Relativité générale (d'après M.Vaugon) et quelques problèmes mathématiques qui en sont issus

Emmanuel Humbert

Relativité générale (d'après M.Vaugon) et quelques problèmes mathématiques qui en sont issus.

Emmanuel Humbert

Institut Élie Cartan de Nancy

Université H. Poincaré de Nancy I

BP 70239

54506 Vandoeuvre-Lès-Nancy Cedex

ehumbert@iecn.u-nancy.fr

Depuis deux ans, mon ancien directeur de thèse et ami Michel Vaugon a entrepris de comprendre les intuitions physiques qui ont conduit à l'axiomatique de la relativité générale tout en gardant un langage de mathématicien et plus précisément de géomètre. Ses notes, manuscrites, sont à mon sens d'une clarté remarquable et je le remercie chaleureusement de me les avoir fournies. Cela a été l'occasion pour moi de comprendre ces notions, qui m'étaient étrangères bien que mes travaux de recherche aient des liens importants avec le relativité générale. J'ai commencé à écrire ce texte en suivant ses notes, non pas pour améliorer son travail, mais pour m'approprier ces notions et les traduire dans mon propre langage. D'ailleurs, des cinq premiers chapitres, je ne peux revendiquer qu'une part infime de la forme et quelques remarques. Même si la suite est plus personnelle, je tenais à ce que son nom apparaisse dans le titre parce que, sans lui, ce texte n'aurait pas vu le jour. La version ici présente est très raccourcie. Elle sera en effet publiée dans son intégralité chez Ellipses.

Table des matières

Chapitre I. Quelques expériences fictives 5
1. Temps et longueurs 5
2. Masse et impulsion 10
3. La formule $E = mc^2$. 13

Chapitre II. Modélisation de l'espace-temps 17
1. En mécanique classique 17
2. En relativité restreinte 19
3. En relativité générale 25

Chapitre III. De la matière dans l'espace-temps 27
1. Particules et fluides 27
2. En mécanique classique 30
3. En relativité restreinte 38
4. En relativité générale 42

Bibliographie 53

CHAPITRE I

Quelques expériences fictives

Ce chapitre permet de montrer comment à partir d'observations simples, on peut rapidement faire du calcul relativiste et même aboutir à la célèbre formule $E = mc^2$. Son but est uniquement culturel et ne servira pas dans la suite du texte. Le lecteur pressé peut donc commencer la lecture directement au chapitre suivant.

La théorie de la relativité est née d'une observation qui va à l'encontre de toutes nos intuitions : la vitesse de la lumière est la même par rapport à n'importe quel observateur. C'est un fait observé en 1887 par Michelson et Morley et qui se retrouve par le calcul (voir le Paragraphe **??** du Chapitre **??**). Imaginons par exemple qu'un photon passe devant un observateur à c km/h. Imaginons qu'un deuxième observateur aille exactement dans la même direction que le photon mais à $(c-1)$ km/h. Pour le sens commun, si ce deuxième observateur mesure la vitesse du photon, il doit trouver 1 km/h. Or, expérimentalement, il est démontré que cet observateur va trouver lui aussi une vitesse de c km/h. En particulier, les lois habituelles de la mécanique classique ne peuvent pas être vraies, d'où la nécessité de trouver un modèle de l'espace-temps qui prenne en compte ce phénomène tout en gardant "approximativement" (c'est-à-dire pour tout ce qui se passe à l'échelle humaine) les lois de la mécanique classique.

Dans ce premier chapitre, on explique comment, avant même de chercher un bon modèle, on peut déduire de cette observation plusieurs conclusions intéressantes grâce à des raisonnements simples.

1. Temps et longueurs

Prenons un observateur A qui se trouve dans un train qui avance à v mètres/seconde par rapport au quai et dont les wagons ont une longueur de l mètres. Prenons aussi un observateur B qui regarde passer le train depuis le quai. Maintenant, supposons qu'un photon parte de l'arrière du wagon et qu'il parcoure ce wagon en un temps de t secondes. Pour l'observateur A, le photon a parcouru l mètres en t secondes soit une vitesse de l/t mètres/seconde. Maintenant, pour B le photon a parcouru en t secondes l mètres plus la distance parcourue par le train en t secondes soit $d = l + vt$. Ainsi pour l'observateur B, le photon va à $(l+vt)/t = l/t+v$ mètres/seconde. Puisqu'on trouve des vitesses différentes pour les deux observateurs alors que l'expérience dit au contraire qu'on doit trouver les mêmes, c'est qu'il y a une erreur dans le raisonnement. En fait, on a considéré que

(1) le temps mesuré par A et B pour que le photon parcoure le wagon étaient les mêmes (égaux à t).
(2) La longueur du wagon mesurée par A et B était la même.

Pour arriver à un modèle fidèle à la réalité, il faut donc remettre en cause ces deux principes. Bien sûr, ces différences ne se feront sentir qu'à des vitesses élevées. Un observateur humain qui observe ce qui se passe autour de lui ne se rendra pas compte de ces différences de mesure.

Donc, pour la suite, on supposera que le temps entre deux événements ou la longueur d'un objet dépend de l'observateur qui le mesure. Se pose aussi le problème de la simultanéité entre deux événements qui dépendra elle aussi de l'observateur.

Grandeurs conservées quel que soit l'observateur. Comme on l'a expliqué, on doit remettre en cause les notions de temps et de longueur mais on ne doit pas le faire n'importe comment. Par exemple, une longueur mesurée perpendiculairement au déplacement ne doit pas dépendre de l'observateur. En effet, supposons par exemple que ces longueurs se contractent quand la vitesse augmente (un raisonnement analogue se fait si on suppose que les distances s'allongent) et reprenons le cas du train sur lequel se trouve l'observateur A alors que l'observateur B est resté sur le quai.

- Plaçons nous d'abord du point de vue de l'observateur A. Pour lui le train est immobile alors que les rails ont une vitesse v non nulle. Donc la largeur des rails doit être plus petite que l'écartement des roues du train. Autrement dit, les roues du train laissent des traces à l'extérieur des rails.
- Pour l'observateur B, c'est le train qui avance et donc l'écartement de ses roues doit être plus petit que l'écartement des rails : les traces des roues du train doivent être à l'intérieur des rails.

Comme les traces laissées par le train ne peuvent pas être à la fois à l'extérieur et à l'intérieur des rails, c'est que l'écartement des rails (ou des roues du train) doit être le même pour les deux observateurs A et B.

On pourrait imaginer une deuxième expérience pour prouver que les distances mesurées dans le sens du déplacement ne dépendent pas non plus de l'observateur (mais comme on va le voir, ce raisonnement est faux) : les mêmes observateurs A et B ont chacun une règle graduée dans les mains. Au moment où ils se croisent, l'observateur A colle sa règle sur celle de l'observateur B placée dans le sens du déplacement par exemple dans un bac à sable posé sur le quai. Par le même genre de raisonnement que ci-dessus, on peut se dire qu'on arrive à une absurdité (pour B la marque laissée par sa règle dans le sable doit être plus grande que celle de A et inversement). Il y a un problème dans cet argument : pour laisser une marque, l'observateur A doit poser sa règle dans le sable pendant un intervalle de temps certes très court mais non nul. Or pour B, cet intervalle de temps n'est pas le même, il est plus long. En résumé, dans cette expérience, la marque laissée par la règle de A sera plus longue que celle laissée par la règle B mais pour deux raisons différentes : du point de vue de A, parce que sa règle est plus longue et du point du vue de B parce que A a laissé sa règle un certain temps dans le sable.

Temps et distance pour deux observateurs. On va maintenant imaginer deux expériences qui permettent de préciser les différences de mesure de temps et de distance dans le sens du déplacement pour deux observateurs.

(1) Reprenons toujours nos deux observateurs A (dans le train) et B (sur le quai). Notons v la vitesse du train par rapport au quai. Imaginons qu'un photon fasse un aller-retour (plancher du wagon)-(plafond du wagon). Notons h la hauteur du plafond par rapport au plancher du train (h est la même pour A et B puisque c'est une distance qui est mesurée perpendiculairement au déplacement).
   - A mesure le temps t_A pour cet aller-retour du photon. Pour lui le photon a parcouru la distance de $2h$. Donc la vitesse du photon est $c_1 = \frac{2h}{t_A}$.
   - B mesure le temps t_B pour le même trajet. Mais de son point de vue, le photon n'a pas un parcours vertical puisque le train avance. Plus précisement en hauteur il a parcouru $2h$ et horizontalement vt_B. D'après Pythagore, il a parcouru $\sqrt{4h^2 + v^2t_B^2}$ ce qui donne pour le photon une vitesse $c_2 = \frac{\sqrt{4h^2+v^2t_B^2}}{t_B}$.

   Maintenant, comme la vitesse de la lumière est constante par rapport à n'importe quel observateur, on a $c_1 = c_2 = c$ et on trouve que

$$\begin{aligned} t_A &= \frac{2h}{c} \\ &= \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + v^2t_B^2}} t_B \\ &= \sqrt{1 - \frac{v^2t_B^2}{v^2t_B^2 + 4h^2}}\, t_B. \end{aligned}$$

   Comme $c = \frac{\sqrt{4h^2+v^2t_B^2}}{t_B}$, on trouve que

$$t_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, t_B.$$

On admet donc la règle suivante :

Règle 1 : Soient deux observateurs A et B qui se déplacent à vitesse constante v l'un par rapport à l'autre. On considère deux événements qui se passent **au même endroit** *pour A. Alors si on note respectivement t_A et t_B les temps mesurés entre ces deux événements par A et B, on a $t_A = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, t_B$.*

Remarque I.1. Il est très important de noter que ces événements doivent se passer au même endroit pour l'un des observateurs (d'où la nécessité de considérer un aller-retour du photon). Sans cela, la règle dirait aussi que $t_B = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, t_A$, ce qui est faux bien sûr. Le point 1 de la Remarque I.2 ci-dessous illustre aussi la nécessité de considérer de tels événements.

Avec le même raisonnement, on peut aussi en déduire une règle avec des hypothèses un peu plus générales, qui nous servirons pour la suite :

*Règle 1' : Soient deux observateurs A et B qui se déplacent à vitesse constante v l'un par rapport à l'autre. On considère deux événements qui se passent à deux endroits X et Y avec (XY) perpendiculaire au mouvement pour A (***attention, cette notion dépend de l'observateur***). Alors si on note respectivement t_A et t_B les temps mesurés entre ces deux événements par A et B, on a $t_A = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, t_B$.*

(2) Maintenant, considérons que le photon fait un aller-retour (arrière du wagon)-(avant du wagon). Cette fois, la longueur dépend de l'observateur. Notons l_A (resp. l_B) la longueur du wagon mesurée par A (resp. par B) et conservons v pour sa vitesse.
   - L'observateur A mesure un temps t_A pour cet aller-retour. La distance parcourue par le photon pendant ce temps est $2l$. Donc sa vitesse est $c = \frac{2l_A}{t_A}$.
   - Pour B, séparons le trajet aller du trajet retour. Notons t'_B (resp. t''_B) le temps mesuré par B pour l'aller (resp. le retour). Pour B, la distance parcourue par le photon sur l'aller est $l_B + vt'_B$ (longueur du wagon plus distance parcourue par le wagon pendant le trajet aller). Pour le retour la distance est $l_B - vt''_B$. On a donc

$$c = \frac{l_B + vt'_B}{t_{B'}} = \frac{l_B - vt''_B}{t_{B''}}.$$

De cette équation, on tire $t'_B = \frac{l_B + vt'_B}{c}$ c'est-à-dire $t'_B = \frac{l_B}{c-v}$. De même, $t''_B = \frac{l_B}{c+v}$. D'après la Règle 1 ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} t_A &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}(t'_B + t''_B) \\ &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\right) l_B \\ &= \frac{2}{\sqrt{c^2 - v^2}}\, l_B. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$l_A = \frac{ct_A}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\, l_B.$$

On en déduit la règle suivante :

Règle 2 : Soient deux observateurs A et B qui se déplacent l'un par rapport à l'autre à vitesse constante et soit $[PQ]$ un segment **fixe pour** *A et parallèle au mouvement. Alors, les distances l_A et l_B entre P et Q mesurées respectivement par A et B sont liées par $l_A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, l_B$.*

Remarque I.2.

(1) Encore une fois, pour appliquer la règle qui lie les temps mesurés par deux observateurs, il faut bien vérifier que ces événements se passent au même endroit pour l'un des observateurs. En effet, dans cette expérience, les temps des trajets aller et retour mesurés par A sont tous les deux de $t_A/2$. En appliquant la règle de comparaison de temps, on a envie de dire que $t_A/2 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ t'_B$ et $t_A/2 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ t''_B$. Cela conduit à $t'_B = t''_B$, ce qui est faux (sinon, la vitesse du photon mesuré par B n'est pas la même sur l'aller et le retour). De même, dans la règle de comparaison des longueurs, il est important que le segment $[PQ]$ mesuré soit fixe par rapport à l'un des observateurs.

(2) De ces raisonnements, on peut facilement déduire des règles de comparaison de temps lorsque deux événements ne se passent pas au même endroit ou de comparaison de longueur pour un segment quelconque. Ces règles sont appelées *transformations de Lorentz.*

2. Masse et impulsion

En mécanique classique, considérons un objet q de masse m animé dans un repère (c'est-à-dire pour un observateur galiléen donné) d'une vitesse $\overrightarrow{v}$.

DÉFINITION. Le vecteur $\overrightarrow{p} := m\overrightarrow{v}$ est appelé *quantité de mouvement* ou *impulsion* de l'objet q.

Soit maintenant un système composé de n objets $q_1, \cdots, q_n$ de quantités de mouvement respectives $\overrightarrow{p}_1, \cdots, \overrightarrow{p}_n$. Alors, une loi fondamentale de la dynamique en mécanique classique est

Loi de conservation de quantité de mouvement : *la quantité de mouvement du système défini par $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}_1 + \cdots + \overrightarrow{p}_n$ est constante avec le temps. En particulier, elle est conservée lors des chocs entre les objets du système.*

On va supposer que cette loi, basée sur l'expérience, est toujours valide en relativité. Mais pour cela, il va falloir préciser les choses, puisque les notions de temps et de distance sont remises en cause. Dans ce but, nous reprenons nos deux observateurs A (dans le train) et B (sur le quai). Chacun va lancer une pierre sphérique (q_A pour A et q_B pour B) de masse m perpendiculairement au mouvement et avec une vitesse V de manière à ce que les deux pierres se rencontrent. Pour l'observateur B on travaille dans un repère (Bxy) où l'axe (Bx) est parallèle aux rails et (By) est orthogonal aux rails. Pour l'observateur A, on travaille dans le repère (Axy) dont seule l'origine est différente : on prend A à la place de B. Autrement dit, le repère (Axy) se déplace à la vitesse constante v par rapport au repère (Bxy).

Avant le choc,

– L'observateur A voit la pierre q_A animée de la vitesse (exprimée dans (Axy))
$$\overrightarrow{v}_A^A = \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix}$$
tandis que l'observateur B voit la même pierre animée de la vitesse (exprimée dans (Bxy))
$$\overrightarrow{v}_A^B = \begin{pmatrix} v \\ V' \end{pmatrix}$$
où v est la vitesse du train et V' est à calculer.

– Par symétrie de la situation, l'observateur A voit la pierre q_B animée de la vitesse
$$\overrightarrow{v}_B^A = \begin{pmatrix} v \\ -V' \end{pmatrix}$$
tandis que l'observateur B voit la même pierre animée de la vitesse
$$\overrightarrow{v}_B^B = \begin{pmatrix} 0 \\ -V \end{pmatrix}$$

(on a bien sûr arbitrairement choisi une orientation des axes).

Calcul de V' : V' est la composante perpendiculaire au train du vecteur vitesse de la pierre q_A vue par B. Regardons le temps que met la pierre q_A pour parcourir une distance l sur l'axe perpendiculaire aux rails (l'axe de y. On oublie les composantes dans l'autre direction). D'après le paragraphe précédent, cette distance ne dépend pas de l'observateur. Notons t_A (resp. t_B) le temps mesuré par A (resp. par B) pour que la pierre parcoure cette distance l. D'après la Règle 1' du paragraphe précédent, on a $t_A = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, t_B$. D'autre part, on a $V = \frac{l}{t_A}$ et $V' = \frac{l}{t_B}$. On obtient ainsi que

$$V' = V\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{I.3}$$

Après le choc : on considère bien sûr que le choc est élastique. On remarque que les composantes des vitesses selon l'axe des x n'est pas modifiée. Regardons maintenant les composantes des vitesses sur l'axe des y. Par symétrie de la situation, A et B doivent voir revenir leur propre pierre à la même vitesse. Si cette vitesse est différente de celle avant le choc (par exemple strictement supérieure à V) alors le système a gagné de l'énergie ce qui va à l'encontre des lois physiques. Donc A et B doivent voir revenir leur pierre avec la vitesse V. Autrement dit,

– L'observateur A voit la pierre q_A animée de la vitesse

$$\overrightarrow{w}_A^A = \begin{pmatrix} 0 \\ -V \end{pmatrix}$$

tandis que l'observateur B voit la même pierre animée de la vitesse

$$\overrightarrow{w}_A^B = \begin{pmatrix} v \\ -V' \end{pmatrix},$$

– l'observateur A voit la pierre q_B animée de la vitesse

$$\overrightarrow{w}_B^A = \begin{pmatrix} v \\ V' \end{pmatrix}$$

tandis que l'observateur B voit la même pierre animée de la vitesse

$$\overrightarrow{w}_B^B = \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix}.$$

Pour l'observateur A, vérifions si la loi de conservation de quantité de mouvement de la mécanique classique est toujours valable pour le système (q_A, q_B). On doit avoir

$$m\overrightarrow{v}_A^A + m\overrightarrow{v}_B^A = m\overrightarrow{w}_A^A + m\overrightarrow{w}_B^A.$$

Or ce n'est pas le cas puisque la deuxième coordonnée donne $m(V - V') = m(V' - V)$. D'où vient l'erreur de raisonnement ? La réponse est simple : on a considéré que les masses des pierres q_A et q_B étaient les mêmes du point de vue des observateurs A et B. Or il semble raisonnable de remettre en cause ce principe. En effet, supposons qu'un objet conserve la même masse quelle que soit sa vitesse. Il suffira d'une quantité finie d'énergie pour accélérer la particule à n'importe quelle vitesse choisie, y compris à une vitesse plus grande que celle de la lumière. Or, d'après les formules trouvées au paragraphe précédent, la vitesse de la lumière est une barrière infranchissable. L'un des moyens d'expliquer ce fait est de supposer que la masse d'un objet tend vers l'infini quand sa vitesse tend vers celle de la lumière.

Revenons à notre problème. En mécanique relativiste, on va toujours supposer que la quantité de mouvement est le produit de la masse par la vitesse mais on va aussi supposer que la masse d'un objet vu par un observateur dépend de sa vitesse par rapport à cet obervateur. Notons $\overrightarrow{V}$ ce vecteur vitesse. On va dire que sa masse est une fonction de $\overrightarrow{V}$ notée $m_{\overrightarrow{V}}$. On va chercher cette fonction de manière à ce que la quantité de mouvement soit conservée après le choc c'est-à-dire de manière à avoir l'égalité

$$m_{\overrightarrow{v}_A^A}\overrightarrow{v}_A^A + m_{\overrightarrow{v}_B^A}\overrightarrow{v}_B^A = m_{\overrightarrow{w}_A^A}\overrightarrow{w}_A^A + m_{\overrightarrow{w}_B^A}\overrightarrow{w}_B^A. \tag{I.4}$$

On remarque que cette égalité est vérifiée si pour une vitesse $\overrightarrow{V}$ et un objet de masse m (pour donner un sens à la masse d'un objet, il faut comprendre ce terme comme étant sa masse au repos, c'est-à-dire à vitesse nulle), on a

$$m_{\overrightarrow{V}} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\|\overrightarrow{V}\|}{c^2}}}$$

(où $\|\overrightarrow{V}\|$ est la norme euclidienne de $\overrightarrow{V}$). En effet, l'égalité de la première coordonnée est clairement vérifiée. Par ailleurs, pour la deuxième coordonnée, en utilisant (I.3), on a

$$\frac{V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{V'}{\sqrt{1-\frac{v^2+(V')^2}{c^2}}} = 0 = -\frac{V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{V'}{\sqrt{1-\frac{v^2+(V')^2}{c^2}}}.$$

Cette hypothèse faite sur la masse semble valable dans la mesure où elle tend vers $+\infty$ si la vitesse tend vers c.

En résumé, on retiendra :

Soit q un objet de masse m (au repos) vu par un observateur A. On suppose que q a une vitesse $\overrightarrow{V}$ par rapport à A. Alors sa masse vue par A est

$$m_{\overrightarrow{V}} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\|\overrightarrow{V}\|}{c^2}}} \tag{I.5}$$

et sa quantité de mouvement est

$$\overrightarrow{p} = \frac{m\overrightarrow{V}}{\sqrt{1 - \frac{\|\overrightarrow{V}\|}{c^2}}}.$$

Avec ces définitions, on garde la loi de conservation de quantité de mouvement énoncée ci-dessus dans le cadre de la mécanique classique.

Le raisonnement ci-dessus est, d'un point de vue mathématique en tout cas, beaucoup moins rigoureux que ceux donnés dans le paragraphe précédent pour établir les Règles 1, 1' et 2. Néanmoins, les mesures physiques permettent de vérifier ces lois avec une grande précision.

3. La formule $E = mc^2$.

L'*énergie* est par définition la capacité d'un système modifier un état, à produire un travail entraînant un mouvement, de la lumière ou de la chaleur. La formule $E = mc^2$ apparaît déjà dans les travaux de Poincaré et dit qu'une particule au repos possède de par sa masse, une énergie interne due aux forces d'interaction entre particules. L'intuition provient de la remarque expérimentale suivante : si un corps émet une énergie (par exemple par rayonnement) E, on mesure que sa masse diminue de $\frac{E}{c^2}$ d'òu l'idée que cette masse m se soit transformée en énergie avec la relation $m = \frac{E}{c^2}$. L'étude de cette grandeur physique joue un rôle fondamentale en relativité en raison de la loi suivante :

Loi de conservation de l'énergie : *l'énergie totale d'un système qui n'a pas d'échange avec l'extérieur est constante avec le temps.*

En particulier, tout comme l'impulsion définie dans le paragraphe précédent, cette quantité est une intégrale première du système ce qui se définit parfaitement en mathématiques.

Maintenant essayons de déduire la formule $E = mc^2$ de la discussion précédente. D'abord, il paraît naturel de penser que l'énergie au repos d'une particule doit être proportionnelle à sa masse. Autrement dit, pour une particule de masse au repos m_0, on a $E = km_0$ pour $k \in \mathbb{R}$ si la particule est immobile. Changeons maintenant d'observateur. Si ce nouvel observateur mesure l'énergie de la particule, il doit trouver la même valeur à laquelle s'ajoute l'énergie cinétique de la particule. Par contre, le résultat trouvé sera toujours proportionnel à sa masse m observée. On a aussi envie de dire que ce coefficient de proportionnalité doit être universel. On fera donc l'hypothèse suivante : l'énergie totale d'une particule de masse m mesurée par un observateur (liée à sa masse au repos par la formule (I.5)) est de la forme km où $k \in \mathbb{R}$. On vient de dire que l'énergie totale de la particule était son énergie interne (i.e. son énergie au repos) à laquelle s'ajoute son énergie cinétique. En d'autres termes, on a

$E = km = km_0 + E_c$ ou encore

$$E_c = k(m - m_0). \qquad \text{(I.6)}$$

Calcul de k : nous aurons besoin de deux lois fondamentales de la mécanique classique :

(1) Soit q un objet de masse m. Notons $\overrightarrow{a}(t)$ son accélération à l'instant t. Alors $m\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{F}$ où $\overrightarrow{F}(t)$ est la résultante des forces qui s'appliquent à q à l'instant t.

(2) La différence d'énergie cinétique (c'est-à-dire uniquement due à sa vitesse) de l'objet q entre deux instants est égale au travail de la force $\overrightarrow{F}$ qui s'applique sur q le long de sa trajectoire.

La deuxième loi n'a, a priori, aucune raison d'être remise en question en relativité. Par contre, la première loi n'est pas satisfaisante puisque la masse dépend du temps. On remarque cependant que $m\overrightarrow{a}(t)$ n'est autre que la dérivée de la quantité de mouvement en fonction du temps. Il paraît plus naturel de garder cette formule en relativité : $\frac{d}{dt}\overrightarrow{p}(t) = \overrightarrow{F}(t)$. On rappelle que le travail d'une force sur une trajectoire $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ est donné par

$$\int_a^b (\overrightarrow{F}(c(t)), c'(t))dt$$

où $\overrightarrow{F}(c(t))$ est la force qui s'applique en $c(t)$ et où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire euclidien. Soit donc un objet q de masse au repos m_0 soumis à une force $\overrightarrow{F}$ constante. À l'instant $t = 0$ supposons que cette particule est au repos. On note E_c l'énergie cinétique de la particule à l'instant $t = 1$, $\overrightarrow{p}(t)$ la quantité de mouvement à l'instant t, $m(t)$ la masse à l'instant t et $v(t)$ la vitesse à l'instant t. On remarque que le vecteur vitesse est en tout point proportionnel à $\overrightarrow{F}$. Avec les lois 1 et 2, on obtient

$$\begin{aligned}
E_c &= \int_0^1 (\overrightarrow{F}, c'(t))dt \\
&= \int_0^1 (mv)'vdt \quad \text{car } \|c'(t)\| = v(t) \\
&= \int_0^1 (mv^2)' - mv'vdt \\
&= m(1)v^2(1) - \int_0^1 mv'vdt.
\end{aligned}$$

En utilisant la valeur de la masse trouvée ci-dessus

$$E_c = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v(1)^2}{c^2}}} v(1)^2 - \int_0^1 \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v'vdt.$$

Posons maintenant $u = v(t)$ dans l'intégrale ci-dessus. On a alors

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v(1)^2}{c^2}}}v(1)^2 - \int_0^{v(1)} \frac{m_0 u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}du \\
&= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v(1)^2}{c^2}}}v(1)^2 + \left[c^2 m_0 \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right]_0^{v(1)} \\
&= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v(1)^2}{c^2}}}c^2 - m_0 c^2 \\
&= (m(1) - m(0))c^2.
\end{aligned}$$

En comparant ce résultat avec (I.6), on obtient que $k = c^2$ ce qui donne que l'énergie totale d'une particule au repos de masse m est $E = mc^2$.

CHAPITRE II

Modélisation de l'espace-temps

1. En mécanique classique

Modélisation *En mécanique classique, l'univers est modélisé par un espace affine* $\mathcal{M}$ *de dimension* 4 *muni d'une forme quadratique* T *sur* $E := \overrightarrow{\mathcal{M}}$ *de signature* $(+,0,0,0)$.

Remarque II.7. On préfère prendre un espace affine plutôt que $\mathbb{R}^4$, ce qui évite d'avoir un point base et des directions privilégiées.

Orientation en temps : Comme les vecteurs isotropes ($T(v) = 0$) forment un hyperplan de E, l'ensemble $E \setminus \{v \in E | T(v) = 0\}$ a exactement deux composantes connexes. Choisissons l'une d'elles une fois pour toutes et notons-la E^+. Ce sont les directions dites *positives*.

Dans tout le paragraphe, b désignera la forme bilinéaire symétrique associée à T.

Définition.

(1) Un *observateur* est une courbe de genre temps i.e. telle qu'il existe une paramétrisation $c : I \to \mathcal{M}$ (I est un intervalle réel) tel que pour tout $t \in I$, $T(c'(t)) \neq 0$.
(2) Un *observateur galiléen* est une droite non isotrope.

Considérer les observateurs galiléens parmi tous les observateurs est naturel pourtant, physiquement cela pose un problème. Cela signifie qu'il y a des observateurs privilégiés dans l'univers. Qui sont-ils ? Il faut remarquer que si l'on connaît un observateur galiléen, on les connaît tous.

Choisissons maintenant un produit scalaire g sur $\ker(T) = \{v \in E | b(v, x) = 0 \, \forall x \in E\}$. Notons $\| \cdot \|$ la norme associée. On peut définir naturellement :

Définition.

(1) Soit $A, B \in \mathcal{M}$. On dit que A et B sont *simultanés* si $\overrightarrow{AB} \in \ker(T)$. "Être simultanés" est une relation d'équivalence dont les classes sont de la forme $A + \ker(T)$. Ce sont des hyperplans affines qui physiquement, représentent l'univers à un instant donné.

(2) Lorsque $A, B \in \mathcal{M}$ sont simultanés, on peut calculer leur distance :
$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

(3) *Le temps qui sépare* $A, B \in \mathcal{M}$ est donné par $\tau_{AB} = \sqrt{T(\overrightarrow{AB})}$. Autrement dit, deux points sont simultanés si et seulement si $\tau_{AB} = 0$.

Considérons un observateur galiléen D dirigé par un vecteur i_D unitaire ($T(i_D) = 1$) et orienté positivement. Si l'on fixe une origine $A \in D$ (on notera D_A), on a un isomorphisme naturel
$$\varphi_{D_A} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \to & \ker(T) \times \mathbb{R} \\ B & \mapsto & (\overrightarrow{v}, t) \end{array} \right.$$
où $\overrightarrow{v}, t$ sont déterminés par l'écriture unique $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v} + t i_D$. Prendre une origine consiste à définir pour D un temps $t = 0$. Pour D_A, l'*univers observable* à l'instant t est $\varphi_{D_A}^{-1}(\ker(T) \times \{t\})$.

Paramétrisation normale positive d'un observateur

(on dit aussi *paramétrisation par le temps*).

Soit D un observateur. Soit $c : I \to \mathcal{M}$ (I est un intervalle de $\mathbb{R}$) une paramétrisation de D telle que $T(c'(t))$ ne s'annule jamais sur I. Quitte à remplacer $c(t)$ par $c(-t)$, on peut supposer qu'en tout point $c'(t) \in E^+$. Posons $s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{T(c'(u))}du$ où t_0 est un point fixé de I. On voit que s est un difféomorphisme de I sur l'intervalle $J := s(I)$. Posons maintenant $C = c \circ s^{-1}$. On voit que pour tout $t \in J$,
$$T(C'(t)) = 1 \text{ et } C'(t) \in E^+.$$
En effet,
$$T(C'(t)) = T\big(c'(s^{-1}(t))(s^{-1})'(t)\big) = T\big(\frac{c'(s^{-1}(t))}{s'(s^{-1}(t))}\big).$$
Le résultat est maintenant clair puisque $s'(t) = \sqrt{T(c'(t))}$. Une telle paramétrisation de D est appelée *paramétrisation normale positive* de l'observateur D. On a montré qu'une telle paramétrisation existe toujours et on remarque facilement qu'elle est unique à translation en temps près.

Vitesse Soit $D, \tilde{D}$ deux observateurs et $\alpha, \tilde{\alpha}$ des paramétrisations normales positives respectives de D et $\tilde{D}$. Quitte à faire une translation en temps, on peut supposer que pour t fixé, $\alpha(t)$ et $\tilde{\alpha}(t)$ sont simultanés. Alors, $\tilde{\alpha}'(t)$ s'écrit de manière unique
$$\tilde{\alpha}'(t) = \overrightarrow{k} + a\alpha'(t)$$
où $\overrightarrow{k} \in \ker T$ et où $a \in \mathbb{R}$. Comme $T(\tilde{\alpha}'(t)) = T(\alpha'(t)) = 1$, on voit que $a = 1$.

Définition. Le vecteur $\overrightarrow{k}$ est appelé *vecteur vitesse* de $\tilde{D}$ par rapport à D et est noté $\overrightarrow{v}_{\tilde{D}/D}$

Remarques et propriétés :

(1) La vitesse ainsi définie dépend de l'instant t.

(2) Si $D, \tilde{D}$ sont des observateurs galiléens alors le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}_{\tilde{D}/D}$ est constant en fonction du temps. Cette définition est bien conforme à l'idée que l'on se fait de la vitesse : le quotient de la distance par le temps. Prenons en effet deux observateurs galiléens D et $\tilde{D}$. Prenons $A, B \in D$ et $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{D}$ tels que A et $\tilde{A}$ sont simultanés ainsi que B et $\tilde{B}$. Naturellement, on voit que la norme du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}_{\tilde{D}/D}$ est égal à

$$\frac{\|\overrightarrow{B\tilde{B}} - \overrightarrow{A\tilde{A}}\|}{\tau_{AB}}$$

(i.e. distance / temps).

(3) On a $\overrightarrow{v}_{\tilde{D}/D} = -\overrightarrow{v}_{D/\tilde{D}}$.

(4) Si $\tilde{\tilde{D}}$ est un troisième observateur, on a

$$\overrightarrow{v}_{\tilde{\tilde{D}}/D} = \overrightarrow{v}_{\tilde{\tilde{D}}/\tilde{D}} + \overrightarrow{v}_{\tilde{D}/D}.$$

Accélération : Reprenons les notations utilisées pour la définition de la vitesse. On définit l'accélération de $\tilde{D}$ par rapport à D par $\overrightarrow{a}_{\tilde{D}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{v}_{\tilde{D}/D}$. Supposons que D est galiléen. Puisque la vitesse relative de deux observateurs galiléens est constante, l'accélération définie ci-dessus **ne dépend pas de l'observateur galiléen** D.

2. En relativité restreinte

On abandonne la mécanique classique pour la raison suivante : de manière expéri–mentale, on constate que la vitesse de la lumière est constante (en norme) par rapport à n'importe quel observateur. Supposons qu'un observateur D voie passer la lumière dans une certaine direction à la vitesse $c \simeq 300000$ km/h et qu'un autre observateur D' ait une vitesse de $(c-1)$ km/h par rapport à D dans la même direction que la lumière. La propriété (4) du vecteur vitesse défini en mécanique classique implique que la vitesse de la lumière par rapport à D' sera de 1 km/h, ce qui contredit l'expérience. On doit donc abandonner le modèle de la mécanique classique. C'est ainsi qu'est née la relativité restreinte en 1905 grâce aux travaux d'Einstein.

Modélisation *En relativité restreinte, l'univers est modélisé par un espace affine* $\mathcal{M}$ *de dimension* 4 *muni d'une forme quadratique* T *sur* $E := \overrightarrow{\mathcal{M}}$ *de signature* $(-,+,+,+)$.

D'un point de vue physique, on prend un espace affine pour éviter qu'il y ait des points privilégiés. Malgré tout, dans la pratique, on se placera la plupart du temps dans l'*espace de Minkowski* $(\mathbb{R}^4, \eta)$ où

$$\eta := -dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

Dans E, il y a trois types de vecteurs $\overrightarrow{v}$:
– les vecteurs de type *temps* : $T(\overrightarrow{v}) < 0$;
– les vecteurs de type *lumière* : $T(\overrightarrow{v}) = 0$;
– les vecteurs de type *espace* : $T(\overrightarrow{v}) > 0$.

On peut comme en mécanique classique choisir une orientation de temps. En effet, l'ensemble E des vecteurs de type temps a deux composantes connexes. Il faut remarquer que cet ensemble est un cône dont le bord est l'ensemble des vecteurs de type lumière. On choisit l'une des composantes connexes et on la note E^+, cet ensemble représentant l'ensemble des vecteurs de type temps orientés positivement. Une autre manière de voir les choses est de fixer un vecteur $\overrightarrow{v}_0$ de type temps et de dire qu'un vecteur $\overrightarrow{v}$ est orienté positivement si $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_0) > 0$, où g est la forme bilinéaire associée à T.

De la même manière, on définit
– un *observateur* : courbe de genre temps (i.e. dont tout vecteur tangent est de type temps)
– un *observateur galiléen* : droite de type temps.

Soit D un observateur. En procédant comme en mécanique classique, on montre qu'il existe une paramétrisation $c : I \to \mathcal{M}$ de D, unique à translation en temps près que l'on appellera *paramétrisation normale positive* qui vérifie $T(c'(t)) = -1$ et $c'(t) \in E^+$ pour tout $t \in I$. On verra plus loin qu'il y a d'autres paramétrisations normales naturelles.

Soit D un observateur paramétré par $c : I \to \mathcal{M}$.

En mécanique classique, l'*espace vu par* D ou *univers observable pour* D à l'instant t est l'ensemble des points simultanés à $c(t)$ c'est-à-dire $c(t) + \ker(T)$. L'espace vu par D ne dépend pas de D mais seulement du point $c(t)$.

En relativité restreinte, on a une définition analogue :

DÉFINITION. on appelle *espace vu par D au point $c(t)$* l'espace affine $c(t) + [c'(t)]^{\perp}$. En particulier, **cet espace dépend de l'observateur** D et pas seulement de $c(t)$. Physiquement, cela correspond à l'ensemble des points simultanés à l'observateur à un instant donné.

Si $A, B \in \mathcal{M}$, cela n'a pas de sens de se demander si A et B sont simultanés. Par contre si $A \in D$ et si $B \in \mathcal{M}$, on peut se demander si B est simultané à A pour D. C'est le cas si $B \in c(t) + [v]^{\perp}$ où v est un vecteur tangent à D en A. Contrairement à ce qui se passe en mécanique classique, la simultanéité n'est pas symétrique (si $A \in D$, $A' \in D'$ et si A' et A sont simultanés pour D, ils ne le sont pas forcément pour D').

Pour avoir une bonne image en tête, le plus simple est d'imaginer $\mathbb{R}^2$ muni de $-dt^2 + dx^2$. Soit D un observateur galiléen. Si D est parallèle à l'axe des abscisses, l'espace vu par D est vertical (axe des ordonnées). Si l'espace $\overrightarrow{D}$ (droite vectorielle associée à D) se rapproche de la position limite $x = t$ alors $[\overrightarrow{D}]^\perp$ aussi ($[\overrightarrow{D}]^\perp$ est le symétrique de $\overrightarrow{D}$ par rapport à $x = t$).

Ce modèle est assez pratique pour visualiser correctement ce qui se passe, mais pour coller plus à la réalité physique, il faudrait plutôt penser à $\mathbb{R}^2$ muni de $-dt^2 + \varepsilon^2 dx^2$ avec ε petit. Ainsi, lorsque ε est suffisamment petit, l'orthogonal de toute droite de type temps est "presque" verticale. En effet, l'orthogonal d'une droite dirigée par (a, b) est dirigé par $(\varepsilon, a/b)$ et on se rapproche du modèle $\mathbb{R}^2$ muni de $-dx^2$ qui permet de visualiser la mécanique classique (considérer dt^2 ou $-dt^2$ ne change rien à la géométrie).

Définition. Soit D un observateur (pas forcément galiléen) paramétré par $c : I \to \mathcal{M}$.

– Soient $A = c(t_1), B = c(t_2) \in D$. Le *temps propre pour l'observateur* D entre A et B est donné par
$$\tau_{AB} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-T(c'(t))}dt.$$
Physiquement, il s'agit du temps que mesure l'observateur D entre A et B.

– Soient $A, B \in \mathcal{M}$ simultanés pour D (i.e. il existe t tel que $A, B \in c(t) + [c'(t)]^\perp$). On définit la distance de A à B (pour D) par $d(A, B) = \sqrt{T(\overrightarrow{AB})}$.

Remarque II.8.

(1) Le temps propre ne dépend pas de la paramétrisation choisie.

(2) La définition est la même qu'en mécanique classique (on remplace juste T par $-T$) : en mécanique classique, lorsque l'on écrit
$$\tau_{AB} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{T(c'(t))}dt$$
(T est ici de signature $(+, 0, 0, 0)$) on voit que l'on obtient $\tau_{AB} = \sqrt{T(\overrightarrow{AB})}$. En effet, on peut écrire de manière unique $\overrightarrow{Ac(t)} = \overrightarrow{k}(t) + \alpha(t)\overrightarrow{AB}$ où $\overrightarrow{k}(t) \in \ker(T)$ et $\alpha(t) \in \mathbb{R}$. Alors $c'(t) = \overrightarrow{k}'(t) + \alpha'(t)\overrightarrow{AB}$ et $\alpha'(t)$ est de signe constant (sinon c n'est pas de genre temps). Supposons par exemple $\alpha'(t) > 0$. Alors, $\sqrt{T(c'(t))} = \alpha'(t)\sqrt{T(\overrightarrow{AB})}$. Ainsi, $\tau_{AB} = (\alpha(t_2) - \alpha(t_1))\overrightarrow{AB}$. En revenant à la définition de α, on voit que $\alpha(t_1) = 0$ et $\alpha(t_2) = 1$ (car $c(t_1) = A$ et $c(t_2) = B$), d'où le résultat.

(3) Si l'on se donne $A, B \in \mathcal{M}$, cela n'a pas de sens comme en mécanique classique de parler de temps qui sépare A et B. Cela dépend de la trajectoire choisie. Imaginons $A, B \in \mathcal{M}$ tels que $\overrightarrow{AB}$ est de type temps.

Prenons la trajectoire directe (i.e. la droite (AB)). On regarde le temps propre entre A et B et l'on trouve $\tau_{AB} = \sqrt{-T(\overrightarrow{AB})}$. Maintenant, imaginons une trajectoire entre A et B de type lumière, (ou du moins très proche d'une trajectoire de type lumière) et calculons le temps propre entre A et B. On paramétrise par $c : I \to \mathbb{R}$. On voit que $T(\overrightarrow{c'(t)}) \equiv 0$ si bien que $\tau_{AB} = 0$. Évidemment, physiquement, aucun observateur ne peut suivre une courbe de type lumière mais si la trajectoire s'en rapproche, le temps propre τ_{AB} sera très petit. En particulier, on remarque que **si deux observateurs D et D' ont une trajectoire qui passent par A et B et si D voyage à une vitesse proche de celle de la lumière, i.e. avec une trajectoire dont la tangente se rapproche de la position limite "lumière", D aura un temps propre beaucoup plus petit que D' entre A et B**. Cette propriété, contraire à l'intuition, est connue sous le nom de *paradoxe de langevin.* On la présente habituellement en disant que deux jumeaux sont nés sur Terre. L'un part en voyage à une vitesse proche de celle de la lumière. Quand il revient sur Terre, il est beaucoup plus jeune que son frère.

(4) Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de type temps. Alors l'hyperplan vectoriel $[\overrightarrow{v}]^{\perp}$ est de type espace (i.e. $T_{/[\overrightarrow{v}]^{\perp}}$ est de signature $(+,+,+)$). En effet, la signature de T est obtenue en ajoutant un $-$ (car $\overrightarrow{v}$ de type temps) à celle de $T_{/[\overrightarrow{v}]^{\perp}}$. En particulier, dans la définition de $d(A,B)$, $T(\overrightarrow{AB}) > 0$.

(5) Dans un sens, tout est beaucoup plus naturel qu'en mécanique classique car il n'y a pas besoin de se donner un produit scalaire supplémentaire. Toute l'information est contenue dans T.

Paramétrisation normale positive pour un observateur galiléen D. Soit D un observateur galiléen de vecteur directeur i_D unitaire ($T(i_D) = -1$) orienté positivement) paramétré par $c : I \to \mathcal{M}$ tel que pour tout t, $c'(t) = i_D$. Pour D, l'unité de temps est i_D. Maintenant considérons un autre observateur $\tilde{D}$ paramétré par $\tilde{c} : \tilde{I} \to \mathcal{M}$. Il est naturel de décomposer pour tout t $\tilde{c}'(t) = \overrightarrow{k} + \alpha i_D$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{k} \in [i_D]^{\perp}$. En mécanique classique, si $T(\tilde{c}'(t)) = 1$ alors $\alpha = 1$. En relativité restreinte, $T(\tilde{c}'(\tilde{t})) = -1$ n'implique pas $\alpha = 1$. En particulier, il est naturel de considérer une paramétrisation orientée positivement pour laquelle $\alpha = 1$ pour tout t, c'est-à-dire qui respecte l'unité de temps pour D (voir la Remarque II.9 ainsi que le point 1 de la Remarque II.10). Une telle paramétrisation existe, est unique à translation en temps près (même argument que pour l'existence des autres paramétrisations normales) et sera appelée *paramétrisation normale positive pour l'observateur D*.

Remarque II.9. L'une des propriétés d'une telle paramétrisation est la suivante : si $t \in I$, $\tilde{t} \in \tilde{I}$ sont tels que $c(t)$ et $\tilde{c}(\tilde{t})$ sont simultanés pour D, alors pour tout a, $c(t+a)$ et $\tilde{c}(\tilde{t}+a)$ sont simultanés pour D. En effet, quitte à faire une translation en temps, on peut supposer $\tilde{t} = t$ et alors

$$\tilde{c}(t+a) - c(t+a) = (\tilde{c}(t) - c(t)) + \int_t^{t+a} (\tilde{c}'(s) - c'(s))ds \in [i_D]^\perp$$

car les deux termes du membres de droites sont dans $[i_D]^\perp$. On voit avec cet argument pourquoi il est nécessaire de définir ce type de paramétrisation relativement à un observateur galiléen. Par contre, si c et $\tilde{c}$ sont des paramétrisations normales positives de deux observateurs D et $\tilde{D}$ et si $c(t)$ et $\tilde{c}(t)$ sont simultanés pour D, en général $c(t+a)$ **et** $\tilde{c}(t+a)$ **ne sont pas simultanés pour** D**.**

Vitesse : Soit D, $\tilde{D}$ deux observateurs paramétrés respectivement par $c : I \to \mathcal{M}$ et $\tilde{c} : \tilde{I} \to \mathcal{M}$. On suppose que c est une paramétrisation normale positive. Fixons un point $A \in D$ que l'on écrit $A = c(t)$. Quitte à faire une translation en temps, on peut supposer que $\tilde{c}(t)$ est simultané à $c(t)$ pour D. Le vecteur $\tilde{c}'(t)$ s'écrit de manière unique

$$\tilde{c}'(t) = \overrightarrow{k} + \alpha c'(t)$$

où $\overrightarrow{k} \in [c'(t)]^\perp$ et où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition. Le *vecteur vitesse* de $\tilde{D}$ par rapport à D est

$$\overrightarrow{v}_{\tilde{D}/D} = \frac{\overrightarrow{k}}{\alpha}.$$

Remarque II.10.

(1) Si $\tilde{c}$ est une paramétrisation normale pour D, $\alpha = 1$ et donc $\overrightarrow{v}_{\tilde{D}/D} = \overrightarrow{k}$.

(2) Parler de vitesse sans préciser l'observateur par rapport auquel on se place n'a pas de sens sauf pour la vitesse de la lumière qui est constante par rapport à n'importe quel observateur (voir Proposition II.12 ci-dessous).

(3) La vitesse relative de deux observateurs galiléens est constante. Avec les notations ci-dessus, $\overrightarrow{v}_{\tilde{D}/D}$ correspond exactement à la vitesse relative de deux observateurs galiléens dirigés par $c'(t)$ et $\tilde{c}'(t)$.

(4) Cette définition correspond bien à l'intuition. Si D et D' sont deux observateurs galiléens qui se croisent en A et si $B \in D$ et $B' \in D'$ sont simultanés pour D alors

$$\overrightarrow{v}_{\tilde{D}/D} = \frac{\overrightarrow{BB'}}{\tau_{AB}}$$

(=distance parcourue dans la direction de $\overrightarrow{BB'}$ divisée par le temps). En effet, soit $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}'$ des vecteurs directeurs de D et D' normaux orientés positivement. Écrivons $B = A + a\overrightarrow{v}$ et $B' = A + a'\overrightarrow{v}'$.

Comme B et B' sont simultanés pour D, on a $\overrightarrow{BB'} \in [v]^\perp$. On écrit $\overrightarrow{v}' = \overrightarrow{k} + s\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{k} \in [v]^\perp$ et où $s \in \mathbb{R}$. On a alors $a'\overrightarrow{v}' - a\overrightarrow{v} \in [v]^\perp$ i.e. $a'\overrightarrow{k} + (a's - a)\overrightarrow{v} \in [v]^\perp$ et donc $a's - a = 0$ ou encore $a' = a/s$. Cela donne que

$$\overrightarrow{BB'} = a'\overrightarrow{k}. \tag{II.11}$$

Par ailleurs, on a par définition

$$\overrightarrow{v}_{\tilde{D}/D} = \frac{\overrightarrow{k}}{s} = \frac{a'\overrightarrow{k}}{a} = \frac{\overrightarrow{BB'}}{a}.$$

Comme $a = \sqrt{-T(\overrightarrow{AB})} = \tau_{AB}$ on a le résultat cherché.

Avec cette modélisation de l'espace, on a

Proposition II.12. *La vitesse de la lumière par rapport à n'importe quel observateur est constante.*

Dans cette proposition, par "vitesse de la lumière", il faut bien évidemment comprendre "norme du vecteur vitesse de la lumière".

Remarque II.13. Avec la normalisation choisie, on trouve que la vitesse de la lumière est 1. Pour changer cette valeur, il suffit de normaliser les vecteurs de type temps à une autre constante que 1.

Démonstration. Soit D un observateur paramétré par $c : I \to \mathcal{M}$, paramétrisation normale positive et L un rayon de lumière i.e. une droite de type lumière. Soit $\overrightarrow{l}$ un vecteur directeur de L (qu'on ne peut pas normaliser puisque $T(\overrightarrow{l}) = 0$) on peut paramétrer L par $\tilde{c}(t) = M + t\,\overrightarrow{l}$. Soient $A = c(t)$ un point de D et $B = \tilde{c}(\tilde{t})$ un point de L simultané à $c(t)$ pour D. On écrit

$$\tilde{c}'(\tilde{t}) = \overrightarrow{l} = \overrightarrow{k} + ac'(t)$$

où $a \in \mathbb{R}$ et où $\overrightarrow{k} \in [c'(t)]^\perp$. Quitte à remplacer $\overrightarrow{l}$ par $-\overrightarrow{l}$ on peut supposer que $a > 0$. Par définition, on a

$$\overrightarrow{v}_{L/D} = \frac{\overrightarrow{k}}{a}.$$

Remarquons que

$$0 = g(\overrightarrow{l}, \overrightarrow{l}) = g(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}) + a^2 g(c'(t), c'(t)).$$

Comme $g(c'(t), c'(t)) = -1$ et comme $a > 0$, on a $a = \sqrt{T(\overrightarrow{k})}$, ce qui implique que

$$\overrightarrow{v}_{L/D} = \frac{\overrightarrow{k}}{a}.$$

Ainsi

$$\|\overrightarrow{v}_{L/D}\| = \sqrt{T(\overrightarrow{v}_{L/D})} = 1.$$

ce qui démontre le résultat.

□

3. En relativité générale

On abandonne la relativité restreinte principalement parce que, comme on le verra dans le prochain chapitre, elle n'est pas adaptée à la description du comportement de la matière. Un autre problème est qu'en relativité restreinte, comme en mécanique classique, les observateurs galiléens sont des observateurs privilégiés, ce qui physiquement n'est pas satisfaisant. Einstein a ainsi introduit la théorie de la relativité générale, dont il a publié les bases en 1915.

Modélisation *En relativité générale, l'univers est modélisé par une variété $\mathcal{M}$ munie d'une métrique lorentzienne g, c'est-à-dire une métrique de signature $(-,+,+,+)$ sur chaque espace tangent $T_x\mathcal{M}$.*

REMARQUE II.14. On simplifiera en prenant des variétés C^∞ mais Hawking a étudié les conséquences de considérer des variétés de régularité plus faible.

Soit $\overrightarrow{v} \in T\mathcal{M}$. On dit que
– v est de genre *temps* si $g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}) < 0$;
– v est de genre *lumière* si $g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}) = 0$;
– v est de genre *espace* si $g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}) > 0$.
Une courbe est de genre temps (resp. lumière, resp. espace) si en tout point ses vecteurs tangents sont de type temps (resp. lumière, resp. espace).

Dans chaque espace tangent $T_x\mathcal{M}$, l'ensemble $E_x := \{\overrightarrow{v} \in T_x\mathcal{M} | g_x(v,v) < 0\}$ a deux composantes connexes.

DÉFINITION. Une *orientation en temps continue* de $(\mathcal{M}, g)$ est une orientation en temps de chaque espace tangent (i.e. le choix d'une composante connexe E_x^+ de E_x) telle que pour tout $x \in \mathcal{M}$, il existe un voisinage V_x de x et un champ de vecteur $X \in \Gamma(TV_x)$ sur V_x tel que pour tout $y \in V_x$, $X(y)$ est dans E_x^+.

Si un tel choix existe, on dit que $(\mathcal{M}, g)$ est *orientable en temps*. Dans la suite, on suppose $(\mathcal{M}, g)$ est *orientée en temps*, c'est-à-dire que $(\mathcal{M}, g)$ est orientable en temps et qu'une orientation en temps continue a été fixée.

DÉFINITION.
– On appelle *observateur* une courbe de genre temps.
– On appelle *observateur en un point* $x \in \mathcal{M}$ la donnée d'un vecteur $\overrightarrow{v} \in T_x\mathcal{M}$ de genre temps, unitaire (i.e. $g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}) = 1$) et orienté positivement (i.e. $\overrightarrow{v} \in E_x^+$).
– Soit D un observateur (ou un observateur en un point). L'*espace global vu par D* en $x \in D$ est la partie de $\mathcal{M}$ qui est g_x-orthogonale, c'est-à-dire la

partie $\mathcal{E}_x$ de $\mathcal{M}$ formée de la réunion de toutes les géodésiques issues de x et orthogonale à D en x.

– Soit D un observateur paramétré par $c : I \to \mathcal{M}$. Le temps propre entre $A = c(a) \in \mathcal{M}$ et $B = c(b) \in M$ est donné par

$$\tau_{AB} = \int_a^b \sqrt{-g(c'(t), c'(t))}dt.$$

Remarque II.15.

(1) De même qu'en relativité restreinte et en mécanique classique, si D est un observateur, il existe une *paramétrisation normale positive* de D, unique à translation en temps près, i.e. une paramétrisation $c : I \to \mathcal{M}$ telle que pour tout t, $g(c'(t), c'(t) = 1$ et $c'(t) \in E^+_{c(t)}$.

(2) En relativité restreinte, on n'avait pas besoin de la notion d'observateur en un point, bien que beaucoup de notions auraient pu se restreindre à cette définition (par exemple la vitesse ne dépendait que de la position et du vecteur tangent).

(3) L'espace global vu par un observateur en x est une sous-variété de type espace de dimension 3 au voisinage de x (même argument qu'en relativité restreinte).

Avec ces définitions, parler de vitesse n'a pas vraiment de sens. En effet, soit D un observateur en un point $x \in \mathcal{M}$ dirigé par $\overrightarrow{v} \in T_x\mathcal{M}$ unitaire. On a besoin de décomposer un vecteur d'un autre espace tangent $T_y\mathcal{M}$ en une composante sur $\overrightarrow{v}$ et une composante sur $[\overrightarrow{v}]^\perp$. Il y a plusieurs manières de la faire, mais aucune n'est canonique.

CHAPITRE III

De la matière dans l'espace-temps

Ce chapitre a pour but d'arriver jusqu'à l'axiomatique de la relativité générale pour décrire le comportement de la matière. Avant d'en arriver à ce stade, il faut comprendre quels sont les problèmes posés par la mécanique classique et la relativité restreinte. Quelle que soit la manière dont on construit la théorie, il faut garder à l'esprit qu'un "observateur humain" doit percevoir les mouvements prédits par les lois de Newton. Ces règles ne peuvent en aucun cas être remises en cause à vitesse faible (par rapport à celle de la lumière). La principale différence entre la relativité générale et la mécanique classique doit surtout se faire sentir soit à grande échelle, soit lorsque des vitesses importantes sont en jeu (par exemple, un GPS qui analyse très précisément la position d'un utilisateur à partir d'ondes tient compte des effets relativistes). C'est pourquoi dans ce chapitre, nous commençons par rappeler les lois utilisées pour décrire le comportement de la matière en mécanique classique et en relativité restreinte, ce qui nous amènera naturellement à l'axiomatique de la relativité générale.

1. Particules et fluides

En mécanique classique, relativité restreinte et relativité générale, la matière est supposée se composer de particules qui se définissent de la manière suivante.

Définition. En mécanique classique, relativité restreinte et relativité générale, une particule est un couple $(\mathcal{C}, m)$ où $\mathcal{C}$ est une courbe de genre temps et m est un nombre positif ou nul, la *masse* de p.

Autrement dit, une particule est un observateur muni d'une masse. Lorsqu'on prend en compte les phénomènes électromagnétiques, on lui attribue également une charge e.

Malheureusement, si on s'intéresse au mouvement de chaque particule, les équations qui apparaissent même en mécanique classique sont quasiment irrésolubles. Cela conduit à considérer la matière comme un fluide.

Définition.

(1) Une *congruence de courbes* (terminologie de S. Hawking) sur un domaine Ω de M est une famille de courbes de type temps qui ne

se coupent pas. Plus précisément, il s'agit d'une famille de courbes $(\mathcal{C}_j)_{j\in X}$ de type temps telle que tout $x \in \Omega$ admet un voisinage ouvert w_x et un difféomorphisme (avec régularité suffisante pour que tout soit bien défini) $\varphi_x : w_x \to I \times B$ (où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et où B est une boule ouverte de $\mathbb{R}^3$) tel que pour tout $j \in X$, il existe un unique $y \in B$ avec $\varphi_x(\mathcal{C}_j \cap w_x) = I \times \{y\}$.

(2) Un *fluide* dans $\mathcal{M}$ est un couple (congruence de courbes, ρ) où $\rho : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction appelée *densité de masse* du fluide. Ce couple devra vérifier une propriété supplémentaire que l'on définira plus tard (voir la "propriété requise" ci-dessous).

Physiquement, les courbes représentent les trajectoires de chaque point du fluide. Avec ce point de vue, on ne voit plus les particules une à une. Prenons un observateur D *attaché au fluide* (i.e. l'une des courbes de la congruence). La fonction densité de masse, physiquement, se définit comme suit : au point x, considérons *l'observateur D_x fixé au fluide* (i.e. la courbe qui passe par x). Le densité de masse est la limite du quotient de la masse mesurée par D_x (i.e. la somme des masses des particules) contenue dans un voisinage v_x de $\mathcal{E}_x$ (espace vu par D en x) par le volume pour la métrique riemannienne induite de v_x lorsque v_x se réduit autour de x.

Remarque III.16. On pourrait penser que la fonction densité de masse décrit complètement le fluide à elle seule puisqu'elle indique la quantité de matière présente à tout instant et à tout endroit. En fait, elle n'est pas suffisante : par exemple, sans la donnée de la congruence de courbes, on n'a aucun moyen de détecter la rotation d'une particule sphérique.

Définition. Considérons un fluide F dans $\mathcal{M}$. Le *champ de vecteurs unitaire associé à F* est le champ de vecteurs $\overrightarrow{u}$ formé des vecteurs tangents aux courbes du fluides, normaux ($T(\overrightarrow{u}) = 1$ en mécanique classique, $T(\overrightarrow{u}) = g(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = -1$ en relativité restreinte et $g(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = -1$ en relativité générale) et orientés positivement.

Définition. Considérons une hypersurface S de type espace et un fluide F de densité de masse ρ. On appelle *masse au repos de F sur S* le flux du champ $\overrightarrow{u}$ à travers S. En relativité restreinte et relativité générale, elle est définie par l'intégrale

$$-\int_S \rho g(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n})$$

où $\overrightarrow{u}$ est le champ de vecteurs unitaire, où $\overrightarrow{n}$ est le champ de vecteur g-orthogonal à S, unitaire ($g(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n}) = -1$) et orienté positivement.

Donnons quelques explications sur la "masse au repos". Supposons que S soit g-orthogonale à $\overrightarrow{u}$, c'est-à -dire, d'un point de vue physique, au "mouvement" du fluide. Alors, $g(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}) = -1$ (car $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n}$) et la masse au repos est la masse de fluide que contient S mesurée par un observateur D fixé au fluide.

Propriété requise (en mécanique classique, relativité restreinte et relativité générale) :

Soit F un fluide, ρ et $\overrightarrow{u}$ respectivement la densité de masse et le champ de vecteurs unitaire associés à F. On impose que

$$\operatorname{div}(\rho\overrightarrow{u}) = 0. \tag{III.17}$$

Cette condition traduit le fait qu'il n'y a pas de perte de matière entre deux instants donnés. Essayons de comprendre pourquoi. On se place dans le cadre de la relativité générale ou restreinte. Reprenons la définition de la congruence de courbes : pour $x \in \mathcal{M}$ il existe un voisinage w_x difféomorphe via φ_x à $I \times B$. Pour simplifier, supposons que $I =]0,1[$ et identifions w_x à $]0,1[\times B$ (on confond w_x et son image). Le bord de w_x est formé de trois parties : $S_0 := \{0\} \times B$, $S_1 := \{1\} \times B$ et $S_2 :=]0,1[\times S^1$. On se place dans la situation la plus claire physiquement : S_0 et S_1 sont g-orthogonales au fluide - c'est-à-dire que les points de S_0 et S_1 sont tous simultanés pour un observateur fixé au fluide- alors que S_2 est tangente au fluide. Notons $\overrightarrow{n}_j$ le vecteur normal à S_j ($i, j \neq 2$ sinon S_j n'est pas de genre espace). Notons aussi ds_g l'élément de volume induit par g sur S_j.

Avec le théorème de Stokes,

$$0 = \int_{w_x} \operatorname{div}(\rho\overrightarrow{u})dv_g = \sum_{i=1}^{3} \int_{S_j} \rho g(\overrightarrow{u}, \tilde{\overrightarrow{n}}_j)ds_g.$$

où $\tilde{\overrightarrow{n}}_j$ est le vecteur g-orthogonal à S_j, unitaire et sortant. Autrement dit, $\tilde{\overrightarrow{n}}_0 = -\overrightarrow{n}_0$ et $\tilde{\overrightarrow{n}}_1 = \overrightarrow{n}_1$. De plus, il est clair que

$$\int_{S_2} \rho g(\overrightarrow{u}, \tilde{\overrightarrow{n}}_2)ds_g = 0.$$

On obtient ainsi

$$0 = \int_{S_1} \rho g(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}_1)ds_g - \int_{S_0} \rho g(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}_0)ds_g$$

ce qui montre que la masse au repos du fluide sur S_0 est la même que sur S_1.

À l'échelle de l'univers, les fluides sont composés d'étoiles, de galaxies qui jouent le rôle de particules. Ces particules s'entrochoquent rarement et les forces qui s'exercent entre elles ne sont pas de nature électromagnétique (en fait, on verra qu'en relativité générale les particules n'interagissent pas entre elles). Cela conduit à introduire la définition suivante :

Définition. Un *fluide parfait sans pression* est un fluide dans lequel les particules sont indépendantes les unes des autres et dans lequel il n'y a pas d'autre énergie que celle des particules (pas de chocs, c'est-à-dire pas de viscosité, pas de rotation)

Cette définition est parfaitement adaptée au modèle de la relativité générale, où comme on le verra plus tard, les particules sont supposées ne pas avoir d'interactions entre elles. Un *fluide parfait* inclut normalement la pression (qui est une énergie supplémentaire) mais lorsque les particules du fluide sont constituées d'étoiles, de planètes et de galaxie, la pression est supposée nulle, sauf à l'intérieur des particules. Ce modèle est aussi utilisé dans d'autres cadres, par exemple dans le cas d'un fluide de très faible viscosité (par exemple en aérodynamique).

2. En mécanique classique

En mécanique classique, les principes utilisés sont ceux de Newton, qui traduisent l'*attraction universelle* (deux objets quelconques s'attirent mutuellement), idée qui sera complètement abandonnée en relativité générale. Il y a deux points de vue différents pour modéliser l'attraction universelle. Soit on utilise les lois de Newton, soit on utilise la notion de Lagrangien. Bien évidemment, quel que soit le point de vue choisi, on retrouve les mêmes résultats.

2.1. Point de vue du potentiel pour des particules. *Ce paragraphe a pour but de formuler la loi de Newton qui traduit l'attraction universelle.*

Soit $p = (\mathcal{C}, m)$ une particule.

DÉFINITION. Le *potentiel* créé par p est la fonction définie sur $\mathcal{M}$ par
$$f_p(M) = -\frac{km}{d(p, M)}$$
où k est une constante universelle appelée *constante de gravitation* et où $d(M, p)$ est la distance introduite dans le paragraphe 1 du chapitre II.

Le comportement de la matière est alors régi par la

Loi de Newton *Soient $p_1 = (\mathcal{C}_1, m_1), \cdots, p_n = (\mathcal{C}_n, m_n)$ des particules. On suppose que les courbes $\mathcal{C}_i$ ne se coupent pas. Alors pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ l'accélération de la particule p_i en $M \in \mathcal{C}_i$ est*
$$\overrightarrow{a_i}(M) = -\sum_{j \neq i} \nabla_x f_j(M)$$
où ∇_x est le gradient calculé dans la direction de $\ker(T)$.

L'accélération est calculée relativement à un observateur galiléen mais rappelons qu'elle ne dépend pas de l'observateur galiléen choisi. Ce système différentiel d'ordre 2 est presque impossible à résoudre dès qu'il y a 3 particules ou plus en jeu (*problème des 3 corps*).

2.2. Point de vue du potentiel pour un fluide parfait sans pression. *Ce paragraphe sert à faire deviner quelles seront les bons axiomes à poser en relativité générale pour qu'à vitesse faible (par rapport à celle de la lumière), on puisse retrouver des lois proches de celles de Newton.*

On rappelle que le potentiel créé par des particules $p_1 = (\mathcal{C}_1, m_1), \cdots, p_1 = (\mathcal{C}_1, m_1)$ est

$$f(M) = -k \sum_{i=1}^{m} \frac{m_i}{d(M, \mathcal{C}_i)}$$

où $d(M, \mathcal{C}_i)$ est la distance de M à l'unique point de $\mathcal{C}_i$ qui est simultané à M. Par extension, si F est un fluide parfait sans pression de densité de masse ρ, on définit le potentiel créé par F en posant

$$f(M) = -\int_{M+\ker(T)} \frac{\rho(y)}{d(M, y)} dv_g(y)$$

où rappelons-le g est le produit scalaire dont nous avons muni $\ker(T)$ et où l'on a choisi l'unité de masse pour que $k = 1$. Soit maintenant D un observateur galiléen dirigé par i_D unitaire, orienté positivement. On rappelle que dès lors qu'on choisit une origine $A \in D$ (ce qui correspond à choisir un instant $t = 0$ pour D) D "voit" $\mathcal{M}$ comme $\mathbb{R} \times \ker(T)$ via l'isomophisme φ_D décrit dans le paragraphe 1 du chapitre II. L'hyperplan $\{t\} \times \ker(T)$ correspond à l'espace observable par D à l'instant t. Via cet isomorphisme, f se réécrit

$$f(t, x) = -\int_{\ker(T)} \frac{\rho(t, y)}{d(x, y)} dv_g(y)$$

pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \ker(T)$.

Remarque III.18. Avec les mêmes notations, si $\Omega \subset \ker(T)$, l'intégrale

$$\int_{\Omega} \rho(t, y) dv_g(y)$$

représente la masse du fluide qui se trouve dans Ω (bien sûr, ce Ω dépend de D à l'instant t).

Maintenant, il faut se souvenir que la fonction de Green du laplacien sur $(\ker(t), g)$ est

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi d(x, y)}$$

(on travaillera toujours avec le laplacien avec la convention de signe suivante : il est égal à $-\sum_i^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ lorsque la carte $(x_1, \cdots, x_n)$ est une isométrie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de sa métrique standard) et ainsi

$$f(t,x) = -4\pi \int_{\ker(T)} G(x,y)\rho(t,y)dv_g(y).$$

Autrement dit, on a

$$\Delta_x f = -4\pi\rho. \tag{III.19}$$

La loi de Newton traduite sur les courbes du fluide est alors donnée par

$$\overrightarrow{a}(t,x) = -\nabla_x f(t,x) \tag{III.20}$$

où $\overrightarrow{a}(t,x)$ est l'accélération au point x et au temps t de la courbe du fluide passant par (t,x). Maintenant, on rappelle que

$$\mathrm{div}(\rho\overrightarrow{u}) = 0 \tag{III.21}$$

où $\overrightarrow{u}$ est le champ de vecteurs unitaire associé au fluide et que cette relation traduit la conservation de masse. Lorsqu'on considérait la matière particule par particule, cette relation était juste remplacée par le fait qu'il y avait à tout instant le même nombre de particules et que leur masse était constante.

Les relations (III.19)**,** (III.20) **et** (III.21) **sont les relations qui régissent le mouvement d'un fluide parfait sans pression en mécanique classique. Ce sont elles que l'on va essayer de retrouver à vitesse faible en relativité générale.**

2.3. Point de vue du lagrangien. *Ce paragraphe donne une formulation équivalente à la loi de Newton qui permet d'introduire naturellement les notions d'énergie et d'impulsion qui seront à la base de la théorie en relativité générale. Pour finir nous regarderons l'exemple d'une particule dans le vide. La lecture de ce paragraphe n'est pas indispensable pour comprendre d'où vient l'équation d'Einstein.*

Le point de vue du lagrangien consiste à voir les trajectoires des particules comme des chemins minimisant une fonctionnelle appelée *fonctionnelle d'action* (en quelque sorte des géodésiques sauf que cette fonctionnelle dépend du système physique). On travaille donc particule par particule. Physiquement, la fonctionnelle d'action calcule pour une trajectoire donnée l'énergie cinétique de la trajectoire moins l'énergie potentielle créée par les autres particules. En effet, les particules vont avoir tendance à suivre les trajectoires qui leur font dépenser le moins d'énergie (énergie cinétique) et qui va utiliser au maximum l'énergie potentielle des autres particules. En fait, on va oublier cette interprétation physique en relativité restreinte.

DÉFINITION.

(1) Un *lagrangien* d'une particule $p = (\mathcal{C}, m)$ dans un système physique (i.e. dans un ensemble de particules contenant p) est une application C^1 $L : \mathcal{M} \times E \to \mathbb{R}$ qui vérifie plusieurs axiomes que nous préciserons plus tard et qui permettront de modéliser les trajectoires des particules.

(2) Soit L un lagrangien de p et $A, B \in \mathcal{C}$. Dans la suite on considérera toujours que B est ultérieur à A. Notons τ_{AB} le temps entre A et B. Soit $\mathcal{C}'$ une autre courbe de genre temps passant par A et B paramétrée par $\beta : [0, \tau_{AB}] \to \mathcal{M}$, normale orientée positivement et telle que $\beta(0) = A$ et $\beta(\tau_{AB}) = B$ (on dira que β est *admissible*). On définit la *fonctionnelle d'action* associée à L entre A et B par

$$S_{AB}(\mathcal{C}')\,(\text{ou } S_{AB}(\beta)) = \int_0^{\tau_{AB}} L(\beta(t), \beta'(t))dt.$$

Comme expliqué plus haut, on veut que

Axiome 1

$$S_{AB}(p) := S_{AB}(\mathcal{C}) \leq S_{AB}(\mathcal{C}')$$

pour toute courbe $\mathcal{C}'$ de genre temps passant par A et B ou de manière équivalente

$$S_{AB}(p) \leq S_{AB}(\beta)$$

pour tout paramétrisation β admissible.

Le lagrangien d'une particule p vérifiant l'axiome 1 n'est pas unique. Il est défini à une différentielle totale près. Rappelons qu'une différentielle totale est une fonction $F : \mathcal{M} \times E \to \mathbb{R}$ de la forme $F(x, \overrightarrow{v}) = df_x(\overrightarrow{v})$ où $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$. En effet, soit F une telle fonction. Notons $L' = L + F$. Alors, puisque

$$\int_0^{\tau_{AB}} F(\beta(t), \beta'(t))dt = f(B) - f(A)$$

pour toute paramétrisation β admissible, les fonctionnelles d'action associées à L et L' ne différent que de la constante $f(B) - f(A)$ et l'axiome 1 est vrai pour L si et seulement si il est vrai pour L'. Inversement, on a :

PROPOSITION III.22. *Si les fonctionnelles d'action de deux lagrangiens L et L' différent d'une constante pour tous A, B, alors L et L' diffèrent d'une différentielle totale.*

DÉMONSTRATION. On définit la forme différentielle w par $w(x)(\overrightarrow{v}) = L(x, \overrightarrow{v}) - L'(c, \overrightarrow{v})$. Par hypothèse, l'intégrale de $w(x)$ le long d'un chemin ne dépend que des extrémités de c. On fixe $q \in \mathcal{M}$ et on définit pour $x \in \mathcal{M}$ la fonction $f(x) = \int_c w$ où c est un chemin quelconque joignant q à x. Fixons $x \in \mathcal{M}$ et prenons une base (e_1, e_2, e_3, e_4). La forme w s'écrit $w = \sum_{i=1}^4 a_i dx_i$

où les dx_i sont les fonctions coordonnées dans cette base. Pour t petit, remarquons que $f(x+te_i) = \int_c w + \int_{c_i} w$ où $c_i(s) = x + se_i$ pour $s \in [0,t]$. Comme le premier terme ne dépend pas de t,

$$\frac{d}{dt}_{t=0} f(x+te_i) = \frac{d}{dt}_{t=0} \int_O^t w(c(s))(c'(s))ds = \frac{d}{dt}_{t=0} \int_O^t a_i(c(s))ds = a_i(x).$$

Cela montre que $w = df$ et que L et L' diffèrent d'une différentielle totale.

$\square$

Soit D_A un observateur galiléen muni d'une origine A (voir paragraphe 1 du chapitre II). On a vu que D_A déterminait de manière naturelle un isomorphisme entre $\mathcal{M}$ et $\mathbb{R} \times \ker(T)$ en écrivant, pour tout point $M \in \mathcal{M}$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{k} + ai_D$$

où $a \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{k} \in \ker(T)$ et où i_D est le vecteur unitaire orienté positivement qui dirige D.

Définition. Soient L un lagrangien d'une particule p dans un système physique. Le *lagrangien de p vu par D_A et associé à L* est donné par

$$L_{D_A} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \ker(T) \times \ker(T) & \to & \mathbb{R} \\ (t, x, \overrightarrow{v}) & \mapsto & L(M, \overrightarrow{v} + i_D) \end{array} \right.$$

où M est tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{k} + ti_D$.

Soit $\beta : [O, \tau_{AB}] \to \mathcal{M}$ une paramétrisation admissible entre A et un autre point B de D. On peut lui associer

$$\tilde{\beta} \left| \begin{array}{ccc} [0, \tau_{AB}] & \to & \mathbb{R} \times \ker(T) \\ t & \mapsto & (\alpha(t), \overrightarrow{k}(t)) \end{array} \right.$$

où comme dans la définition ci-dessus, $\overrightarrow{A\beta(t)} = \overrightarrow{k} + \alpha(t)i_D$. Remarquons que comme $T(\beta'(t)) = 1$, on a $T(\alpha'(t)i_D) = 1$ et $\alpha'(t) = 1$. Comme de plus $\alpha(0) = 0$ (puisque $\beta(0) = A$), on a $\alpha(t) = t$. Ainsi $\tilde{\beta}(t) = (t, \overrightarrow{k})$. De cette manière, $\overrightarrow{k}'(t) = \overrightarrow{v}_{\beta/D}$ (voir le point 1 de la Remarque II.10). On a aussi $\overrightarrow{k}'(t) = \beta'(t) - i_D$. On en déduit que

$$L_{D_A}(t, \overrightarrow{k}(t), \overrightarrow{k}'(t)) = L(\beta(t), \beta'(t)).$$

Cela justifie cette définition d'autant que si on pose,

$$\tilde{S}_{AB}(\tilde{\beta}) = \int_0^{\tau_{AB}} L_{D_A}(t, \overrightarrow{k}(t), \overrightarrow{k}'(t))dt$$

la courbe $\tilde{c}$ associée à la courbe c paramétrant la courbe $\mathcal{C}$ de p minimise la fonctionnelle $\tilde{S}_{AB}$ parmi tous les $\tilde{\beta}$.

On a maintenant le résultat suivant (voir Avez, calcul différentiel)

Théorème III.23. *Soit $F : \mathbb{R} \times \ker(T) \times \ker(T) \to \mathbb{R}$ une fonction C^2. Supposons qu'une courbe $k : [t_1, t_2] \to \ker(T)$ minimise*

$$S(k) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, k(t), k'(t))dt$$

parmi toutes les courbes normales orientées positivement, alors on a

$$d_x F_{(t,k(t),k'(t))} = d/dt\left(d_v F_{(t,k(t),k'(t))}\right) \tag{III.24}$$

où d_x et d_v représentent respectivement les différentielles partielles relativement aux deuxième et troisième variables.

Ce théorème calcule l'équation d'Euler d'un minimiseur de la fonctionnelle d'action et fournit ainsi une équation différentielle dont les solutions donnent les trajectoires des particules.

On va maintenant définir l'**énergie** et l'**impulsion** d'une particule dans un système physique vu par un observateur D_A. Dans le premier chapitre, on explique briève–ment leur interprétation physique. Par ailleurs, les lois physiques données dans ce même chapitre impliquent que ces grandeurs doivent être constantes avec le temps. D'un point de vue mathématique, ce sont des intégrales premières du système. On gardera ce point de vue mathématique ici. On verra aussi que leur définition impose des conditions très restrictives mais qui seront remplies pour le cas d'une particule dans le vide. On constatera au final que les résultats trouvés correspondent à ceux qui avaient été obtenus par des intuitions physiques au Chapitre I.

Proposition III.25. *Avec les mêmes notations que ci-dessus, on suppose que L_{D_A} ne dépend pas de la première variable. Soit $c : [0, \tau_{AB}] \to \mathcal{M}$ l'unique courbe admissible qui paramètre la courbe $\mathcal{C}$ de la particule. Notons $\tilde{c} : [0, \tau_{AB}] \to \mathbb{R} \times \ker(T)$, $\tilde{c(t)} = (t, \overrightarrow{k}(t))$ la courbe associée vue par l'observateur D_A (voir ci-dessus). Alors le nombre*

$$\mathcal{E}(t) = (d_v L_{D_A})_{(\overrightarrow{k}(t), \overrightarrow{k}'(t))}(\overrightarrow{k}'(t)) - L_{D_A}(\overrightarrow{k}(t), \overrightarrow{k}'(t))$$

*est constant. On l'appelle l'***énergie de la particule vue par** D_A.

Insistons encore une fois sur le fait que cette proposition-définition n'a de sens que si L_{D_A} ne dépend pas de la première variable. Notons aussi que si tel est le cas, il n'y a aucune raison que cette hypothèse soit vraie si on change d'observateur galiléen. Pour comprendre ce qui se passe physiquement, imaginons qu'un observateur étudie une particule dans le vide. L'énergie de cette particule est la somme de son énergie au repos (qui est supposée nulle en mécanique classique) et de son énergie cinétique. Supposons que cet observateur soit en mouvement irrégulier par rapport à la particule. Imaginons par exemple qu'il soit soumis à des forces électromagnétiques et que la particule soit neutre électriquement. Alors, l'observateur va mesurer une énergie pour la particule qui est non constante dans le temps (elle va dépendre de la vitesse de la particule par rapport à l'observateur). Pour avoir une bonne définition d'énergie, il faut que l'observateur soit d'une certaine manière lié au système.

Démonstration. On a en utilisant l'équation (III.24)

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = \Big((d_x L_{D_A})_{(\overrightarrow{k}(t),\overrightarrow{k}'(t))}(\overrightarrow{k}'(t))\Big) \\ + (d_v L_{D_A})_{(\overrightarrow{k}(t),\overrightarrow{k}'(t))}(\overrightarrow{k}''(t)) - \frac{d}{dt}\Big(L_{D_A}(\overrightarrow{k}(t),\overrightarrow{k}'(t))\Big).$$

Or

$$\frac{d}{dt}\Big(L_{D_A}(\overrightarrow{k}(t),\overrightarrow{k}'(t))\Big) = (d_x L_{D_A})_{(\overrightarrow{k}(t),\overrightarrow{k}'(t))}(\overrightarrow{k}'(t)) + (d_v L_{D_A})_{(\overrightarrow{k}(t),\overrightarrow{k}'(t))}(\overrightarrow{k}''(t)).$$

D'où $\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = 0$, ce qui prouve la proposition. □

De même, on définit l'impulsion de la manière suivante :

Proposition III.26. *On utilise les mêmes notations que dans la proposition précédente mais cette fois, on suppose que L_{D_A} ne dépend pas des deux premières variables. Alors*

$$\overrightarrow{P} = (d_v L_{D_A})_{\overrightarrow{k}'(t)} \in (\ker(T))^* \sim \ker(T)$$

est un vecteur constant que l'on appelle **impulsion de la particule vue par** D_A

Notons que dans l'énoncé ci-dessus, l'identification entre $\ker(T)$ et $\ker(T)^*$ est donnée par le produit scalaire g (voir Paragraphe 1). Encore une fois, les conditions extrêmement restrictives d'application de la proposition (dépendance de L_{D_A} de la troisième variable uniquement) seront vérifiées dans le cas d'une particule dans le vide.

Remarque III.27. Les définitions ci-dessus ne sont pas tout à fait rigoureuses. En effet, on a vu qu'un lagrangien était définie à une différentielle totale près. Si maintenant on remplace L par $L + F$ où F est une différentielle totale, on va trouver une nouvelle énergie (et impulsion) qui seront les mêmes que celles trouvées avec L mais auxquelles on aura ajouté une constante. On verra que pour obtenir un modèle physique réaliste, il faudra que le lagrangien dépende de la masse de la particule. Il y aura alors un seul choix de constante possible pour que l'énergie et l'impulsion d'une particule de masse nulle soient nulles.

Exemple d'une particule dans le vide.

Comme expliqué ci-dessus, on pourra définir l'énergie et l'impulsion de la particule pour tout observateur galiléen.

Dans ce cas précis, on considère une particule $p = (\mathcal{C}, m)$ et on va se donner

Axiome 2 *un lagrangien de p est invariant par les isométries de $\mathcal{M}$ i.e. pour toute isométrie $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ et pour tous $A, B \in M$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout β admissible, on ait $S_{AB}(\varphi \circ \beta) = S_{AB}(\beta)$.*

Cet axiome traduit le fait que physiquement, il n'y a pas de direction privilégiée dans l'univers et qu'une particule que l'on "bouge" par une isométrie (position et vitesse) à un instant donné a une trajectoire qui est "bougée" de la même manière (i.e. par la même isométrie). Alors on montre

Théorème III.28. *En considérant les axiomes 1 et 2, il existe dans $\bar{L}$ (classe des lagrangiens définis à une différentielle totale près) un lagrangien L_0 tel que pour tout $\overrightarrow{v}$ unitaire ($T(\overrightarrow{v}) = 1$) et orienté positivement*

$$L_0(x, \overrightarrow{v}) = a\|\overrightarrow{v} - i_D\|^2$$

où i_D est le vecteur directeur unitaire orienté positivement d'un observateur galiléen fixé D.

La démonstration de ce résultat n'est pas évidente du tout et sera omise ici.

Remarque III.29.

(1) Dans l'énoncé ci-dessus, $\|\cdot\|$ est la norme associée à g (voir Paragraphe 1). La définition a bien un sens car $\overrightarrow{v} - i_D \in \ker(T)$.
(2) La forme de L_0 n'est donné que pour des vecteurs unitaires mais c'est à ces vecteurs que l'on applique L_0.
(3) Le théorème dit "il existe D tel que ..." mais en fait, l'observateur D peut être choisi arbitrairement. En effet, si dans la définition de L_0, on remplace i_D par $i_{D'}$ (D' étant un autre observateur galiléen), on obtient un lagrangien L_0' qui diffère de L_0 par une différentielle totale.

Dans ce théorème, on peut a priori prendre $a = 0$ i.e. $L = 0$ et les axiomes 1 et 2 sont bien vérifiés mais toute trajectoire est alors minimisante ce qui ne correspond pas à la réalité physique. On va poser $a = \frac{m}{2}$. Fixons maintenant un observateur D. Pour simplifier, prenons celui que l'on a choisi dans le Théorème III.28. On a alors par définition $L_{D_A}(t, x, \overrightarrow{v}) = \frac{m}{2}\|\overrightarrow{v}\|^2$ qui ne dépend ni de t ni de x. L'énergie de la particule est donnée par (on conserve les notations utilisées lorsqu'on a défini l'énergie)

$$\mathcal{E} = (d_v L_{D_A})_{\overrightarrow{k}'(t)}(\overrightarrow{k}'(t)) - \frac{m}{2}\|\overrightarrow{k}'(t)\|^2$$

et puisque $(d_v\|\overrightarrow{v}\|^2)_{\overrightarrow{k}'(t)}(\overrightarrow{k}'(t)) = 2\|k'(t)\|^2$, on trouve

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2}\|\overrightarrow{k}'(t)\|^2.$$

On remarque que $\overrightarrow{k}'(t)$ représente la vitesse de la particule par rapport à D. Ainsi, On trouve que E est égale à l'énergie cinétique de la particule au sens habituel ($1/2mv^2$). Comme on l'a expliqué plus haut, si on prend un autre lagrangien dans la même classe, on va trouver la même valeur de l'énergie plus une constante. On fixe cette constante à 0 pour que l'énergie d'une particule de masse nulle soit nulle.

De la même manière on trouve que l'impulsion est donnée par

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{k}'(t).$$

La trajectoire de la particule minimise la fonctionnelle d'action. La Proposition III.26 nous dit alors que le vecteur vitesse $\overrightarrow{k}'(t)$ de la particule par rapport à D doit être constant. Puisque D est arbitraire, on en déduit que la trajectoire de la particule est une droite.

Lorsque le système physique considéré est composé de n particules, l'axiome 2 ne permet plus de conclure. En fait, on postulera directement la valeur du lagrangien d'une particule pour retrouver la loi de Newton :

Axiome 2' *Le lagrangien d'une particule $p_1 = (\mathcal{C}_1, m_1)$ dans un système physique $p_i = (\mathcal{C}_i, m_i)$ ($i \in \{1, \cdots, n\}$) est donné par*

$$L_1(x, \overrightarrow{v}) = \frac{m_1}{2}\|v - i_D\|^2 - k\sum_{i=2}^{n}\frac{m_i}{d(M, \mathcal{C}_i)}$$

où i_D est le vecteur unitaire positivement orienté d'un observateur galiléen fixé D, où k est la constante de gravitation et où $d(M, \mathcal{C}_i)$ est la distance de M au point M_i de $\mathcal{C}_i$ qui est simultané à M.

On remarque que ce lagrangien est en gros l'énergie cinétique de p_1 moins l'énergie potentielle des autres particules.

3. En relativité restreinte

3.1. Point de vue du lagrangien pour une particule dans le vide.

Ce paragraphe a pour but de calculer l'énergie et l'impulsion d'une particule dans le vide en relativité restreinte. Ce sera un bon point de départ pour la théorie de la relativité générale du fait que, comme on le verra, on fera l'hypothèse que les particules sont indépendantes les unes des autres : chacune se comportera comme une particule dans le vide. La lecture de ce paragraphe n'est pas indispensable pour comprendre d'où vient l'équation d'Einstein.

La loi de Newton pose de nombreux problèmes. Simplement par son énoncé, il y a interaction entre particules et de manière sous-jacente, il y a le problème de la simultanéité. Notamment (il faut essayer pour s'en convaincre), la loi de Newton amène à considérer des vitesses plus grandes que celle de la lumière : en effet, si un objet change de place, son potentiel newtonnien est trnasformé en conséquence et son influence sur l'univers tout entier est instantanément modifié. L'information a donc été transmise avec une vitesse infinie. Pour une seule particule dans le vide, le principe lagrangien ne s'appuie pas sur ces interactions entre particules et on peut regarder ce qui se passe en relativité restreinte. Dans ce cadre, on cherche un lagrangien qui vérifie les axiomes 1 et 2. L'exemple le plus simple est clairement de poser $L = constante$. On a vu que ce choix, en mécanique classique, même s'il ne contredisait pas les axiomes 1 et 2, n'avait aucune chance de modéliser la réalité physique puisque toute trajectoire minimiserait alors la fonctionnelle d'action. Comme on va le voir, la situation est différente en relativité restreinte.

Soit donc $p = (\mathcal{C}, m)$ une particule dans le vide. On va poser $L = -m$, choix que l'on justifiera plus tard. Comme en mécanique classique, fixons $A, B \in \mathcal{C}$ et prenons $\mathcal{C}'$ une autre courbe de genre temps passant par A et B. La fonctionnelle d'action associée est

$$S_{AB}(\mathcal{C}')(\text{ ou } S_{AB}(\beta)) := \int_0^{\tau_{AB}} (-m)dt = -m\tau_{AB}$$

où encore une fois les β admissibles sont les paramétrisations des courbes $\mathcal{C}'$ définies sur $[0, \tau_{AB}]$, normales de type temps orientées positivement et telles que $\beta(0) = A$ et $\beta(\tau_{AB}) = B$. On rappelle que le temps propre d'un point $c(a)$ à un point $c(b)$ associé à une courbe c est défini par

$$\tau_{AB} = \int_a^b \sqrt{-T(c'(t))}dt.$$

Soit maintenant un D un observateur galiléen dirigé par i_D vecteur unitaire orienté positivement et $\beta : [a, b] \to \mathcal{M}$ une paramétrisation d'une courbe $\mathcal{C}'$ que l'on suppose normale pour l'observateur D (et qui n'est donc pas admissible). On veut trouver l'expression du lagrangien de la particule relativement à l'observateur D. Pour cela, on écrit

$$\overrightarrow{A\beta(t)} = \overrightarrow{k}(t) + \alpha(t)i_D$$

où $\overrightarrow{k}(t) \in [i_D]^\perp$, $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ et où l'on a choisi A comme origine. On verra par la suite que le résultat obtenu ne dépend pas du choix de l'origine. On obtient ainsi une courbe associée dans $\mathbb{R} \times [i_D]^\perp$ $\tilde{\beta}(t) := (\alpha(t), \overrightarrow{k}(t))$. Comme en mécanique classique, puisque β est normale par rapport à l'observateur D, on a $\alpha'(t) = 1$ et $\overrightarrow{k}'(t)$ est la vitesse de β par rapport à D. On cherche le lagrangien L_D de la particule vue par D, c'est-à-dire $L_D : \mathbb{R} \times [i_D]^\perp \times [i_D]^\perp \to \mathbb{R}$. Plus précisément, on cherche une fonction L_D telle que la fonctionnelle d'action associée à β (que l'on reparamètre pour qu'elle soit admissible) soit égale à celle de $\tilde{\beta}$ et ce, pour tout β. Observons que comme $T(i_D) = -1$, on a :

$$T(\beta'(t)) = T(\overrightarrow{k}'(t)) - 1 = v_t^2 - 1$$

où $v_t := \sqrt{T(\overrightarrow{k}'(t))}$ est la norme de la vitesse de la particule décrite par la courbe $\beta(t)$ par rapport à D. Ainsi

$$S_{AB}(\mathcal{C}') = -m \int_a^b \sqrt{1 - v_t^2}dt = -m\tau_{AB}$$

où $A = \beta(a)$ et $B = \beta(B)$. Autrement dit, le *lagrangien de la particule vue par D* est

$$L_D \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times [i_D]^\perp \times [i_D]^\perp & \to & \mathbb{R} \\ (t, x, \overrightarrow{v}) & \mapsto & -m\sqrt{1 - T(\overrightarrow{v})} \end{array} \right.$$

La fonctionnelle d'action associée redonne bien $S_{AB}(\mathcal{C}')$.

Remarque III.30. Si le vecteur vitesse v est petit par rapport à la vitesse de la lumière (qui rappelons, avec nos conventions, vaut 1), on voit que

$$L_D(\overrightarrow{v}) \sim -m + \frac{1}{2}mv^2$$

($v = T(\overrightarrow{v})$). Comme $-m + \frac{1}{2}mv^2$ a une fonctionnelle d'action dont les minimiseurs sont les mêmes que celle de $\frac{1}{2}mv^2$, qui était le lagrangien de p vue par D en mécanique classique, on remarque que pour des vitesses petites, les trajectoires de p vérifient les mêmes principes qu'en mécanique classique. C'est la première raison pour laquelle on a choisi de prendre $L = -m$. On en verra une deuxième après le calcul de l'énergie.

Revenons maintenant au Théorème III.23 et aux Propositions III.25 et III.26. Leurs preuves ne font intervenir que la structure d'espace affine et pas la signature de la forme quadratique T. Autrement dit, ils restent valables en relativité restreinte. Comme L_D ne dépend que de la troisième variable, on peut définir l'énergie et l'impulsion. Fixons $\beta = c$ où $c : [a, b] \to \mathcal{M}$ est une paramétrisation normale pour D de la courbe $\mathcal{C}$ associée à la particule p considérée. En gardant les mêmes notations que ci-dessus, on a pour l'*énergie de p vue par D* :

$$\mathcal{E}(t) = (dL_D)_{\overrightarrow{k}'(t)}(\overrightarrow{k}'(t)) - L_D(\overrightarrow{k}'(t)).$$

Puisque $L_D(\overrightarrow{v}) = -m\sqrt{1 - T(\overrightarrow{v})}$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \frac{mT(\overrightarrow{k}'(t))}{\sqrt{1 - T(\overrightarrow{k}'(t))}} + m\sqrt{1 - T(\overrightarrow{k}'(t))} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1 - v_t^2}}. \end{aligned}$$

Remarque III.31. Pour une particule au repos (c'est-à-dire vue par un observateur pour lequel $v = 0$), on retrouve que l'énergie de la particule est $E = mc^2$ (voir Chapitre I) où c est la vitesse de la lumière (qui dans nos unités vaut 1).

Cela fournit une deuxième raison de définir le lagrangien par $L = -m$ pour une particule de masse m. Une différence majeure avec la mécanique classique est qu'en relativité restreinte une particule au repos a une énergie non nulle.

De même, on calcule que l'*impulsion de p vue par D* est donnée par

$$\overrightarrow{P} = \frac{m\overrightarrow{k}'(t)}{\sqrt{1-v_t^2}}.$$

On retrouve la formule trouvée par intuition physique dans le Chapitre 1. Comme en mécanique classique, on déduit des Propositions III.25 et III.26 que la trajectoires de p est une droite.

Remarque III.32. Puisque $S_{AB}(\beta) = -m\tau_{AB}$, une particule dans le vide a une courbe qui maximise τ_{AB}.

3.2. Énergie d'un fluide parfait sans pression. *Ce paragraphe a pour but de définir l'énergie d'un fluide parfait sans pression en relativité restreinte. Cela permettra de donner en relativité générale une définition naturelle du tenseur d'énergie-impulsion. La lecture de ce paragraphe n'est pas indispensable pour comprendre d'où vient l'équation d'Einstein.*

En relativité restreinte, $\mathcal{M}$ est un espace affine muni d'une forme bilinéaire symétri–que g (ou d'une forme quadratique T) de signature $(-,+,+,+)$. C'est donc un cas particulier de variété lorentzienne dont la métrique est en tout point égale à g. Soit F un fluide parfait sans pression de densité de masse ρ.

Définition. Soit D un observateur galiléen dirigé par i_D unitaire et orienté positivement.

(1) La *densité d'énergie du fluide F par rapport à D* est la fonction définie pour $x \in \mathcal{M}$ par

$$e_D(x) := \frac{\rho}{1-v_x^2}$$

où v_x^2 est la vitesse (en norme) du fluide en x pour l'observateur D (i.e. la vitesse de la courbe qui passe par x relativement à D).

(2) Soit S un voisinage d'un point $x \in \mathcal{M}$, $S \subset x + [i_D]^\perp$ (rappelons que $x + [i_D]^\perp$ est l'ensemble des points simultanés à x pour D). L'*énergie du fluide à travers S* est l'intégrale

$$\mathcal{E}_S = \int_S e_D ds_g.$$

Justifions cette définition. Supposons que sur S la vitesse du fluide par rapport à D est constante (en norme) égale à v. Alors par définition,

$$\mathcal{E}_S = \frac{1}{1-v^2}\int_S \rho ds_g. \tag{III.33}$$

Par ailleurs, $v = \sqrt{g(\overrightarrow{v}_{F/D}, \overrightarrow{v}_{F/D})}$ et $\overrightarrow{v}_{F/D}(x) = \frac{\overrightarrow{k}}{a}$ où l'on a écrit comme ci-dessus

$$\overrightarrow{u}(x) = \overrightarrow{k} + a i_D. \tag{III.34}$$

Ici $\overrightarrow{k} \in [i_D]^\perp$, $a \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u}$ est le champ de vecteurs unitaire associé à F. Maintenant, notons m la masse au repos du fluide sur S. On a par définition

$$m = -\int_S \rho g(\overrightarrow{u}, i_D) ds_g \tag{III.35}$$

car i_D est, puisque $S \subset x + [i_D]^\perp$, le champ de vecteurs g-orthogonal à S unitaire et positivement orienté. D'après l'équation (III.34), on a en utilisant le fait que $\overrightarrow{k} \perp i_D$,

$$g(\overrightarrow{u}, i_D) = -a. \tag{III.36}$$

Encore une fois avec (III.34),

$$-1 = g(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = g(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}) - a^2$$

et comme

$$g(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}) = a^2 g(\overrightarrow{v}_{F/D}, \overrightarrow{v}_{F/D}) = a^2 v^2,$$

cela donne

$$-1 = a^2(v^2 - 1).$$

Puisque $a > 0$ (car $\overrightarrow{u}$ et i_D sont positivement orientés), on obtient $a = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. En injectant cette valeur dans (III.36), on obtient que

$$g(\overrightarrow{u}, i_D) = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{III.37}$$

Avec (III.35), cela donne

$$m = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \int_D \rho ds_g.$$

Avec (III.33), on obtient une énergie

$$\mathcal{E}_S = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}.$$

On retrouve en particulier la valeur de l'énergie pour une particule dans le vide vue par l'observateur D (voir le paragraphe 3).

4. En relativité générale

Différence fondamentale avec la mécanique classique En mécanique classique, on considérait que les particules s'attiraient entre elles. En relativité, le comportement de la matière est régi par deux axiomes.

Axiome 1 : *Les courbes des particules, paramétrées par leur temps propres (c'est-à-dire que la paramétrisation est normale positive), sont des géodésiques* *de type temps de* $(\mathcal{M}, g)$.

On considère que le tenseur g (et donc ses géodésiques) contient toutes les informations sur la matière.

Axiome 2 : *Cet axiome donne précisément le lien entre le tenseur* g *et la matière. Il sera précisé plus tard.*

Toute la difficulté revient justement à trouver ce deuxième axiome de manière à ce que, à vitesse faible, on retrouve les lois de la mécanique classique. On veut éviter de considérer la matière particule par particule : on a vu que cela conduit à des équations affreusement compliquées à résoudre (c'est ce qui se passe en mécanique classique dés qu'il y a trois particules ou plus). On gardera donc le point de vue des fluides.

4.1. Fluides parfaits sans pression et tenseur d'énergie-impulsion. Puisqu'en relativité générale, on considère que les particules sont indépendantes les unes des autres et que leur trajectoire ne dépend que de la métrique g, il est naturel de considérer la matière comme un fluide parfait sans pression. La première chose à faire est de donner une définition de l'énergie d'un fluide parfait sans pression par rapport à un observateur. Puisque les particules sont indépendantes deux à deux, chaque particule va se comporter comme une seule particule dans le vide, modèle que l'on a déjà étudié en relativité restreinte. On va voir qu'en relativité générale, on peut tout calculer en un point $x \in \mathcal{M}$ et dans l'espace tangent correspondant $T_x\mathcal{M}$. Or lorsqu'on travaille sur $T_x\mathcal{M}$ muni de la métrique g_x, on est exactement dans le cadre de la relativité restreinte, cadre sur lequel on va donc s'appuyer pour construire la théorie.

On commence par donner la définition suivante.

Définition. Soit F un fluide, D un observateur et $x \in D$. La *vitesse du fluide par rapport à* D est le vecteur vitesse de la courbe du fluide passant par x (qui peut être considérée comme un observateur) par rapport à D.

On a dit plus haut que la vitesse d'un observateur par rapport à un autre n'avait pas de sens en relativité générale, parce que pour la définir, il faudrait décomposer un vecteur d'un espace tangent $T_y\mathcal{M}$ dans un autre espace tangent $T_x\mathcal{M}$. Lorsque les deux observateurs sont au même point, il n'y a plus ce problème et on peut procéder comme en relativité restreinte. Donc pour préciser la définition ci-dessus, notons i_D le vecteur unitaire tangent à D **en x** et orienté positivement. Notons $\overrightarrow{u}$ le champ de vecteurs unitaire associé à F. On écrit de manière unique

$$\overrightarrow{u}(x) = \overrightarrow{k} + a i_D$$

où $\overrightarrow{k} \in [i_D]^{\perp}$ (l'orthogonalité étant bien évidemment relative à g) et $a \in \mathcal{M}$. Comme en relativité restreinte, on définit

$$\overrightarrow{v}_{F/D} := \frac{\overrightarrow{k}}{a}.$$

On considère un fluide parfait sans pression F de densité de masse ρ dans un domaine $\Omega \subset \mathcal{M}$, $x \in \Omega$ et un observateur au point x dirigé par i_D unitaire et orienté positivement. On a vu que la densité d'énergie de F vue par D en x était

$$e_D(x) = \frac{\rho(x)}{1 - v^2}$$

ou encore d'après (III.37),

$$e_D(x) = \rho(x) \left(g_x(\overrightarrow{u}(x), i_D)\right)^2.$$

Il faut noter que cette expression n'aurait pas de sens en relativité générale en un autre point que x. Cela conduit à définir la forme bilinéaire symétrique

$$\tau_x \left| \begin{array}{ccc} T_x\mathcal{M} \times T_x\mathcal{M} & \to & \mathbb{R} \\ (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) & \mapsto & \rho(x) g_x(\overrightarrow{u}(x), \overrightarrow{v}) g_x(\overrightarrow{u}(x), \overrightarrow{w}). \end{array} \right.$$

En considérant τ_x pour tout x, on obtient ainsi un tenseur deux fois covariant qui vérifie que pour tout observateur D au point x dirigé par i_D, unitaire et orienté positivement, on a

$$\tau(i_D, i_D) = e_D(x)$$

où $e_D(x)$ est défini comme ci-dessus. D'autre part, on pourrait faire pour l'impulsion la même construction que pour la densité d'énergie en relativité restreinte et avec la même démarche obtenir en relativité générale un vecteur au point x que l'on notera $\overrightarrow{P}_D(x)$ et qui est l'analogue de $e_D(x)$ construit ci-dessus. Alors, on peut vérifier que si $\overrightarrow{w}$ est unitaire (i.e. $g(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}) = 1$) et g-orthogonal à i_D,

$$\tau_x(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}) = g(\overrightarrow{P}_D(x), \overrightarrow{w}).$$

Cela justifie de donner la définition suivante

Définition. Le tenseur τ est appelé *tenseur d'énergie-impulsion* associé au fluide F.

En fait, on confondra souvent τ avec le tenseur deux fois contravariant qui lui est associé. On le notera toujours τ. Il est clair que

$$\tau = \rho \overrightarrow{u} \otimes \overrightarrow{u}, \tag{III.38}$$

$\overrightarrow{u}$ étant le champ de vecteurs unitaires associé à F. On montre maintenant que

Proposition III.39. *Le champ de vecteurs de composantes $\nabla_k \tau^{kl}$ est le champ de vecteurs nul si et seulement si les courbes du fluides sont des géodésiques de $(\mathcal{M}, g)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in \Omega$. Prenons une base $(e_1, \cdots, e_4)$ de $T_x\mathcal{M}$ tel que $\nabla e_j(x) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\nabla_k \tau^{kl} e_l &= \nabla_k(\rho \overrightarrow{u}^k \overrightarrow{u}^l) e_l \\ &= \nabla_k(\rho \overrightarrow{u}^k) \overrightarrow{u}^l e_l + \rho \overrightarrow{u}^k \nabla_k \overrightarrow{u}^l e_l \\ &= \mathrm{div}(\rho \overrightarrow{u}) \overrightarrow{u} + \rho D_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{u}\end{aligned}$$

où D est la connexion de Levi-Civita associée à g. Compte-tenu de (III.17), le champ de vecteurs $\nabla_k \tau^{kl} e_l$ est nul si et seulement si $D_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{u} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si les courbes du fluide sont des géodésiques de $(\mathcal{M}, g)$. $\square$

4.2. L'équation d'Einstein. Nous sommes maintenant en mesure de définir le deuxième axiome de la relativité générale. Pour cela, la stratégie est d'essayer de copier les modèles de la relativité restreinte et de la mécanique classique pour retrouver les lois de Newton pour des vitesses faibles par rapport à celle de la lumière. Le problème est que dans ces modèles, les observateurs galiléens jouent un rôle fondamental (par exemple pour définir l'énergie et l'impulsion) et qu'en relativité générale, on n'a aucun observateur privilégié. L'idée est alors de supposer dans un premier temps qu'on a de tels observateurs ("presque" galiléens), de trouver une bonne formulation du deuxième axiome dans ce cadre et de voir que ce que l'on a trouvé est en fait intrinsèque et ne dépend pas de ces observateurs particuliers.

DÉFINITION. Un *domaine statique* est un ouvert connexe Ω de $\mathcal{M}$ tel que (Ω, g) est isométrique à $(I \times \omega, \tilde{g})$ où I est un intervalle ouvert, ω est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^3$ et où dans la "carte canonique" (donnée par l'isométrie de Ω dans $I \times \omega$), la matrice de g au point $(t, x^1, x^2, x^3) \in I \times \omega$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} -f^2(x^1,x^2,x^3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{g}_{11}(x^1,x^2,x^3) & \bar{g}_{12}(x^1,x^2,x^3) & \bar{g}_{13}(x^1,x^2,x^3) \\ 0 & \bar{g}_{21}(x^1,x^2,x^3) & \bar{g}_{22}(x^1,x^2,x^3) & \bar{g}_{23}(x^1,x^2,x^3) \\ 0 & \bar{g}_{31}(x^1,x^2,x^3) & \bar{g}_{32}(x^1,x^2,x^3) & \bar{g}_{33}(x^1,x^2,x^3) \end{pmatrix}$$

où $f, \bar{g}_{i,j} : \omega \to \mathbb{R}$ $(i \in \{1,2,3\})$ sont des fonctions suffisamment régulières pour que la suite ait un sens. Autrement dit, on a

$$\tilde{g}(t, x^1, x^2, x^3) = -f^2(x^1, x^2, x^3) + \sum_{k,l=1}^{3} \bar{g}_{kl}(x^1, x^2, x^3) dx^k \otimes dx^l$$

pour tout $(t, x^1, x^2, x^3) \in I \times \omega$,

REMARQUE III.40. Le mot *statique* provient du fait que les composantes de la métrique ne dépendent pas du temps.

Il n'y a aucune raison qu'il existe dans $(\mathcal{M}, g)$ un domaine statique mais Hawking a montré que l'existence d'un tel domaine statique est équivalente à l'existence d'un *champ de Killing* K (c'est-à-dire un champ de vecteurs engendrant un flot isométrique) et d'une hypersurface H de genre espace orthogonale en tout point au champ de vecteurs K. Le flot de K donne donc un groupe à un paramètre d'isométries dont les orbites (ce sont les courbes intégrales de K) sont g-orthogonales à H.

Autrement dit, considérons une courbe intégrale de K. Cette courbe définit un observateur D. L'espace vu par D est à tout instant isométrique à $(H, \bar{g})$ où $\bar{g}$ est la restriction de g à H. Ces observateurs observant toujours le même espace sont les analogues des observateurs galiléens en mécanique classique ou en relativité restreinte.

Nous travaillons donc dans $(I \times \omega, \tilde{g})$. La matière est modélisée par un fluide parfait sans pression F. Rappelons que le premier axiome dit que les courbes de F paramétrées par le temps sont des géodésiques de $(\mathcal{M}, g)$. L'idée fondamentale pour trouver le deuxième axiome est que le fluide lui-même (y compris sa densité de masse) est lié à la métrique g. C'est ce lien que l'on cherche à déterminer de manière à retrouver (en approximation) les lois de Newton. Remarquons que les domaines statiques permettent de se ramener à la relativité restreinte ou à la mécanique de la façon suivante : prenons le cas où $f = 1$ et où $\bar{g}$ est la métrique euclidienne. Alors, on a deux manières de voir les choses. Soit on travaille dans $(I \times \omega, \tilde{g})$. Dans ce cas, on retrouve l'espace-temps de la relativité restreinte. Sinon, on peut travailler dans $I \times w$ muni de la forme T associée à la forme bilinéaire $-f^2 dt^2$ dont le noyau (tangent à w) est muni du produit scalaire $\bar{g}$. On retrouve le modèle de la mécanique classique. **Pour trouver le deuxième axiome, c'est avec cette vision des choses que l'on va travailler.**

Pour cela, considérons une courbe $\mathcal{C}$ du fluide paramétrée par c, paramétrisation normale positive. On écrit c dans la carte (t, x^1, x^2, x^3, x^4) :

$$c(s) = (c_0(s), c_1(s), c_2(s), c_3(s))$$

et on note $\overrightarrow{k}(s) = (c_1'(s), c_2'(s), c_3'(s))$ et $\overrightarrow{a}(s) = (c_1''(s), c_2''(s), c_3''(s))$ Écrire c dans cette carte revient à regarder $\mathcal{C}$ à travers les yeux d'un observateur galiléen D, c'est-à-dire une courbe intégrale de K. Le vecteur $\overrightarrow{k}$ représente la vitesse de $\mathcal{C}$ par rapport à D et le vecteur $\overrightarrow{a}$ est le vecteur accélération de $\mathcal{C}$ vue par D. En fait, pour travailler vraiment avec le modèle de la mécanique classique, il faudrait que c soit une paramétrisation normale pour $T = -\frac{\partial}{\partial t}$ et donc normaliser c pour avoir $c_0' = 1$. Cependant, comme $g_{c(s)}(c'(s), c'(s)) = -1$, on a

$$-f^2 c_0'(s) + \|\overrightarrow{k}(s)\|_{\bar{g}} = -1$$

c'est-à-dire

$$(c_0')^2 = \frac{1 + \|\overrightarrow{k}\|_{\bar{g}}}{f^2}. \tag{III.41}$$

Maintenant, on doit supposer qu'on est proche du modèle de la mécanique classique donc f est proche de 1. D'autre part, les vitesses sont supposées petites par rapport à la vitesse de la lumière, c'est-à-dire qu'on suppose

$$\| \overrightarrow{k} \|_{\bar{g}} = o(1) \tag{III.42}$$

ce qui fait que

$$c_0' = o(1) \tag{III.43}$$

(autrement dit, c est "presque" une paramétrisation normale pour la forme $-dt^2$) et $\overrightarrow{a}$ peut bien être considéré comme le vecteur accélération de la courbe $\mathcal{C}$. Même si cette approche n'a rien de rigoureux, elle est physiquement cohérente. Elle va nous permettre de trouver par l'intuition un bon deuxième axiome dont la validité sera vérifiée par les observations physiques.

La première chose à faire est de se débrouiller pour retrouver la relation (III.20) en approximation. Pour cela, nous devons exprimer $\overrightarrow{a}$ en fonction de données géométriques. C'est l'objet du résultat suivant :

Proposition III.44. *Les composantes du vecteurs $\overrightarrow{a}$ vérifient pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$*

$$c_k''(s) = -\frac{1}{f}(1 + v^2)\nabla_{\bar{g}}^k f - \sum_{i,j=1}^{3} \Gamma_{ij}^k c_i' c_j'$$

où l'on a posé $v = \| \overrightarrow{k} \|_{\bar{g}}$ et où $\nabla_{\bar{g}}^k f = g^{kj}\partial_j f$.

Démonstration. D'après l'axiome 1, $\mathcal{C}$ est une géodésique de $(\mathcal{M}, g)$. Autrement dit, $D_{c'(t)}c'(t) = 0$ (D est la dérivée covariante associée à la connexion de Levi-Civita de g). Donc

$$\begin{aligned} 0 = D_{c'(t)}(c'(t)) &= D_{c'(t)}\left(c_0' \frac{\partial}{\partial t}\right) + \sum_{i,j=1}^{3} D_{c'(t)}\left(c_i' \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= c''(t) + c_0' D_{c'(t)} \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{3} c_i' D_{c'(t)} \frac{\partial}{\partial x^i}. \end{aligned} \tag{III.45}$$

Écrivons maintenant que

$$D_{c'(t)} \frac{\partial}{\partial t} = c_0' D_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} c_i' D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Comme d'après (III.51), pour $i, k \geq 1$, $\Gamma_{i0}^k = 0$, on obtient

$$D_{c'(t)} \frac{\partial}{\partial t} = c_0' \Gamma_{00}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{III.46}$$

De même, on calcule que

$$D_{c'(t)}\frac{\partial}{\partial x^i} = c_0'\Gamma_{0i}^0 + \sum_{j=1}^{3} c_j'\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{III.47}$$

En remplaçant dans (III.45) et en regardant composante par composante, on trouve que pour tout $k \in \{1,2,3\}$

$$0 = c_k'' + \Gamma_{00}^k(x_0')^2 + \sum_{i,j=1}^{3}\Gamma_{ij}^k x_i' x_j'.$$

En utilisant (III.51) (voir plus bas) et (III.41), la preuve de la proposition est complète. □

Revenons maintenant à ce qui nous intéresse : retrouver la relation (III.20). Pour être "approximativement" en mécanique classique, on doit supposer que f vaut "presque" 1 et $\bar{g}$ est presque la métrique euclidienne. On écrit donc $f = 1+h$ et on suppose que $h = o(1)$. On écrit aussi $\bar{g}_{ij} = \delta_{ij} + o(1)$. Compte-tenu de (III.51) et de (III.42), on obtient que

$$\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{\nabla h}(1 + o(1)). \tag{III.48}$$

Pour retrouver la relation (III.20), on voudrait que cette fonction h soit le potentiel newtonnien f qui apparaît dans la relation (III.20), c'est-à-dire, en vertu de la relation (III.19) que

$$\Delta_{\bar{g}}h \equiv 4\pi\rho. \tag{III.49}$$

Or on calcule que

Proposition III.50. *Dans la carte (t, x^1, x^2, x^3), la courbure de Ricci de g vérifie*

$$Ric\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\right) = -f\Delta_{\bar{g}}f.$$

Démonstration. On commence par calculer les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita associée à g dans cette carte. Nous notons "0" la coordonnée associée à t et utilisons les conventions d'Einstein. On rappelle que par définition, on a pour tous $i,j,k \in \{0,1,2,3\}$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}\right)$$

et que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Donc si $i,k \in \{1,\cdots,3\}$,

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{i0}^k = 0\ ;\ \Gamma_{i0}^0 = \frac{1}{f}\partial_i f \text{ et } \Gamma_{00}^k = fg^{kl}\partial_l f. \tag{III.51}$$

Maintenant, on sait que la courbure de Ricci s'exprime dans une carte en fonction des symboles de Christoffel (voir l'appendice) grâce à la formule suivante :

$$R_{\alpha\beta} = \partial_i \Gamma^i_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^i_{\alpha i} + \Gamma^i_{im}\Gamma^m_{\alpha\beta} - \Gamma^i_{\beta m}\Gamma^m_{i\alpha}$$

où l'on a noté $R_{\alpha\beta}$ les composantes du tenseur de Ricci dans la carte considérée. On a donc :

$$R_{00} = \partial_i \Gamma^i_{00} - \partial_0 \Gamma^i_{i0} + \Gamma^m_{00}\Gamma^i_{mi} - \Gamma^m_{i0}\Gamma^i_{m0}$$

c'est-à-dire en remplaçant les symboles de Christoffel par leur valeur :

$$R_{00} = \partial_i(f g^{ij}\partial_j f) + f\Gamma^i_{mi} g^{mj}\partial_j f - 2|df|^2_{\bar{g}}. \tag{III.52}$$

On a utilisé le fait que puisque f ne dépend pas de t, $|df|_{\bar{g}} = |df|_g$. Maintenant, on calcule

$$\partial_i(f g^{ij}\partial_j f) = |df|^2_{\bar{g}} + f\partial_i(g^{ij})\partial_j f + f g^{ij}\partial_{ij} f.$$

En écrivant que $\nabla_i g^{-1} = 0$, on obtient

$$\partial_i g^{ij} = -g^{mj}\Gamma^i_{im} - g^{im}\Gamma^j_{im}$$

ce qui donne

$$\partial_i(f g^{ij}\partial_j f) = |df|^2_{\bar{g}} - f(\partial_j f) g^{mj}\Gamma^i_{im} - f(\partial_j f) g^{im}\Gamma^j_{im} + f g^{ij}\partial_{ij} f.$$

Rappelons que l'*opérateur de D'alembert* ou *d'alembertien* est l'analogue riemannien du laplacien. Il est défini en coordonnées par

$$\Box_g f = -g^{ij}\left(\partial_{ij} f - \Gamma^k_{ij}\partial_k f\right).$$

Il est fréquent de conserver les notations riemanniennes en géométrie lorentzienne (par exemple en ce concerne les courbures) mais pour le d'alembertien, une notation différente indique la différence de nature entre ces deux opérateurs : le laplacien est elliptique alors que le d'alembertien est hyperbolique.

Reprenons notre calcul. Nous obtenons ainsi

$$\partial_i(f g^{ij}\partial_j f) = |df|^2_{\bar{g}} - f(\partial_j f) g^{mj}\Gamma^i_{im} - f\Box_g f.$$

En remplaçant dans (III.52), on a

$$R_{00} = -f\Box_g f - |df|^2_{\bar{g}}. \tag{III.53}$$

On calcule maintenant en utilisant que $g^{0i} = -f^2\delta^{0i}$ et que $\Gamma^m_{00} = \frac{1}{f}\partial_m f$

$$\begin{aligned} f\Box_g f &= -g^{ij}\left(f\partial_{ij} f - f\Gamma^k_{ij}\partial_k f\right) \\ &= f\Delta_{\bar{g}} f + g^{00}\Gamma^m_{00}\partial_m f \\ &= f\Delta_{\bar{g}} f - |df|^2_{\bar{g}}. \end{aligned}$$

En revenant à (III.53), on obtient

$$R_{00} = -f\Delta_{\bar{g}} f$$

ce qui termine la démonstra–tion de la proposition III.50. □

De cette proposition, on déduit puisque $f = 1 + h$ avec $h = o(1)$, que $\Delta_{\bar{g}} h = -Ric\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right)(1 + o(1))$. En revenant aux notations tensorielles, pour avoir la relation (III.49), il faut donc imposer

$$R_{00} = 4\pi\rho.$$

Rappelons que le tenseur d'énergie-impulsion est défini par

$$\tau = \rho\overrightarrow{u} \otimes \overrightarrow{u}$$

et comme $c' = \overrightarrow{u}$,

$$\tau_{00} = \rho(c'_0)^2 = \rho(1 + o(1))$$

en utilisant (III.43). La relation (III.49) est donc satisfaite si on suppose que

$$Ric = 4\pi\tau.$$

Remarque III.54. Il suffit que cette relation soit satisfaite sur la composante 00 pour avoir (III.49) mais pour avoir une équation intrinsèque, on l'impose comme étant une égalité tensorielle.

Malheureusement, la proposition III.39 implique que l'on doit avoir

$$\nabla^i R_{ij} = 0$$

ce qui n'a aucune raison d'être vrai en général. Par contre, on remarque que le tenseur dit *tenseur d'Einstein*

$$E_{ij} := R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} \qquad \text{(III.55)}$$

(où $R := g^{kl}R_{kl}$ est la courbure scalaire) vérifie cette condition (i.e. $\nabla^i E_{ij} = 0$). Cette relation se déduit de l'identité de Bianchi sur la courbure de Riemann. D'où l'idée de poser

$$Ric - \frac{1}{2}Rg = 8\pi\tau. \qquad \text{(III.56)}$$

Cette relation conserve la relation (III.49). Pour le voir, contractons chaque côté de l'égalité par g^{ij}. Comme $g^{ij}g_{ij} = 4$ et comme $\tau_{ij} = \rho c'_i c'_j$ (car $\overrightarrow{u} = c'$), on obtient $R - 2R = 8\pi\rho c'_i c'_j g^{ij}$. Mais d'après (III.42), $c'_i = o(1)$ si $i \neq 0$ et on a déjà vu que $c'_0 = 1 + o(1)$ (d'après (III.43)). On obtient donc $-R = -8\pi\rho(1 + o(1))$ puisque $g^{00} = -1 + o(1)$. On en déduit en utilisant l'équation (III.56) que

$$\begin{aligned}\Delta_{\bar{g}} h &= -(1+o(1))R_{00} = -(1+o(1))(\frac{1}{2}Rg_{00} + 8\pi\tau_{00}) \\ &= -(1+o(1))(-4\pi\rho + 8\pi\rho) \\ &= -(1+o(1))4\pi\rho\end{aligned}$$

et on retrouve (III.49).

Si on ajoute à E_{ij} un terme de la forme Λg (où Λ est un réel), on garde la relation (III.55). Par contre, on perd la relation (III.49). Prendre $\Lambda = 0$ conduit à considérer que l'univers est en expansion (voir le chapitre suivant) ce que refusait complètement Einstein. C'est pourquoi il a ajouté ce terme. L'équation garde sa cohérence (i.e. la relation (III.55)). On peut même montrer que c'est le seul terme que l'on peut ajouter pour garder la cohérence de l'équation. Si l'on suppose que Λ est petit, on est proche des lois de Newton. C'est cette équation intrinsèque (on n'a pas besoin d'avoir de domaine statique pour la considérer) que l'on gardera.

Autrement dit, on est maintenant en mesure d'énoncer les deux axiomes qui régissent la matière lorsqu'on considère qu'il n'y a qu'un fluide parfait pression dans l'espace-temps :

Axiome 1 : Les courbes du fluide paramétrées par leur temps propre sont des géodésiques de $(\mathcal{M}, g)$.

Axiome 2 : La matière et la métrique sont liées par l'équation d'Einstein

$$Ric - \frac{1}{2}Rg = 8\pi\tau - \Lambda g \tag{III.57}$$

où Λ est une constante, appelée *constante cosmologique*, que l'on peut choisir.

Remarque III.58. Si la matière n'est pas modélisée par un fluide parfait, on conserve tout de même ces deux axiomes sous cette forme mais c'est le tenseur d'énergie-impulsion qui prendra une autre forme.

Considérons seulement l'axiome 2. La relation (III.55) implique que $\nabla^i \tau_{ij} = 0$ et la proposition III.39 implique alors l'axiome 1. **On considère donc que le comportement de la matière est régi par l'axiome 2 seulement**. L'axiome 1 est alors automatiquement vrai.

À partir de maintenant et dans tous les chapitres qui suivent, nous nous plaçons toujours dans l'espace-temps de la relativité générale et nous supposerons que le comportement de la matière est régi par

l'axiome 2 seulement.

Remarque III.59. Vers la fin de sa vie, Einstein a admis qu'il avait fait une erreur en refusant d'admettre que $\Lambda = 0$. En tout cas, si la constante Λ n'est pas nulle, elle doit être très petite. En effet, ce terme additionnel détruit la relation (III.49). Par conséquent, on ne retrouve plus les lois de la mécanique classique à petite échelle. Les mesures physiques récentes tendent à montrer que $\Lambda > 0$ est non nulle, petite, mais pas aussi petite que ce que l'on pensait.

Remarque III.60. La constante cosmologique fournit également une explication possible à l'énergie noire.

Remarque III.61. Pour établir l'équation d'Einstein, on a travaillé avec la courbure de Ricci mais on aurait pu penser à poser $R = -4\pi\rho$ ce qui est a priori suffisant pour avoir la relation (III.49). Physiquement, cela n'aurait pas pu modéliser correctement la réalité car cette relation faisait intervenir seulement la densité de masse et pas les courbes du fluide. On aurait aussi pu penser à utiliser le tenseur de Riemann mais les équations auraient été beaucoup plus compliquées et les observations physiques montrent que le choix de l'axiome 2 ci-dessus est un modèle très proche de la réalité.

Bibliographie

[AMA79] A. Ashtekar et A. Magnon-Ashtekar, *On conserved quantities in general relativity*, J. Math. Physics., **20** (1979), 793–800.

[ADM62] R. L. Arnowitt, S. Deser, et C. W. Misner, *Canonical analysis of general relativity*, Recent developments in general relativity, Pergamon, Oxford, (1962), 127–136.

[Aub98] T. Aubin, *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, Berlin Springer-Verlag, 1998.

[Bar86] R. Bartnik, *The mass of an asymptotically flat manifold*, Commun. Pure Appl. Math., **39**, (1986), 661–693.

[BI04] R. Bartnik et J. Isenberg, *The Einstein equations and the large scale behavior of gravitational fields*, Birkhäuser, Basel, 2004, 1–38.

[Br01] H. Bray, *Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem*, Journal of Differential Geometry, **59**, No 2 (2001), 177–267.

[Br10] H. Bray, *On dark matter, spiral galaxies, and the axioms of General Relativity*, Preprint ArXiv 1004.4016, (2010), 63 pages.

[CB09] Y. Choquet-Bruat, *General relativity and the Einstein equation*, Oxford University Press, 2009.

[CBG69] Y. Choquet-Bruat et R. Geroch, *Global aspects of the Cauchy problem in general relativity*, Comm. Math. Phys. **14** (1969), 329–335. University Press, 2009.

[CGP10] P.T. Chruściel, G.J. Galloway, D. Pollack, *Mathematical general relativity : a sampler*, Preprint Arxiv : http ://arxiv.org/abs/1004.1016.

[DGH10] M. Dahl, R. Gicquaud et E. Humbert, *A limit equation associated to the solvability of the vacuum Einstein constraint equations using the conformal method*, En préparation.

[DH09] O. Druet et E. Hebey, *Stability and instability for Einstein-scalar field Lichnerowicz equations on compact Riemannian manifolds*, Mathematische Zeitschrift, **263** (2009), p. 33–67.

[FB52] Y. Fourès-Bruhat, *Théorèmes d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, Acta Math, **88** (1952), 141–225.

[Gi09] R. Gicquaud, *De l'équation de prescription de courbure scalaire aux équations de con- trainte en relativité générale sur une variété asymptotiquement hyperbolique*, à paraître dans Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Preprint arXiv http ://arxiv.org/abs/0802.3279 (2008), 41 pages.

[GS10] R. Gicquaud et A. Sakovich, *A large class of non constant mean curvature solutions of the Einstein constraint equations on an asymptotically hyperbolic manifold*, En préparation.

[Go10] É. Gourgoulhon, *Relativité générale*, Notes de cours de Master 2,http ://luth2.obspm.fr/ luthier/gourgoulhon/, 2010.

[Haw73] S. Hawking et G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time,* Cambridge monograph on Mathematical Physics, 1973.

[Heb97] E. Hebey, *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés,* Diderot Éditeur, Arts et sciences, 1997.

[HPP08] E. Hebey, F. Pacard, D. Pollack, *A variational analysis of Einstein-scalar field Lichnerowicz equations on compact Riemannian manifolds* , Commun.Math.Phys., **278** (2008), p. 117–132.

[Her03] M. Herzlich, *L'inégalité de Penrose, [d'après H. Bray, G. Huisken et T.Ilmanen, ...],* Séminaire Bourbaki n 883, Astérisque, **282** (2003), Soc. math. France, Paris, 85–111.

[HN69] F. Hoyle et J.V. Narlikar, *A new model for the expanding universe,* Proc. Roy. Soc. London. A **277**, 1963, 1–23.

[HI69] G. Huisken et T. Ilmanen, *The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality,* Journal of Differential Geometry, **59**, No 3 (2001), 353–437.

[IOM04] J. Isenberg et N. Ó Murchadha, *Non-CMC conformal data sets which do not produce solutions of the Einstein constraint equations,* Classical Quantum Gravity, **21** (2004), No 3, 233–241.

[K59] A. Komar, *Covariant conservation laws in general relativity* Phys. Rev. **113** (1959), 934–936..

[LP87] J. M. Lee and T. H. Parker. *The Yamabe problem.* Bull. Am. Math. Soc., New Ser., **17** (1987), 37–91.

[Lu01] J.P. Luminet, *L'univers chiffoné,* Folio Essais, Collection : le temps des sciences, 2001.

[M08] D. Maxwell, *A class of solutions of the vacuum Einstein constraint equations with freely specified mean curvature,* Preprint arXiv http ://arxiv.org/abs/0804.0874.

[PT82] T. Parker et C. Taubes, *On Witten's proof of the positive energy theorem,* Comm. Math. Phys., **84** (1982), 223–238.

[PU05] P. Peter et J.P. Uzan, *Cosmologie primordiale,* Belin, Collection : Échelles, 2005.

[SY79] R. Schoen et S.-T. Yau. *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity.* Comm. Math. Phys., **65**, (1979), 45–76.

[Va09] N. Vasset, *Quelques aspects des horizons de trous noirs en relativité numérique,* Thèse de l'Université de Paris VII, 2009.

[Wa84] R.M. Wald, *General relativity,* University of Chicago Press, Chicago, 1984.

[Wit81] E. Witten. *A new proof of the positive energy theorem.* Commun. Math. Phys., **80**, (1981), 381–402.