



# Exploration systématique des régimes périodiques des instruments à anche

Sami Karkar, Christophe Vergez, Bruno Cochelin

► **To cite this version:**

Sami Karkar, Christophe Vergez, Bruno Cochelin. Exploration systématique des régimes périodiques des instruments à anche. Société Française d'Acoustique - SFA. 10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. 2010. <hal-00469209v2>

**HAL Id: hal-00469209**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00469209v2>**

Submitted on 30 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# 10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

## Exploration systématique des régimes périodiques des instruments à anche

Sami Karkar<sup>1,2\*</sup>, Christophe Vergez<sup>1</sup>, Bruno Cochelin<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS UPR 7051 – {karkar|vergez}@lma.cnrs-mrs.fr

<sup>2</sup>Aix-Marseille Université <sup>3</sup>Ecole Centrale Marseille – cochelin@centrale-marseille.fr

Le fonctionnement des instruments à anche repose sur le couplage d'un système exciteur non linéaire (l'anche modulant le débit d'air entrant) et d'un résonateur acoustique linéaire (la colonne d'air contenue dans l'instrument) décrit par son impédance d'entrée.

Pour obtenir des informations sur les fréquences de jeu possibles, on analyse souvent l'impédance en termes de fréquences de résonance, hauteur et largeur des pics ou des creux. C'est le cas dans plusieurs travaux récents sur l'optimisation de forme par exemple.

Lorsque l'influence de l'excitateur est prise en compte, c'est :

- soit pour des valeurs précises des paramètres de contrôle ;
- soit via des simulations temporelles qui ne laissent percevoir qu'une partie de la dynamique ;
- soit en simplifiant les modèles de façon à accéder via des développements analytiques à une partie du diagramme de bifurcation.

Une exploration plus systématique des comportements d'un instrument donné en fonction des différentes valeurs de ses paramètres nécessite l'apport d'outils numériques spécifiques. Dans ce travail, deux méthodes numériques, dites de continuation, ont été utilisées afin de tracer le diagramme de bifurcation le plus complet possible des régimes périodiques d'un modèle de clarinette. Les branches périodiques stables et instables sont trouvées révélant la diversité des régimes possibles.

Ces outils, classiques dans d'autres domaines de la physique mais très peu utilisés pour l'étude des instruments de musique s'avèrent pertinents et pourront être mis à profit pour des applications en prise avec la facture instrumentale.

## 1 Introduction

Les instruments de musique auto-oscillants sont des systèmes dynamiques complexes, où non-linéarités et non-régularités peuvent rendre les développements analytiques difficiles. Des outils numériques sont alors un moyen d'investigation indispensable afin de mettre au jour les nombreux comportements qui peuvent exister et les transitions entre ces différents régimes. Notamment, les diagrammes de bifurcation, bien que peu usités en physique des instruments de musique, sont d'un grand intérêt. Ils révèlent, par une lecture globale, une vue d'ensemble des différents comportements possibles d'un instrument, mais aussi, dans le détail, une analyse plus poussée de chaque régime.

Dans ce travail, deux méthodes numériques de continuation ont été utilisées afin de tracer le diagramme de bifurcation le plus complet possible des régimes périodiques d'un modèle de clarinette. Les branches périodiques stables et instables sont trouvées révélant la diversité des régimes possibles.

Dans une première partie nous détaillerons la modélisation adoptée pour la clarinette. Puis nous rappellerons le principe de la continuation d'une branche de solution suivant un paramètre pour un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre. Nous présenterons alors deux classes de méthodes numériques permettant de calculer ces branches paramétrées. Enfin, nous mettrons à profit dans la

troisième et dernière partie ces diagrammes de bifurcation, et montrerons quelques unes des informations qu'ils contiennent sur les possibilités de jeu de l'instrument étudié.

## 2 Modélisation de la clarinette

Le modèle utilisé est basé sur celui de Silva [1], qui est une adaptation de la clarinette à modes réels [2]. Il s'agit d'un modèle à trois équations :

- l'équation d'anche, décrivant la mécanique de l'anche comme celle d'un oscillateur mécanique amorti à un degré de liberté, limité en amplitude par la table du bec ;
- l'équation du débit, qui traduit le couplage non linéaire entre débit et pression en fonction de l'ouverture du canal d'anche ;
- l'équation du résonateur, qui modélise l'impédance d'entrée du résonateur.

### 2.1 Équation d'anche

Soit  $h$  la hauteur de l'anche par rapport au bec, comptée positivement quand le canal d'anche est ouvert (cf. figure 1). On notera  $h_0$  sa valeur au repos (quand toutes les autres variables sont nulles  $h = h_0 > 0$ ).

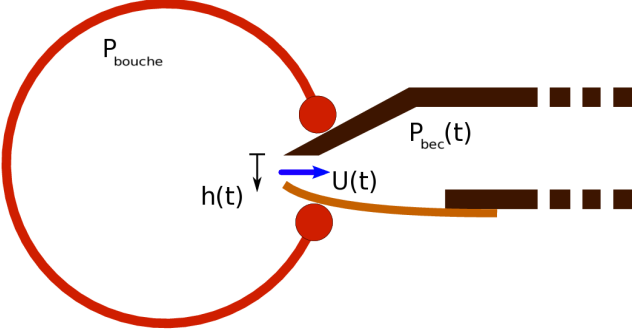


FIG. 1: Schéma d'une clarinette et notations (grandeurs dimensionnées).

L'équation qui régit le mouvement de l'anche est :

$$\ddot{h}(t) = -q_r \omega_r \dot{h}(t) - \omega_r^2 (h(t) - h_0) - \frac{\omega_r^2}{K} \Delta P \quad (1)$$

$$\left[ -K_{table} h(t) - q_{table} \omega_r \dot{h}(t) \text{ si } h < 0 \right]$$

où  $\Delta P = P_{bouche} - P_{bec}(t)$ ,  $\omega_r$  est la pulsation propre de l'anche,  $q_r$  son amortissement,  $K$  traduit la « raideur » de l'anche vis à vis de la différence de pression de part et d'autre, différence comptée positivement lorsqu'elle tend à ouvrir le canal d'anche, et  $K_{table}$  et  $q_{table}$  sont des termes de pénalité en raideur et en amortissement pour traduire la présence du bec en  $h = 0$ .

Si l'on introduit la pression de placage statique  $P_M = h_0 K$  qui est la différence de pression nécessaire pour obtenir  $h = 0$  en statique, on peut adimensionner le système comme suit :  $x = h/h_0$  pour le déplacement de l'anche,  $y = \dot{x}/\omega_r$  pour la vitesse de l'anche,  $p = P_{bec}/P_M$  pour la pression dans le bec de la clarinette,  $\gamma = P_{bouche}/P_M$  pour la pression dans la bouche du musicien, et  $k_{table} = K_{table}/\omega_r^2$  pour la pénalité de raideur. L'équation d'anche adimensionnée s'écrit alors :

$$\frac{1}{\omega_r} \dot{y} = -(x - 1) - (\gamma - p) - q_r y \quad (2)$$

$$\left[ -k_{table} x - q_{table} y \text{ si } x < 0 \right].$$

## 2.2 Équation du débit

L'équation de Bernoulli (valable tant que la longueur du jet est petite devant la longueur d'onde), et l'hypothèse que le jet créé à l'entrée du canal d'anche est totalement dissipé par turbulence sans récupération de pression ([3, 4]), permettent de relier les trois grandeurs à travers la relation non linéaire et non régulière suivante :

$$U(t) = H(h(t)) \text{signe}(\Delta P) W h(t) \sqrt{2|\Delta P|/\rho} \quad (3)$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside,  $W$  la largeur du canal d'anche et  $\rho$  la masse volumique de l'air. On adimensionne ensuite le débit de la façon suivante :  $u = U/U_0$  avec  $U_0 = W h_0 \sqrt{2P_M/\rho}$ . On obtient alors :

$$u(t) = H(x(t)) \text{signe}(\gamma - p(t)) x(t) \sqrt{|\gamma - p(t)|}. \quad (4)$$

## 2.3 Équation du résonateur

On considère la propagation d'une onde acoustique dans un résonateur cylindrique à la sortie duquel on

applique une condition de Dirichlet (ou de rayonnement, au choix), en prenant en compte les pertes viscothermiques. L'impédance d'entrée acoustique  $\tilde{Z}_e(\omega)$  est une fonction caractéristique qui lie la pression acoustique au débit acoustique, à l'entrée de ce résonateur, dans le domaine fréquentiel.

Ce spectre d'impédance présente de fait un certain nombre de pics de hauteurs finies et de largeurs non nulles. On le modélise alors par une somme finie de résonances sous la forme suivante (généralisation d'une somme de lorentziennes) :

$$\tilde{Z}_e(\omega) = \frac{\tilde{P}_{bec}(\omega)}{\tilde{U}(\omega)} = \sum_{n=1}^{N_m} \left( \frac{C_n}{j\omega - s_n} + \frac{C_n^*}{j\omega - s_n^*} \right). \quad (5)$$

Les coefficients complexes  $C_n$  et  $s_n$  sont uniquement fonction de la géométrie du résonateur et de la manière dont on prend en compte la dissipation<sup>1</sup>. Par ailleurs, chaque mode représentant une résonance de  $\tilde{Z}_e(\omega)$ , le nombre de mode  $N_m$  n'est pas nécessairement très élevé, car les résonances à haute fréquence (typiquement au-delà de la fréquence de résonance d'anche) ne jouent qu'un rôle mineur. L'influence de ces autres résonances pourrait toutefois être prise en compte de façon simplifiée par un terme correcteur (cf. [1]).

Surtout, cette représentation permet de traduire la relation (5) dans le domaine temporel sous la forme de  $N_m$  équations différentielles du *premier ordre*, en décomposant la pression sur chacun de ses modes  $P_n$  :

$$\begin{cases} \dot{P}_n(t) - s_n P_n(t) = C_n U(t) \\ P_{bec}(t) = 2 \sum_{n=1}^{N_m} \text{Re}(P_n(t)). \end{cases} \quad (6)$$

L'adimensionnement adopté plus haut conduit à utiliser la grandeur sans dimension  $p_n = P_n/P_M$ , réécrivant alors les relations précédentes comme ceci :

$$\begin{cases} \dot{p}_n(t) = U_0/P_M C_n u(t) + s_n p_n(t) \\ p(t) = 2 \sum_{n=1}^{N_m} \text{Re}(p_n(t)). \end{cases} \quad (7)$$

## 3 Continuation : principes de base et outils numériques

Plutôt que la recherche des solutions du modèle pour des valeurs fixes des paramètres, la continuation permet de suivre l'évolution d'une solution donnée en fonction de la variation d'un paramètre. Nous rappelons dans cette partie quelques principes de base de la théorie des bifurcations, et présentons deux outils numériques permettant la continuation de branches de solutions. On se reportera à [5, 6] pour une présentation détaillée et rigoureuse.

### 3.1 Continuation de solutions stationnaires d'un système différentiel

Considérons en toute généralité un système différentiel non linéaire de la forme

$$\mathbf{u}' = f^{nl}(\mathbf{u}, \lambda) \quad \mathbf{u} \in \mathcal{B} \quad (8)$$

<sup>1</sup>Ils peuvent également être déterminés par ajustement sur un spectre d'impédance mesurée, ce qui permet de remplacer le résonateur cylindrique par n'importe quelle géométrie réelle.

où  $\mathcal{B}$  est un espace de Banach (typiquement les fonctions du temps à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  continues et de carré sommable).

Supposons maintenant que l'on connaisse une solution stationnaire  $\mathbf{u}_0$  pour  $\lambda_0$ . Le paramètre  $\lambda$  est une « constante » dans les équations du système dont on souhaite connaître l'influence sur la solution. A moins de se trouver exactement sur une singularité<sup>2</sup>, on montre qu'il existe un continuum (une branche) de solutions dans un voisinage autour de  $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$ , pour différentes valeurs de  $\lambda$ .

Le problème, pour un point stationnaire, peut être reformulé comme suit :

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = 0. \quad (9)$$

Il s'agit alors d'un système *algébrique* non linéaire. On peut calculer, en ce point  $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$ , la tangente  $\dot{\mathbf{u}}_0 = \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda}\big|_{\lambda_0}$  à la courbe  $\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = 0$  en résolvant le système linéaire suivant :

$$\mathbf{G}_{\mathbf{u}}\big|_{\mathbf{u}_0, \lambda_0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_0 = -\mathbf{G}_{\lambda}\big|_{\mathbf{u}_0, \lambda_0} \quad (10)$$

où  $\mathbf{G}_{\mathbf{u}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{x}_j} \right]$  est la jacobienne du système, et  $\mathbf{G}_{\lambda}$  sa dérivée par rapport au paramètre  $\lambda$ .

### 3.2 Méthode numérique Prédicteur-Correcteur (MPC)

La première méthode que nous avons utilisée dans le travail qui suit est une méthode qui permet de continuer une branche de solution point par point. Elle est implémentée dans le logiciel AUTO écrit par Doedel ([7, 8]). On se reportera à [9, 10] pour plus de détails.

**Paramétrisation** La paramétrisation naturelle en  $\lambda$  est parfois prise en défaut lorsque la branche de solution « tourne » et que la tangente devient verticale. En effet, dans ce cas on a :  $|\mathbf{G}_{\lambda}| \rightarrow \infty$ . Il est alors préférable d'utiliser un paramètre de chemin  $s$ . Il existe de multiples façons de définir un tel paramètre, le choix dépendant essentiellement du type de calcul que l'on souhaite faire.

Posons  $\mathbf{x}(s) = (\mathbf{u}(s), \lambda(s))$ . Dans la suite, nous utiliserons la pseudo-longueur d'arc de Keller ([11]). Connaissant une solution  $\mathbf{x}_0$  et la tangente  $\dot{\mathbf{x}}_0 = \frac{d\mathbf{x}}{ds}(\mathbf{x}_0)$  en ce point, on définit ainsi le paramètre de chemin  $s$  par projection sur  $\dot{\mathbf{x}}_0$  :

$$ds = d\mathbf{x}^T \cdot \dot{\mathbf{x}}_0. \quad (11)$$

**Méthode** L'étape initiale est la suivante : on part d'une solution connue  $\mathbf{x}_i$  et d'un pas  $\Delta s$ . On calcule alors une première approximation du point suivant  $\mathbf{x}_{i+1}$  grâce au prédicteur tangent :

$$\mathbf{x}_{i+1}^{(0)} = \mathbf{x}_i + \Delta s \dot{\mathbf{x}}_i \quad (12)$$

On calcule ensuite la correction  $\Delta \mathbf{x}$  par une méthode de Newton. Cela correspond à résoudre itérativement le

<sup>2</sup>Une singularité, ou point singulier, est un couple particulier  $(x^*, \lambda^*)$  pour lequel la matrice jacobienne de  $\mathbf{G}$  n'est pas inversible :  $\det \mathbf{G}_{\mathbf{u}} = 0$ .

système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{G}_{\mathbf{x}}\big|_{\mathbf{x}_{i+1}^{(k)}} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{G}(\mathbf{x}_{i+1}^{(k)}) \\ \dot{\mathbf{x}}_i^T \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} &= \Delta s - (\mathbf{x}_{i+1}^{(k)} - \mathbf{x}_i)^T \dot{\mathbf{x}}_i \\ \mathbf{x}_{i+1}^{(k+1)} &= \mathbf{x}_{i+1}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)} \end{cases} \quad (13)$$

### 3.3 Méthode Asymptotique Numérique (MAN)

La seconde méthode est une méthode qui permet de calculer des portions continues de branches, chaque portion étant définie par un développement en série entière en fonction d'un paramètre de chemin  $s$ , qui sera cette fois encore la pseudo-longueur d'arc de Keller. Pour plus de détails, il est préférable de se reporter à l'ouvrage [12] qui y est dédié, en particulier le premier chapitre.

**Principe** Connaissant une solution  $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$  du système d'équation (9), on souhaite décrire un morceau de la branche de solution par le développement continu suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(s) &= \mathbf{u}_0 + \sum_{p=1}^{\infty} s^p \mathbf{u}_{0,p} \\ \lambda(s) &= \lambda_0 + \sum_{p=1}^{\infty} s^p \lambda_{0,p} \end{cases} \quad (14)$$

Tous les points devant être solutions de (9), on peut y substituer  $(\mathbf{u}, \lambda)$  par le membre de droite précédent. Avec un développement de Taylor de  $\mathbf{G}$  au voisinage du point solution initial et en ordonnant les termes suivant les puissances croissantes de  $s$ , on montre que l'on obtient une équation pour chaque ordre  $p \geq 1$  de la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}}\bigg|_{\mathbf{u}_0, \lambda_0} \mathbf{u}_{0,p} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \lambda}\bigg|_{\mathbf{u}_0, \lambda_0} \lambda_{0,p} = \mathbf{F}_p^{nl} \quad (15)$$

où  $\mathbf{F}_p^{nl}$  ne dépend que des termes aux ordres strictement inférieurs à  $p$ . L'équation à l'ordre zéro n'apporte rien puisqu'on part d'un point solution, et par ailleurs  $\mathbf{F}_1^{nl}$  est nul.

**Méthode** En pratique on fixe un ordre de troncature  $p_{max}$ , puis partant d'une solution  $(\mathbf{u}_i, \lambda_i)$  on résout pour chaque ordre le système (15), auquel s'adjoint une équation liée à la définition de  $s$ , d'inconnues  $(\mathbf{u}_{i,p}, \lambda_{i,p})$ . On résout donc  $p_{max}$  systèmes linéaires, dont le membre de droite est immédiatement déduit du résultat aux ordres précédents.

La longueur du morceau de branche ainsi calculée est déterminée *a posteriori*, en fonction de la tolérance  $\epsilon$  que l'on s'est fixée. Pour cette portion de courbe, le paramètre de chemin  $s$  varie alors de 0 à  $s_{max}$ , défini par :

$$\forall s \in [0, s_{max}] \quad |\mathbf{G}(\mathbf{u}(s), \lambda(s))| \leq \epsilon. \quad (16)$$

On peut, comme dans la MPC, ajouter une étape de correction avant d'effectuer le pas suivant. Toutefois, l'erreur en fin de portion reste en général bornée même sans cette étape de correction.

### 3.4 Continuation de solutions périodiques

Dans le cas où l'on recherche des solutions périodiques au système (8), comme on ne peut travailler que sur un ensemble de valeurs numériques, il est

nécessaire de discrétiser la solution. Deux choix, principalement, sont alors possibles : soit l'on travaille dans le domaine temporel, soit dans le domaine fréquentiel.

**Discrétisation temporelle** Dans le premier cas on spécifie un certain nombre de points par période, de manière à échantillonner chaque solution dans le domaine temporel. C'est la solution retenue dans le logiciel AUTO cité ci-avant. Les inconnues sont alors les valeurs de la variable multidimensionnelle  $\mathbf{u}$  aux instants  $t_0, t_1, \dots, t_N$  issus de la discrétisation, ainsi que la période. Les équations du système devant être vérifiées tout au long de la solution, on peut les écrire en chacun de ces instants  $t_i$ , en utilisant le schéma de dérivation numérique que l'on souhaite. On ferme alors le nouveau système d'équations par la condition de périodicité  $\mathbf{u}(t_N) = \mathbf{u}(t_0)$  et par une équation de phase. On résout alors ce nouveau système à l'aide de la MPC, comme pour une solution stationnaire mais avec un nombre d'inconnues beaucoup plus grand.

AUTO utilise par ailleurs le principe de la *collocation orthogonale* ([13]), de façon à interpoler la solution dans chaque sous-intervalle par un polynôme de degré fixé à l'avance, les inconnues devenant alors les coefficients de ce polynôme pour chaque sous-intervalle. De plus, il est possible d'y adapter la discrétisation de façon à mailler plus finement les zones de forte variation d'amplitude.

**Discrétisation fréquentielle** Dans le second cas, on souhaite décrire la solution par sa série de Fourier et l'on choisit un ordre de troncature  $H$ . Les inconnues sont alors la fréquence fondamentale et les coefficients de Fourier pour chaque dimension de  $\mathbf{u}$ . On montre que si le système (8) peut s'écrire sous une forme quadratique –à l'aide d'un changement de variable adéquat, par exemple–, il est alors possible d'écrire explicitement les relations entre les coefficients de Fourier, comme c'est le cas dans le logiciel MANLAB couplé à la méthode d'équilibrage harmonique (cf. [14]).

Une fois écrites les relations qui lient ces nouvelles variables, on ferme ce nouveau système d'équations par une condition de phase puis il est résolu à l'aide de la MAN.

## 4 Diagramme de bifurcation de la clarinette

### 4.1 Régime statique

La branche du régime statique (solutions stationnaires) du modèle de clarinette présenté ci-avant est représenté à la figure 2. Elle a été obtenue à l'aide du logiciel AUTO, qui permet également la détection des bifurcations de Hopf<sup>3</sup> et la détermination de la stabilité en calculant les valeurs propres de la matrice jacobienne. Les paramètres et caractéristiques géométriques utilisés pour ce calcul sont :  $L=65 \cdot 10^{-2}\text{m}$  (longueur maximale d'une clarinette classique avec le pavillon), rayon  $r=7 \cdot 10^{-3}\text{m}$ , largeur du canal d'anche  $W=1,5 \cdot 10^{-2}\text{m}$ ,  $\omega_r=2\pi \cdot 1500 \text{ rad/s}$ ,  $q_r=1$ ,  $K=8 \cdot 10^6 \text{ N/m}^3$ ,  $k_{table}=100$ ,

<sup>3</sup>Ce sont les points de départ des branches périodiques.

$q_{table}=10$ ,  $h_0=0,3 \cdot 10^{-3}\text{m}$ ,  $N_m=12$ ,  $\rho=1,185 \text{ kg/m}^3$ . Il est à noter qu'en réalité, le pavillon n'est pas cylindrique et donc la longueur « utile » du résonateur est moindre.

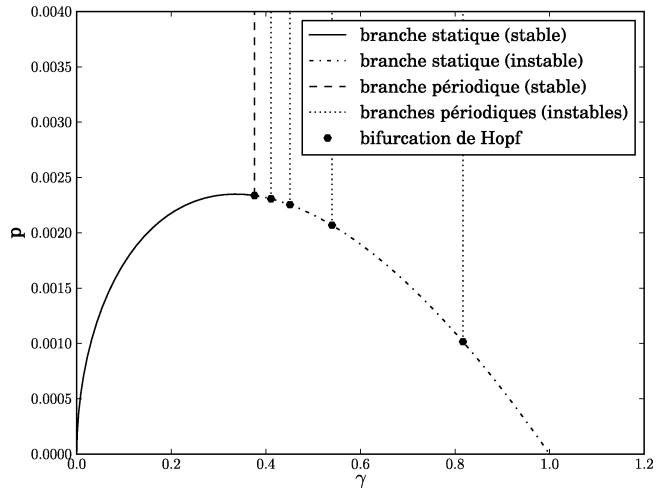


FIG. 2: Branche statique du diagramme de bifurcation d'une clarinette.

La courbe émerge de l'origine avec une tangente verticale, puis atteint une sorte de saturation avant de diminuer jusqu'à rejoindre l'axe des abscisses. Au-delà du point particulier ( $\gamma=1$ ,  $p=0$ ), la branche statique est alors confondue avec l'axe des abscisses.

La première bifurcation de Hopf apparaît pour  $\gamma=0,376$  et donne naissance à une branche périodique de fréquence  $f_0=129 \text{ Hz}$ <sup>4</sup> ce qui correspond presque à la fréquence de résonance la plus basse du résonateur, c'est-à-dire à la note la plus basse que l'on peut jouer, en l'occurrence un Do(2). Au delà de cette valeur du paramètre  $\gamma$ , la branche statique continue mais devient instable, avant de redevenir stable une fois revenue sur l'axe des abscisses. Nous verrons par ailleurs que la branche périodique associée à cette bifurcation est stable à son démarrage, ainsi il s'agit bien du seuil d'oscillation de la clarinette dans cette configuration. Les bifurcations de Hopf suivantes correspondent à des solutions périodiques instables dont les fréquences sont respectivement  $3f_0$ ,  $5f_0$ ,  $7f_0$ , et  $9f_0$ .

### 4.2 Régimes périodiques

Nous avons calculé les branches de solutions périodiques issues de chacune des bifurcations de Hopf détectées sur la branche statique. Elles sont représentées à la figure 3, où l'on a tracé l'amplitude (RMS) de  $p$  en fonction de  $\gamma$ . On observe que toute les branches périodiques se rejoignent en ( $p=0$ ,  $\gamma=1$ ), avec une tangente non nécessairement verticale<sup>5</sup>. La branche issue de la 5<sup>ème</sup> bifurcation de Hopf n'est pas complète : des problèmes de convergence ne nous ont permis que de calculer deux morceaux réduits de cette branche. On constate par ailleurs que seule la branche périodique issue de la première bifurcation de Hopf possède une par-

<sup>4</sup>On la déduit des valeurs propres imaginaires pures calculées.

<sup>5</sup>Il s'agit donc d'un type de bifurcation plus complexe qu'une simple bifurcation de Hopf.

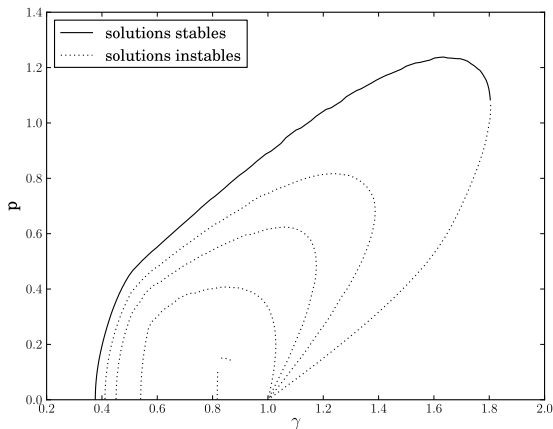


FIG. 3: Diagramme de bifurcation de la clarinette : régimes périodiques émergents de la branche statique.

tie stable. Elle est donc du plus grand intérêt car c'est sur celle-ci que se situent les points de fonctionnement de l'instrument en régime permanent.

### 4.3 Premier régime périodique : détails

On considère à présent la partie stable de la branche du 1<sup>er</sup> régime périodique. Elle est présentée à la figure 4 avec plus de détails : on a tracé la valeur quadratique moyenne de  $p$ , mais aussi sa valeur maximale au cours d'une période, ainsi que la fréquence en fonction de  $\gamma$ . La courbe des maximums de  $p(t)$  permet de se figurer l'amplitude totale d'un cycle pour une valeur de  $\gamma$  donnée.

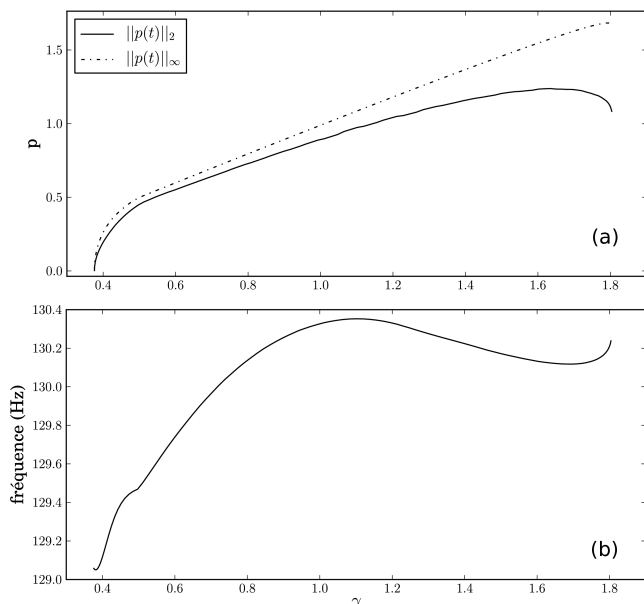


FIG. 4: (a) valeurs moyenne quadratique et maximale de  $p$  au cours d'une période et (b) fréquence en fonction de  $\gamma$  pour la partie stable de la première branche périodique.

La courbe de la valeur moyenne quadratique de  $p$  démarre au seuil d'oscillation  $\gamma_{osc}=0,376$  avec une tangente verticale. Le début de la courbe a la forme de

celle d'une fonction racine carrée<sup>6</sup>. Puis, à partir d'un seuil dit d'anche battante  $\gamma_{bat}=0,498$  la croissance est presque linéaire. La courbe fléchit ensuite légèrement et atteint son maximum au seuil de saturation  $\gamma_{sat}\simeq 1,637$ . C'est en ce point que l'amplitude de la pression dans le bec est maximale et vaut  $p^{max}=1,237$ . En continuant la courbe, on atteint le seuil d'extinction en  $\gamma_{ext}=1,805$  où la courbe se replie. Au-delà de cette valeur de  $\gamma$ , la seule branche stable du système est la branche statique et on a donc extinction brutale du son.

Il est à noter que le maximum de la moyenne quadratique est différent de celui de la courbe des maximums : l'hypothèse d'un signal rectangulaire, souvent utilisée par ailleurs car commode pour des développements analytiques, montre ici ses limites.

À une fonction de transfert près (entre la pression acoustique dans le bec et la pression rayonnée à l'extérieur), on peut ainsi lire la dynamique de jeu de l'instrument (tous les autres paramètres étant par ailleurs fixés)<sup>8</sup>.

La courbe (b) qui montre l'évolution de la fréquence est elle aussi intéressante. On voit que la fréquence donnée par les valeurs propres de la jacobienne à la bifurcation est plutôt en dessous de la fréquence de jeu. Par ailleurs, les variations de fréquence en fonction de la pression dans la bouche du musicien sont de l'ordre de 1,3 Hz, ce qui représente environ 18 cents à 129 Hz. Le musicien aura donc besoin de modifier d'autres paramètres de contrôle comme l'influence de ses lèvres sur l'ouverture du canal d'anche au repos  $h_0$  ou encore l'amortissement de l'anche  $q_r$  pour corriger la justesse.

On pourrait également s'intéresser à l'enrichissement spectral de la pression dans le bec, qui passe d'un signal quasi-sinusoïdal près du seuil d'oscillation à un signal quasi-rectangulaire près du seuil d'anche battante. En effet, la MAN nous fournit l'évolution continue de chaque harmonique de  $p$  en fonction de  $\gamma$ .

### 4.4 Aspect temporel

La forme des signaux de pression et débit à l'entrée du bec, ainsi que de la position de l'anche pour le point de fonctionnement  $\gamma=1$ , issus du calcul sous MANLAB, sont représentés sur une période à la figure (5). On peut observer le placage de l'anche sur le bec pendant presque une demi-période, et l'annulation du débit qui en résulte. Toutefois, ayant limité notre calcul à  $H=50$  harmoniques, il subsiste de petites oscillations autour de la valeur nulle qui sont dues à cette troncature.

## 5 Conclusion et perspectives

La théorie des bifurcations offre un cadre adapté à l'étude des instruments de musique auto-oscillants à anche simple comme la clarinette. Des diagrammes de bifurcation comparables ont été exposés par Dalmont et col. [15] pour le premier registre et dans le cas

<sup>6</sup>Comme attendu pour une bifurcation de Hopf.

<sup>7</sup>La précision est moins bonne pour déterminer l'abscisse de ce maximum que son ordonnée car il est assez plat.

<sup>8</sup>Afin de se ramener à des grandeurs physiques, il est nécessaire de multiplier toutes ces valeurs de pression par la pression de placage statique  $P_M$  qui vaut ici 2400 Pa.

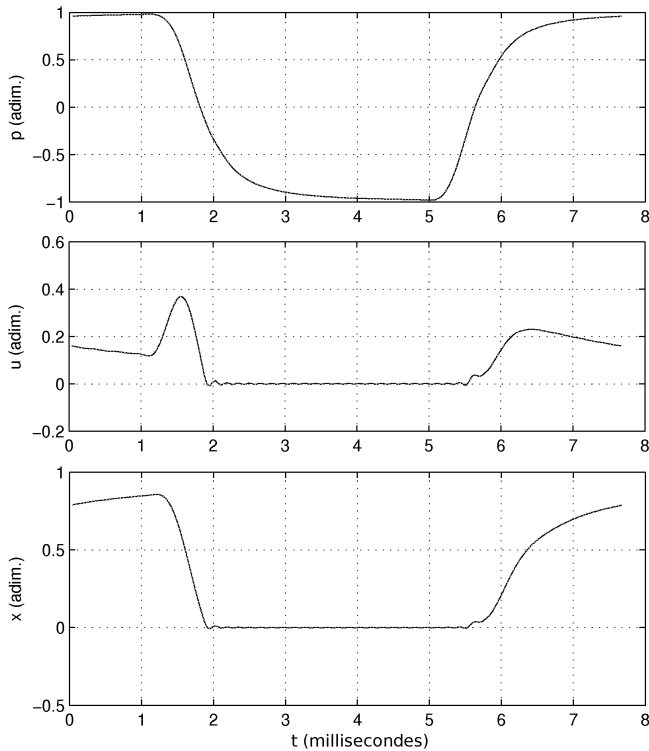


FIG. 5: Forme d'onde des signaux  $p(t)$ ,  $u(t)$  et  $x(t)$  sur une période pour le point de fonctionnement  $\gamma=1$  du régime périodique stable

très simplifié d'une dynamique d'anche instantannée et d'un résonateur cylindrique avec pertes indépendantes de la fréquence (modèle de Raman). L'utilisation d'outils numériques spécifiques permet alors une exploration systématique des régimes périodiques pour des systèmes plus complexes, donnant accès à nombre de seuils et autres grandeurs caractéristiques.

La suite naturelle de ce travail sera d'effectuer la continuation de branches de points particuliers (comme les bifurcations de Hopf) en fonction de deux paramètres. On pourra ainsi étudier l'influence d'un couple de paramètres de contrôle comme  $(\gamma, h_0)$  ou  $(\gamma, q_r)$  sur les seuils d'oscillation, de saturation, et d'extinction, afin de mieux cerner les comportements de l'instrument en fonction de son contrôle par l'instrumentiste.

Remarquons enfin que la principale différence entre les calculs effectués sous AUTO et sous MANLAB découlent du fait que seul le second autorise le mélange d'équations algébriques (permettant notamment des changements de variables) avec les équations différentielles. Par ailleurs, dans MANLAB, les équations ne peuvent pas explicitement contenir de non régularité comme la condition d'annulation de débit dans l'équation (4) ou de placage d'anche dans l'équation (2). Une régularisation légèrement différente y a donc été adoptée, mais ne sera pas détaillée dans cette communication.

## Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier en tout premier lieu Fabrice Silva pour son aide précieuse sur le modèle physique, Jean Kergomard et Philippe Guillemain pour

leurs discussions toujours intéressantes et souvent profitables, et enfin Bastien Mallaroni et Bart Oldeman pour leur aide sur l'utilisation du logiciel AUTO.

## Références

- [1] Silva F. "Emergence des auto-oscillations dans un instrument de musique à anche simple". Ph.D. thesis, Univ. de Provence, LMA - CNRS (2009).
- [2] Silva F., Debut V., Kergomard J., Vergez C., Lizée Deblevid A., Guillemain P. "Simulation of single reed instruments oscillations based on modal decomposition of bore and reed dynamics". *Proceedings of the International Congress of Acoustics*. Madrid, Spain (2007).
- [3] Chaigne A., Kergomard J. *Acoustique des instruments de musique*. BELIN (2008). ISBN 978-2-7011-3970-8.
- [4] Hirschberg A. *Mechanics of Musical Instruments*, chap. 7, 291–369. No. 355 in CISM Courses and Lectures. Springer, Wien - New York (1995).
- [5] Krauskopf B., Osinga H.M., Galan-Vioque J., eds. *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems*. Springer (2007).
- [6] Nayfeh A.H., Balachandran B. *Applied Nonlinear Dynamics*. John Wiley and Sons, Inc. (1995).
- [7] Doedel E.J. "AUTO : A Program For Automatic Bifurcation Analysis Of Autonomous Systems". *Congressus Numerantium* 30, (1981) 265–284.
- [8] Doedel E.J., Oldeman B.E. *AUTO-07P : Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations*. Concordia University, Montreal, Canada (2009).
- [9] Seydel R. "Nonlinear Computation". *J. Franklin Inst.* 334B (5/6), (1997) 1015–1047.
- [10] Doedel E.J. "Lecture Notes on Numerical Analysis of Bifurcation Problems" (2000).
- [11] Keller H.B. "Numerical Solution of Bifurcation and Nonlinear Eigenvalue Problems". *Applications of Bifurcation Theory*, 359–384. Academic Press (1977).
- [12] Cochelin B., Damil N., Potier-Ferry M. *Méthode Asymptotique Numérique*. Lavoisier (2007).
- [13] De Boor C., Swartz B. "Collocation at gaussian points". *SIAM J. Numer. Anal.* 10 (4).
- [14] Cochelin B., Vergez C. "A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions". *Journal of Sound and Vibration* 324, (2009) 243–262.
- [15] Dalmont J.P., Gilbert J., Kergomard J., Ollivier S. "An analytical prediction of the oscillation and extinction thresholds of a clarinet". *Journal of the Acoustical Society of America* 118 (5), (2005) 3294–3305.