{2}(1 - j^2)[R\alpha^{-1}]_{i,j} = [R\alpha^{-1}]_{i,j}$

Et donc on aura au total:

$$E_\alpha [-\Delta_{\alpha_i}^{\alpha_j} (\ln p(\alpha))] = [R\alpha^{-1}]_{i,j}$$

Donc  $[J]_{i,j} = [R\alpha^{-1}]_{i,j} + \frac{1}{\sigma_b^2} \delta_{ij}$

## Annexe B - Calcul des $a_p$ et de $\sigma_p^2$

Partant d'un modèle autorégressif d'ordre  $p$ ,

$$x_k = \sum_{m=1}^p -b_m x_{k-m} + e_k$$

On cherche à calculer les coefficients  $b_m$  tels que la variance de  $e_k$  soit minimale: On va dériver les équations de Yule-Walker correspondantes, puis on va déduire la valeur de cette erreur minimale.

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 = E[e_k e_k^*] &= E\left[\left(\sum_{m=0}^p -b_m x_{k-m}\right)\left(\sum_{j=0}^p -b_j x_{k-j}\right)^*\right] \\ &= \sum_{m=0}^p \sum_{j=0}^p b_m b_j E[x_{k-m} x_{k-j}^*] \\ &= \sum_{m=0}^p \sum_{j=0}^p b_m b_j R_{xx}[k-m, k-j] \end{aligned}$$

avec  $b_0 = 1$ .

Si on a un processus stationnaire au sens large, alors :

- on a  $R_{xx}[k-m, k-j] = R_{xx}[(k-j) - (k-m)] = R_{xx}[m-j]$
- et  $R_{xx}[j-m] = R_{xx}[m-j]$

Et donc on aura :

$$\sigma_p^2 = \sum_{m=0}^p b_m^2 R_{xx}[0] + 2 \sum_{m \neq j}^p b_m b_j R_{xx}[|j-m|]$$

Minimiser la variance s'exprime donc par le système des "p" équations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial b_1}(\sigma_p^2) = 0 \Rightarrow 2b_1 R_{xx}[0] + 2 \sum_{m \neq 1}^p b_m R_{xx}[|1-m|] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b_2}(\sigma_p^2) = 0 \Rightarrow 2b_2 R_{xx}[0] + 2 \sum_{m \neq 2}^p b_m R_{xx}[|2-m|] = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial}{\partial b_l}(\sigma_p^2) = 0 \Rightarrow 2b_l R_{xx}[0] + 2 \sum_{m \neq l}^p b_m R_{xx}[|l-m|] = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial}{\partial b_p}(\sigma_p^2) = 0 \Rightarrow 2b_p R_{xx}[0] + 2 \sum_{m \neq p}^p b_m R_{xx}[|p-m|] = 0 \end{array} \right.$$

Donc:  $\sum_{m=0}^p b_m R_{xx}[|l-m|] = 0, \forall 1 \leq l \leq p$ , avec  $b_0 = 1$ .

D'où :

$$\sum_{m=1}^p -b_m R_{xx}[|l-m|] = b_0 R_{xx}[l-0] = R_{xx}[l] \forall 1 \leq l \leq p$$

$$\text{Or : } x_k = \sum_{m=1}^p -b_m x_{k-m} + e_k$$

$$\text{Donc : } R_{xx}[m] = E(x_k x_{k-m}^*) = \sum_{n=1}^p -b_n E[x_{k-n} x_{k-m}^*] + E[e_k x_{k-m}^*]$$

Prenons  $m = 0$ , on aura

$$R_{xx}[0] = \sum_{n=1}^p -b_n E[x_{k-n} x_k^*] + E[e_k x_k^*] = \sum_{n=1}^p -b_n R_{xx}[n] + \sigma_p^2$$

(On a utilisé le fait que  $e_k$  est un bruit blanc, donc il n'est pas corrélé avec les échantillons  $e_{k-1}$ ,  $e_{k-2}, \dots$  et donc  $E[e_k x_k^*] = E[e_k \sum_{i=1}^p -b_i x_{k-i}^* + e_k^*] = \sum_{i=1}^p -b_i E[e_k x_{k-i}^*] + E[e_k e_k^*] = \sigma_p^2$ ).

$$\text{D'où : } R_{xx}[0] = \sum_{m=1}^p -b_m R_{xx}[-m] + \sigma_p^2$$

On obtient finalement les équations de Yule-Walker :

$$\sum_{m=1}^p -b_m R_{xx}[|l-m|] = b_0 R_{xx}[l-0] = R_{xx}[l] \forall 1 \leq l \leq p$$

Et on a la valeur de la variance de l'erreur:

$$\sigma_p^2 = R_{xx}[0] - \sum_{n=1}^p -b_n R_{xx}[n]$$

Dans notre étude,

$$\alpha_k^{ARp} = \sum_{m=1}^p a_m \cdot \alpha_{k-m}^{ARp} + e_k$$

Il suffit donc de remplacer les  $-b_i$  par  $a_i$  et les  $\alpha_k^{ARp}$  par  $x_k$  dans l'avant dernière équation .  
On obtient donc le système d'équations (2.2).

# Annexe C - Gain de Kalman asymptotique

## Cas du modèle AR1

Les équations du filtre de Kalman sont données dans ce cas par:

$$\begin{cases} K_k &= P_{k|k-1}/[P_{k|k-1} + \sigma_b^2] \\ \hat{P}_{k|k} &= (1 - K_k)P_{k|k-1} \\ P_{k+1|k} &= a^2\hat{P}_{k|k} + \sigma_e^2 \end{cases}$$

Supposons que le gain asymptotique existe. Dans ce cas, on va prendre:

$$\begin{cases} K_k &= K_{k+1} &= \bar{K} \\ \hat{P}_{k|k} &= \hat{P}_{k+1|k+1} &= \bar{P} \\ P_{k|k-1} &= P_{k+1|k} &= \bar{P}' \end{cases}$$

D'où les équations de Kalman ci-dessus deviennent:

$$\begin{cases} \bar{K} &= \bar{P}'/[\bar{P}' + \sigma_b^2] \\ \bar{P} &= (1 - \bar{K})\bar{P}' \\ \bar{P}' &= a^2\bar{P} + \sigma_e^2 \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= (1 - \bar{K})\bar{P}' \\ &= \left[1 - \frac{\bar{P}'}{\bar{P}' + \sigma_b^2}\right] [a^2\bar{P} + \sigma_e^2] \\ &= \frac{\sigma_b^2(a^2\bar{P} + \sigma_e^2)}{a^2\bar{P} + \sigma_e^2 + \sigma_b^2} \end{aligned}$$

D'où:

$$a^2\bar{P}^2 + [\sigma_b^2 + \sigma_e^2 - a^2\sigma_b^2]\bar{P} - \sigma_e^2\sigma_b^2 = 0$$

En posant :

$$\Delta = (\sigma_b^2 + \sigma_e^2 - a^2\sigma_b^2)^2 + 4a^2\sigma_b^2\sigma_e^2$$

On aura:

$$\bar{P} = \frac{\sigma_b^2(a^2 - 1) - \sigma_e^2 + \sqrt{\Delta}}{2a^2}$$

Et par suite:

$$\begin{aligned}\bar{K} &= \frac{\bar{P}'}{\bar{P}' + \sigma_b^2} \\ &= \frac{a^2 \bar{P} + \sigma_e^2}{a^2 \bar{P} + \sigma_e^2 + \sigma_b^2}\end{aligned}$$

## Cas du modèle AR2

Les équations du filtre de Kalman sont données dans ce cas par:

$$\begin{cases} K_k = P_{k|k-1} H_k^T [H_k P_{k|k-1} H_k^T + \sigma_b^2]^{-1} \\ \hat{P}_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \\ P_{k+1|k} = \Phi_k \hat{P}_{k|k} \Phi_k^T + \Gamma_k \sigma_e^2 \Gamma_k^T \end{cases}$$

Supposons que le gain asymptotique existe. Dans ce cas, on va prendre:

$$\begin{cases} K_k &= K_{k+1} &= \bar{K} \\ \hat{P}_{k|k} &= \hat{P}_{k+1|k+1} &= \bar{P} \\ P_{k|k-1} &= P_{k+1|k} &= \bar{P}' \end{cases}$$

Et en utilisant les formes de  $\Phi_k$ ,  $\Gamma_k$  et  $H_k$ , les trois équations de Kalman seront:

$$\begin{aligned} (*) & \left\{ \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} \\ \bar{K}_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{\bar{P}'_{11} + \sigma_b^2} \begin{bmatrix} \bar{P}'_{11} \\ \bar{P}'_{12} \end{bmatrix} \right. \\ (**) & \left\{ \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{12} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}'_{11}(1 - \bar{K}_{11}) & \bar{P}'_{12}(1 - \bar{K}_{11}) \\ \bar{P}'_{12}(1 - \bar{K}_{11}) & \bar{P}'_{22} - \bar{K}_{12} \bar{P}'_{12} \end{bmatrix} \right. \\ (***) & \left\{ \begin{bmatrix} \bar{P}'_{11} & \bar{P}'_{12} \\ \bar{P}'_{12} & \bar{P}'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 \bar{P}_{11} + 2a_1 a_2 \bar{P}_{12} + a_2^2 \bar{P}_{22} + \sigma_e^2 & a_1 \bar{P}_{12} + a_2 \bar{P}_{22} \\ a_1 \bar{P}_{12} + a_2 \bar{P}_{22} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \right. \end{aligned}$$

D'après l'élément (2,2) de (\*\*\*), on aura  $\bar{P}_{22} = \bar{P}'_{22}$ .

Remplaçons ceci pour l'élément (2,2) de (\*\*), on aura  $\bar{P}'_{12} = 0$ .

Annulons  $\bar{P}'_{12}$  pour l'élément (1,2) de (\*\*), on aura  $\bar{P}_{12} = 0$ .

Annulons  $\bar{P}'_{12}$  et  $\bar{P}_{12}$  pour l'élément (1,2) de (\*\*\*), on aura  $\bar{P}_{22} = 0$ .

Annulons  $\bar{P}_{12}$  et  $\bar{P}_{22}$  pour l'élément (1,1) de (\*\*), on aura:

$$\bar{P}'_{11} = a_1^2 \bar{P}_{11} + \sigma_e^2$$

Avec:

$$\bar{P}_{11} = \frac{\bar{P}'_{11} \cdot \sigma_b^2}{\bar{P}'_{11} + \sigma_b^2}$$

(Ceci obtenu en remplaçant, dans l'élément (1,1) de (\*\*),  $\bar{K}_{11}$  par sa valeur dans (\*))

D'où  $\bar{P}'_{11}$  est la solution positive de l'équation :  $\bar{P}'_{11}^2 + \sigma_b^2(1 - a_1^2)\bar{P}'_{11} - \sigma_e^2 = 0$ .

On en déduit la valeur de  $\bar{P}_{11}$ , et ensuite la valeur de  $\bar{K}_{11}$ . La valeur de  $\bar{K}_{12}$  étant nulle car  $\bar{P}'_{12} = 0$ .

## Annexe D - Calcul de EQM1 et EQM2

### Aides sur le calcul de EQM1: variance d'erreur dynamique

Pour calculer  $EQM1$ , d'après l'équation (2.25), on aura

$$EQM1 \approx (4\pi^2 T^2) \frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2} \left[ \frac{\sigma_\alpha^2}{\pi f_d} \int_{-f_d}^{f_d} \frac{f^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} df \right]$$

Or:

$$\frac{\sigma_\alpha^2}{\pi f_d} \int_{-f_d}^{f_d} \frac{f^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} df = \frac{2\sigma_\alpha^2}{\pi f_d} \int_0^{f_d} \frac{f^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} df$$

En effectuant un changement de variable ( $\frac{f}{f_d} = \cos(x)$ ), on aura:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{f_d} \frac{f^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} df &= (f_d^3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2(x) dx \\ &= (f_d^3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2x)) dx \\ &= \frac{\pi f_d^3}{2} \end{aligned}$$

Et donc:

$$\frac{\sigma_\alpha^2}{\pi f_d} \int_{-f_d}^{f_d} \frac{f^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} df = \frac{\sigma_\alpha^2 f_d^2}{2}$$

Par suite:

$$\begin{aligned} EQM1 &\approx (4\pi^2 T^2) \frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2} \left[ \frac{\sigma_\alpha^2}{\pi f_d} \int_{-f_d}^{f_d} \frac{f^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} df \right] \approx \frac{(4\pi^2 T^2) \sigma_b^2}{\sigma_e^2} \left[ \frac{\sigma_\alpha^2 f_d^2}{2} \right] \\ &\approx \frac{2(\pi f_d T)^2 \sigma_\alpha^2 \sigma_b^2}{\sigma_e^2} \end{aligned}$$

Et en prenant  $\sigma_\alpha^2 = 1$  et le cas général  $\sigma_e^2 = 1 - a^2$  (équation(2.9)), on aura:

$$EQM1 \approx \frac{2(\pi f_d T)^2 \sigma_b^2}{1 - a^2}$$

## Calcul de la bande équivalente de bruit BL

Pour  $EQM2$ , on doit calculer la valeur de la bande de bruit équivalente  $BL$  du filtre  $T(z)$  donnée par l'équation (2.23) :

$$BL = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} |T(e^{j2\pi fT})|^2 df$$

Prenons le cas général d'un filtre de la forme :

$$B(z) = \frac{b_0 z}{a_0 z + a_1}$$

Sa bande équivalente BLB sera :

$$BLB = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \left| \frac{b_0 e^{j2\pi fT}}{a_0 e^{j2\pi fT} + a_1} \right|^2 df$$

Avec :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \left| \frac{b_0 e^{j2\pi fT}}{a_0 e^{j2\pi fT} + a_1} \right|^2 df &= \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \frac{b_0^2}{a_0^2 + a_1^2 - 2a_0 a_1 \cos(2\pi fT)} df \\ &= \frac{1}{2\pi T} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b_0^2}{a_0^2 + a_1^2 - 2a_0 a_1 \cos(x)} dx \\ &= \frac{1}{\pi T} \frac{b_0^2}{a_0^2 + a_1^2} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + A \cos(x)} dx \end{aligned}$$

$$\text{Où: } A = -\frac{2a_0 a_1}{a_0^2 + a_1^2}$$

$$\text{Or d'après [15] (3.613): } \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + A \cos(x)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1 - A^2}} \text{ si } A^2 < 1$$

$$\text{Et dans notre cas : } \sqrt{1 - A^2} = \left| \frac{a_0^2 - a_1^2}{a_0^2 + a_1^2} \right|$$

D'où :

$$BLB = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \left| \frac{b_0 e^{j2\pi fT}}{a_0 e^{j2\pi fT} + a_1} \right|^2 df = \frac{1}{T} \frac{b_0^2}{|a_0^2 - a_1^2|}$$

Appliquons ceci sur notre filtre  $T(z)$ , on a dans ce cas :

$$\begin{cases} b_0 = K_{asympt} \\ a_0 = 1 \\ a_1 = -a(1 - K_{asympt}) \end{cases}$$

Vérifions dans ce cas:  $A = \frac{-2a_1}{1+a_1^2} < 1$  toujours, et donc:

$$BL = \frac{1}{T} \frac{K_{asymp}^2}{|1 - a^2(1 - K_{asymp})^2|}$$

Et en utilisant l'équation(2.17), en négligeant  $K_{asymp}^2$  devant  $K_{asymp}$ , et en prenant  $1 - a^2 \approx 0$ , on aura:

$$\begin{aligned} 1 - a^2(1 - K_{asymp}^2) &= 1 - (1 - \sigma_e^2)(1 - K_{asymp}^2) \\ &\approx \frac{\sigma_b^2 - (1 - \sigma_e^2)(\sigma_b - \sigma_e)^2}{\sigma_b^2} \\ &= \frac{-\sigma_e^2 + 2\sigma_b\sigma_e + \sigma_b^2\sigma_e^2 + \sigma_b\sigma_e^3 + \sigma_e^4}{\sigma_b^2} \\ &\approx \frac{2\sigma_b\sigma_e}{\sigma_b^2} = \frac{2\sigma_e}{\sigma_b} \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} BL &= \frac{1}{T} \frac{K_{asymp}^2}{|1 - a^2(1 - K_{asymp})^2|} \\ &\approx \frac{1}{T} \frac{\left[\frac{\sigma_e}{\sigma_b}\right]^2}{\frac{2\sigma_e}{\sigma_b}} \\ &= \frac{1}{2T} \sqrt{\frac{\sigma_e^2}{\sigma_b^2}} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\sigma_e^2 = 1 - a^2$ :

$$BL \approx \frac{1}{2T} \sqrt{\frac{1 - a^2}{\sigma_b^2}}$$

# Bibliographie

- [1] K. E. Baddour and N. C. Beaulieu, "Autoregressive modeling for fading channel simulation", in *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 4, no. 4, pp. 1650-1662, July 2005.
- [2] W. Chen and R. Zhang, "Kalman-filter channel estimator for OFDM systems in time and frequency-selective fading environment", in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, May 2004.
- [3] P. Banelli, R. Cannizzaro, and L. Rugini, "Data-Aided Kalman Tracking for Channel Estimation in Doppler-Affected OFDM Systems", in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, pp. 133-136, April 2007.
- [4] H.S. Wang and P. C. Chang, "On verifying the First Order Markovian Assumption for a Rayleigh Fading Channel Model", in *IEEE Transactions on vehicular technology*, vol. 45, no. 2, pp. 353-357, May 1996.
- [5] L. Ros, H. Hijazi, E.P. Simon, "Paths complex gain tracking algorithms for OFDM receiver in slowly-varying channels", in *IEEE ISCCSP, Limassol*, March 2010.
- [6] J. Dauwels, "Computing Bayesian Cramer-Rao bounds", Proceedings of the IEEE Int. Symp. Information Theory, 2005.
- [7] Brossier J.M., Ros L., Abeida Habti et al., "Rapport de spécification des algorithmes de détection basés sur le filtrage particulière (version finale)" rapport T3.2 du projet LURGA de l'Agence Nationale pour la Recherche (ANR), Janvier 2010.
- [8] H. Abeida, J.-M. Brossier, L. Ros and J. Vilà-Valls, "An EM algorithm for path delay and complex gain estimation of a slowly varying fading channel for CPM signals", in *Proc. IEEE Globecom*, Honolulu, Hawaiï, Dec. 2009.
- [9] H. Hijazi, *Estimation de canal radio-mobile à évolution rapide dans les systèmes à modulation OFDM*. Thèse de l'Institut Polytechnique de Grenoble, EEATS, Novembre 2008.
- [10] H. Hijazi, L. Ros, "Joint Data QR-Detection and Kalman Estimation for OFDM Time-varying Rayleigh Channel Complex Gains" in *IEEE Trans. On Communications*, vol. 58, no. 1, pp. 170-178, January 2010.
- [11] J. Vilà Valls, *Estimation Dynamique non-linéaire de canaux de transmissions pour récepteurs satellites mobiles*. Thèse de l'Institut Polytechnique de Grenoble, EEATS, Mars 2010.

- 
- [12] B. Anderson and J. Moore, *Optimal Filtering*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1979.
- [13] H.J.Myung and D.J. Goodman, *Single Carrier FDMA*. Wiley Series on Wireless Communications and Mobile Computing, 2008.
- [14] Lahouari Fathi, *Récepteurs avancés pour les systèmes CDMA haut débit utilisant des codes d'embrouillage aperiodiques longs*. Thèse à l'Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG) - France Télécom, 2007.
- [15] Gradshteyn and Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. Alan Jeffrey editions, 1994.
- [16] Steven M. Kay, *Fundamentals of statistical processing - Estimation Theory*. Prentice Hall, 1993.