



# Modélisation dynamique de microbulles libres ou encapsulées par méthode d'équilibrage harmonique

Marie-Christine Pausin, Serge Mensah, Bruno Cochelin, Jean-Pierre Lefebvre

## ► To cite this version:

Marie-Christine Pausin, Serge Mensah, Bruno Cochelin, Jean-Pierre Lefebvre. Modélisation dynamique de microbulles libres ou encapsulées par méthode d'équilibrage harmonique. Société Française d'Acoustique - SFA. 10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. 2010. <hal-00550538>

HAL Id: hal-00550538

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00550538>

Submitted on 28 Dec 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# 10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

## Modélisation dynamique de microbulles libres ou encapsulées par méthode d'équilibrage harmonique

M.-C. Pautin, S. Mensah, B. Cochelin et J.-P. Lefebvre

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, 31, Chemin Joseph Aiguier - 13402 Marseille Cedex 20

mensah@lma.cnrs-mrs.fr

Les réponses radiales des microbulles nues ou encapsulées excitées par une onde plane ultrasonore de grande longueur d'onde (relativement à la taille des bulles) répondent à une équation différentielle non-linéaire (NL-ODE). La réponse fréquentielle non-linéaire décrit le contenu harmonique de la réponse temporelle, elle est le résultat escompté d'une analyse harmonique d'ordre supérieur. Dans cette étude, l'analyse effectuée à l'aide d'une méthode d'équilibrage harmonique (HBM) décrit les réponses fréquentielles en amplitude des modèles de bulles (RNNP) et d'agents de contraste (Hoff et Marmottant). Pour cela, ces modèles dynamiques sont réécrits sous forme de systèmes étendus pour lesquels les non-linéarités sont au plus quadratiques. Fixant arbitrairement le nombre d'harmoniques considérés, une solution analytique exempte de bruit temporel de discrétisation est calculée. Certaines caractéristiques non-linéaires telles que les résonances principales et secondaires ou les seuils d'amplitude d'entrée en régime non-linéaire sont alors exhibés. De même, les courbes fréquentielles tracées révèlent la dépendance fréquence/amplitude de vibration (systèmes raidissant ou mollissant) et quantifient les fréquences et amplitudes de saut de chaque composante harmonique. Les résultats, obtenus avec le logiciel en ligne Manlab développé par le LMA, confirment d'une part les capacités prédictives de la méthodologie élaborée et, d'autre part, valident son apport dans l'élaboration de techniques de détection et de dimensionnement non-linéaires de microbulles. Enfin, les potentialités multiples de cette approche pourraient accélérer la conception des futurs agents de contraste ultrasonores et permettre la définition de critères d'optimalité de leur activation.

## 1 Introduction

La caractérisation de milieux diphasiques (microbulles) par voie ultrasonore est d'un grand intérêt pour de nombreuses applications. D'autre part, Lorsque les sollicitations deviennent importantes (typiquement 50 - 100 kPa), le comportement des agents de contraste présente des non-linéarités non négligeables pouvant être exploitées pour l'imagerie et la thérapie. L'aspect non linéaire des équations décrivant le comportement d'une bulle de gaz ou d'un agent de contraste est abordé dans cet article à l'aide de la méthode d'équilibrage harmonique [1]. Après un bref rappel de son principe, elle est appliquée à l'étude d'une bulle de gaz (équation de Rayleigh-Plesset) à l'aide du logiciel MANLAB développé sous MATLAB® [2]. Dans le cas des agents de contraste, les modèles de Hoff et de Marmottant sont considérés afin de distinguer les influences respectives des coques polymériques et lipidiques.

## 2 Méthode de l'équilibrage harmonique

Soit un système physique dont le comportement est gouverné par l'équation non linéaire

$$\ddot{x} + f_{NL}(x, \dot{x}) = 0. \quad (1)$$

La méthode de l'équilibrage harmonique consiste à rechercher les solutions périodiques de l'équation (1) sous

la forme d'une série de Fourier tronquée

$$x(t) = \sum_{k=0}^H (A_k \cos k\Omega t + B_k \sin k\Omega t), \quad (2)$$

en équilibrant les termes relatifs aux différentes composantes fréquentielles ( $0 \leq k \leq H$ ), tout en négligeant les composantes supérieures ( $k > H$ ).

### 2.1 Approche analytique

Le comportement d'une bulle de gaz dans un liquide incompressible est régi par l'équation (modèle "RPNNP")

$$\rho_L \left[ R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right] = \left( P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\zeta} - \frac{2\sigma}{R} - 4\eta_L \frac{\dot{R}}{R} - P_0 + P \cos \Omega t, \quad (3)$$

$R$  étant le rayon de la bulle et  $R_0$  son rayon à l'équilibre. Pour cette étude "manuelle", on se limite dans un premier temps aux oscillations libres d'une bulle de gaz sans prendre en compte la tension de surface ni la viscosité (i.e.  $P = \sigma = \eta = 0$ ), soit

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{P_0}{\rho_L} \left( \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\zeta} - 1 \right). \quad (4)$$

Afin de développer la méthode d'équilibrage harmonique, nous nous plaçons dans le cas d'oscillations de

faibles amplitudes pour lesquelles le rayon de la bulle s'écrit  $R = R_0(1 + x)$  et nous développons l'équation à l'ordre 3 en  $x$ . L'équation (4) s'écrit alors

$$\ddot{x} + x\ddot{x} + \frac{3}{2}\dot{x}^2 + ax - bx^2 + cx^3 = 0, \quad (5)$$

avec  $a = \frac{3\zeta P_0}{\rho_L R_0^2}$ ,  $b = \frac{3\zeta(3\zeta+1)P_0}{2\rho_L R_0^2}$  et  $c = \frac{3\zeta(3\zeta+1)(3\zeta+2)P_0}{6\rho_L R_0^2}$ .

### 2.1.1 Recherche des solutions sous la forme

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi) = A_1 \cos \phi$$

Les solutions périodiques de l'équation (5) sont ici exprimées sous la forme réduite  $x = A_1 \cos(\Omega t + \varphi) = A_1 \cos \phi$ . En injectant cette solution, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & -\omega^2 A_1 \cos \phi - \frac{1}{2}\omega^2 A_1^2 (1 + \cos 2\phi) \\ & + \frac{3}{4}\omega^2 A_1^2 (1 - \cos 2\phi) + a A_1 \cos \phi - \\ & \frac{1}{2}b A_1^2 (1 + \cos 2\phi) + \frac{1}{4}c A_1^3 (\cos 3\phi + 3 \cos \phi) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

L'équilibrage des termes en  $\cos \phi$  conduit à  $\omega^2 = a + \frac{3}{4}c A_1^2$ . La relation amplitude-fréquence s'écrit donc

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 + \frac{(3\zeta+1)(3\zeta+2)}{8} A_1^2 \right), \quad (7)$$

avec  $\omega_0^2 = a = \frac{3\zeta P_0}{\rho_L R_0^2}$  pulsation associée à la fréquence de Minnaert. Dans le cas d'un comportement isotherme du gaz ( $\zeta = 1$ )  $\omega^2 = \omega_0^2 (1 + \frac{5}{8} A_1^2)$ , avec  $P_0 = 1,013.10^5 Pa$ ,  $\rho_L = 10^3 kg/m^3$ ,  $R_0 = 2.10^{-6} m$  et  $\omega_0 = 8,72.10^6 rad/s$ . Le système serait donc raidissant : la fréquence propre des oscillations augmente avec leur amplitude.

Toutefois, on ne peut pas se satisfaire de ce résultat. En effet, mené ici avec une solution de la forme  $A_1 \cos \phi$ , le raisonnement revient à approximer l'équation (5) par une équation de type Duffing  $\ddot{x} + ax + cx^3 = 0$  car les autres termes ( $x\ddot{x}$ ,  $\dot{x}^2$  et  $x^2$ ) sont en  $(\cos \phi)^2$  ou  $(\sin \phi)^2$ . Ils ne font donc pas apparaître de terme en  $\cos \phi$  et ne sont pas pris en compte lors de l'étape d'équilibrage.

### 2.1.2 Recherche des solutions sous la forme

$$x = A_0 + A_1 \cos \phi$$

Afin d'améliorer la prise en compte des termes non linéaires, un terme supplémentaire est inclus dans l'expression de la solution et l'on reprend la démarche d'équilibrage harmonique en identifiant d'une part les termes constants et d'autre part les termes en  $\cos \phi$ . On fait de plus l'hypothèse que le terme en  $\cos \phi$  est le terme prépondérant, soit  $A_0 \ll A_1$ . Seuls les termes faisant intervenir  $A_1$ ,  $A_1^2$  et  $A_0$  sont conservés, ce qui conduit au système

$$\begin{cases} A_0 = \frac{b}{2a} A_1^2 - \frac{1}{4a} \omega^2 A_1^2, \\ (1 + A_0) \omega^2 = a - 2b A_0 + \frac{3c}{4} A_1^2. \end{cases} \quad (8)$$

En reportant l'expression de  $A_0$  dans la deuxième équation, on obtient une équation bicarrée en  $\Omega$

$$\frac{A_1^2}{4a} \omega^4 - \omega^2 + a \left[ 1 + \left( \frac{3c}{4a} - \frac{b^2}{a^2} \right) A_1^2 \right] = 0, \quad (9)$$

dont la solution est dans le cas isotherme ( $\zeta = 1$ )

$$\omega^2 = \frac{2\omega_0^2}{A_1^2} \left( 1 + \sqrt{1 - A_1^2 + \frac{3}{2} A_1^4} \right). \quad (10)$$

Le système est mollissant, comme le montre la figure 1 représentant la courbe amplitude-fréquence obtenue à partir de l'équation (10).

Le choix du nombre de termes retenus dans le développement en série de Fourier apparait donc déterminant dans l'utilisation de la méthode de l'équilibrage harmonique. La prise en compte d'un nombre suffisant d'harmoniques est nécessaire pour décrire le comportement du système : il est d'usage de choisir  $H$  supérieur ou égal à l'ordre des non-linéarités présentes dans l'équation, typiquement  $H \leq 2$  ( $H \leq 3$ ) pour des non-linéarités quadratiques (cubiques).

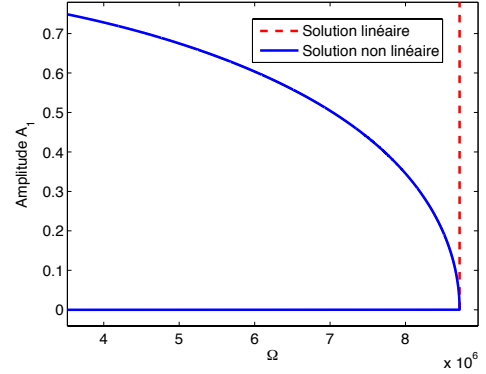


FIGURE 1 – Relation amplitude-fréquence pour une solution de la forme  $A_0 + A_1 \cos \phi$

La prise en compte des termes non linéaires de l'équation (4) reste encore insuffisante car ils ont une contribution en  $\cos 2\phi$  qui a été négligée ici. L'étape suivante serait donc l'ajout du terme  $A_2 \cos 2\phi$  dans l'expression de la solution. L'équilibrage du terme constant et des termes en  $\cos \phi$  et  $\cos 2\phi$  conduit, en ne conservant que les termes en  $A_1$ ,  $A_1^2$ ,  $A_0$  et  $A_2$ , à une équation d'ordre 6 en  $\omega$  qui s'avère difficilement exploitable...

Ainsi, au vu de l'équation étudiée, la méthode d'équilibrage harmonique serait réductrice si l'on ne disposait d'outil numérique dédié.

## 2.2 L'outil MANLAB

On considère un système de  $n$  équations différentielles de la forme

$$\dot{Y} = f(Y, \lambda), \quad (11)$$

où  $Y$  est le vecteur contenant les  $n$  inconnues et  $\lambda$  un paramètre (la fréquence d'excitation par exemple). MANLAB permet de suivre les solutions périodiques en fonction de  $\lambda$  en combinant la méthode d'équilibrage harmonique avec une technique de continuation, la méthode asymptotique numérique (MAN). L'originalité de MANLAB réside en l'"automatisation" de l'équilibrage harmonique, quelque soit le nombre  $H$  d'harmoniques considérés.

Dans un premier temps la méthode de l'équilibrage harmonique est utilisée pour transformer le système d'équations aux dérivées partielles en un système algébrique de  $(2H + 1) \times n$  équations ayant pour inconnues les amplitudes du développement en

série de Fourier ainsi que le paramètre  $\lambda$ . Cependant, décomposer  $Y$  sous la forme (2) et l'injecter dans le système d'équations (11) peut vite s'avérer fastidieux. L'idée est de modifier le système initial (11) pour le mettre sous une forme **quadratique** nettement plus propice à l'application de l'équilibrage harmonique. Il faut donc remanier le système d'équations, en définissant si besoin de nouvelles inconnues, afin d'obtenir un nouveau système de  $N$  équations sous la forme

$$m(\dot{Z}) = c(t) + l(Z) + q(Z, Z), \quad (12)$$

où  $Z$  est le nouveau vecteur des inconnues,  $c$  est un vecteur indépendant de  $Z$ ,  $l(\cdot)$  et  $m(\cdot)$  sont des opérateurs linéaires et  $q(\cdot, \cdot)$  est un opérateur bilinéaire. Le vecteur  $Z$  est généralement de dimension  $N > n$  car il est souvent nécessaire de définir de nouvelles variables pour passer du système initial à la forme quadratique (12).

**Dans un deuxième temps** la méthode asymptotique numérique est utilisée pour résoudre le système obtenu après application de l'équilibrage harmonique. La MAN permet de résoudre des systèmes algébriques non linéaire du type

$$R(U, \lambda) = 0, \quad (13)$$

où  $R$  et  $U$  sont de même dimension et  $\lambda$  est un paramètre. Le système a donc plus d'inconnues que d'équations et est résolu par une méthode de continuation afin de suivre les branches de solution  $U$  en fonction de  $\lambda$ . Le principe de la MAN consiste à développer les inconnues et le paramètre sous forme de séries entières d'un paramètre de chemin, ce qui permet de décomposer le système (13) en une série de problème linéaires. D'un point de vue pratique, l'utilisation de MANLAB requiert la connaissance des opérateurs  $m(\cdot)$ ,  $c$ ,  $l(\cdot)$  et  $q(\cdot, \cdot)$  ainsi que d'un point de départ  $U_0$ .

## 2.3 Application à la bulle de gaz

MANLAB est utilisé pour étudier les solutions périodiques de l'équation (3). On se limite au cas du comportement isotherme du gaz ( $\varsigma = 1$ ) afin de ne travailler qu'avec des puissances entières de la variable  $R$ . L'équation doit être remaniée pour se mettre sous la forme quadratique désirée.

### 2.3.1 Mise sous forme quadratique

On pose  $\tau = \omega t$  et on note  $\frac{dX}{d\tau} = X'$ . On définit également les variables  $u = R/R_0$ ,  $v = R'/R_0$ ,  $x = 1/u$ ,  $y = x^2$ ,  $z = v^2$  et  $f = P \cos \omega t$ . L'équation (3) devient alors

$$v' = -\frac{P_0}{\rho_L \omega^2 R_0^2} x - \frac{2\sigma/R_0}{\rho_L \omega^2 R_0^2} y + \frac{P_0 + 2\sigma/R_0}{\rho_L \omega^2 R_0^2} y^2 - \frac{4\eta_L}{\rho_L \omega R_0^2} yv - \frac{3}{2} xz + \frac{1}{\rho_L \omega^2 R_0^2} x f. \quad (14)$$

On définit les constantes suivantes

$$A = \frac{P_0}{\rho_L \omega^2 R_0^2}, \quad B = \frac{2\sigma/R_0}{\rho_L \omega^2 R_0^2}, \quad C = \frac{4\eta_L}{\rho_L \omega R_0^2} \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{\rho_L \omega^2 R_0^2}, \quad (15)$$

avec  $P_0 = 1,013.10^5 \text{ Pa}$ ,  $\rho_L = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\sigma = 72.10^{-3} \text{ N/m}$ ,  $\eta_L = 10^{-3} \text{ Pa.s}$ ,  $\omega = 10^6 \text{ rad/s}$ ,  $R_0 =$

$2.10^{-6} \text{ m}$ . L'équation (3) peut donc s'écrire sous la forme d'un système du premier ordre

$$\begin{cases} u' = & v \\ v' = & -Ax - By + \Gamma \\ 0 = & 1 & -xu \\ 0 = & & y & -x^2 \\ 0 = & & z & -v^2 \\ 0 = & -P \cos \Omega t & +f \end{cases} \quad (16)$$

où  $\Gamma = (A + B)y^2 - Cvy - \frac{3}{2}xz + Dxf$ . En posant  $Z = [u, v, x, y, z, f]^t$ , on peut aisément identifier les opérateurs permettant d'utiliser le formalisme

$$m(Z') = c(t) + l(Z) + q(Z, Z). \quad (17)$$

### 2.3.2 Résultats

On rappelle que le vecteur  $Z$  est décomposé sous la forme (2) et donc que

$$u = \frac{R}{R_0} = u_0 + \sum_{k=1}^H (u_{ck} \cos k\Omega t + u_{sk} \sin k\Omega t). \quad (18)$$

Dans la suite la grandeur définie par  $A_i = \sqrt{u_{ci}^2 + u_{si}^2}$  est appelée amplitude du ième harmonique.

L'évolution de l'amplitude  $A_1$  en fonction de la pulsation  $\Omega$  est représentée sur la figure 2 dans le cas où  $\sigma = 0$ ,  $\eta_L = 0$ ,  $P = 0,01 \text{ Pa}$ ,  $R = 2\mu\text{m}$  et pour différentes valeurs de  $H$ . Ces courbes représentent la réponse libre du système (l'amplitude du terme forçant est très faible comparée aux autres termes de l'équation). Il s'agit de la relation entre l'amplitude des oscillations et la pulsation de ces oscillations en l'absence d'excitation. Cette courbe amplitude-fréquence reste tangente au mode linéaire puis s'incline vers la gauche : il y a mollissement du système.

Ces courbes confirment que le choix du nombre d'harmoniques est déterminant pour la prise en compte des non linéarités du système étudié. Tous les résultats qui seront présentés par la suite ont été obtenus en choisissant  $H = 5$ .

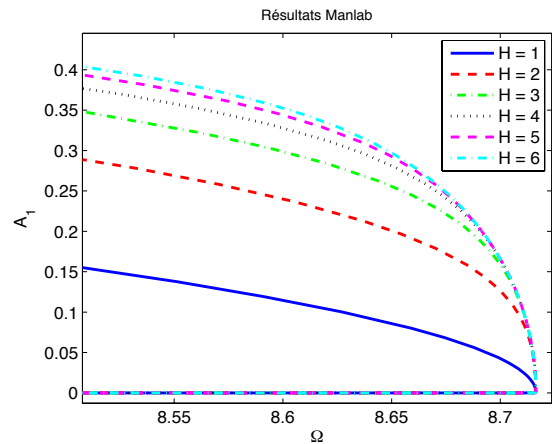


FIGURE 2 – Influence du nombre d'harmoniques considérés, ( $\Omega$  en Mrad/s)

Changer la valeur du rayon  $R_0$  de la bulle de gaz ne modifie pas l'allure de la courbe amplitude-fréquence

comme on peut l'observer sur la figure 3. Seule la valeur de  $\Omega$  pour laquelle l'amplitude devient non nulle change. Cette valeur correspond à la pulsation propre du système linéaire associé à l'équation (3).

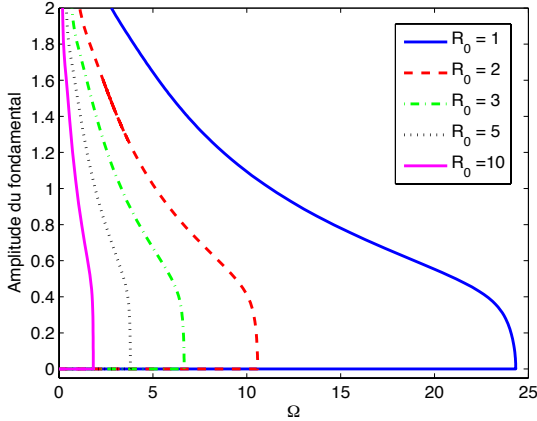


FIGURE 3 – Influence du rayon  $R_0$  de la bulle de gaz (avec tension de surface)

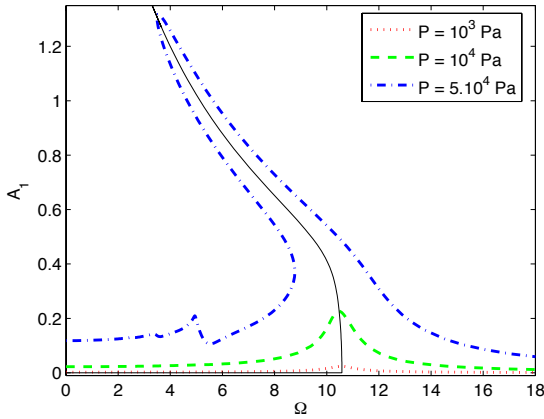


FIGURE 4 – Réponse forcée du système amorti (traits discontinus) - Réponse libre du système non amorti (trait plein)

La prise en compte de la viscosité du liquide (cas de l'eau,  $\eta_L = 10^{-3} Pa.s$ ) conduit à l'obtention d'un pic de résonance (figure 4) associé à un comportement hystérique. La figure 5 montre l'évolution de l'amplitude des premier, deuxième et troisième harmoniques lorsque l'amplitude du terme forçant est  $P = 5.10^4 Pa$ . La résonance principale apparaît pour  $\Omega = \omega_0$  mais il y a également des résonances secondaires, dites superharmoniques, lorsque la pulsation d'excitation  $\Omega$  vaut  $\omega_0/2$  ou  $\omega_0/3$ . L'amplitude du deuxième harmonique devient plus grande que celle du premier harmonique à la résonance secondaire  $\Omega = \omega_0/2$ . Il est ainsi intéressant d'émettre une onde acoustique à la pulsation  $\Omega = \omega_0/2$  avec une amplitude suffisante ( $P \leq 50kPa$ ) pour faire de l'imagerie non linéaire de bulles de gaz dans l'eau. En revanche, si l'amplitude du terme forçant est inférieure à  $10 kPa$ , la prise en compte de la viscosité de l'eau "gomme" le caractère non linéaire du système et un modèle d'oscillateur linéaire harmonique amorti est suffisant.

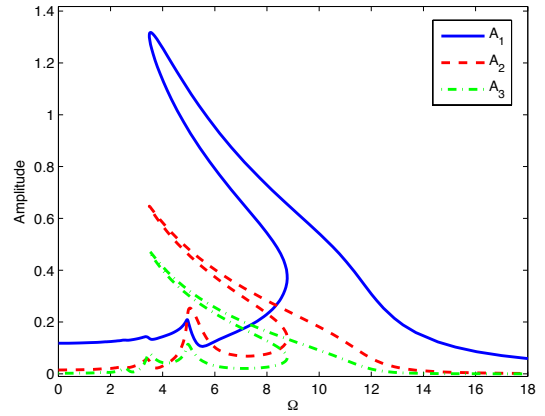


FIGURE 5 – Amplitude des premier, deuxième et troisième harmoniques -  $P = 5.10^4 Pa$

## 2.4 Agent de contraste - Modèle de Hoff

On considère un Agent de Contraste (AC) dont la coque a une épaisseur faible devant les rayons intérieur et extérieur, i.e.  $e_S \ll R$ , ce qui permet de simplifier l'équation du mouvement

$$\rho_L \left[ R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right] = \left( P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\zeta} - \frac{2\sigma}{R} - 4\eta_L \frac{\dot{R}}{R} - P_0 + P \cos \Omega t - 12\eta_S R_0^2 e_S \frac{\dot{R}}{R^4} - 12\mu_S \frac{R_0^2 e_S}{R^3} \left( 1 - \frac{R_0}{R} \right), \quad (19)$$

avec  $e_S$  l'épaisseur de la coque,  $\mu_S$  et  $\eta_S$  les paramètres viscoélastiques du matériau constituant la coque. Le comportement est encore supposé isotherme ( $\zeta = 1$ ).

### 2.4.1 Mise sous forme quadratique

Les équations (3) et (19) ne diffèrent que par les deux derniers termes qui correspondent à la contribution de la coque. Afin d'obtenir la forme quadratique associée à l'équation (19), on utilise les variables et constantes définies au paragraphe 2.3.1 et on définit deux variables supplémentaires  $\alpha = y^2$  et  $\beta = \alpha x$  ainsi que deux constantes  $E = \frac{12\mu_S e_S}{\rho_L \omega^2 R_0^3}$  et  $F = \frac{12\eta_S e_S}{\rho_L \omega R_0^3}$ . L'équation (19) est alors équivalente au système suivant

$$\begin{cases} u' = & v \\ v' = & \Psi_H + \Gamma_H \\ 0 = & 1 - xu \\ 0 = & y - x^2 \\ 0 = & z - v^2 \\ 0 = & -P \cos \Omega t + f \\ 0 = & \alpha - y^2 \\ 0 = & \beta - \alpha x \end{cases} \quad (20)$$

où  $\Psi_H = -Ax - By + (A + B - E)\alpha$ , et  $\Gamma_H = -Cvy - \frac{3}{2}xz + Dxf - F\beta v$ .

Hoff a utilisé ce modèle pour caractériser un AC constitué d'une coque en polymère et d'un noyau d'air. Considérant que l'épaisseur de la coque vaut 5% du rayon  $R_0$ , la comparaison entre les prédictions théoriques et les mesures expérimentales conduit aux valeurs des paramètres viscoélastiques de la coque  $\mu_S = 11,6 MPa$  et  $\eta_S = 0,48 Pa.s$  [3].

## 2.4.2 Résultats

On s'intéresse tout d'abord à l'influence du module de cisaillement  $\mu_S$  de la coque, la viscosité  $\eta_S = 0$  étant nulle. La figure 6 montre l'évolution de l'amplitude  $A_1$  pour un AC de rayon  $R_0 = 3 \mu m$  de module de cisaillement  $\mu_S$  valant 11,6, 50, 88 et 150 MPa. L'augmentation de  $\mu_S$  entraîne une augmentation de la rigidité de la coque, ce qui réduit le comportement non linéaire.

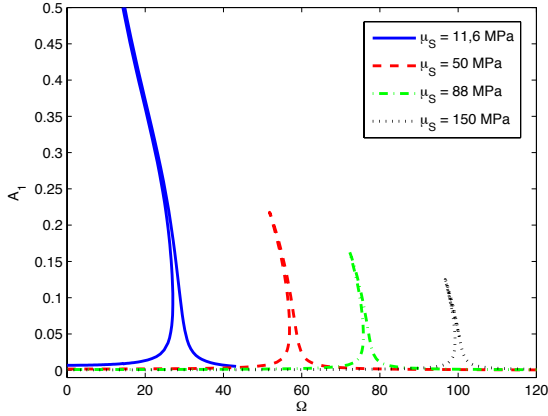


FIGURE 6 – Influence du module de cisaillement sur l'amplitude  $A_1$

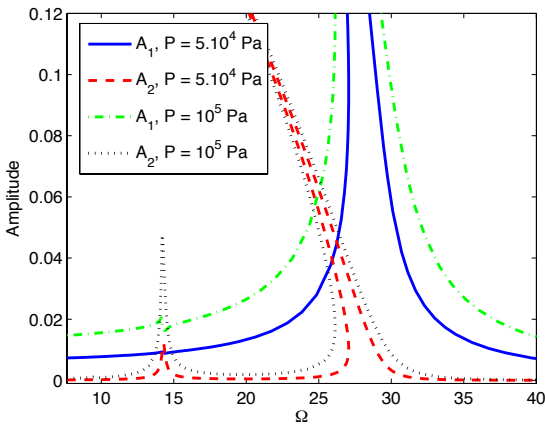


FIGURE 7 – Amplitude des premier et deuxième harmoniques - zoom

L'évolution de l'amplitude des premier et deuxième harmoniques est représentée sur la figure et 7 pour deux valeurs de l'amplitude  $P$  du terme forçant ( $P = 5.10^4 Pa$  et  $P = 10^5 Pa$ ). La résonance principale est largement prépondérante devant la résonance secondaire superharmonique. Conformément à la bulle nue, si l'amplitude  $P$  du terme forçant est suffisamment grande (de l'ordre de 100 kPa), l'amplitude du deuxième harmonique demeure supérieure à celle du premier harmonique.

Lorsque le module de cisaillement est fixé ( $\mu_S = 11,6 MPa$ ), la prise en compte de la viscosité dans la coque conduit à une forte réduction de l'amplitude des oscillations comme on peut l'observer sur la figure 8. Le phénomène de résonance est quasiment inexis-

tant pour  $\eta_S = 0,48 Pa.s$ , ce qui est en accord avec les résultats de Hoff et al [3].

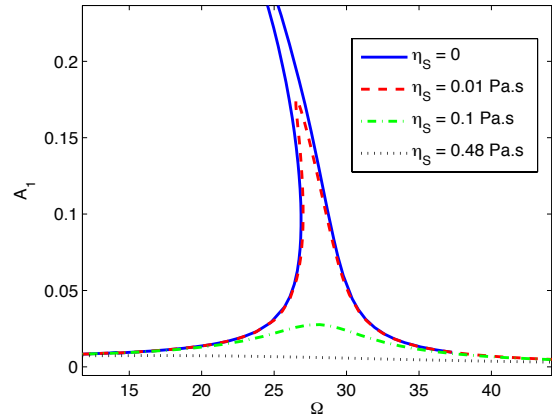


FIGURE 8 – Influence de la viscosité sur l'amplitude  $A_1$

## 2.5 AC - Modèle de Marmottant

On s'intéresse maintenant à un agent de contraste dont le comportement peut être décrit par l'équation

$$\rho_L \left[ R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right] = \left( P_0 + \frac{2\sigma(R_0)}{R_0} \right) \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\kappa} - \frac{2\sigma(R)}{R} - 4\eta_L \frac{\dot{R}}{R} - 4\kappa_S \frac{\dot{R}}{R^2} - P_0 + P \cos \Omega t. \quad (21)$$

On se limite au cas du comportement élastique de l'interface pour lequel la tension de surface a pour expression  $\sigma(R) = \chi_S \left( \frac{R^2}{R_f^2} - 1 \right)$ .

### 2.5.1 Mise sous forme quadratique

En posant  $g = xy$  et  $Z = [u, v, x, y, z, f, g]^t$  (les variables  $u, v, x, y, z$  et  $f$  restent inchangées)

le système peut être réécrit sous la forme quadratique

$$\begin{cases} u' = & v \\ v' = & -\check{A} & -\check{B}x + \check{C}y & +\check{\Gamma} \\ 0 = & 1 & & -xu \\ 0 = & & y & -x^2 \\ 0 = & & z & -v^2 \\ 0 = & -P \cos \Omega t & +f & \\ 0 = & & g & -xy \end{cases} \quad (22)$$

où  $\check{\Gamma} = -\frac{3}{2}xz + (\check{B} + \check{C}\check{D})y^2 - \check{E}vy - \check{F}gv + \check{G}xf$  et

$$\begin{aligned} \check{A} &= \frac{2\chi_S}{\rho_L \omega^2 R_0 R_f^2}, \check{B} = \frac{P_0}{\rho_L \omega^2 R_0^2}, \check{C} = \frac{2\chi_S}{\rho_L \omega^2 R_0^3}, \\ \check{D} &= \frac{R_0^2}{R_f^2} - 1, \check{E} = \frac{4\eta_L}{\rho_L \omega R_0^2}, \\ \check{F} &= \frac{4\kappa_S}{\rho_L \omega R_0^3}, \check{G} = \frac{1}{\rho_L \omega^2 R_0^2}, \end{aligned} \quad (23)$$

### 2.5.2 Résultats

La figure 9 montre les réponses libre ( $P = 10^{-2} Pa$ ) et forcée ( $P = 5.10^4 Pa$ ) du système non amorti ( $R_0 = R_f = 1,98 \mu m$ ,  $\chi_S = 0,55 N/m$  et  $\eta_L = \kappa_S = 0$ ) ainsi que la réponse forcée ( $P = 5.10^4 Pa$ ) du système amorti

lorsque l'on prend seulement en compte la viscosité du liquide ( $\eta_L = 10^3 Pa.s$ ) puis lorsque l'on considère aussi la viscosité de l'interface ( $\kappa_S = 7,2 \cdot 10^{-9} N$ ). Les valeurs des différents paramètres du modèle sont issues de [4] et [5]. Le système est raidissant au début puis mollissant à

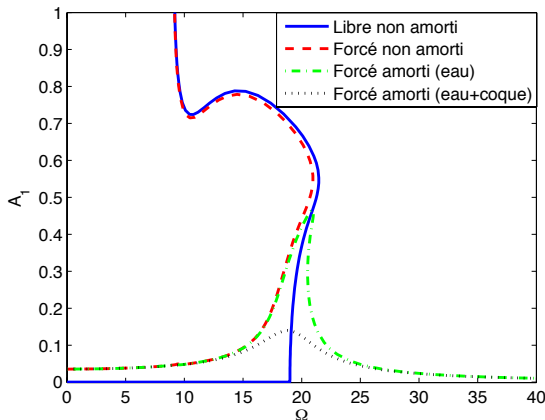


FIGURE 9 – Influence du module de cisaillement sur l'amplitude  $A_1$

partir d'une certaine amplitude (de l'ordre de 0,7). Cependant, la viscosité diminue considérablement l'amplitude des oscillations et atténue le caractère non linéaire du système. Ce résultat est en accord avec les travaux de van der Meer et al. qui ont montré qu'un modèle d'oscillateur harmonique amorti, obtenu par linéarisation du modèle de Marmottant, suffit à décrire les oscillations radiales d'un AC soumis à une excitation acoustique d'amplitude 40 kPa (caméra Brandaris) [5].

L'évolution des amplitudes du premier et deuxième harmoniques en fonction de  $\Omega$  est représentée sur la figure 10 pour différentes valeurs de l'amplitude  $P$  du terme forçant. On identifie clairement la résonance principale à  $\Omega = \omega_0$  ainsi qu'une résonance secondaire à  $\Omega = \omega_0/2$ . Une deuxième résonance secondaire apparaît à  $\Omega = \omega_0/3$  lorsque  $P$  est supérieure à 100 kPa. Contrairement aux deux exemples précédents (pour des valeurs de  $P$  similaires), l'amplitude du deuxième harmonique n'est pas supérieure à celle du premier harmonique à la résonance super-harmonique  $\Omega = \omega_0/2$ . Par contre, l'amplitude du deuxième harmonique est plus grande à la résonance super-harmonique qu'à la résonance principale, ce qui n'a pas été observé précédemment.

### 3 Conclusion

On note dans la littérature un intérêt grandissant dans l'exploitation du caractère non linéaire des microbulles et des agents de contraste. D'un point de vue théorique, le choix de la loi de comportement du matériau constituant la coque détermine le caractère raidissant (Skalac) ou mollissant (Mooney-Rivlin) de l'AC.

A l'aide du logiciel Manlab, nous avons mis en évidence le caractère mollissant d'une bulle de gaz (modèle RPNNP) et d'un agent de contraste à coque solide viscoélastique de faible épaisseur (modèle de Hoff). Lorsque la coque est modélisée par une interface sans épaisseur, le comportement est légèrement rai-

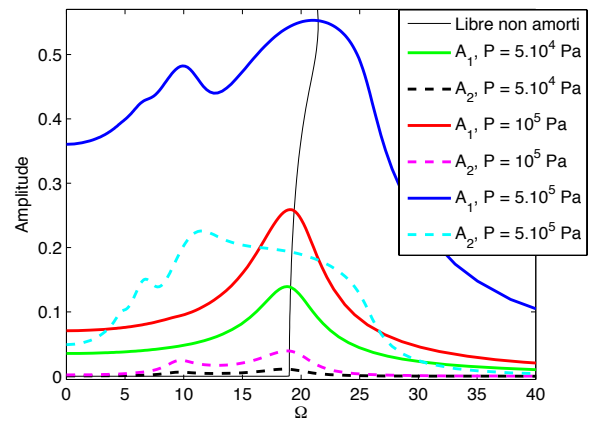


FIGURE 10 – Influence du module de cisaillement sur l'amplitude  $A_1$

dissant puis mollissant (modèle de Marmottant). Par ailleurs, on montre que les pertes d'origine visqueuse dans la coque peuvent atténuer considérablement le comportement non-linéaire de l'agent de contraste, même à forte amplitude ((50 - 500 kPa). Compte tenu des résultats obtenus, MANLAB s'avère être un outil adapté à l'étude des équations non-linéaires du type Rayleigh-Plesset pouvant s'écrire sous forme quadratique. Alors, l'influence des paramètres des modèles sur le degré de non-linéarité peut être étudié de manière systématique (prédiction), les branches instables sont révélées.

### Références

- [1] Pauzin M.C., "Modélisation du comportement dynamique d'un agent de contraste ultrasonore", *Thèse de l'Université de Provence* (Nov. 2009)
- [2] Cochelin B., Vergez C., "A high order purely frequency harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions", *Journal of Sound and Vibration*, 324, 243-262 (2009)
- [3] Hoff L., Sontum P.C., Hovem J.M., "Oscillations of polymeric microbubbles : effect of the encapsulating shell", *J. Acoust. Soc. Am.* 107 (4), 2272-2280 (2000)
- [4] Marmottant P., Van der Meer S., Emmer M., Versluis M., de Jong N., Hilgenfeldt S., Lohse D., "A model for large amplitude oscillations of coated bubbles accounting for buckling and rupture", *J. Acoust. Soc. Am.* 118 (6), 3499-3505 (2005)
- [5] van der Meer S. M., Dollet B., Voormolen M. M., Chin C. T., Bouakaz A., de Jong N., Versluis M., and Lohse D., "Microbubble spectroscopy of ultrasound contrast agents", *J. Acoust. Soc. Am.* 121, 648-656 (2007)