Pseudogroupes de Lie et théorie de Galois différentielle

B. Malgrange

Introduction

1. Cet exposé est la suite de l'article [39] dans lequel je proposais la définition d'un objet généralisant aux équations différentielles non-linéaires le groupe de Galois différentiel, ou "groupe de Picard-Vessiot" de la théorie linéaire. Le point essentiel est qu'il faut ici remplacer les groupes par des pseudogroupes de Lie (les "groupes infinis" de Lie et Cartan. Ce dernier sujet a fait l'objet d'une série d'articles d'E. Cartan, qui culmine dans [5]).

Depuis la parution de cet article, un certain nombre de développements sont intervenus. J'en citerai deux ici : d'une part la classification des feuilletages de codimension un en termes de "suites de Godbillon-Vey" (ou "de Gelfand-Fuks") ; cette classification est sommairement esquissée dans [40], et faite en détail par Casale [8] ; d'autre part les travaux de cet auteur sur l'équation de Painlevé 1 [9], [10] ; dans ces travaux il détermine notamment le pseudogroupe de Galois de cette équation, résolvant ainsi un vieux problème de Painlevé et Drach.

Ces articles m'ont convaincu de deux choses ; tout d'abord de la nécessité de remplacer le contexte analytique où je m'étais placé par un contexte algébrique ; ceci, techniquement, ne pose pas de problème. D'autre part, et ceci est plus important, de la nécessité de décrire systématiquement les pseudogroupes de Lie de la manière que Cartan utilise plus ou moins informellement sous le nom de "méthode du repère mobile".

Une telle description a été faite par Guillemin-Singer-Steinberg [27], [59], dans le cas transitif. Mais ici, l'extension au cas intransitif est absolument nécessaire : en théorie de Galois différentielle, ceci correspond au cas où l'équation différentielle (ou le feuilletage) considérée admet des intégrales premières ; il est indispensable de considérer ce cas dans une théorie générale (penser par exemple aux systèmes hamiltoniens, qui admettent au moins l'énergie comme intégrale première). Or, dans la littérature, à l'exception de Cartan lui-même, on trouve peu de choses sur le cas intransitif.

J'ai donc dû reprendre la description de ces auteurs et l'étendre au cas intransitif. Cela fait l'objet du chapitre II, qui traite des pseudogroupes en général, l'application aux feuilletages étant faite au chapitre III. Le reste de l'article

consiste, aux appendices près, en un chapitre I préliminaire et un chapitre IV qui traite quelques exemples ; les derniers se limitent à des cas intégrables ; dans ce cas, la détermination du pseudogroupe de Galois dans un formalisme à la Cartan apparaît comme une variation sur la connexion de Gauss-Manin, ou, si l'on préfère, comme "une connexion de Gauss-Manin multiplicative en dimension un".

Une autre théorie de Galois différentielle non-linéaire a été proposée par Umemura [60] quelques années avant [39]. Son point de départ était assez différent du mien : tandis qu'il cherchait à mettre au point de vieilles idées de Drach et Vessiot sur le sujet, le mien est plutôt à chercher dans la théorie des feuilletages, notamment classes caractéristiques à la Godbilllon-Vey et structures différentielles transverses. Récemment, Umemura a pu montrer que les deux théories sont essentiellement équivalentes [61].

Cet article, quoique déjà assez long, laisse ouvertes un grand nombre de questions ; un certain nombre sont posées dans les appendices. Une autre, dont je voudrais dire quelques mots, consiste en la relation entre la théorie développée ici, et la théorie linéaire à la Kolchin [32] et ses extensions, notamment la théorie "paramétrique" de Cassidy-Singer [13] et la théorie de Pillay (voir notamment [54] et [55]).

Cette relation peut se voir dans deux sens : réduction de la théorie non-linéaire à la théorie linéaire, et vice versa. Dans le premier sens, la question est étudiée au chapitre I, où il est montré que, à tout ordre k fini (mais non à l'ordre infini) le pseudogroupe de Galois d'une équation non-linéaire se ramène à celui d'une équation linéaire, via par exemple la considération des équations variationnelles de tous ordres.

Dans l'autre sens, un cas de comparaison est clair, celui des connexions sur un fibré vectoriel. Dans ce cas, il est déjà montré dans [39] que les deux théories donnent le même résultat. Mais curieusement, en général, la comparaison est moins claire, pour la raison suivante : les auteurs cités travaillent au-dessus de corps différentiels généraux. Supposons que l'on puisse remplacer "corps différentiel" par "feuilletage", ce qui est vrai si le corps est de type fini sur $\mathbb{C}$ en *tant que corps tout court*. Il reste que, même dans ce cas, leur théorie a un aspect relatif, i.e. équation différentielle (ou feuilletage) au-dessus d'un feuilletage ; or ce type de situation n'est pas considérée ici. Il serait nécessaire de combler cette lacune. Incidemment, ce serait aussi nécessaire pour comprendre dans quels cas de la présente théorie on a une "correspondance de Galois", correspondance qui existe dans les théories de tous ces auteurs.

Durant la préparation de cet article, j'ai bénéficié de discussions avec de nombreux collègues, notamment D. Bertrand, G. Casale, J. Pradines, J.-P. Ramis, H. Umemura, et aussi de nombreux auditeurs de conférences souvent en partie informelles, notamment au Séminaire Kolchin de New-York, à Aix-la-Chapelle, Lille, Rennes et Luminy ; que tous en soient remerciés. Merci aussi à P. Deligne pour ses lettres sur le parallélisme.

La frappe de ce texte a été faite à l'I.H.É.S. par les soins de C. Gourgues. Je la remercie très vivement de son excellent travail.

2. Conventions générales

Pour les définitions et résultats de base de géométrie algébrique, je renvoie à [29]. Suivant l'usage habituel, "smooth" est ici traduit "lisse". Le corps de base est $\mathbb{C}$. Toutefois, ici une variété n'est pas nécessairement irréductible : c'est donc un schéma réduit de type fini sur $\mathbb{C}$. Souvent aussi, si X est une variété, il m'arrivera de dire "point de X" pour "point de X à valeur dans $\mathbb{C}$" (= point fermé de X).

3. Espaces de jets

J'aurais à les utiliser systématiquement à partir de I.5. Ce sujet est bien connu des géomètres différentiels, au moins dans les cas différentiel et analytique et exposé dans de nombreux traités, par exemple [2] ou [52]. Mais il me semble moins universellement connu parmi les spécialistes de géométrie algébrique ou d'algèbre différentielle.

La situation qui suit sera suffisante ici : X et Y sont deux variétés algébriques lisses (= non singulières) sur $\mathbb{C}$, et π est un morphisme $Y \to X$ qu'on suppose lisse (= submersif) en tout point de Y. On veut définir des variétés $J_k(\pi)$ dont les points sont les sections de π au-dessus des voisinages infinitésimaux d'ordre k des points de X. Si $Y = X \times Z$, et π la projection évidente, on écrit aussi $J_k(X, Z)$; dans ce cas les projections sur X et Z s'appellent respectivement "source" et "but".

Je donne d'abord des définitions locales ; pour cela on suppose que X est un revêtement étale fini d'un ouvert de Zariski $U \subset \mathbb{C}^n$; on notera x un point de X, et $(x_1, \dots, x_n)$ son image dans U.

3.1. On suppose d'abord $Y = X \times \mathbb{C}^p$. On définit alors $J_k(\pi)$ comme $X \times \prod_{j,\alpha} \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq p$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, avec $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = |\alpha| \leq k$. Cet espace s'identifie à l'espace des "parties principales d'ordre k" de sections de Y : à $(x; y_{j,\alpha})$, on associe la série tronquée $\boldsymbol{x}' \mapsto \sum_{j,\alpha} y_{j,\alpha} (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x})^\alpha / \alpha!$, $|\alpha| \leq k$, avec $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$; cette section se relève à X par la projection $X \to U$.

Soit p_k la projection $J_k(\pi) \to J_0(\pi) = Y$. On note $\mathcal{O}_{J_k(\pi)}$ le faisceau sur Y image directe par p_k du faisceau structural de $J_k(\pi)$; moyennant quoi on a des inclusions évidentes $\mathcal{O}_{J_k} \to \mathcal{O}_{J_{k+1}}$ (j'omets les π) ; on note aussi $\mathcal{O}_{J_\infty}$ la limite inductive.

Soit maintenant $\sigma : x \mapsto Y(x)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_p)$ une section de π (ou un germe de section analytique, ou une section formelle). On définit $j_k(\sigma) : X \to J_k(\pi)$, section de $\pi \circ p_k$ par $j_k(\sigma) = (x, \partial^\alpha Y_j)$, avec $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$.

On introduit encore deux objets

a) L'espace des formes de contact $\mathcal{C}_k$, sous-faisceau de $\mathcal{O}_{J_k} \bigotimes_{\mathcal{O}_{J_{k-1}}} \Omega^1_{J_{k-1}} \subset \Omega^1_{J_k}$ engendré par les formes $dy_{j,\alpha} - \sum y_{j,\alpha+\varepsilon_i} dx_i$, avec $|\alpha| \leq k-1$, ε_i l'indice $(0, \dots, 1, \dots, 0)$, le 1 à la place i.

Posant $\mathcal{B}_k = \sum \mathcal{O}_{J_k}\, dx_i$; $\mathcal{B}_k$ est un supplémentaire de $\mathcal{C}_k$ dans $\mathcal{O}_{J_k} \underset{\mathcal{O}_{J_{k-1}}}{\otimes} \Omega^1_{J_{k-1}}$. D'autre part $\mathcal{C}_k$ est caractérisé par la propriété suivante : une section de $J_k(\pi)$ est de la forme $j_k(\sigma)$, σ une section de Y, si et seulement si elle annule $\mathcal{C}_k$ (en tant que sous-espace de $\Omega^1_{J_k}$).

b) La différentielle $D : \mathcal{O}_{J_{k-1}} \to q^{-1}\,\Omega^1_X \underset{q^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}_{J_k}$, $q = \pi \circ p_k$, projection de $d \mid \mathcal{O}_{J_{k-1}}$ sur $\mathcal{B}_k$. Explicitement, on a $Df = \sum dx_i \otimes D_i\, f$, avec

$$D_i \equiv \frac{\partial}{\partial\, x_i} + \sum_{j,\alpha} y_{j,\alpha+\varepsilon_i}\, \frac{\partial}{\partial\, y_{j,\alpha}}\,, \qquad |\alpha| \leq k-1\,.$$

On a donc $df - Df \in \mathcal{C}_k$; en particulier, si σ est une section de π, on a $d\,(f \circ j_{k-1}\,\sigma) = (Df) \circ j_k\,\sigma$, $f \in \mathcal{O}_{J_{k-1}}$.

Soit d'autre part $\mathcal{I}$ un idéal (= un faisceau d'idéaux) cohérent de $\mathcal{O}_{J_{k-1}}$; on appelle prolongement de $\mathcal{I}$ l'idéal de $\mathcal{O}_{J_k}$ engendré par $\mathcal{I}$ et les $D_i\,\mathcal{I}$, $1 \leq i \leq n$.

3.2. Donnons maintenant la définition locale dans le cas général.

i) Une première méthode est la suivante : on peut supposer que Y est étale au-dessus d'un ouvert $V \subset X \times \mathbb{C}^p$, les projections sur X commutant. On prend alors $J_k(\pi) = Y \underset{V}{\times} J_k(\pi')$, π' la projection $V \to X$, $J_k(\pi')$ étant l'ouvert évident de $J_k(X, \mathbb{C}^p)$.

Les opérations j_k, D et l'espace $\mathcal{C}_k$ se définissent alors immédiatement à partir du produit fibré précédent, et toutes les propriétés décrites en 3.1 restent vraies.

ii) Une seconde méthode, un peu plus compliquée, mais intéressante par elle-même, est la suivante. On suppose que Y est une sous-variété fermée de $X \times \mathbb{C}^p$, définie par un idéal $\mathcal{I}$. On définit par récurrence l'idéal $\mathcal{I}_k$ de $J_k(X, \mathbb{C}^p)$ par $\mathcal{I}_1 = \mathrm{pr}_1\,\mathcal{I}, \ldots, \mathcal{I}_k = \mathrm{pr}_1\,\mathcal{I}_{k-1}$, et on prend pour $J_k(\pi)$ le sous-schéma fermé de $J_k(X, \mathbb{C}^p)$ défini par $\mathcal{I}_k$.

Si σ est une section de Y, c'est en particulier une section de $X \times \mathbb{C}^p$ au-dessus de X ; on vérifie alors que $j_k\,\sigma$ est une section de $J_k(\pi)$.

D'autre part, on peut voir que les $J_k(\pi)$ sont lisses et les applications $J_k(\pi) \to J_{k-1}(\pi)$ surjectives et lisses ; ceci peut soit se vérifier directement, ou se déduire de l'indépendance de $J_k(\pi)$ de la présentation choisie (cf. 3.3). Définissant alors $\mathcal{C}_k$, $\mathcal{B}_k$, D par restriction de $J_k(X, \mathbb{C}^p)$ à $J_k(\pi)$, on vérifie les mêmes propriétés qu'en 3.1 : $\mathcal{C}_k \oplus \mathcal{B}_k$ est une décomposition en somme directe de $\mathcal{O}_{J_k} \underset{\mathcal{O}_{J_{k-1}}}{\otimes} \Omega^1_{J_{k-1}}$; d'autre part ce dernier espace s'applique injectivement dans $\Omega^1_{J_k}$; la propriété d'annuler les $j_k\,\sigma$ caractérise $\mathcal{C}_k$; enfin D est la projection de d sur $\mathcal{B}_k$.

3.3. Pour recoller les constructions précédentes, prenons un recouvrement ouvert (X_i, Y_i, π_i) de (X, Y, π), avec $Y_i \subset \pi^{-1}\,X_i$, $\pi_i = \pi \mid Y_i$, tel que l'on puisse définir les $J_k(\pi_i)$ par l'un des procédés précédents. Soit π_{ij} la projection de $Y_i \cap Y_j$ sur $X_i \cap X_j$. Par restriction de $J_k(\pi_i)$ et $J_k(\pi_j)$, on obtient deux objets $J_k(\pi_{ij})$. Il

faut démontrer qu'ils sont canoniquement isomorphes, et que cet isomorphisme est compatible à j_k, $\mathcal{C}_k$, D ; comme $\mathcal{C}_k$ et D se définissent à partir de j_k, il suffit de faire la vérification pour j_k.

En principe, ces vérifications peuvent se faire en utilisant les formules de composition des dérivations. Une telle vérification est fastidieuse (et admise la plupart du temps comme "évidente").

J'indique rapidement une autre méthode, qui consiste à définir les J_k comme solutions d'un problème universel (ou d'un "foncteur représentable") en utilisant les voisinages infinitésimaux de la diagonale de X (pour ces notions, voir par exemple [26] ; elles sont expliquées dans le cadre analytique ; mais le passage à la version algébrique est évidente). Une construction voisine se trouve dans [61].

Soit Δ la diagonale de $X \times X$, d'idéal $\mathcal{I}$; l'idéal $\mathcal{I}^k$ définit un sous-schéma fermé Δ^k de $X \times X$, dit "voisinage d'ordre k de la diagonale" ; soient p_1 et p_2 les deux projections $\Delta^k \to X$.

Soit alors Z un schéma sur X (i.e. un schéma sur $\mathbb{C}$, muni d'un morphisme $Z \to X$), et posons $Z(k) = Z \underset{X}{\times} (\Delta^k, p_1)$; on le munit de la projection sur X composé de la projection sur Δ^k et de $p_2 : \Delta^k \to X$.

On considère alors le foncteur à valeur dans les ensembles $Z \mapsto \mathrm{Hom}_X(Z(k), Y)$, qu'on notera $F^k_\pi(Z)$ [on abrège (X, Y, π) en π]. Par exemple si Z est un point de X, on retrouve les sections sur le voisinage infinitésimal d'ordre k de ce point.

On a évidemment $F^0_\pi(Z) = \mathrm{Hom}_X(Z, Y)$, donc F^0_π est représentable par Y.

On va voir que, en général, F^k_π est représentable ; on appellera alors $J_k(\pi)$ le schéma sur X qui le représente. Ceci résulte des deux remarques suivantes :

i) Supposons F^k_π représentable, et soit (X', Y', π') avec X' (resp. Y') ouvert de X (resp. Y) avec $Y' \subset \pi^{-1} X'$, et posons $\pi' = \pi \mid Y'$. Alors $F^k_{\pi'}$ est représentable (et il est représenté, en un sens que je laisse le lecteur détailler, par la restriction à Y' du représentant de F^k_π).

ii) Si (X, Y, π) est décrit par l'une des méthodes indiquées en 3.2, F^k_π est représenté par $J_k(\pi)$, l'espace construit en 3.2. Ceci se vérifie directement sans difficulté.

Pour terminer, on prend alors un recouvrement (X_i, Y_i, π_i) comme ci-dessus. Sur $(X_i \cap X_j, Y_i \cap Y_j, \pi_{ij})$ on a deux manières de représenter $F^k_{\pi_{ij}}$, qui sont donc canoniquement isomorphes ; ceci permet le recollement global.

Reste encore à voir que j_k, $\mathcal{C}_k$, D sont bien définis globalement ; comme $\mathcal{C}_k$ et D se déduisent de j_k, il suffit de le faire pour j_k. On vérifie que ceci se fait de la manière suivante : on prend $Z = X$; soit σ une section de π ; en composant avec p_2 on trouve une flèche $\in \mathrm{Hom}_X(\Delta^k, Y)$; la représentabilité du foncteur donne l'égalité $\mathrm{Hom}_X(\Delta^k, Y) = \mathrm{Hom}_X(X, J_k(\pi))$, ce qui donne l'élément $j_k \sigma$ demandé. Ceci termine la question.

Remarque 3.4. – La méthode 3.2.ii) permettrait plus généralement de définir $J_k(\pi)$ lorsque, X étant toujours une variété lisse, Y est un schéma de type fini

sur $\mathbb{C}$ au-dessus de X : plus précisément, elle donnera un résultat local qu'on globalisera par le même raisonnement qu'en 3.3.

Les objets ainsi obtenus sont d'un maniement plus malaisé que dans le cas considéré ici, et je n'aurai pas à m'en servir. [Penser par exemple à l'étude des arcs sur une variété avec singularité, qui correspondrait au cas où X est une droite. Voici un autre exemple, élémentaire : $X = \mathbb{C}$ et Y est, dans $X \times \mathbb{C}$, défini par l'idéal (y^2). Alors $J_1(\pi)$ est défini par (y^2, yy'), et sa projection sur Y n'est pas plate ; $J_2(\pi)$ est défini par $(y^2, yy', yy'' + y'^2)$; cet idéal contient y'^3, et la projection $J_2(\pi) \to J_1(\pi)$ n'est ni plate, ni surjective.]

Dans l'article qui suit, les espaces de jets interviendront via les équations aux dérivées partielles, qui sont exprimées par les D-variétés. Pour ne pas allonger inutilement cette introduction, je renvoie pour cette notion à [41] ; cet article est écrit dans le contexte analytique (ou, plus précisément, "affine au-dessus d'un espace analytique"). La transposition dans le cas algébrique n'apporte que des simplifications.

Chapitre I

Feuilletages et extensions de Picard-Vessiot

1. Feuilletages. Intégrales premières

Soit X une variété algébrique lisse (= non singulière) et connexe sur $\mathbb{C}$. Dans la suite, je travaillerai "génériquement sur X", i.e. je remplacerai X par un ouvert de Zariski dense chaque fois que nécessaire (sans toujours le dire explicitement si le contexte est clair). En particulier, on pourra toujours supposer X affine (donc a fortiori séparée), parallélisable, les faisceaux cohérents sur X libres, etc... Sauf mention expresse du contraire, "ouvert" signifiera "ouvert de Zariski". Quelquefois, j'aurai besoin de remplacer X (ou $U \subset X$, ouvert dense) par un revêtement fini étale. Je le préciserai alors explicitement.

Un feuilletage (avec singularités) F de X est défini par un sous-$\mathcal{O}_X$-faisceau cohérent N de Ω^1_X, le faisceau des 1-formes de X. On identifie deux tels feuilletages s'ils coïncident sur un ouvert dense. On pourra donc supposer que N est un "sous-fibré de Ω^1_X" (i.e. qu'il est de rang constant en chaque point, ou, ce qui revient au même, localement facteur direct), et libre par-dessus le marché. Ces conditions signifient pratiquement que N est engendré par des sections globales $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Omega^1(X)$, linéairement indépendantes en chaque point.

Soit Z le plus petit sous-schéma fermé de $X \times X$ qui soit génériquement une relation d'équivalence (au sens schématique) et dont le fibré normal le long de la diagonale contienne $N^\perp$ (cf. [39], où la question analogue dans le cas analytique est traitée en détail ; je reviendrai sur ce point plus loin). D'après un résultat de Gabriel [20], quitte à restreindre X, on peut supposer qu'il existe une variété affine lisse S et une surjection lisse (= submersive) $\pi : X \to S$ telle qu'on ait $Z = X \underset{S}{\times} X$. Soit $\mathbb{C}(S)$ le corps des fonctions rationnelles de S. On vérifie que les $\varphi \circ \pi$, $\varphi \in \mathbb{C}(S)$ sont les *intégrales premières* de F, i.e. les fonctions rationnelles $f : X \ldots \to \mathbb{C}$ telles que df soit un section rationnelle de N.

On distingue classiquement deux cas :

i) Le *cas transitif*, où $S = pt$. Dans ce cas, hormis les constantes, il n'y a pas d'intégrale première.

ii) Le *cas intransitif*, où $\dim S \geq 1$. Pour abréger, je dirai dans ce cas que $\pi : X \to S$ "est l'intégrale première", ou que S est "la variété des intégrales premières".

2. Feuilletages, et théorie de Galois différentielle linéaire

2.1. Comme au paragraphe précédent, soit X une variété munie d'un feuilletage F défini par $N \subset \Omega^1_X$, et soit E un fibré vectoriel sur X (= un $\mathcal{O}_X$-faisceau cohérent localement libre, qu'on peut même supposer libre). Une *F-connexion sur E* est intuitivement une dérivation dans la direction des feuilles. De façon précise c'est un morphisme $\nabla : E \to E \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X/N$ vérifiant les conditions suivantes : ∇ est $\mathbb{C}$-linéaire et vérifie $\nabla(\varphi e) = \varphi\nabla e + \bar{d}\varphi \otimes e$, φ (germe de) section de $\mathcal{O}_X$, e (germe de) section de E, avec $\bar{d}\varphi$ la classe de $d\varphi \mod N$ (dans la suite, j'écrirai simplement $d\varphi$). Les notions de courbure et de connexion plate, i.e. sans courbure, se définissent immédiatement comme dans le cas usuel où $N = 0$, en remplaçant Ω^1_X par Ω^1_X/N.

2.2. Notations. On reprend les notations usuelles relatives aux connexions : si E est libre, de base $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_p)$, on écrit $\nabla\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}\pi$, $\pi = (\pi_{ij})$, π_{ij} sections de Ω^1_X/N. La condition de platitude (ou "d'intégrabilité") s'écrit ici $d\pi + \pi \wedge \pi = 0$ modulo N (i.e. modulo $N \wedge \Omega^1_X$). Dans la suite, on supposera cette condition vérifiée.

On relève cette connexion au fibré principal $P = X \times G\ell(p)$, $p = \dim E$; notons q la projection $P \to X$ et $\tilde{N}$ le sous-$\mathcal{O}_P$-faisceau cohérent de Ω^1_P engendré par $N \circ q$. On note $\tilde{\pi} = g^{-1}\pi g + g^{-1}dg$ la forme de connexion obtenue sur P, qui est définie modulo $\tilde{N}$. Un calcul classique montre qu'on a encore $d\tilde{\pi} + \tilde{\pi} \wedge \tilde{\pi} = 0 \pmod{\tilde{N}}$. On en déduit que $\tilde{N}$ et les coefficients de $\tilde{\pi}$ définissent un feuilletage $\tilde{F}$ sur P, et que ses feuilles sont étale sur celles de F (étale signifiant ici "localement isomorphe pour la topologie transcendante").

2.3. Si f est un intégrale première de F, $f \circ q$ est une intégrale première de $\tilde{F}$. Mais en général, $\tilde{F}$ admet d'autres intégrales premières même si F est le feuilletage trivial, i.e. si $N = 0$. Pour les supprimer, on cherche à *réduire le groupe structural de la connexion.*

Cette question fait l'objet, au moins implicitement, de la théorie de Galois différentielle linéaire, qui remonte à Picard et Vessiot. On dispose actuellement de deux versions de cette théorie : la forme moderne de la théorie de Picard-Vessiot, due à Kolchin [32], et la version "tannakienne" pour laquelle je renvoie à [16] et [15]. Le lien entre les deux versions est expliqué dans [62].

Je vais donner une version un peu différente des deux précédentes, mieux adaptée au sujet de cet exposé. Elle est implicitement contenue dans [39] (cet article est écrit dans le contexte analytique. Le passage au cas algébrique amène tout au plus des simplifications. Je me permettrai par conséquent d'être assez bref). Je signale qu'une version voisine a été obtenue indépendamment par Cartier et Gabber (P. Cartier, communication personnelle ; voir aussi [7]).

Je ne ferai pas systématiquement le raccord avec les autres versions de la

théorie. Je me contenterai de quelques indications suffisantes dans le cas transitif.

2.4. On introduit d'abord le groupe ensembliste $\operatorname{Iso} E$, dont les objets sont les points $a \in X(\mathbb{C})$ et les flèches les isomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires $E(a) \simeq E(b)$ (noter que les deux espaces sont isomorphes à $\mathbb{C}^p$). On munit de façon évidente $\operatorname{Iso} E$ d'une structure de variété algébrique qui en fait un groupoïde au sens schématique. Par définition, on appelle *sous-groupoïde strict* de $\operatorname{Iso} E$ un sous-schéma en groupoïdes fermé de $\operatorname{Iso} E$ (ici, X est fixé). Un sous-schéma fermé Γ de $\operatorname{Iso} E$ sera dit "sous-groupoïde" s'il existe un ouvert dense $U \subset X$ tel que la restriction de Γ à $U \times U$ soit un sous-groupoïde strict de $\operatorname{Iso} E \mid U \times U$. Comme plus haut, on identifie Γ et Γ' s'ils coïncident au-dessus de $V \times V$, V ouvert dense de X. En restreignant au besoin X, on peut supposer que Γ est strict, et qu'il possède les propriétés suivantes :

i) Γ est lisse, et les projections "source" et "but" (notées dans la suite "s" et "t") sont surjectives et lisses.

ii) La projection $\operatorname{pr}\Gamma$ de Γ dans $X \times X$ est un relation d'équivalence fermée.

Pour i) on peut se ramener au cas des relations d'équivalence en remarquant que Γ définit sur $P = X \times G\ell(p)$ une telle relation par la condition "$(x, g) \sim (y, h)$ si $(x, y, hg^{-1}) \in \Gamma$". Réciproquement, une relation d'équivalence sur P, stable par les translations à droite, fournit un sous-groupoïde de $\operatorname{Iso} E$ (j'omets la démonstration de ce résultat, "bien connu"). On raisonne alors comme dans [39], §1, en se ramenant au voisinage infinitésimal d'ordre un de la diagonale (le fait qu'ici la situation est régulière le long de la diagonale sur $U \times G\ell(p)$ entier, et non seulement sur $U \times V$, V ouvert de $G\ell(p)$ résulte de l'invariance par $G\ell(p)$). Ensuite, ii) se voit facilement en utilisant Bertini-Sand et la constructibilité de $\operatorname{pr}\Gamma$.

2.5. L'*algèbre de Lie de* Γ, notée $\operatorname{Lie}\Gamma$, s'obtient en prenant le fibré normal à l'identité dans Γ. La traduction en termes de relations d'équivalence montre que les fibres au-dessus de X de $\operatorname{Lie}\Gamma$ s'identifient aux sections de $T(X \times G\ell(p))$ sur les fibres $\{a\} \times G\ell(p)$ qui sont fixées par l'action à droite de $G\ell(p)$ (donc, en particulier, sont de projection sur X constante). Ceci munit les sections sur X de $\operatorname{Lie}\Gamma$, et même ses germes de sections analytiques d'un crochet de Lie sur $\mathbb{C}$. En fait, en tenant compte de la multiplication par $\mathcal{O}_X$, on aura une structure plus précise, souvent appelée "algébroïde de Lie" ; voir par exemple [36]. Ceci ne servira pas dans ce chapitre, mais la même notion interviendra au chapitre II, dans un autre contexte.

Maintenant, une F-connexion plate ∇ sur $E = X \times \mathbb{C}^p$, ou, ce qui revient au même, son relèvement à $X \times G\ell(p)$ fournit un relèvement $\tilde{\nabla}$ des vecteurs de F en vecteurs de $\operatorname{Lie}\operatorname{Iso} E$. On pose alors la définition suivante :

Définition 2.6. – *Dans la situation précédente, on appelle "groupoïde de Galois de ∇" le plus petit sous-groupoïde Γ de $\operatorname{Iso} E$ dont l'algèbre de Lie contient $\tilde{\nabla}$.*

Ceci signifie aussi que Γ est le plus petit sous-groupoïde de $\operatorname{Iso} E$ tel que son analytisé Γ^{an} contient le flot de ∇. Son existence se voit par un argument analogue à [39] théorème 4.5.1, en plus simple, car on est ici dans un cas nœthérien. Il suffit de voir ceci, si l'on a deux groupoïdes Γ et Γ' dont l'algèbre de Lie contient $\tilde{\nabla}$, il existe Γ'', contenu dans Γ et Γ', qui possède cette propriété.

Pour cela, on voit qu'il suffit de prendre pour Γ'' le produit fibré de Γ et Γ' au-dessus de $\operatorname{Iso} E$. Pour voir que c'est un groupoïde, on peut utiliser le foncteur de Yoneda $Z \mapsto \operatorname{Hom}(Z, \cdot)$, Z variant dans la catégorie des schémas sur $\mathbb{C}$. Pour voir que son algèbre de Lie a la propriété voulue, on peut passer à la catégorie analytique et remplacer ∇ par son flot, sous-groupoïde de $(\operatorname{Iso} E)^{\mathrm{an}}$ défini sur un voisinage transcendant de $\Delta \times \{\mathrm{id}\}$, ($\Delta$ la diagonale de $X \times X$) : ce groupoïde est contenu dans Γ^{an} et Γ'^{an}, donc dans Γ''^{an}.

2.7. Traduisons ceci en termes de relations d'équivalence. D'une part les sections de $\operatorname{Lie} \operatorname{Iso} E$ s'identifient aux champs de vecteurs sur $P = X \times G\ell(p)$ invariants à droite ; il revient au même de les identifier aux sections de $T_\Delta(P \times P)$, le fibré normal à la diagonale $\Delta \subset P \times P$ invariants par l'action à droite diagonale de $G\ell(p)$. Avec cette interprétation de $\tilde{\nabla} \subset \operatorname{Lie} \operatorname{Iso} E$, la traduction de 2.6 est la suivante :

Soit R la relation d'équivalence sur P associée à Γ. Alors R est *la plus petite relation d'équivalence sur P, stable par $G\ell(p)$, telle que le fibré normal à la diagonale Δ dans R contienne $\tilde{\nabla}$.*

Dans la définition précédente, remarquons que *la condition "stable par $G\ell(p)$" peut être omise.* En effet, elle est automatiquement satisfaite du fait de la stabilité de $\tilde{\nabla}$.

3. Suite du précédent

Pour interpréter ce qui précède, il est commode de traiter d'abord le cas transitif. Γ désigne encore le groupoïde de Galois défini en 2.6 pour la F-connexion ∇ sur $E = X \times \mathbb{C}^p$.

3.1. Le cas transitif

Quitte à restreindre X, on peut supposer que les conditions i) et ii) de 2.4 sont satisfaites, et aussi que la projection $\Gamma \to X \times X$ est surjective. On supposera dans ce paragraphe que ces conditions sont satisfaites.

Pour $a, b \in X(\mathbb{C})$, on note $\Gamma_{a,b}$ la sous-variété des éléments de Γ de source a et de but b. En particulier $\Gamma_{a,a}$, en abrégé Γ_a est un sous-groupe algébrique de $G\ell(E(a))$, qu'on appelle "groupe de Galois de (E, ∇)" (sous-entendu : relatif au point a). Il ne "dépend pas de a" au sens suivant : pour $b \in X(\mathbb{C})$, Γ_a et Γ_b sont isomorphes (il n'y a pas d'isomorphisme canonique, mais une famille canonique paramétrée par $\Gamma_{a,b}$. La situation est analogue à celle du groupe fondamental en topologie). L'identification de E à $X \times \mathbb{C}^p$ identifie Γ_a à un sous-groupe de

$G\ell(p)$, défini à conjugaison près, qu'on appelle quelquefois "groupe de Galois" tout court.

Soit encore $\Gamma_{a,\cdot}$, la sous-variété des éléments de Γ d'origine a et de but quelconque. C'est un fibré principal (= torseur) à droite sous Γ_a, qu'on appelle torseur de Picard-Vessiot (relatif à a). On le munit de la F-connexion définie par ∇.

Deux tels torseurs, comme les groupes correspondants, sont isomorphes.

Pour énoncer le résultat suivant, qui caractérise les torseurs de Picard-Vessiot, il est commode de se placer dans un contexte en apparence un peu plus général. Soit G un sous-groupe algébrique sur $\mathbb{C}$ de $G\ell(p)$ et soit $q : Q \to X$ un fibré principal à droite sur X de groupe G. On désigne par $\operatorname{Iso} Q$ le groupoïde au-dessus de X dont les flèches sont les isomorphismes $Q(a) \xrightarrow{\sim} Q(b)$ commutant à l'action de G [le choix d'un point dans $Q(a)$ identifie $Q(a)$ à G ; alors les isomorphismes $Q(a) \xrightarrow{\sim} Q(a)$ compatibles s'identifient aux translations *à gauche* par G].

Soit d'autre part F le feuilletage considéré de X, défini par $N \subset \Omega^1_X$; soit $\tilde{F}$ (ou q^*F) le feuilletage image inverse sur Q, défini par $\tilde{N} \subset \Omega^1_Q$, $\tilde{N}$ engendré par $N \circ q$. La définition des F-connexions sur Q est copiée sur la définition standard dans le cas du feuilletage trivial $N = 0$. Je donne la définition en termes de formes (une autre version est possible en termes de vecteurs tangents à F. Je ne la détaille pas). C'est une forme σ de $\mathcal{G} \otimes \Gamma(Q, \Omega^1_Q/\tilde{N})$, $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G, vérifiant les conditions suivantes :

i) Pour $g \in G(\mathbb{C})$, $R_g^* \sigma = ad\, g^{-1}\sigma$, où R_g désigne la translation à droite par g ; j'écrirai aussi le second membre $g^{-1}\sigma g$.

[Si l'on ne veut pas choisir de g, on peut aussi interpréter cette formule sur $G \times Q$, en remplaçant σ par son image réciproque modulo $\Omega^1_G/\tilde{N}$; je laisse les détails au lecteur.]

ii) Pour tout point $a \in X(\mathbb{C})$, la restriction de σ à $Q(a)$ "est $g^{-1}dg$", la forme de Maurer-Cartan invariante à gauche de G. Plus exactement, c'est son image par n'importe lequel des isomorphismes $G \simeq Q(a)$ considérés plus haut.

On supposera toujours que la connexion est plate, i.e. qu'on a $d\sigma + \sigma \wedge \sigma = 0$. Si l'on considère σ comme une flèche $\mathcal{G}^* \to \Gamma(Q, \Omega^1_Q/\tilde{N})$, il revient au même de dire que cette flèche commute à d. Voir par exemple [6].

On peut alors étendre la définition 2.6 à la situation précédente, et définir le groupoïde de Galois de (Q, σ) comme le plus petit sous-groupoïde de $\operatorname{Iso} Q$ dont l'algèbre de Lie contient σ, en un sens analogue au précédent. Le cas considéré plus haut est le cas particulier où $G = G\ell(p)$. En effet la donnée d'une connexion sur le fibré vectoriel est équivalent à celle d'une connexion sur le principal de groupe $G\ell(p)$ correspondant ; d'autre part, pour $G = G\ell(p)$, les fibrés principaux sont génériquement triviaux.

En fait, le cas général se ramène à ce cas particulier (l'extension qui précède n'est donc en fait qu'une commodité de rédaction). Pour le voir, il suffit de remplacer Q par son extension à $G\ell(p)$, soit $P = Q \overset{G}{\times} G\ell(p)$, muni de la connexion

$\tilde{\sigma}$ étendue de Q à P.

[La construction de P est un cas particulier de celle d'un fibré associé, et peut se faire ainsi : quitte à restreindre X, on peut supposer qu'il admet un revêtement étale $\tilde{X}$ tel que $\tilde{X} \underset{X}{\times} Q$ admette une section, qui le rend isomorphe à $\tilde{X} \times G \to \tilde{X}$; le relèvement à $\tilde{X}$ du P cherché sera alors $\tilde{X} \times G\ell(p)$. On peut supposer $\tilde{X}$ galoisien sur X ; alors P s'obtient par un argument standard de descente galoisienne. La même méthode permet aussi d'obtenir $\tilde{\sigma}$.]

On vérifie alors qu'on a une injection $\operatorname{Iso} Q \to \operatorname{Iso} P$, et que les groupoïdes de Galois de σ et $\tilde{\sigma}$ coïncident.

Dans cette situation, on dira que (Q, σ) est un *torseur de Picard-Vessiot* (de groupe G) si son groupoïde de Galois est $\operatorname{Iso} Q$ tout entier. Ceci généralise la définition considérée plus haut. Le résultat est alors le suivant.

Proposition 3.1.1. – i) *Avec les notations précédentes, pour que (Q, σ) soit un torseur de Picard-Vessiot, il faut et il suffit que le feuilletage de Q défini par σ n'admette pas d'autre intégrale première que les constantes.*

ii) *Deux torseurs de Picard-Vessiot dont les extensions à $G\ell(p)$ sont des connexions isomorphes sont eux-mêmes isomorphes.*

Seul i) mérite une démonstration. Soit R (resp. R') la plus petite relation d'équivalence sur Q (resp. stable par G) dont l'algèbre de Lie contient σ. R s'interprète en termes d'intégrales premières, et R' en termes de groupoïdes de Galois. Mais, en fait, on a $R = R'$, autrement dit R est stable par G. Cette remarque, déjà signalée en (2.7) pour $G\ell(p)$, est immédiate : pour tout $a \in G(\mathbb{C})$ le translaté de R par a lui est égal, par minimalité. En particulier le fait que l'on ait $R = Q \times Q$ équivaut au fait que $R' = Q \times Q$; ceci est équivalent à i).

3.1.2. La remarque qui suit est souvent utile dans la détermination des groupoïdes de Galois : soit donné sur $E = X \times \mathbb{C}^p$ une F-connexion à valeurs dans $\mathcal{G}$, l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique $G \subset G\ell(p)$. Alors la connexion évidente sur $P = X \times G\ell(p)$ se restreint de façon évidente à $Q = X \times G$ (on peut même ici supposer G connexe, en le remplaçant par sa composante neutre). Il en résulte que le groupe de Galois (défini par exemple à conjugaison près) sera un sous-groupe de G.

Réciproquement, supposons que le torseur de Picard-Vessiot $\Gamma_{a,\cdot}$ soit trivial en tant que Γ_a-fibré principal. Alors la connexion initiale pourra être transformée par changement de base en une connexion à valeurs dans $\operatorname{Lie} \Gamma_a$.

Ceci ne sera pas toujours possible, mais le deviendra après remplacement de X par un revêtement convenable $\tilde{X}$. Pour plus de détails sur cette question, et sur la relation existant entre les groupoïdes de Galois au-dessus de X et $\tilde{X}$, je renvoie au chapitre III.

3.1.3. La proposition 3.1.1 permet de faire le raccord entre la théorie ci-dessus et la théorie de Picard-Vessiot à la Kolchin. En effet, si F est un feuilletage sur X, dont les feuilles sont de dimension q, une projection $X \to \mathbb{C}^q$ génériquement

transverse à F munit le corps des fonctions rationnelles $\mathbb{C}(X)$ de q dérivations $\partial_1, \ldots, \partial_q$ commutant entre elles, c'est-à-dire d'une structure de corps différentiel. A l'espace des intégrales premières correspond le *sous-corps des constantes* (dans le cas transitif, ce sera $\mathbb{C}$).

Réciproquement, un corps différentiel $(K, \partial_1, \ldots, \partial_q)$ contenant $\mathbb{C}$ dans ses constantes et de type fini sur $\mathbb{C}$ en *tant que corps* provient d'un feuilletage (X, F).

Plaçons-nous dans le cas transitif, où $\mathbb{C}$ est le corps des constantes. A une F-connexion sur X correspond un système différentiel linéaire sur K. La condition 3.1.1.i) se traduit ici par la prescription "pas de nouvelle constante" qui caractérise les "extensions de Picard-Vessiot" au sens de Kolchin. On en déduit que les groupes de Galois différentiels et les torseurs de Picard-Vessiot des deux théories coïcident.

3.2. Le cas général ("intransitif")

On part ici d'un feuilletage F sur X, avec $\pi : X \to S$ l'espace des intégrales premières (cf. §1). Dans la traduction précédente, où le corps différentiel est $\mathbb{C}(X)$, le corps des constantes est $\mathbb{C}(S)$, qui n'est pas algébriquement clos si S n'est pas un point. Du point de vue "corps différentiels", on est donc dans un cas particulier de la situation étudiée notamment par Dyckerhoff [17]. Du point de vue tannakien, cette situation est aussi étudiée dans [16] sous le nom de "catégorie tannakienne neutralisée par une extension finie".

Je ne ferai pas la comparaison avec leurs points de vue, et m'en tiendrai au point de vue des feuilletages et des groupoïdes considéré jusqu'ici. Dans le début de ce paragraphe, je ferai l'hypothèse suivante :

(∗) L'*application* π *a une section* $\lambda : S \to X$ (sous l'hypothèse habituelle : on remplace si nécessaire X et S par des ouverts denses).

Dans cette hypothèse, la situation est voisine de celle qui a été considérée en 3.1. Soit E un fibré vectoriel (qu'on peut supposer trivial) sur X, muni d'une F-connexion ∇, et soit Γ son groupoïde de Galois. Avec des notations analogues à 3.1, les $\Gamma_{a,a}$, $a \in \lambda(S)$ forment un groupe algébrique sur S, sous-groupe de $G\ell(p) \times S$ ($p = \dim E$) ; on l'appellera "groupe de Galois de (E, ∇) relatif à λ", et on le notera Γ_λ. Les éléments de Γ de source $\in \lambda(S)$ forment un "fibré principal sur X de groupe Γ_λ au-dessus de S" (voir un peu plus loin) ; on peut l'appeler "torseur de Picard-Vessiot relatif à λ".

Si l'on a deux sections λ et λ', notons $\Gamma_{\lambda,\lambda'}$ les éléments de Γ de source $\in \lambda(S)$, et de but $\in \lambda'(S)$. Alors $\Gamma_{\lambda,\lambda'}$ est principal à droite sur Γ_λ et à gauche sur $\Gamma_{\lambda'}$; en particulier, s'il est trivial (par exemple en tant que Γ_λ-torseur), Γ_λ et $\Gamma_{\lambda'}$ sont isomorphes. S'ils ne le sont pas, ils le deviendront en remplaçant S par un revêtement fini convenable.

Pour énoncer l'analogue de 3.1.1.i), on se donne un sous-groupe fermé G au-dessus de S de $G\ell(p) \times S$. On suppose G lisse et $G \to S$ lisse et surjectif. *Dans ce qui suit, l'hypothèse* (∗) *n'est plus nécessaire.*

Soit $q : Q \to X$, Q lisse, q lisse et surjectif ; supposons Q muni d'une action à droite de $G : Q \underset{S}{\times} G \to Q$, commutant aux projections sur X. On dit que c'est un "fibré principal (ou un torseur) sur X, de groupe G, au-dessus de S" si l'application $Q \underset{S}{\times} G \to Q \underset{X}{\times} Q$ définie par $(y, g) \mapsto (y, yg)$, $y \in Q$ est un isomorphisme.

On définit une F-connexion σ sur Q comme au paragraphe précédent (intuitivement, c'est une famille paramétrée par S de F-connexions sur les fibres de $Q \to S$) ; on définit $\mathrm{Iso}_S Q$ comme le groupoïde des isomorphismes $Q(a) \xrightarrow{\sim} Q(b)$ avec $a, b \in X(\mathbb{C})$, $\pi(a) = \pi(b)$, compatibles avec l'action de G. Le groupoïde de Galois de (Q, σ) est alors défini comme au paragraphe précédent. On dira encore que (Q, σ) est un *torseur de Picard-Vessiot* (sous-entendu de groupe G, au-dessus de S) si son groupoïde de Galois est égal à $\mathrm{Iso}_S Q$. L'analogue de 3.1.1.i) est le résultat suivant.

Proposition 3.2.1. – *Avec les notations précédentes, pour que (Q, σ) soit un torseur de Picard-Vessiot, il faut et il suffit que le feuilletage défini par σ sur Q n'admette pas d'autre intégrale première que celles provenant de S.*

En raisonnant comme en loc cit, il suffit de démontrer ceci : donnons-nous (Q, σ) comme ci-dessus ; soit $R \subset Q \underset{S}{\times} Q$ la plus petite relation d'équivalence dont l'algèbre de Lie (= le fibré normal à la diagonale) contient σ. ALors R est stable par l'action diagonale de G. Ici, il faut modifier un peu l'argument, car F n'a pas nécessairement de sections au-dessus de S. On s'en tire en considérant des sections étales, et un argument de descente galoisienne (j'omets les détails).

Remarque 3.2.2. – (Q, σ) étant donné, la construction du groupoïde de Galois n'est pas compatible avec les changements de base quelconque au-dessus de S. Prenons par exemple $X = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, de coordonnées (s, x), le feuilletage étant donné par ds. On prend $Q = X \times \mathbb{C}^*$, son feuilletage étant donné par ds et $\frac{dy}{y} - s\,\frac{dx}{x}$. Il est de Picard-Vessiot, car ses seules intégrales premières sont les éléments de $\mathbb{C}(s)$. Mais, si l'on fixe s à la valeur $a \in \mathbb{C}$, on trouve que $\frac{dy}{y} - a\,\frac{dx}{x}$ a des intégrales premières non triviales pour $a \in Q$, et n'en a pas dans le cas contraire.

3.3. Le cas général (suite)

On part toujours d'un feuilletage F sur X, avec $\pi : X \to S$ l'espace des intégrales premières, mais on ne suppose plus l'existence d'une section. On se donne encore un fibré vectoriel trivial $E \simeq X \times \mathbb{C}^p$, muni d'une F-connexion, et on note encore Γ son groupoïde de Galois.

Pour décrire Γ on prend une *section multiforme de* π, i.e. un $\tilde{S} \xrightarrow{\alpha} S$ fini (qu'on peut supposer étale, quitte à restreindre S et X), et un $\lambda : \tilde{S} \to X$ tels qu'on ait $\alpha = \pi \circ \lambda$.

Une première manière de faire est la suivante : on pose $\tilde{X} = \tilde{S} \underset{S}{\times} X$; alors $\tilde{\lambda} = (\mathrm{id}, \lambda)$ est une section de $\tilde{X} \to \tilde{S}$; on relève F en un feuilletage $\tilde{F}$ de

$\tilde{X}$; on applique alors les considérations de 3.2 à $\tilde{F}$ et au relèvement $\tilde{\nabla}$ de ∇ à $\tilde{E} = \tilde{X} \times \mathbb{C}^P$. Il reste à comparer le groupoïde de Galois de $\tilde{\nabla}$ à Γ ; je renvoie pour cela au chapitre III.

Je vais indiquer rapidement une autre description, qui sera employée systématiquement au chapitre II dans le contexte voisin des pseudogroupes de Lie. On considère le groupoïde Γ_λ restriction de Γ à $\lambda(\tilde{S})$ [i.e. on demande que la source et le but soient dans $\lambda(\tilde{S})$] ; on l'appelle "groupoïde de Galois restreint, relatif à λ". On note aussi $\Gamma_{\lambda,\cdot}$ les éléments de Γ de source $\in \lambda(\tilde{S})$ c'est, en un sens facile à préciser un fibré principal sous le groupoïde Γ_λ.

Si l'on a un autre revêtement étale $\alpha' : \tilde{S}' \to S$ et une application $\lambda' : \tilde{S}' \to X$, avec $\lambda' = \pi \circ \alpha'$, Γ_λ et $\Gamma_{\lambda'}$ seront équivalents au sens suivant.

Soit $\tilde{S}'' = \tilde{S} \sqcup \tilde{S}'$, $\alpha'' : \tilde{S}'' \to S$ et $\lambda'' : \tilde{S}'' \to X$ définis de façon évidente. Soit $\Gamma_{\lambda''}$ le groupoïde restriction de Γ à $\lambda''(\tilde{S}'')$. Alors, on a deux flèches $\Gamma_\lambda \to \Gamma_{\lambda''}$ et $\Gamma_{\lambda'} \to \Gamma_{\lambda''}$ qui possèdent les propriétés suivantes :

i) La restriction de $\Gamma_{\lambda''}$ à $\tilde{S}$ (resp. $\tilde{S}'$) est égale à Γ_λ (resp. $\Gamma_{\lambda'}$).

ii) "Surjectivité essentielle". La composante $\Gamma_{\lambda,\lambda'}$ de $\Gamma_{\lambda''}$, de source $\tilde{S}$ et de but $\tilde{S}'$ est surjective sur $\tilde{S}$ (resp. $\tilde{S}'$) pour la projection source (resp. but).

Ce type d'équivalence sera considéré systématiquement au chapitre II.

4. Prolongement d'un feuilletage

4.1. Soit encore F un feuilletage d'une variété X, défini par un sous-faisceau $N \subset \Omega^1_X$; on suppose que N est libre et engendré par $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Omega^1(X)$, partout indépendantes.

On va appliquer les considérations des §2 et 3 dans la situation suivante. On remarque que N, le fibré conormal de F, est muni d'une F-connexion canonique, définie ainsi : pour ξ champ de vecteurs tangent à F, i.e. ξ section de $N^\perp$, et ω section de N, on pose $\nabla_\xi \omega = L_\xi \omega = i_\xi d\omega$.

Il est un peu plus commode de considérer N^*, le fibré normal à F, plutôt que N. Avec les notations de 2.2, et dans la base de N^* duale de $(\omega_1, \ldots, \omega_p)$, la forme $\pi = (\pi_{ij})$ de connexion est donnée par $d\omega_1 = -\sum \pi_{ij} \wedge \omega_j$, en abrégé $d\omega = -\pi \wedge \omega$.

Les π_{ij} sont bien définis $\bmod N$, car $\sum \omega_i \wedge \psi_i = 0$ entraine $\psi_i = \sum g_{ij}\, \omega_j$, $g_{ij} = g_{ji}$ ("lemme de Cartan").

Cette *connexion est plate*. En effet, de $d^2 = 0$, on déduit $d\pi \wedge \omega - \pi \wedge d\omega = 0$, ou encore $(d\pi + \pi \wedge \pi) \wedge \omega = 0$. En appliquant encore le lemme de Cartan, on a $d\pi + \pi \wedge \pi = 0 \bmod (\omega_1, \ldots, \omega_p)$.

On relève alors cette connexion au principal $P(N^*)$, ici $X \times G\ell(p)$, moyennant le choix de la base ω. Sur ce principal, on a un feuilletage qu'on appellera *prolongement d'ordre un de F*.

Autre interprétation. Je vais me contenter ici d'expliciter un cas particulier, à savoir celui des équations différentielles ordinaires. La question sera reprise plus systématiquement au §8.

On part d'une équation différentielle

$$\frac{dY}{dx} = F(x,Y)\,, \quad Y = (y_1,\dots,y_p)\,, \quad F = (f_1,\dots,f_p)\,, \quad f_i \in \mathbb{C}(x,y_1,\dots,y_p)\,.$$

Cette équation équivaut à un feuilletage sur l'espace (x,Y) défini par $\omega_1,\dots,\omega_p$, avec $\omega_i = dy_i - f_i\,dx$.

On a ici $d\omega_i = -\sum \pi_{ij}\wedge\omega_j$, avec $\pi_{ij} = -\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\,dx$; la connexion obtenue sur N^* est le système linéaire $\frac{dz_i}{dx} = \sum \frac{\partial f_i}{\partial y_j}\,z_j$. On obtient ce que les mécaniciens nomment "équation variationnelle" ou "linéarisée" du système différentiel, ici au-dessus de la "solution générale" (d'habitude on regarde seulement la linéarisation au-dessus d'une solution particulière ; cf. §8).

4.2. Intuitivement : il "revient au même" d'intégrer un feuilletage (en particulier une équation différentielle) et son prolongement d'ordre un. D'autre part, les solutions du prolongement donnent par projection les solutions du feuilletage initial (je parle ici, par exemple des solutions analytiques locales, ou des solutions formelles). Dans l'autre sens, je me contenterai de l'argument heuristique suivant "si l'on a la solution générale d'une équation différentielle, on en déduit immédiatement la solution générale de son équation variationnelle".

Je ne sais pas formaliser cet argument. Mais ce que nous verrons plus loin, c'est que le pseudogroupe de Galois (au sens de [39], ou du §5) du feuilletage et celui de son prolongement d'ordre un sont essentiellement les mêmes. Voir l'énoncé précis au chapitre III.

Donnons un exemple simple qui montre que, loin de compliquer le système initial, la considération du prolongement peut le simplifier. C'est le cas de l'équation linéaire affine, définie par $\omega = dy + (ay+b)\,dx$, $a,b\in\mathbb{C}(x)$.

On a $d\omega = -\pi\wedge\omega$, avec $\pi = a\,dx$; le prolongement est donné par $\tilde\omega = t^{-1}\,\omega$, $\tilde\pi = \pi + t^{-1}\,dt$; on a $d\tilde\omega = -\tilde\pi\wedge\tilde\omega$, et $d\tilde\pi = 0$, ce qui donne un système trivialement intégrable (voir au chapitre IV des développements sur cette question). Ici, le prolongement d'ordre un n'est donc rien d'autre que l'intégration de l'équation initiale par la méthode de variation des constantes.

4.3. Pour appliquer la théorie faite aux §2 et 3 dans cette situation, il convient encore de distinguer les cas transitif et intransitif. On notera encore Γ le groupoïde de Galois de N (ou N^*) muni de la F-connexion ∇ qui vient d'être définie.

Cas transitif

Il n'y a essentiellement rien à ajouter à 3.1. Si le torseur de Picard-Vessiot $\Gamma_{a,\cdot}$ est trivial, la réduction de la connexion signifie ceci : en identifiant $N(a)^*$ à $\mathbb{C}^p$ et Γ_a à un sous-groupe algébrique G de $G\ell(p)$, on aura, avec un choix convenable des ω_i : $d\omega_i = -\sum \pi_{ij}\wedge\omega_j$, avec $\pi = (\pi_{ij})$ une matrice de 1-formes sur X à valeurs modulo $(\omega_1,\dots,\omega_p)$ dans $\operatorname{Lie} G$. Si l'on choisit un représentant $\pi' = (\pi'_{ij})$ à valeurs dans $\operatorname{Lie} G$, ces formules s'écrivent

$$d\omega_i = \sum \gamma_i^{jk}\,\omega_j\wedge\omega_k - \sum \pi'_{ij}\wedge\omega_j\,.$$

Il faut aussi relever au principal, avec $\tilde{\omega} = f^{-1}\omega$, $\tilde{\pi}' = f^{-1}\pi' f + f^{-1}df$, où $\omega = {}^t(\omega_1, \ldots, \omega_p)$, f à valeurs dans G, comme au §2. J'omets les détails.

4.4. Le cas intransitif

Notons ici $\psi : X \to S$ l'application "intégrale première" (pour éviter le double emploi de π). Une particularité apparaît par rapport à la situation générale des F-connexions : N contient un sous-espace stable par ∇, i.e. le sous-espace N' engendré par $\Omega^1_S \circ \psi$. Choisissons $s_1, \ldots, s_q \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ tels que $ds_1, \ldots, ds_q$ soit une base de Ω^1_S ($q = \dim S$), et posons $f_i = s_i \circ \psi$. Alors N' est engendré par $df_1, \ldots, df_q$. D'autre part, on a $\nabla df_i = 0$. En effet, si ξ est un champ tangent à F, on a

$$\nabla_\xi\, df_i = L_\xi\, df_i = d\,\langle \xi, df_i \rangle = 0\,.$$

Supposons en particulier que $\psi : X \to S$ admette une section λ et que le torseur de Picard-Vessiot relatif à λ soit un fibré trivial ; complétons $df_1, \ldots, df_q$ par $\omega_1, \ldots, \omega_{p-q}$ pour avoir une base de N. En passant à la connexion duale, on trouve que le λ-groupe de Galois (défini au-dessus de S) est triangulaire de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$, et que les équations sont du type

$$\begin{cases} d(df_i) &= 0 \\ d\omega_i &= \sum -\pi_{ik} \wedge \omega_k - \sum \chi_{ij} \wedge df_j \end{cases}$$

la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \chi & \pi \end{pmatrix}$ étant modulo (df_j, ω_k) à valeurs dans $\operatorname{Lie} G$.

La fin de 4.3 se transpose sans difficulté.

5. Rappels sur la théorie de Galois différentielle non linéaire

5.1. Je rappelle d'abord les définitions de base de [39]. Comme je l'ai déjà dit plus haut, cet article est écrit dans le contexte "$\mathbb{C}$-analytique". La transposition au cas "algébrique sur $\mathbb{C}$" n'apporte aucune complication, et je me contente d'énoncer les résultats.

Soit X une variété algébrique lisse, séparée et connexe sur $\mathbb{C}$. Notons $J^*_k(X)$ la variété des jets d'ordre k inversibles d'applications de X dans X, munie de ses deux projections source et but, notées respectivement "s" et "t". Cette variété est munie de façon évidente d'une structure de groupoïde algébrique.

Par définition, on appellera *"sous-groupoïde strict"* de $J^*_k(X)$ un sous-schéma fermé en groupoïdes de $J^*_k(X)$ (on ne le suppose pas nécessairement réduit). Un sous-schéma fermé de $J^*_k(X)$ sera appelé *sous-groupoïde* si sa restriction à $U \times U$, U ouvert dense de X, est un sous-groupoïde strict.

Si Z est un tel sous-groupoïde, il existe V ouvert dense de X tel que $Z \mid V \times V$ soit un sous-groupoïde strict, et de plus possède les propriétés suivantes :

a) Il est lisse.

b) Ses projections s et t sur V sont surjectives et lisses (= submersives).

c) Pour $0 \leq \ell \leq k$, la projection de Z dans $J^*_\ell(X) \mid V \times V$ est une submersion surjective sur un sous-groupoïde strict.

En particulier, la projection dans $V \times V = J^*_0(X) \mid V \times V$ est une relation d'équivalence fermée, à laquelle on pourra appliquer le résultat de Gabriel rappelé au §1.

Pour passer à la limite projective $k \to \infty$, il est commode de considérer comme faisceau structural de $J^*_k(X)$ le faisceau sur $X \times X$ obtenu par l'image directe $(s,t)_*$. Notant abusivement $\mathcal{O}_{J^*_k}$ le faisceau ainsi obtenu, on a des inclusions naturelles $\mathcal{O}_{J_k} \hookrightarrow \mathcal{O}_{J_{k+1}}$; on note alors $\mathcal{O}_{J^*_\infty}$, ou plus simplement $\mathcal{O}_{J^*}$ la limite inductive de ces faisceaux. On appelle J^*, ou J^*_∞ (ou $J^*_\infty(X)$ si une confusion est à craindre) l'espace annelé correspondant.

La définition principale est alors la suivante (cf. [39], définition 4.1.1).

Définition 5.2. – *Un D-groupoïde sur X est une collection $Z = \{Z_k\}$ de sous-schémas fermés réduits des J^*_k possédant les propriétés suivantes.*

i) *Notons $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{O}_{J^*_k}$ l'idéal de définition de Z_k, et posons $\mathcal{O}_{Z_k} = \mathcal{O}_{J^*_k}/\mathcal{I}_k$. Alors, on a, pour tout $k \leq \ell$, $\mathcal{I}_\ell \cap \mathcal{O}_{J^*_k} = \mathcal{I}_k$.*

ii) *Pour tout k, $\mathcal{I}_{k+1}$ est contenu dans le prolongement $\mathrm{pr}_1 \mathcal{I}_k$ (cf. introduction) ; autrement dit $\mathcal{I} = \varinjlim \mathcal{I}_k$ est un idéal différentiel pour la projection "source" sur X ; ou encore, Z est une D-variété pour la projection "source"* (pour ces définitions, je renvoie à [39] et [41]).

iii) *Pour tout k, l'identité I_k est une sous-variété de Z_k et Z_k est stable par l'inverse.*

iv) *Il existe U, ouvert de Zariski dense de X tel que, pour tout k, $Z_k \mid U \times U$ soit un sous-groupoïde strict de $J^*_k \mid U \times U$.*

Il résulte alors de [39] qu'on peut trouver un ouvert $U \subset X$ tel que, en restriction à $U \times U$, on ait les propriétés suivantes :

5.3.i) Pour $k \geq 0$, Z_k est lisse ; pour $k \leq \ell$, la projection $Z_\ell \to Z_k$ est lisse et surjective.

5.3.ii) Pour $k \gg 0$, Z_{k+1} est le prolongement de Z_k (i.e. $\mathcal{I}_{k+1} = \mathrm{pr}_1 \mathcal{I}_k$).

5.4. On peut se contenter de demander les propriétés précédentes "génériquement sur X", i.e. au-dessus de $U \times U$, U ouvert dense dépendant a priori de k. De façon précise, identifions deux sous-groupoïdes Z_k et Z'_k de J^*_k s'ils coïncident au-dessus de $U \times U$, U ouvert dense de X. On obtient un représentant canonique qui est réduit (et aussi minimal) en choisissant un V tel que Z_k soit lisse au-dessus de $V \times V$ et en prenant l'adhérence de Zariski dans J^*_k de $Z_k \mid V \times V$ (on voit facilement que cela ne dépend pas de V). Maintenant, donnons-nous une

famille $\{Z_k\}$ de sous-schémas fermés réduits de J_k^* qui vérifient les propriétés i) à iv) de la définition 5.2 sur un ouvert dépendant a priori de k. En remplaçant les Z_k par leurs représentants canoniques $\bar{Z}_k$, on voit que ces derniers satisfont aux conditions de 5.2. Pour les 3 premières, c'est évident. Pour la dernière, on remarque ceci : la suite des idéaux différentiels réduits de $\mathcal{O}_{J_k^*}$ engendrée par les $\bar{\mathcal{I}}_k$ (= les idéaux de définition des $\bar{Z}_k$) est croissante, donc stationnaire par le théorème de Ritt-Raudenbush. Il suffit donc de voir que l'idéal différentiel réduit engendré par un $\bar{\mathcal{I}}_k$ vérifie les conditions de la définition. Pour ce résultat, voir [39].

Dans la suite, on identifiera deux D-groupoïdes sur X qui coïncident sur $U \times U$, U ouvert de Zariski dense. Deux tels groupoïdes ont même représentant canonique.

5.5. Solutions

On ne parle ici que de solutions *analytiques* (pour ceux qui connaissent le sujet : la situation est analogue à celle que l'on rencontre dans la théorie des D-modules). Soit $\operatorname{Aut} X$ l'ensemble des isomorphismes analytiques de germes $(X^{\mathrm{an}}, a) \xrightarrow{\sim} (X^{\mathrm{an}}, b)$, avec $a, b \in X(\mathbb{C})$, et X^{an} l'espace analytique défini par X. L'ensemble $\operatorname{sol} Z$ des "solutions de Z" est l'ensemble des $f \in \operatorname{Aut} X$ tels que, pour tout k, le jet d'ordre k de f soit une section de (Z_k^{an}, s). (Il suffit que ce soit vrai pour un k_0 tel que les $k \geq k_0$ vérifient 5.3.ii).) On voit que $\operatorname{sol} Z$ est un sous-groupoïde de $\operatorname{Aut} X$ (ceci est vrai au-dessus de $U \times U$, U ouvert de Zariski dense de X ; on passe de là facilement à X en remarquant que U est aussi un ouvert dense pour la topologie transcendante). De plus, il résulte de [39], corollaire 4.4.12 que les points de $Z_k(\mathbb{C})$ par lesquels passe une solution sont (Zariski)-denses dans $Z_k(\mathbb{C})$. Donc $\operatorname{sol} Z$ "détermine Z".

Dans la terminologie traditionnelle, on appelle de façon un peu vague "pseudogroupe de Lie" un sous-groupoïde de $\operatorname{Aut} X$ défini par un système d'équations aux dérivées partielles. Comme cette terminologie est classique, il m'arrivera de la reprendre, *en entendant strictement cette expression comme synonyme de "D-groupoïde"*. Par contre, contrairement à [39], je n'emploierai pas dans ce sens le terme "groupoïde de Lie" ; dans la littérature, il a un autre sens, et cela pourrait prêter à des confusions.

5.6. D-algèbres de Lie

Cette question est traitée dans [39] ; je me contente de rappels rapides.

i) Soit $T = T_X$ le fibré tangent à X. L'espace $J_k T$ des jets d'ordre k de sections de T s'identifie canoniquement au fibré conormal à $J_k^*(X)$ le long de l'identité. Le faisceau associé est $\mathcal{D}_k \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega_X^1$, $\mathcal{D}_k$ le faisceau des opérateurs différentiels linéaires d'ordre $\leq k$ sur X (le produit tensoriel est pris pour la structure de $\mathcal{O}_X$-module à droite de $\mathcal{D}_k$. D'autre part, j'utilise systématiquement la correspondance *contravariante* faisceaux cohérents $\leftrightarrow$ fibrés vectoriels ; voir par exemple [26]). Pour abréger, on pose $\mathcal{D}_k \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega_X^1 = \mathcal{D}_k\, \Omega_X^1$. Si $\mathcal{D} = \varinjlim \mathcal{D}_k$ est le faisceau

des opérateurs différentiels linéaires sur X, on pose aussi $\mathcal{D} \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X = \mathcal{D}\,\Omega^1_X$.

Une autre interprétation est la suivante : soit $\Gamma_k = \Gamma_k(n)$ le groupe des jets d'ordre k d'automorphismes de $(\mathbb{C}^n, 0)$ avec $n = \dim X$, et soit Π_k le fibré des repères d'ordre k de X, i.e. le fibré des jets d'ordre k d'isomorphismes $(\mathbb{C}^n, 0) \xrightarrow{\sim} (X, a)$, $a \in X(\mathbb{C})$. Alors $\pi : \Pi_k \to X$ est un fibré principal à droite sous Γ_k, localement trivial pour la topologie de Zariski. De plus $J_k\,T$ s'identifie au quotient de T_{Π_k} par Γ_k, et l'on a $\mathcal{D}_k\,\Omega^1_X \simeq (\pi_*\,\Omega^1_{\Pi_k})^{\Gamma_k}$, $\underline{J_k}\,T = (\pi_*\,\underline{T}_{\Pi_k})^{\Gamma_k}$ (je souligne ici les fibrés pour désigner le faisceau de ses sections).

On passe d'une interprétation à l'autre, comme en 2.4, au moyen de l'application $\lambda : \Pi_k \times \Pi_k \to J^*_k$ définie (ensemblistement) par $\lambda(\alpha, \beta) = \beta\,\alpha^{-1}$. Cette application envoie la diagonale de $\Pi_k \times \Pi_k$ sur id $\subset J^*_k$; donc elle envoie le normal à la diagonale de $\Pi_k \times \Pi_k$, i.e. T_{Π_k} sur le normal à l'identité dans J^*_k ; je laisse les détails au lecteur.

Cette seconde interprétation fournit un crochet de Lie $\Lambda^2\,\underline{J_k}\,T \to \underline{J_k}\,T$, le "crochet de Spencer", que je noterai dans ce chapitre $[\cdot,\cdot]$; on aura soin de la distinguer du crochet fibre à fibre $\Lambda^2\,J_k\,T \to J_{k-1}\,T$ qui provient par troncature du crochet des champs formels, crochet que je noterai $[\cdot,\cdot]^\wedge$.

L'expression explicite du crochet de Spencer ne servira pas ici. Les curieux la trouveront par exemple dans [37].

ii) Soit F un sous-fibré, défini par un quotient $\mathcal{D}_k\,\Omega^1_X/N$, N un sous-faisceau cohérent sur $\mathcal{O}_X$ de $\mathcal{D}_k\,\Omega^1_X$ (il revient au même de dire que F est l'annulateur de N). On dira par abus de langage que "F est une sous-algèbre de Lie de $J_k\,T$" si, sur un ouvert dense U, donc sur X par passage à la limite, $\underline{F}$ est stable par $[\cdot,\cdot]$. Il est aussi équivalent de demander la même propriété pour le faisceau $\underline{F}^{\mathrm{an}}$ des sections analytiques de F, en vertu de la fidèle platitude de $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ sur $\mathcal{O}_X$.

Si $k = 0$, ceci coïncide avec la définition des feuilletages donnée au §1. Comme dans ce cas, on identifie deux "sous-algèbres de Lie" si elles coïncident sur un ouvert dense de X.

Comme en 5.2 on a un représentant canonique de F : il s'obtient ici en remplaçant N par le plus petit $N' \supset N$ tel que $\mathcal{D}_k\,\Omega^1_X/N'$ soit sans torsion. Cette construction sera particulièrement utilisée dans le cas des feuilletages. Notons enfin que la donnée de N définit un feuilletage de Π_k stable par Γ_k ; je reviendrai là-dessus plus loin.

iii) Si Z est un sous-groupoïde de J^*_k, alors le normal à Z le long de l'identité ou "linéarisé de Z le long de l'identité", que je noterai $\mathrm{Lie}\,Z$ ou, en abrégé, LZ, est un sous-fibré de $J_k\,T$.

On peut voir que c'est une sous-algèbre de Lie de $J_k\,T$ (toutefois, il n'est pas clair que les représentants canoniques de Z et LZ se correspondent. Quoique je n'aie pas de contre exemple, cela me paraît douteux en général).

Une manière d'établir ce point est la suivante. On traite d'abord le cas $k = 0$ qui est élémentaire (cf. [39]) puis on s'y ramène en remarquant que λ établit une bijection entre les sous-groupoïdes de J^*_k et les relations d'équivalence sur Π_k stables par Γ_k (je laisse le lecteur vérifier ce point).

iv) Soit M un sous-$\mathcal{D}$-faisceau cohérent de $\mathcal{D}\,\Omega^1_X$; on le munit de la filtration induite $\{M_k\}$, définie par $M_k = M \cap \mathcal{D}_k\,\Omega^1_X$. Soit $F = \{F_k\}$ la collection des sous-fibrés des $J_k\,T$ correspondante. Par définition, on dira que F *est une D-algèbre de Lie* si les F_k sont des sous-algèbres de Lie des $J_k\,T$ (pour le crochet de Spencer). Il suffit de supposer cette propriété pour un M_k tel qu'on ait $\mathcal{D}\,M_k = M$. Cela résulte par récurrence de la propriété suivante : si $M_k \subset \mathcal{D}_k\,\Omega^1_X$ définit une sous-algèbre de Lie de $J_k\,T$, alors $M_k \cap \mathcal{D}_{k-1}\,\Omega^1_X$ (resp. $\mathcal{D}_1\,M_k \subset \mathcal{D}_{k+1}\,\Omega^1_X$) définit une sous-algèbre de Lie de $J_{k-1}\,T$ (resp. $J_{k+1}\,T$). Pour $k \to k-1$, c'est évident. Pour $k \to k+1$, voir par exemple [37], proposition 4.3.

Ici encore, on identifie deux D-algèbres de Lie qui coïncident sur un $U \subset X$ dense. On a aussi une description "générique" des D-algèbres de Lie, analogue à 5.4. C'est ici bien plus élémentaire : le théorème de Ritt-Raudenbush est remplacé par le fait que $\mathcal{D}$ est nœthérien à gauche ; j'omets les détails.

D'autre part, en prenant les représentants canoniques des F_k (ou, en prenant le plus grand quotient sans torsion de $\mathcal{D}\,\Omega^1_X/M$, ce qui revient au même), on obtient un représentant canonique de F.

v) Si $Z = \{Z_k\}$ est un D-groupoïde sur X, le fibré normal LZ, i.e. la collection des LZ_k est une D-algèbre de Lie (loc. cit.). Donc, à tout D-groupoïde correspond une D-algèbre de Lie.

Mais la réciproque est fausse. On pose alors la définition suivante, essentielle pour la suite.

Définition 5.7. – *Soit $F = \{F_k\}$ une sous-D-algèbre de Lie de $J_\infty\,T$. On appelle "enveloppe de F" le plus petit D-groupoïde $Z = \{Z_k\}$ sur X dont la D-algèbre de Lie LZ contient F. On appelle aussi LZ "l'enveloppe infinitésimale" de F.*

Un tel Z est évidemment connexe (i.e. les Z_k sont connexes).

Bien entendu le mot "contient" doit être entendu au sens de la relation d'équivalence indiquée plus haut. Il revient au même de demander cette propriété pour les représentants canoniques. Le fait qu'un "plus petit etc...." existe n'est pas trivial ; cf. [39].

5.8. Dans toute la suite de cet article, on applique cette définition dans la situation suivante. Supposons X muni d'un feuilletage F défini par un sous-faisceau cohérent $N \subset \Omega^1_X$ vérifiant génériquement la condition de Frobenius. On pose $M_0 = N$, $M_k = \mathcal{D}_k\,N \subset \mathcal{D}_k\,\Omega^1_X$, $M = \mathcal{D}N \subset \mathcal{D}\,\Omega^1_X$. Alors M définit une D-algèbre de Lie $\{F_k\}$ qu'on identifie au feuilletage F et qu'on notera aussi F. Ses solutions sont les germes (analytiques) de champs de vecteurs orthogonaux à N ; ce sont donc, dans la terminologie usuelle, les champs de vecteurs tangents au feuilletage.

Par définition, on appellera *pseudogroupe de Galois de F* son enveloppe (contrairement à [39], je ne dirai pas "groupoïde de Galois de F" ; d'une part, pour éviter des confusions avec les groupoïdes de Galois introduits aux §2 et 3 (cf. remarque 5.9) ; d'autre part, parce que c'est un D-groupoïde plutôt qu'un

groupoïde). On appellera aussi quelquefois "D-algèbre de Lie-Galois de F" son enveloppe infinitésimale. Pour ces définitions, voir aussi [39].

Les paragraphes qui suivent, ainsi que les chapitres II et III sont destinés à donner une description plus précise des pseudogroupes de Galois. Des exemples simples, dans le cas intégrable, seront vus au chapitre IV.

Remarque 5.9. – Supposons pour simplifier le feuilletage F transitif, et plaçons-nous dans la situation considérée en 3.1. : G est un sous-groupe algébrique de $G\ell(p)$, et $Q \xrightarrow{q} X$ est un fibré principal de groupe G muni d'une F-connexion plate σ. On dispose alors de deux "théorie de Galois"

i) La *théorie linéaire*, avec le groupoïde de Galois défini en 3.1.

ii) La *théorie non-linéaire*, avec le pseudogroupe de Galois du feuilletage de Q défini par F et σ.

En général, les rapports entre ces deux objets ne sont pas immédiats (le premier est, en quelque sorte, "relatif" au-dessus de (X, F), sans vraiment entrer dans la structure de F ; le second par contre pourrait être qualifié d'"absolu", ou "relatif au-dessus de $\mathbb{C}$").

Je n'examinerai pas cette question dans cet article. Je mentionne seulement le cas particulier suivant, déjà traité dans [39] : dans le cas du feuilletage trivial, i.e. $N = 0$, les deux objets sont essentiellement les mêmes : plus précisément le groupoïde "linéaire" s'obtient par restriction aux transversales $Q(a)$, $a \in X(\mathbb{C})$ du pseudogroupe de Galois "non linéaire". (Sur cette question de restriction, voir plus de détails dans [39] et en 6.7).

6. Pseudogroupe de Galois et torseur de Picard-Vessiot

6.1. Ce qui suit va dans le sens opposé à la remarque précédente. On se place dans la situation de 5.8 : X est muni d'un feuilletage F défini par $N \subset \Omega^1_X$; M_k, M, F_k, F, ont la même signification qu'en 5.8. On note $Z = \{Z_k\}$ le pseudogroupe de Galois de F, avec $Z_k \subset J^*_k(X)$. On cherche ici à exprimer les Z_k en termes de groupoïdes de Galois au sens de la théorie linéaire.

Le cas $k = 0$ a déjà été traité, en fait, au §1 : en effet Z_0 est le plus petit sous-groupoïde (= relation d'équivalence) de $X \times X$ dont le fibré normal le long de la diagonale contient $N^\perp$. Quitte à restreindre X, on peut donc supposer qu'il existe S lisse et un morphisme $\pi : X \to S$ surjectif et lisse tel qu'on ait $Z_0 = X \underset{S}{\times} X$.

6.2. J'indique rapidement, comment le cas $k = 1$ suit des calculs du §4. D'une part, on déduit facilement de sa définition que Z_1 est caractérisé par la propriété suivante : c'est le plus petit sous-groupoïde de J^*_1 dont l'algèbre de Lie contient F_1. En particulier, il est contenu dans le sous-groupoïde de J^*_1 formé des jets d'automorphisme qui laissent stable le feuilletage.

D'autre part, J_1^* s'identifie (ensemblistement) à l'ensemble des isomorphismes $T_a \xrightarrow{\sim} T_b$, $a, b \in X(\mathbb{C})$. Donc Z_1 est contenu dans le sous-ensemble des isomorphismes qui laissent stable le feuilletage (i.e. envoient le tangent à F en a sur le tangent à F en b). Un tel isomorphisme est caractérisé par son action quotient $E_a \xrightarrow{\sim} E_b$, $E = N^*$ le fibré normal au feuilletage ; l'action longitudinale est par ailleurs arbitraire.

On vérifie alors facilement ceci : soit $\operatorname{Iso} E$, comme au §2, le groupoïde des isomorphismes $E_a \xrightarrow{\sim} E_b$, $a, b \in X(\mathbb{C})$. Alors le sous-groupoïde $\bar{Z}_1$ de $\operatorname{Iso} E$ déduit de Z_1 par passage au quotient caractérise Z_1, et coïncide avec le groupoïde de Galois de E muni de la connexion définie au §4.

6.3. On veut maintenant étendre le résultat précédent aux $k \geq 2$. En restreignant X, on peut supposer qu'il est affine, et que N est défini par p formes $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Gamma(X, \Omega^1_X)$ linéairement indépendantes en chaque point ; cette hypothèse sera toujours faite implicitement aux §6 et 7.

Pour chercher Z, on peut chercher d'abord un pseudogroupe qui le contient. Une réponse évidente est le pseudogroupe $\operatorname{Aut} F$ dont les solutions (sous-entendu, analytiques) laissent F stable, i.e. envoient les feuilles dans les feuilles. Ce pseudogroupe est défini par le système d'ordre 1 $\omega_i \circ f = 0 \bmod (\omega_1, \ldots, \omega_p)$, qui est bien algébrique. On appelle $\operatorname{Aut}_k F$ le sous-groupoïde de J_k^* qu'il définit.

Appelons "admissibles" (sous-entendu : par rapport à F) les sous-pseudogroupes de $\operatorname{Aut} F$ (resp. les sous-groupoïdes de $\operatorname{Aut}_k F$) dont l'algèbre de Lie contient F (resp. F_k). Par définition, Z est le plus petit des pseudogroupes admissibles. Il en résulte immédiatement que Z_k est le plus petit sous-groupoïde admissible de $\operatorname{Aut}_k F$. Le problème est donc de décrire les sous-groupoïdes admissibles. Quitte à restreindre X, on peut supposer que Z vérifie les conditions de régularité 5.3i) et ii), et se borner aux sous-groupoïdes admissibles de $\operatorname{Aut}_k F$ qui sont lisses.

Cette description se fait au moyen de leur *action transverse*. Pour comprendre ce point, il est plus parlant de regarder d'abord la situation analytique locale : si γ est un germe de solution de $\operatorname{Aut} F$, il définit par passage au quotient un germe transverse $\bar{\gamma}$ qui agit sur les quotients locaux (analytiques) de X par F.

Ce passage au quotient garde un sens sur les jets d'ordre k, $\gamma \in \operatorname{Aut}_k F$. Il faut voir que ce passage au quotient définit bien un groupoïde algébrique $\overline{\operatorname{Aut}_k F}$. Pour cela, quitte à remplacer X par un ouvert de Zariski dense, on prend une projection $q : X \to \mathbb{C}^{n-p}$, $n = \dim X$ qui soit étale sur les feuilles (i.e. donne en chaque point un isomorphisme du tangent à F à son image). On considère alors l'espace $J^*_{k,q}(X)$ des "jets inversibles relatifs à q" dont les points sur $\mathbb{C}$ sont ceux des $J^*_k(X(a), X(b))$, avec $a, b \in \mathbb{C}^{n-p}$. Ces espaces de jets "avec paramètre dans $\mathbb{C}^{n-p}$" se définissent comme les espaces de jets ordinaires, et donnent les transversales voulues, à partir de la bijection évidente $J^*_{k,q}(X) \simeq \overline{\operatorname{Aut}}_k F$; j'omets la vérification fastidieuse que la structure obtenue ne dépend pas de la projection q choisie.

Soit maintenant Y_k un sous-groupoïde admissible de $\mathrm{Aut}_k F$. Montrons que c'est l'image réciproque par la projection pr : $\mathrm{Aut}_k F \to \overline{\mathrm{Aut}}_k F$ d'un sous-groupoïde (fermé) $\bar{Y}_k$ de $\overline{\mathrm{Aut}}_k F$.

D'une part, c'est ensemblistement une image inverse par pr ; il suffit pour cela de voir que les vecteurs verticaux pour pr (i.e., en un sens évident, ceux qui sont tangents au feuilletage) sont tangents à Y_k. Or par hypothèse, ceci est vrai aux points de l'identité dans Y_k. Le résultat s'en déduit alors par composition, du fait que Y_k et un groupoïde.

Pour voir maintenant que la dite projection $\bar{Y}_k$ est une sous-variété algébrique de $\overline{\mathrm{Aut}}_k F$, il suffit d'utiliser localement sur $\overline{\mathrm{Aut}}_k F$ une section de pr (une telle section existe d'après les résultats de Serre [57] sur les "groupes spéciaux" ; en fait, une section étale suffirait ici, mais peu importe). On vérifie que $\bar{Y}_k$ est lisse, et est un sous-groupoïde de $\overline{\mathrm{Aut}}_k F$ (ceci peut se voir analytiquement, en coordonnées adaptées au feuilletage ; c'est alors immédiat).

Toute la question est donc maintenant de savoir à quelle condition un sous-groupoïde (lisse) $\tilde{Y}_k$ de $\overline{\mathrm{Aut}}_k F$ provient d'un groupoïde admissible.

6.4. Je vais exprimer cette condition en termes de connexions. Soit $\Gamma_k(p)$ le groupe des jets d'ordre k inversibles d'automorphismes de $(\mathbb{C}^p, 0)$, et soit $\Gamma_k(p,n)$ le groupe des jets d'ordre k inversibles de $(\mathbb{C}^n, 0)$ laissant stable le feuilletage F' donné par $dt_1, \ldots, dt_p$. Alors $\Gamma_k(p)$ est de façon évidente un quotient de $\Gamma_k(p,n)$. Soit encore ϕ_k le fibré des jets d'ordre k inversibles d'application $(\mathbb{C}^n, 0) \to X$ qui, en un sens évident, envoient F' sur F, et soit $\bar{\phi}_k$ le quotient obtenu de la même manière que plus haut. Alors ϕ_k est un fibré principal sur X de groupe $\Gamma_k(p,n)$; il est donc génériquement trivial car $\Gamma_k(p,n)$ est "spécial" au sens de Serre, loc. cit. Alors $\bar{\phi}_k$ s'obtient par le passage au quotient $\Gamma_k(p,n) \to \Gamma_k(p)$. Je note aussi que $\bar{\phi}_k$ peut se décrire au moyen d'une famille de transversales obtenue par la projection q considérée ci-dessus (c'est la famille des jets d'ordre k d'applications de $(\mathbb{C}^p, 0)$ dans une fibre de q).

Il est clair que $\bar{\phi}_k$ est un fibré principal à droite sous $\Gamma_k(p)$, et que le groupoïde $\mathrm{Iso}\,\bar{\phi}_k$ est égal à $\overline{\mathrm{Aut}}_k F$. On va voir ceci

Proposition 6.5. – *Avec les notations précédentes, $\bar{\phi}_k$ est munie canoniquement d'une F-connexion σ possédant la propriété suivante.*

Un sous-groupoïde $\tilde{Y}_k$ de $\overline{\mathrm{Aut}}_k F$ se relève en un sous-groupoïde admissible de $\mathrm{Aut}_k F$ si et seulement si son algèbre de Lie contient σ.

Cette proposition fera l'objet du prochain paragraphe.

Maintenant, $\Gamma_k(p)$ est un groupe affine, donc linéarisable (nous en verrons d'ailleurs une réalisation canonique au prochain chapitre). Nous sommes donc dans les conditions des §2 et 3. Ce qui précède entraîne immédiatement le résultat suivant.

Théorème 6.6. – *Avec les mêmes conditions, $\bar{Z}_k$ est le groupoïde de Galois de σ.*

Il y aurait lieu de discuter les cas transitif et intransitif, comme cela a été fait au §4 pour $k = 1$. Cette question sera examinée en détail aux chapitres II et III.

Remarque 6.7. Restriction aux transversales

Soit T une sous-variété (= un sous-schéma réduit) fermée de X, de dimension p en chaque point, et soit $Z = \{Z_k\}$ le pseudogroupe de Galois de F. On suppose que Z vérifie sur X entier les conditions de régularité 5.3i) et ii). On dira que T est une *"transversale à F"* s'il existe U, ouvert de Zariski dense de X tel que

i) $U \cap T$ soit Zariski-dense dans T

ii) Sur $U \cap T$, T est lisse et transverse à F (i.e. le tangent à T et celui de F sont supplémentaires).

Sur $U \cap T$, on a immédiatement un isomorphisme $J_k^*(T) \simeq \overline{\mathrm{Aut}}_k\, F \mid T$. En restreignant les constructions transverses précédentes à T, on obtient une famille $Z(T) = \{Z_k(T)\}$ de sous-variétés des $J_k^*(T)$, avec $Z_k(T) \simeq \bar{Z}_k \mid T$. On vérifie facilement que $Z(T)$ est un pseudogroupe sur T, qu'on appellera "restriction de Z à T".

7. La connexion d'holonomie

Dans la catégorie analytique, la connexion σ est bien connue : c'est, transversalement, le transport parallèle le long des feuilles, qui sert à définir l'holonomie. Pour cette raison, je l'appellerai "connexion d'holonomie".

Le problème est d'en donner une définition algébrique. Pour cela, il y a au moins deux méthodes qui généralisent ce qu'on a fait en 4.1. La première consiste à se ramener à un système différentiel en utilisant une projection q sur $\mathbb{C}^{n-p}$ génériquement transverse, comme on l'a fait en 6.3. La connexion d'holonomie est alors obtenue en écrivant les équations variationnelles d'ordre supérieur.

J'examinerai cette méthode au prochain paragraphe. Je vais généraliser ici l'autre méthode ; elle est un peu plus compliquée, mais elle est indépendante des coordonnées, et jouera un rôle essentiel au prochain chapitre.

Pour traiter cette question, je vais essentiellement reprendre les calculs de [38], §1 et 3 ; en fait, je n'aurai besoin que de la partie triviale de ces calculs, celle qui ne fait pas intervenir de majorations. Au prochain chapitre, la question sera développée plus systématiquement, en relation avec la description à la Cartan des pseudogroupes de Lie au moyen de formes de Maurer-Cartan généralisées.

Je rappelle qu'on est dans la situation de 6.4 : X est supposé affine et lisse, et le feuilletage F est donné par p formes $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Gamma(X, \Omega_X^1)$ linéairement indépendantes en chaque point.

L'idée est en gros la suivante : plaçons-nous d'abord dans la catégorie analytique ; considérons un voisinage U de la diagonale $\Delta \subset X^{\mathrm{an}} \times X^{\mathrm{an}}$, et considérons le quotient $\bar{U}$ obtenu en remplaçant la seconde composante par l'espace des feuilles (ceci a un sens pour U assez petit). Sur $\bar{U}$, la connexion d'holonomie est

bien définie par le transport parallèle le long des feuilles, ou le relèvement des champs de vecteurs de X tangents à F. Ce relèvement garde un sens lorsqu'on remplace $\bar{U}$ par le voisinage infinitésimal d'ordre infini de $\bar{\Delta}$, image de Δ dans $\bar{U}$. Il s'agit ici d'en donner une expression algébrique.

Pour cela, on pose la définition suivante : une "suite de Godbillon-Vey (ou de Gelfand-Fuks) d'ordre k" associée à $\omega_1, \ldots, \omega_p$ est une collection de formes $\omega_{i,\alpha} \in \Gamma(X, \Omega^1_X)$, $1 \leq i \leq p$, $\alpha \in \mathbb{N}^p$, avec $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p \leq k$, vérifiant $\omega_{i,0} = \omega_i$ $(1 \leq i \leq p)$, et vérifiant, pour $1 \leq i \leq p$, $|\alpha| \leq k-1$ les équations

$$d\omega_{i,\alpha} = \sum_{j,\beta} \binom{\alpha}{\beta} \omega_{j,\beta} \wedge \omega_{i,\alpha-\beta+\varepsilon_j} \tag{7.1}$$

avec les notations habituelles : $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_p!$, $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$ si $\beta_i \leq \alpha_i$ pour tout i, 0 sinon. En isolant dans le second membre les termes d'ordre $> |\alpha|$, la formule s'écrit encore

$$d\omega_{i,\alpha} = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{i,\alpha+\varepsilon_j} + \sum_{j,|\beta|\geq 1} \binom{\alpha}{\beta} \omega_{j,\beta} \wedge \omega_{i,\alpha-\beta+\varepsilon_j} \,. \tag{7.1$'$}$$

On a le résultat suivant.

Proposition 7.2. – *Avec les hypothèses faites sur X et ω, n'importe quelle suite de Godbillon-Vey d'ordre k associée à ω se prolonge à l'ordre $k+1$.*

La démonstration est analogue en plus simple à [38], proposition 3.5 (voir aussi une démonstration voisine en II.3) ; je l'omets.

Pour interpréter cette construction, considérons le voisinage formel $\tilde{X}$ de $X \times \{0\}$ dans $X \times \mathbb{C}^p$. Prenons une suite de Godbillon-Vey d'ordre infini, et posons $\Omega_i = \sum \frac{t^\alpha}{\alpha!} \omega_{i,\alpha}$, $\tilde{\Omega} = \sum \frac{\partial}{\partial t_i} \otimes (dt_i + \Omega_i)$. Alors, les conditions (7.1) s'écrivent simplement $d\,\Omega_i = \sum_j (dt_j + \Omega_j) \wedge \frac{\partial\,\Omega_i}{\partial\,t_j}$, ou encore, avec le crochet de Nijenhuis [18] $[\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}] = 0$.

Ce résultat peut s'interpréter en termes de *connexions d'Ehresmann*. Je rappelle que, si l'on a une submersion surjective $p : Y \to X$ de variétés lisses, une connexion d'Ehresmann est une section σ de l'application tangente $p' : TY \to p^{-1}\,TX$. Il est équivalent de se donner un projecteur $\Omega : TY \to VY$, VY les vecteurs verticaux. Alors Ω peut être considéré comme une forme à valeurs dans VY, dont la restriction aux fibres de p est l'identité. La connexion est plate, i.e. σ commute aux crochets de Lie si et seulement si $[\Omega, \Omega] = 0$. Ce formalisme s'étend de façon évidente au cas considéré ici où Y est la variété formelle $\tilde{X}$ au-dessus de X.

Un changement de base de $\tilde{X}$ compatible avec la projection sur X et la section nulle $X \times \{0\}$ est donnée par $t'_i = T_i(x,t)$, $t = t_1, \ldots, t_p$, $T_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X[[t]])$,

avec $T_i(x,0)=0$, et dét $\frac{\partial T_i}{\partial t_j}$ inversible. Soit $\tilde{\Omega}'$ la forme déduite de $\tilde{\Omega}$ par le changement de variables, qu'on notera aussi $\tilde{\Omega}\circ T$. On a $\tilde{\Omega}'=\sum \frac{\partial}{\partial t'_i}\otimes(dt'_i+\Omega'_i)$, $\Omega'_i=\sum \omega'_{i,\alpha}\,\frac{t'^{\alpha}}{\alpha!}$.

La collection des formes $(\omega'_{i,\alpha})$ est une suite de Godbillon-Vey associée à F, i.e. associée à une base $(\omega'_{i,0})$ de N. Montrons que, par ce procédé, on les obtient toutes une fois et une seule. De façon plus précise, on a le résultat suivant.

Proposition 7.3. – *Étant données deux suites de Godbillon-Vey d'ordre k associées à F (ω_i,α) et $(\omega'_{i,\alpha})$, avec $1\le i\le p$, $|\alpha|\le k$ $(k\ge 0)$, il existe une et une seule section sur X de $X\times\Gamma_{k+1}(p)$, donnée par $t_i=T_i(x,t)$ (T_i définie* $\bmod t^{k+2}$*) qui transforme la première suite en la seconde.*

La démonstration se fait par récurrence sur k.

i) $k=0$. Si l'on part de $\omega'_1,\dots,\omega'_p$ au lieu de $\omega_1,\dots,\omega_p$, on a $\omega_i=\sum g_{ij}\,\omega'_j$, $g_{ij}\in\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$, $g=(g_{ij})$ inversible. On vérifie immédiatement qu'on a $t'_i=\sum g_{ij}\,t_j\ (\bmod t^2)$.

ii) Par récurrence, on peut supposer qu'on a $\omega'_{i,\alpha}=\omega_{i,\alpha}$ pour $|\alpha|\le k-1$. On cherche alors les T_i de la forme $t_i+\sum\limits_{|\alpha|=k+1} f_{i,\alpha}\,\frac{t^{\alpha}}{\alpha!}$. Leur existence et leur unicité se voient comme dans [38], démonstration de (3.5) ; j'omets les détails.

Avec les notations de 6.5, le résultat est alors le suivant.

Théorème 7.4. – i) *Les suites de Godbillon-Vey d'ordre k sont en correspondance biunivoque avec les trivialisations (= les sections) de $\bar{\phi}_{k+1}$.*

ii) *Soit $(\omega_{i,\alpha})$, $|\alpha|\le k$ une telle suite, et soit τ la section correspondante. Soit encore $(\omega_{i,\alpha})$, $|\alpha|\le k+1$ un prolongement d'ordre $k+1$. La restriction à τ de la forme σ de la connexion d'holonomie est donnée par les classes*

$$\bar{\omega}_{i,\alpha}=\omega_{i,\alpha}\bmod(\omega_1,\dots,\omega_p)\qquad(1\le|\alpha|\le k+1)\,.$$

Remarque 7.5. – Les $\bar{\omega}_{i,\alpha}$, $|\alpha|\le k+1$, d'une part existent par 7.2 ; d'autre part ils sont déterminés par la suite d'ordre k donnée : ceci se déduit immédiatement de 7.1.

(i) Expliquons pourquoi la famille des $\bar{\omega}_{i,\alpha}$ définit une forme à valeurs dans $\mathrm{Lie}\,\Gamma_{k+1}(p)$. Soit $\Lambda_{k+1}(p)$, resp. $\Lambda^0_{k+1}(p)$ l'espace des jets d'ordre $k+1$ (resp. nuls en 0) de champs de vecteurs en $0\in\mathbb{C}^p$. Alors $\Lambda^0_{k+1}(p)$ est une algèbre de Lie ; d'autre part, cet espace peut être considéré de façon évidente comme le tangent en id à $\Gamma_{k+1}(p)$. On prend alors la base $x^{\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x_i}$, $1\le i\le p$, $1\le|\alpha|\le k+1$ de $\Lambda^0_{k+1}(p)$. Soit λ_d (resp. λ_g) le relèvement de $\Lambda^0_{k+1}(p)$ en champs invariants à droite (resp. à gauche) sur $\Gamma_{k+1}(p)$; soit enfin $\{\mu_{i,\alpha}\}$ la base de formes invariantes à gauche sur Γ_{k+1} duale des $\lambda_g\left(x^{\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$. L'application $\mu_{i,\alpha}\mapsto\bar{\omega}_{i,\alpha}$ fait bien de la collection $\{\bar{\omega}_{i,\alpha}\}$ une forme à valeurs dans $\mathrm{Lie}\,\Gamma_{k+1}(p)$ (= l'algèbre des champs invariants à gauche).

La connexion ainsi définie est plate, i.e. sa courbure est nulle. Pour les vérifier, en vertu de (7.1)′, il suffit de vérifier qu'on a

$$d\mu_{i,\alpha} = \sum_{j,|\beta|\geq 1} \binom{\alpha}{\beta} \mu_{j,\beta} \wedge \mu_{i,\alpha-\beta+\varepsilon_i} \,.$$

Cette formule résulte de l'expression des crochets $\left[x^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i}, x^\beta \frac{\partial}{\partial x_j}\right]$, de la formule $\langle d\mu, \xi \wedge \eta\rangle = -\langle \mu, [\xi, \eta]\rangle$ et enfin du fait suivant : si $\xi, \eta \in \Lambda^0_{k+1}(p)$, on a

$$\lambda_d[\xi,\eta] = [\lambda_d\,\xi, \lambda_d\,\eta]\,, \quad \text{et} \quad \lambda_g[\xi,\eta] = -[\lambda_g\,\xi, \lambda_g\,\eta]\,.$$

(Ceci est simplement une variante de la formule classique suivante : si un groupe de Lie G opère à gauche sur une variété différentiable X, l'application correspondante $\operatorname{Lie} G \to \Gamma(X, TX)$ est compatible avec le crochet sur $\operatorname{Lie} G$ donné par les champs invariants *à droite*).

Démonstration de 7.4. – Remarquons d'abord ceci : soit Y une variété algébrique lisse, munie d'un feuilletage non singulier G. Soit X une sous-variété lisse de Y transverse à G. Soit F la restriction de G à X. Alors, de façon intuitive, le long de X, "Y et X sont transversalement isomorphes". De façon plus précise, on aura $\overline{\operatorname{Aut}}\, G \mid X \times X = \overline{\operatorname{Aut}}\, F$ et $\bar\phi_k(Y) \mid X = \bar\phi_k(X)$. Revenons maintenant aux hypothèses de 7.4. Soit $\{\omega_{i,\alpha}\}$, $1 \leq i \leq p$, $(\alpha) \leq k$ une suite de Godbillon-Vey d'ordre k associée à (X, F), et étendons-la à l'ordre infini par 7.2.

Soit $\tilde X$ le complété formel $(X \times \mathbb{C}^n, X \times \{0\})^\wedge$; on le munit du feuilletage défini par les $dt_i + \Omega_i$. En posant $Y = \tilde X$, on se trouve dans une variante formelle de la situation précédente, à laquelle le résultat s'applique encore. Pour avoir une section de $\bar\phi_{k+1}(\tilde X) \mid X$, donc de $\bar\phi_{k+1}(X)$, il suffit de prendre le jet d'ordre $k+1$ des isomorphismes $(\mathbb{C}^p, 0)^\wedge \to$ (fibres de $\tilde X \to X$). On vérifie que la relation obtenue ne dépend que des $(\omega_{i,\alpha})$, $|\alpha| \leq k$.

Le fait qu'on obtienne ainsi une fois et une seule toutes les sections de $\bar\phi_{k+1}(X)$ résulte maintenant de 7.3. D'où i).

J'indique rapidement la démonstration de ii). On peut se placer dans le contexte analytique. On vérifie d'abord qu'il suffit de démontrer le résultat pour une trivialisation particulière de $\bar\phi_{k+1}$, autrement dit que ii) est compatible aux changements de trivialisation. On se place alors dans des coordonnées adaptées au feuilletage, i.e. dans le cas où $\omega_i = dx_i$, $1 \leq i \leq p$. Dans ce cas le résultat est immédiat, par définition de la connexion d'holonomie. D'où le théorème.

Démontrons maintenant 6.5. Soit $\tilde Y_k$ un sous-groupoïde de $\overline{\operatorname{Aut}}_k\, F$; relevons-le en un sous-groupoïde $\tilde\Gamma'_k$ de $\operatorname{Aut}_k F$. Il faut voir que $\tilde\Gamma'_k$ est admissible si et seulement si l'algèbre de Lie de $\tilde\Gamma_k$ contient σ. Ceci peut se vérifier dans la catégorie analytique ; il suffit alors de se placer dans des coordonnées adaptées au feuilletage.

8. Equations variationnelles d'ordre supérieur

Je reste dans la situation du paragraphe précédent : X est lisse et affine, et est muni d'un feuilletage défini par p formes $\omega_1, \dots, \omega_p \in \Gamma(X, \Omega^1_X)$ partout linéairement indépendantes.

Pour simplifier, je me limite au cas où X est un ouvert de Zariski de $\mathbb{C}^n$, la projection π, $x \mapsto (x_1, \dots, x_q)$, $q = n - p$ étant transverse au feuilletage (pour traiter le cas général, il faudrait prendre X fini et étale sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$, avec la même condition de transversalité. Ceci ne changerait rien au principe de ce qui va suivre, mais compliquerait un peu les énoncés).

Écrivant $y_1, \dots, y_p$ au lieu de $x_{q+1}, \dots, x_n$, on peut supposer qu'on a $\omega_i = dy_i - \alpha_i$, $\alpha_i = \sum a_{ij}\, dx_j$, avec $a_{ij} \in \mathbb{C}(x, y)$, régulières sur X.

Le feuilletage équivaut ici à la connexion d'Ehresmann de forme $\sum \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes \omega_i$, ou encore au système différentiel $\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = a_{ij}$ (avec, évidemment, les conditions d'intégrabilité données par la condition de Frobenius).

On a ici une trivialisation évidente des $\bar{\phi}_k$, à savoir celle qui est donnée par les fibres de la projection π. Dans cette trivialisation, il est bien connu que la connexion d'holonomie est donnée par les "équations variationnelles" de tous les ordres ; à l'ordre k, on les définit ainsi.

On prend les jets d'ordre k en y : $Y_i = \sum\limits_{|\alpha| \le k} y_{i,\alpha} \frac{t^\alpha}{\alpha!}$, $\alpha \in \mathbb{N}^p$; on écrit les équations différentielles $\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} = a_{ij}(x, Y)$; on développe en série les seconds membres par la méthode habituelle

$$a(x; Y_1, \dots, Y_p) = \sum \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\,(x; y_{1,0}, \dots, y_{p,0})\, \frac{Y'^\alpha}{\alpha!}$$

avec

$$Y'_i = Y_i - y_{i,0}\,, \quad Y' = (Y'_1, \dots, Y'_p)$$

et on égale les coefficients de t^α dans les deux membres.

Pour voir que ceci donne bien la connexion d'holonomie, on fait comme en 7.4 en plus simple : on se place dans la catégorie analytique ; on montre d'abord que le résultat est compatible avec les changements de coordonnées ; on est alors réduit au cas où les α_i sont nuls.

Bien entendu, on peut vérifier que l'application de 7.4 conduit au même résultat. Pour cela, on vérifie d'abord que la trivialisation considérée correspond aux choix suivants

$$\omega_{i,0} = \omega_i\,, \text{ les formes données} ; \quad \omega_{i,\alpha} = -\sum \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\, a_{ij}(x, y)\, dx_j \qquad (|\alpha| \le 1).$$

Posons $\Omega = \sum\limits_{|\alpha| \ge 1} \omega_{i,\alpha} \frac{t^\alpha}{\alpha!}$ et $g = \sum\limits_{|\alpha| \ge 1} g_{i,\alpha} \frac{t^\alpha}{\alpha!} \in \Gamma_k(p)$. Sur le principal, la forme de connexion est donnée par $g^{-1}\,\Omega\, g + g^{-1}\, d\, g \pmod{\omega_1, \dots, \omega_p}$. L'équation des sections horizontales, outre les équations initiales $\omega_i = 0$ est donnée par $dg + \Omega g = 0 \mod (\omega_1, \dots, \omega_p)$. Identifiant Y' à g, on retrouve les équations variationnelles.

Remarque 8.1. – Les résultats qui précèdent sont à rapprocher des travaux de Moralès-Ramis-Simo [49] qui donnent des conditions nécessaires à l'intégrabilité d'un système hamiltonien à partir de l'étude du groupe de Galois différentiel des équations variationnelles d'ordre supérieur d'une solution *particulière*. Ces travaux font suite à d'autre travaux de Ziglin, Moralès-Ramis, et d'autres qui étudient le même problème en se limitant aux équations variationnelles du premier ordre ; voir notamment [63] et [48].

La différence avec le point de vue présenté ici est le suivant : ici, on décrit le pseudogroupe de Galois différentiel au moyen des groupoïdes (ou des groupes) de Galois des équations variationnelles au-dessus de la solution *générale*. Mais, en général on est incapable de les calculer alors qu'au-dessus d'une solution particulière les calculs deviennent possibles.

Il serait très intéressant de ne pas limiter les méthodes de ces auteurs à l'étude des intégrales premières, et de voir, d'une façon générale, quelles informations sur le pseudogroupe de Galois on peut tirer de l'étude des équations variationnelles (de tous les ordres) au-dessus d'une solution particulière. Le sujet me semble entièrement ouvert[1].

[1]Depuis que ces lignes ont été écrites, le problème a été résolu par G. Casale.

Chapitre II

Pseudogroupes de Lie et connexions de Cartan

1. Introduction

Au chapitre I, §6 et 7, il a été donné une description du pseudogroupe de Lie d'un feuilletage. Le but de ce qui suit est de réinterpréter cette description comme un cas particulier (plus exactement, une variante transverse) d'une description à la Cartan des pseudogroupes de Lie. Ceci a l'avantage, d'une part d'être pratiquement plus maniable, d'autre part de mieux mettre en lumière les éléments fondamentaux de la description d'un pseudogroupe de Lie (par exemple, dans le cas intransitif, l'existence d'équations différentielles à variables dans l'espace S des intégrales premières. Ce fait a été plus ou moins occulté au chapitre I).

Une telle description est caractérisée ainsi : les fibrés principaux qui interviennent sont décrits, non comme sous-fibrés d'espaces de repères convenables, mais, d'une manière intrinsèque plus maniable, et équivalente, au moyen d'une structure qui généralise les formes de Maurer-Cartan de la théorie des groupes (c'est ce que Cartan appelle "méthode du repère mobile").

Dans le cas transitif, une telle description est donnée par Guillemin-Singer-Sternberg dans [27] et [59]. Une interprétation de leur construction en termes de "connexions de Cartan" se trouve chez Morimoto [50]. Toutefois, une différence entre le point de vue de ces auteurs et le mien est que je me place dans le contexte algébrique plutôt qu'analytique ou $\mathcal{C}^\infty$.

Cette restriction mise à part, ce qui suit peut être considéré comme l'extension au cas intransitif de leurs travaux. Pour la commodité du lecteur, il en est formellement indépendant (mais la lecture de leurs articles est fortement recommandée).

Au chapitre II, il sera question de pseudogroupes de Lie en général. L'application aux feuilletages et le raccord avec le chapitre I seront vus au chapitre III.

2. Equivalence de D-groupoïdes

Pour définir cette notion, il faut supposer un instant la variété X non nécessairement connexe, et étendre à ce cas la définition des pseudogroupes de Lie (ou D-groupoïdes). Un pseudogroupe de Lie sur X sera donc une collection $Z = \{Z_k\}$ de sous-schéma fermés réduits de $\{J^*_k(X)\}$ possédant les propriétés I.5.2.i) à iv). En remplaçant X par un ouvert de Zariski dense convenable, on pourra supposer vérifiées sur X entier les propriétés I.5.2.iv) et I.5.3.i) et ii).

En particulier, $Z_0 \subset X \times X$ est une relation d'équivalence fermée. Comme dans le cas des feuilletages, on dira que Z est transitif si $Z_0 = X \times X$. Dans le cas intransitif, quitte à restreindre X, on peut supposer qu'il existe une surjection lisse $\pi : X \to S$ telle qu'on ait $Z_0 = X \underset{S}{\times} X$. Dans la suite de ce paragraphe, les hypothèses précédentes seront faites implicitement ; comme dans le cas des feuilletages, on appelle S "l'espace des intégrales premières de Z".

La définition qui suit, au moins dans le cas transitif, est la transcription algébrique de ce qui est nommé "équivalence locale" dans la théorie des pseudo-groupes de Lie (voir [27], [59]). Je mentionne aussi l'existence dans la littérature d'autres notions d'équivalence de groupoïdes : dans le cas $\mathcal{C}^\infty$, voir [28], en relation avec la théorie des feuilletages. Dans le cas algébrique, voir l'équivalence à la Morita dans les champs algébriques ; cf. par exemple [35]. Quoique ces notions aient une certaine parenté avec celle qui va suivre, leurs relations précises ne seront pas examinées ici.

Définition 2.1. – *Soient X et X' deux variétés algébriques lisses connexes et séparées, de même dimension. Soient $Z = \{Z_k\}$, et $Z' = \{Z'_k\}$ deux D-groupoïdes respectivement sur X et X'. Par définition, la donnée d'une équivalence entre Z et Z' est la donnée d'un D-groupoïde Z'' sur la somme disjointe $X'' = X \sqcup X'$, possédant les deux propriétés suivantes :*

i) *La restriction de Z'' à X (resp. X') est égale à Z (resp. Z').*

ii) *"Surjectivité essentielle". La composante de Z''_0 située au-dessus de $X \times X'$ est dominante sur X pour la projection source et sur X' pour la projection but.*

En remplaçant X et X' par des ouverts de Zariski denses, on peut remplacer "dominant" par "surjectif".

L'exemple qui suit peut servir de modèle. Soit G un groupe algébrique connexe sur $\mathbb{C}$. Les translations à gauche de G peuvent être analytiquement définies par la condition différentielle suivante : ce sont les germes d'automorphismes (analytiques) qui fixent une base $\omega_1, \ldots, \omega_n$ des formes invariantes à gauche. Ceci définit un D-groupoïde $\tilde{G}$ canoniquement associé à G. Si maintenant, G' est un autre groupe algébrique connexe sur $\mathbb{C}$, on vérifie immédiatement ceci : $\tilde{G}$ et $\tilde{G}'$ sont équivalents si et seulement si $\operatorname{Lie} G$ et $\operatorname{Lie} G'$ sont isomorphes.

Voici un autre exemple, important dans la théorie de Galois différentielle. Soit F un feuilletage sur X ; on se place dans la situation de I.6.7. Soient T_1 et T_2 deux "transversales à F", par exemple irréductibles et distinctes. Quitte à restreindre X, on peut supposer $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Alors, si *Z est le pseudogroupe de Galois de F, les restrictions $Z(T_1)$ et $Z(T_2)$ sont équivalentes* (comparer avec Haefliger, loc. cit.). La démonstration est facile en remarquant que $T_1 \cup T_2$ est aussi une transversale, et en considérant $Z(T_1 \cup T_2)$.

La description "à la Cartan" des pseudogroupes de Lie, objet de ce chapitre, fournira comme sous-produit une description à équivalence près, généralisant le premier exemple ; le second exemple montre son intérêt pour la théorie de Galois différentielle. Enfin cette description joue un rôle-clef dans les "problèmes

d'équivalence" à la Cartan. Quoique ceci sorte de mon sujet, j'en dirai quelques mots à l'appendice C.

Pour le moment, je me contente de démontrer la transitivité de l'équivalence, c'est-à-dire le résultat suivant.

Théorème 2.2. – *Soient X_1, X_2, X_3 trois variétés connexes de même dimension, et soient respectivement Z^1, Z^2, Z^3 trois D-groupoïdes sur X_1, X_2, X_3. La donnée d'une équivalence entre Z^1 et Z^2 et d'une équivalence entre Z^2 et Z^3 détermine canoniquement une équivalence entre Z^1 et Z^3.*

Tout d'abord, une équivalence de D-groupoïdes donne un isomorphisme des espaces d'intégrales premières. Donc on peut supposer ces trois intégrales premières données par $\pi_i : X_i \to S$, $1 \leq i \leq 3$. Notons ensuite $Z^{1,2} = \{Z_k^{1,2}\} \subset J_k^*(X_1, X_2)\}$ la composante de l'équivalence entre Z^1 et Z^2 située au-dessus de $X_1 \times X_2$, et définissons de même $Z^{2,3} = \{Z_k^{2,3}\}$.

L'équivalence cherchée entre Z^1 et Z^3 est donnée par $Z^{1,3}$, avec $Z_k^{1,3}$ l'image de $Z_k^{1,2} \underset{X_2}{\times} Z_k^{2,3}$ dans $J_k^*(X_1, X_3)$ par la composition évidente. Il faut essentiellement démontrer les deux points suivants.

a) $Z_k^{1,3}$ est fermé dans $J_k^*(X_1, X_3)$.

Ceci se voit ainsi : prenons une "section multiforme" de $\pi_2 \circ t : Z_k^{1,2} \to S$, i.e. un revêtement étale fini $\alpha : \tilde{S} \to S$ muni d'une application $\lambda : \tilde{S} \to Z_k^{1,2}$ vérifiant $\alpha = \pi_2 \circ t \circ \lambda$. Soit Σ l'image de λ. Alors l'image de $\Sigma \underset{S}{\times} Z^{2,3}$ est égale à $Z^{1,3}$. Mais maintenant, on est ramené à une application finie, donc d'image fermée.

b) $Z_{k+1}^{1,3}$ est contenu dans le prolongement d'ordre 1 $\mathrm{pr}_1 Z_k^{1,3}$ (pour cette notion, cf. 2.5).

Il suffit d'établir ce résultat pour les espaces analytiques sous-jacents. Soient alors a_2 et a_3 deux points respectivement de X_2 et X_3, de même projection sur S. D'après le théorème de Cartan-Kähler, dans la version de [41], on peut trouver un germe d'isomorphisme $(X_2, a_2) \xrightarrow{\varphi} (X_3, a_3)$ qui soit une solution de $Z^{2,3}$. Par φ, les éléments de $Z^{1,2}$ de but voisin de a_2 sont transformés en les éléments de $Z^{1,3}$ de but voisin de a_3. Le résultat s'ensuit.

3. Cogèbres de Lie filtrées

Dans ce paragraphe et le suivant, S désigne une variété algébrique sur $\mathbb{C}$, lisse, et connexe. Comme en I, on la remplace si nécessaire par un ouvert de Zariski dense, et on identifie deux structures si elles coïncident sur un tel ouvert. En particulier, on suppose Ω_S^1 libre de rang $q = \dim S$.

Définition 3.1. – *On appelle $(\mathbb{C}, S)$-algèbre de Lie un $\mathcal{O}_S$-module L, muni d'une application $\mathbb{C}$-linéaire alternée $L \underset{S}{\times} L \to L$, notée $[\cdot, \cdot]$, et d'un $\mathcal{O}_S$-morphisme surjectif $a : L \to \theta_S$, θ_S les champs de vecteurs sur S. Ces données doivent satisfaire les conditions suivantes.*

i) *Le crochet* $[\cdot,\cdot]$ *vérifie l'identité de Jacobi.*

ii) *Pour* $\xi,\eta\in L$ *on a* $a[\xi,\eta]=[a(\xi),a(\eta)]$*, le crochet du second membre étant le crochet de Lie usuel.*

iii) *Pour* $f\in\mathcal{O}_S$*,* $\xi,\eta\in L$ *on a* $[\xi,f\eta]=f[\xi,\eta]+a(\xi)(f)\cdot\eta$*.*

Dans la suite, on écrit ξf pour $a(\xi)(f)$.

Un tel L est souvent appelé "algébroïde de Lie transitive" ; voir par exemple [36]. Je n'emploierai pas ici cette terminologie, avant tout parce que l'usage que je ferai de ces objets est différent de celui de loc. cit. ; notamment le mot "transitif" risque d'être une source de confusions : chez ces auteurs, L intervient surtout comme algèbre (ou algébroïde) de Lie d'un groupoïde transitif au-dessus de S, ou, ce qui revient au même, comme algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants sur un fibré principal. Ici, au contraire, S sera l'espace des intégrales premières d'un pseudogroupe (en particulier, dans le cas transitif, il sera réduit à un point). Un point de vue plus proche de celui développé ici est celui des groupes différentiels (voir notamment [12] et [3]) ; ces derniers objets sont des cas particuliers des pseudogroupes de Lie intransitifs ; cf. appendice A.

Soit $L'=\ker a$, alors L', muni du crochet induit, est une "S-algèbre de Lie" au sens usuel, i.e. le crochet est bilinéaire sur $\mathcal{O}_S$.

Je travaillerai surtout avec la notion duale qui va suivre.

Définition 3.2. – *On appelle* $(\mathbb{C},S)$*-cogèbre de Lie un* $\mathcal{O}_S$*-module* M *muni d'une différentielle* $\mathbb{C}$*-linéaire* $d:M\to\Lambda^2M$ *(le produit extérieur est pris sur* $\mathcal{O}_S$*) et d'une injection* $\mathcal{O}_S$*-linéaire* $a^*:\Omega^1_S\to M$ *vérifiant les propriétés suivantes*

i) d *se prolonge en un morphisme* $\mathbb{C}$*-linéaire* $d_2:\Lambda^2M\to\Lambda^3M$ *vérifiant* $d_2(m\wedge m')=dm\wedge m'-m\wedge dm'$ *(*$m,m'\in M$*).*

ii) *On a* $d_2\,d=0$*.*

iii) *Pour* $f\in\mathcal{O}_S$*,* $m\in M$*, on a* $d(fm)=df\wedge m+fdm$ *(on écrit* df *pour* a^*df*).*

iv) *Pour* $\omega\in\Omega^1_S$*, on a* $da^*\omega=(\Lambda^2a^*)\,d\omega$ *(on note* $d\omega$ *la valeur commune des deux membres).*

L'unicité de d_2, s'il existe, est évidente. Dans les situations considérées ci-dessous, M/Ω^1_S (donc aussi M) sera libre sur $\mathcal{O}_S$, mais non nécessairement de type fini. L'existence d'un d_2 vérifiant i) est alors automatique.

Toujours sous cette hypothèse, soit M^* le dual de M sur $\mathcal{O}_S$, muni du transposé a de a^*. On vérifie que M est une $(\mathbb{C},S)$- algèbre de Lie lorsqu'on la munit du crochet défini par la formule classique $\langle[\xi,\eta],\omega\rangle+\langle\xi\wedge\eta,d\omega\rangle=\xi\langle\eta,\omega\rangle-\eta\langle\xi,\omega\rangle$. Dans les mêmes conditions, on a une action de M^* sur M ("dérivée de Lie") donnée par la formule de H. Cartan [6]

$$L_\xi\,\omega=i_\xi\,d\omega+d\langle\xi,\omega\rangle\,,\qquad i\text{ le produit intérieur.}$$

Ici encore, si l'on pose $M' = M/\Omega^1_S$, M' est une S-cogèbre de Lie "usuelle", i.e. la différentielle quotient $d' : M' \to \Lambda^2 M'$ est $\mathcal{O}_S$-linéaire.

Remarque 3.3. – Dans les applications, outre l'hypothèse de liberté indiquée plus haut, on a souvent une scission, i.e. une décomposition $M = M' \oplus \Omega^1_S$, M' un $\mathcal{O}_S$-module vérifiant $dM' \subset M' \wedge M$. (Il revient au même de se donner une projection $M \to \Omega^1_S$, inverse à gauche de a^*, et commutant à d.) Dans ce cas, une interprétation de d est la suivante : on écrit $d = d' + d''$, avec $d' : M' \to \Lambda^2 M'$, $d''/M' : M' \to M' \otimes \Omega^1_S$, $d'' = d$ sur Ω^1_S. Alors d' est $\mathcal{O}_S$-linéaire, et cette décomposition se prolonge en $d_2 = d' + d''$, d' (resp. d'') étant de type $(1,0)$, resp. $(0,1)$, en un sens évident. On a $d'^2 = 0$, $d'd'' + d''d' = 0$, $d''^2 = 0$. La première relation dit que M' est une S-cogèbre de Lie (d'ailleurs isomorphe à M/Ω^1_S). D'autre part, d'' définit une connexion sur M' ; la seconde relation dit que cette connexion est compatible avec la structure de cogèbre de Lie. La dernière dit que cette connexion est plate.

Cette notion n'interviendra par explicitement dans ce chapitre. Pour sa relation avec les pseudogroupes de Lie, voir appendice B. (Dans la littérature consacrée aux algébroïdes, une telle scission est appelée "connexion plate". Cf. loc. cit.)

Étant données deux $(\mathbb{C}, S)$-cogèbres de Lie M et M', un morphisme $M \to M'$ sera une application $\mathcal{O}_S$-linéaire commutant à d et a^* (on ne tient pas compte des éventuelles scissions).

3.4. Définissons maintenant les cogèbres de Lie filtrées "abstraites". On se donne pour cela une $(\mathbb{C}, S)$-cogèbre de Lie M munie d'une filtration par des $\mathcal{O}_S$-modules $M_0 \subset \ldots \subset M_k \subset \ldots, \cup M_k = M$. On dit que c'est une $(\mathbb{C}, S)$-cogèbre de Lie filtrée "abstraite" si les conditions suivantes sont satisfaites.

i) a^* *est une injection* $\Omega^1_S \to M_0$.

ii) M_0/Ω^1_S et les $\bar{M}_k = M_k/M_{k-1}$ *sont libres de type fini* (et donc aussi les M_k).

iii) On a $d\, M_k \subset \sum_i M_i \wedge M_{k+1-i}$ (on convient que $M_i = 0$ si $i < 0$).

iv) Soit $\delta : \bar{M}_k \to M_0 \underset{\mathcal{O}_S}{\otimes} \bar{M}_{k+1}$ l'application déduite de d par passage au quotient. On considère l'application qui s'en déduit $\delta^* : M_0^* \underset{\mathcal{O}_S}{\otimes} \bar{M}_k \to \bar{M}_{k+1}$. On vérifie, en utilisant iii), que cette application est $\mathcal{O}_S$-linéaire. En utilisant $d_2\, d = 0$, on voit que cette application fait de $\bar{M}$ un $S(M_0^*)$-module gradué. *On demande alors que ce module soit engendré par* $\bar{M}_0 = M_0$.

Remarque 3.5. – On peut affaiblir les hypothèses précédentes en demandant seulement que les $\bar{M}_k$ (et donc les M_k) soient $\mathcal{O}_S$-cohérents. En se restreignant à un ouvert de Zariski dense convenable, ils seront nécessairement libres. En effet, on peut supposer S affine, et il suffit alors d'appliquer le lemme suivant, probablement bien connu, avec $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$.

Lemme 3.6. – *Soit A un anneau nœthérien intègre, et soit M un $A[\xi_1, \ldots, \xi_p]$ module gradué de type fini. Alors il existe $f \in A$ tel que les $M_k[f^{-1}]$ soient libres sur $A[f^{-1}]$.*

La variante non graduée de ce lemme est démontrée par exemple, sous le nom de "platitude générique" dans [24], exposé 4, lemme 6.7. Je suis ici la même méthode. On peut supposer A infini (sinon c'est un corps, et le résultat est trivial). La démonstration se fait par récurrence sur p. Tout d'abord, pour $p = 0$, en prenant une suite de composition de M, on se ramène au cas où $M = A/\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ un idéal. Si $\mathcal{I} = \{0\}$, c'est trivial. Sinon, soit $f \in \mathcal{I}$, $f \neq 0$. Alors $M[f^{-1}] = 0$.

Pour $p > 0$, on procède de la même manière, et on se ramène au cas où $M = A[\xi_1, \ldots, \xi_p]/\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ un idéal homogène. Si $\mathcal{I} = \{0\}$, c'est trivial. Sinon, soit $a \in \mathcal{I}$, $a \neq 0$. Quitte à faire une localisation et un changement de variable sur les ξ_i, on peut supposer que le coefficient f de ξ_1^k dans A est $\neq 0$. [Comme A est infini, on peut trouver $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in A^p$ avec $a(\lambda) \neq 0$. Supposons par exemple $\lambda_1 \neq 0$. Alors on remplace A par $A[\lambda_1^{-1}]$ et on fait le changement de variables $\xi_1 = \lambda_1\, \eta_1$, $\xi_i = \eta_i + \lambda_i\, \eta_1$, $i \geq 2$.]

On remplace alors A par $A[f^{-1}]$; en effectuant la division par a, considéré comme polynôme en x_1, on trouve que $M[f^{-1}]$ est fini sur $A[f^{-1}][\xi_2, \ldots, \xi_p]$; on conclut par l'hypothèse de récurrence.

3.7. La $(\mathbb{C}, S)$-cogèbre de Lie "universelle" qui va intervenir ici se définit ainsi : on se donne un entier $r \geq 0$ et une base $ds_1, \ldots, ds_q$ de Ω^1_S fixée une fois pour toutes. Posant $p = q + r$, on considère le $\mathcal{O}_S$-module libre engendré par les symboles $\pi_{i,\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}^p$, $1 \leq i \leq p$, avec, pour $1 \leq i \leq q$, $\pi_{i,0} = ds_i$ et $\pi_{i,\alpha} = 0$ pour $|\alpha| \geq 1$.

On note $\Lambda^*(S, p)$, en abrégé Λ^* le $\mathcal{O}_S$-module précédent muni de l'opération a^* évidente, et de la différentielle donnée par les formules de Godbillon-Vey I.7.1, avec $\omega_{i,\alpha}$ remplacé par $\pi_{i,\alpha}$.

Dans la suite, il m'arrivera d'écrire $\omega_{j,\alpha}$ pour $\pi_{j+q,\alpha}$, et (β, γ) pour α, avec $\beta \in \mathbb{N}^q$, $\gamma \in \mathbb{N}^r$. On vérifie sans difficulté que Λ^* est une $(\mathbb{C}, S)$-cogèbre de Lie filtrée, lorsqu'on appelle Λ^*_k le sous-module engendré par les $\pi_{i,\alpha}$, $|\alpha| \leq k$. On a alors le résultat suivant.

Proposition 3.8. – *Soit M une $(\mathbb{C}, S)$-cogèbre de Lie filtrée "abstraite", i.e. vérifiant les conditions* 6.4.i) *à* iv). *Soit $p = q + r$ le rang de M_0. Il existe alors un morphisme filtré de $\mathcal{O}_S$-modules $\Lambda^*(S, p) \to M$ compatible à d, à a^*, et strictement surjectif (i.e. pour tous les k, $\Lambda^*_k \to M_k$ est surjectif). De plus, deux tels morphismes diffèrent par un automorphisme de $\Lambda^*(S, p)$ vérifiant les mêmes compatibilités.*

L'énoncé doit être complété par la description qui suit des automorphismes de $\Lambda^*(S, p)$. De manière analogue à I.7, on introduit de nouvelles variables u_i, v_j,

avec $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq r$, et l'on pose $\Omega_i = \sum \pi_{j+q,\alpha} \frac{u^\beta}{\beta!} \frac{v^\gamma}{\gamma!}$, $\alpha = (\beta, \gamma)$. On pose aussi $\tilde{\Omega} = \sum \frac{\partial}{\partial u_i} \otimes (du_i + ds_i) + \sum \frac{\partial}{\partial v_j} \otimes (dv_j + \Omega_j)$.

Dans le cas considéré ici, les conditions de Godbillon-Vey signifient encore $[\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}] = 0$, ce qui équivaut au fait que le système $\{du_i + ds_i, dv_j + \Omega_j\}$ vérifie la condition de Frobenius. Ceci s'écrit encore

$$d\,\Omega_k = \sum (du_i + ds_i) \wedge \frac{\partial\,\Omega_k}{\partial\,u_i} + \sum (dv_j + \Omega_j) \wedge \frac{\partial\,\Omega_k}{\partial\,v_j}\,.$$

On considère alors les transformations $F : \bar{s} = s$, $\bar{u}_i = u_i$, $\bar{v}_j = V_j(s, u, v)$, où les V_j sont des fonctions sur le complété formel $(S \times \mathbb{C}^p, S \times \{0\})^\wedge$, avec en outre $V_j(s, 0, 0) = 0$, $\frac{\partial\,V_j}{\partial\,v_k}(s, 0, 0)$ inversible. Alors $\tilde{\Omega} \circ F$ vérifie encore $[\tilde{\Omega} \circ F, \tilde{\Omega} \circ F] = 0$, donc la transformation $\tilde{\Omega} \to \tilde{\Omega} \circ F$ donne un automorphisme de $\Lambda^*(S, p)$. Plus explicitement, en écrivant en abrégé

$$\tilde{\Omega} = \frac{\partial}{\partial\,u} \otimes (du + ds) + \frac{\partial}{\partial v} \otimes (dv + \Omega)\,,$$

on a

$$\tilde{\Omega} \circ F = \frac{\partial}{\partial\,u} \otimes (du + ds) + \frac{\partial}{\partial\,v} \otimes (dv + \Omega^F)\,. \tag{3.9}$$

avec

$$\Omega^F = \left(\frac{\partial\,V}{\partial\,v}\right)^{-1} \left[\left(\frac{\partial\,V}{\partial\,s} - \frac{\partial\,V}{\partial\,u}\right) ds + \Omega \circ F\right]\,.$$

On a alors le résultat suivant.

Proposition 3.10. – *Les automorphismes de $\Lambda^*(S, p)$ sont en bijection avec les transformations du type précédent.*

La démonstration de ces propositions est analogue à celle de [38], proposition 3.5 (en plus simple, car ici il n'intervient pas de majorations). J'en donne les grandes lignes.

On commence par choisir une base $\pi_{i,0} = \pi_i$ de M_0, avec $1 \leq i \leq p$, $\pi_i = ds_i$ pour $1 \leq i \leq q$. La démonstration repose sur le lemme suivant.

Lemme 3.11. – *On se donne des $\omega_\alpha \in \Gamma(S, M)$ [resp. $\Gamma(S, \Lambda^2 M)$], avec $\alpha \in \mathbb{N}^p$, $|\alpha| = k$ ($k \geq 1$ donné), vérifiant, $\forall\,\beta$ avec $|\beta| = k - 1$*

$$\sum \pi_i \wedge \omega_{\beta + \varepsilon_i} = 0\,.$$

Alors il existe des $\psi_\gamma \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ [resp. $\Gamma(S, M)$], $|\gamma| = k + 1$ vérifiant, pour tout α : $\omega_\alpha = \sum \pi_i \wedge \psi_{\alpha + \varepsilon_i}$.

Plus généralement, posons $P = \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_p]$, et notons P^k les éléments homogènes de degré k de P. Pour k fixé, on considère le complexe $F_k^\bullet$ défini par

$$F_k^\ell = P^{k-\ell} \bigotimes_{\mathbb{C}} \Gamma(S, \Lambda^\ell M) \quad \text{pour} \quad 0 \leq \ell \leq k\,, \quad F_k^\ell = 0 \quad \text{sinon.}$$

La différentielle δ de ce complexe est défini par $\delta(p \otimes a) = \sum \frac{\partial p}{\partial t_i} \otimes (\pi_i \wedge a)$. Le lemme précédent signifie qu'on a $H^p(F_k^\bullet) = 0$ pour $\ell = 1$ et $k \geq 2$, et pour $\ell = 2$ et $k \geq 3$. Il suffit a fortiori de démontrer qu'on a $H^\ell(F_k^\bullet) = 0$ pour $0 \leq \ell < k$.

i) On note $G_k^\bullet$ le complexe analogue au précédent, avec M remplacé par M_0. En écrivant dt_i au lieu de π_i, on trouve le complexe de de Rham à coefficients dans P, tensorisé par $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. On a donc $H^\ell(G_k^\bullet) = 0$ sauf si $\ell = k = 0$, auquel cas on a $H^0(G_0^\bullet) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$.

ii) Soit M' un supplémentaire de M_0 dans M. Alors on a une décomposition

$$F_k^\bullet = G_k^\bullet \oplus (G_{k-1}^\bullet \otimes M') + \ldots + (G_{k-\ell}^\bullet \otimes \Lambda^\ell M') + \ldots$$

D'où aussitôt $H^\ell(F_k^\bullet) = 0$ pour $\ell \neq k$, et aussi $H^k(F_k^\bullet) = \Lambda^k M$. Ceci entraîne le résultat cherché.

Démontrons maintenant 3.8 et 3.10.

i) Existence du morphisme $\Lambda^*(S,p) \to M$.

On procède par récurrence. Les $\pi_{i,0} = \pi_i \in M_0$ sont déjà obtenus. L'existence des $\pi_{i,j} \in M_1$ vérifiant $d\pi_i = \sum \pi_j \wedge \pi_{i,j}$ (avec $\pi_{i,j} = 0$ si $i \leq q$) résulte de la condition $dM_0 \subset M_0 \wedge M_1$ (cf. 3.4). Le fait que les π_i et les $\pi_{i,j}$ engendrent M_1 résulte alors de 3.4.iv). D'où le résultat pour $k = 1$.

Pour $k \geq 1$, supposons maintenant les $\pi_{i,\alpha}$ obtenus pour $|\alpha| \leq k$, avec $\pi_{i,\alpha} \in M_{|\alpha|}$, les conditions (I.7.1) étant vérifiées pour $|\alpha| \leq k-1$, et aussi $\pi_{i,\alpha} = 0$, $1 \leq i \leq q$, $|\alpha| \geq 1$.

Pour $|\alpha| = k$, on pose

$$\omega_{i,\alpha} = d\,\pi_{i,\alpha} - \sum_{j,|\beta|\geq 1} \pi_{j,\beta} \wedge \pi_{i,\alpha-\beta+\varepsilon_j}\,.$$

Pour $1 \leq i \leq q$, on a $\omega_{i,\alpha} = 0$ et il n'y a rien à faire. Pour $i \geq q+1$, en dérivant les équations (I.7.1) (cf. [38], loc. cit.) on trouve qu'on a $\sum \pi_j \wedge \omega_{i,\beta+\varepsilon_j} = 0$, $|\beta| = k-1$. Le lemme précédent montre l'existence de $\pi_{i,\gamma}$, $|\gamma| = k+1$, vérifiant $\omega_{i,\alpha} = \sum \pi_j \wedge \pi_{i,\alpha+\varepsilon_j}$.

Reste à voir que les $\pi_{i,\gamma}$ appartiennent à M_{k+1}, et que leurs classes modulo M_k engendrent M_{k+1}/M_k. La première assertion résulte du fait que, d'après 3.4.iii) et l'hypothèse de récurrence, on a $\omega_{i,\alpha} \in M_k \wedge M_{k+1}$. La seconde résulte alors de 3.4.iv).

ii) Autres assertions.

Il suffit de voir ceci : on se donne deux morphismes $\Lambda^*(S,p) \to M$ vérifiant les conditions de 3.8, et représentés respectivement par $\{\pi_{i,\alpha}\}$ et $\{\pi'_{i,\alpha}\}$, avec $\pi_{i,\alpha}$ et $\pi'_{i,\alpha} \in M$. Alors on passe de l'une à l'autre par un automorphisme de $\Lambda^*(S,p)$ du type indiqué. Le fait que l'on obtient par ce procédé tous les automorphismes de $\Lambda^*(S,p)$ s'obtient en appliquant le résultat à $M = \Lambda^*(S,p)$.

On procède encore par récurrence. Le début de la récurrence est évident, et je le laisse au lecteur. Supposons le résultat démontré pour les α vérifiant $|\alpha| \leq k-1$. On peut alors se ramener au cas ou l'on a $\pi_{i,\alpha} = \pi'_{i,\alpha}$ pour $|\alpha| \leq k-1$.

D'après (I.7.1), on aura donc

$$\sum \pi_j \wedge \pi_{i,\alpha+\varepsilon_j} = \sum \pi_j \wedge \pi'_{i,\alpha+\varepsilon_j} \qquad (|\alpha| = k-1\,,\ q+1 \le j \le p)\,.$$

D'après 3.11 il existe, pour $j \ge q+1$, des $f_{j,\gamma} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, $|\gamma| = k+1$ tels qu'on ait

$$\pi'_{i,\alpha} - \pi_{i,\alpha} = \sum f_{i,\alpha+\varepsilon_j}\, \pi_j\,.$$

On vérifie alors que la transformation F définie par $V_j = v_j + \sum f_{j,\alpha}\, \frac{u^\beta}{\beta!}\, \frac{v^\gamma}{\gamma!}$, avec $\alpha = (\beta, \gamma)$, répond à la question.

Remarque 3.12. – Posant $V = \sum v_{\beta,\gamma}\, \frac{u^\beta}{\beta!}\, \frac{v^\gamma}{\gamma!}$, dans la formule 3.9, le terme $\left(\frac{\partial V}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\right)_{\beta,\gamma}$ s'écrit explicitement $\frac{\partial v_{\beta,\gamma}}{\partial s_i} - v_{\beta+\varepsilon_i,\gamma}$. On retrouve ici la classique différentielle de Spencer. Il serait d'ailleurs plus naturel de faire le changement de variable $s' = s + u$ et de considérer (s, s') comme paramétrant le voisinage infinitésimal d'ordre infini de la diagonale $\Delta \subset S \times S$. Pour ce genre de questions, voir notamment [37].

3.13. Terminologie. Dans la suite, on appelle $(\mathbb{C}, S)$ "cogèbre de Lie filtrée" ce qui en 3.8 est appelé "cogèbre de Lie filtrée abstraite". La mention "$(\mathbb{C}, S)$" sera omise s'il n'y a pas d'ambiguïté. Un morphisme $\Lambda^*(S,p) \to M$ vérifiant les conditions de 3.8 sera appelé *présentation* de M.

4. Groupes virtuels

Notons $\Gamma(S,p)$, en abrégé Γ, le groupe au-dessus de S dont les sections sont les transformations F introduites en 3.10. On note Γ^k le sous-groupe des F nuls à l'ordre k sur S, et par Γ_k le quotient. Dans le cas transitif, i.e. $S = p^t$, le lecteur vérifiera la compatibilité de ces notations avec celles de I.6. Alors Γ_k est un groupe algébrique sur S.

Écrivant aussi Λ^*, Λ^*_k au lieu de $\Lambda^*(S,p)$, $\Lambda^*_k(S,p)$, on a les identifications suivantes (où je désigne, quand il y a lieu, par la même lettre, les fibrés sur S et les faisceaux de leurs sections).

4.1.i) Λ^*_k/Λ^*_0 s'identifie aux formes invariantes à gauche sur Γ_k. Par suite son dual Λ^0_k (= l'orthogonal de Λ^*_0 dans Λ_k) s'identifie à $\operatorname{Lie}\Gamma_k$, champs verticaux pour la projection sur S, invariants à gauche sur Γ_k. On notera aussi Λ_k le dual de Λ^*_k.

4.1.ii) Ce même espace s'identifie aux champs de vecteurs $\sum a_j\, \frac{\partial}{\partial v_j}$ (notations de 3.8), les a_j étant des (germes sur S) de fonctions sur le complété formel $(S \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\})^\wedge$, nulles sur la section nulle $S \times \{0\}$. Toutefois, dans cette identification, la loi de crochet doit être changée de signe (à cause d'un passage de droite à gauche ; comparer avec I.7.5).

Explicitement, la correspondance est la suivante : si $\pi^*_{i,\alpha}$ est la base de Λ duale de la base $\pi_{i,\alpha}$ de Λ^*, on identifie $\frac{u^\beta\, v^\gamma}{\beta!\,\gamma!}\,\frac{\partial}{\partial\, v_j}$ à $\pi^*_{q+j,(\beta,\gamma)}$.

4.1.iii) On dispose donc de deux actions (des sections de) Λ^0_{k+1} sur Λ^*_k. D'une part l'action donnée par la formule de Cartan (cf. 3.2) et la dualité (Λ, Λ^*). D'autre part la version infinitésimale de l'action de Γ_{k+1} définie en 3.10. On vérifie que ces deux actions coïncident. (Indication : utiliser la version infinitésimale de 3.9 qui s'écrit ainsi : pour $\xi = \sum a_j\,\frac{\partial}{\partial\, v_j}$, en abrégé $\frac{\partial}{\partial\, v}\,a$, on a

$$L_\xi\,\tilde\Omega = \frac{\partial}{\partial\, v} \otimes \left[\left(\frac{\partial\, a}{\partial\, s} - \frac{\partial\, a}{\partial\, u}\right) ds - \frac{\partial\, a}{\partial\, v}\,\Omega + L_\xi\,\Omega\right].)$$

4.1.iv) On note ω^F, ou quelquefois $ad\,F^{-1}\,\omega$ l'action à droite des sections de Γ_{k+1} sur Λ^*_k. L'action correspondante de son algèbre de Lie est donc $L_\xi\,\omega$, vue comme action à droite (d'où le changement de signe vu en ii)).

Cette action n'est pas "algébrique", i.e. définie fibre par fibre, mais est donnée par un opérateur différentiel d'ordre 1 en $s \in S$. Cf. le terme en $\frac{\partial\, V}{\partial\, s}$ dans (3.9). C'est une action algébrique de $J_1(S, \Gamma_{k+1})$, espace des jets d'ordre un de sections de l'application $\Gamma_{k+1} \to S$ (cet espace est muni d'une structure évidente de groupe algébrique sur S).

4.2.i) Posons $\bar\Gamma_k = \ker(\Gamma_k \to \Gamma_{k-1})$ (on convient qu'on a $\Gamma_0 = \{e\}$, donc $\bar\Gamma_1 = \Gamma_1$). Alors, pour $k \geq 2$, $\bar\Gamma_k$ est un groupe additif. D'autre part, en restreignant Γ_1 à "sa partie transitive, avec paramètre dans S", i.e. à son action Γ_1^{trans} sur $(S \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\})^\wedge$ obtenue en faisant $u = 0$ dans V (notations de 3.9 ; $r = p - q$), on trouve qu'on a $\Gamma_1^{\text{trans}} = G\ell(r) \times S$, et que Γ_1 est extension de Γ_1^{trans} par un groupe additif.

4.2.ii) Posons de même $\bar\Lambda^*_k = \Lambda^*_k/\Lambda^*_{k-1}$, $\bar\Lambda^* = \bar\Lambda_k$, et aussi $\bar\Lambda_k = \ker(\Lambda_k \to \Lambda_{k-1})$ (notations de 4.1.i)), $\bar\Lambda^0 = \bigoplus_{k\geq 1} \bar\Lambda_k$. L'action de $\bar\Gamma_{k+1}$ sur Λ^*_k, restriction de l'action de Γ_{k+1} est algébrique (= définie fibre par fibre). Elle est l'identité sur Λ^*_{k-1}. Pour $k = 0$, on a donc un morphisme sur S : $\Gamma_1 \to G\ell_S(\Lambda^*_0)$. On vérifie facilement que cette action est fidèle, et laisse fixe Ω^1_S.

Pour $k \geq 1$, cette action est égale à l'identité, plus l'action correspondante de $\bar\Lambda_{k+1}$. Cette dernière est nulle sur Λ^*_{k-1}, et envoie Λ^*_k dans Λ^*_0, d'où une flèche $\bar\Lambda_{k+1} \to Hom_S(\bar\Lambda^*_k, \Lambda^*_0)$ ou encore une flèche $\bar\Lambda^*_k \to \Lambda^*_0 \otimes \bar\Lambda^*_{k+1}$. On vérifie facilement que cette dernière flèche n'est autre que le δ considéré en 3.4.iv).

4.2.iii) De ce qui précède, on déduit que, pour tout k, l'action de $\bar\Gamma_{k+1}$ sur Λ^*_k est fidèle.

On déduit de là, par récurrence sur k, le résultat suivant : l'action des (germes de) sections de Γ_{k+1} sur Λ^*_k est fidèle, i.e. un germe F de section de Γ_{k+1} vérifiant $\omega^F = \omega$ pour tout ω est égal à l'identité. Même énoncé pour des germes de section analytique, ou de section formelle.

4.3. Soit maintenant M une $(\mathbb{C}, S)$ cogèbre de Lie filtrée (cf. 3.13). Pour lui associer éventuellement des groupes admissibles, il est commode, comme dans le cas transitif, de supposer d'abord M muni d'une présentation $\lambda : \Lambda^*(S,p) \to M$. Soit N le noyau de λ. Notons d'autre part L_k le dual de M_k sur $\mathcal{O}_S$, et L_k^0 le dual de M_k/M_0, i.e. l'orthogonal de M_0 dans L_k. Posons $L = \varprojlim L_k$, $L^0 = \varprojlim L_k^0$. On appelle "sous-groupe G sur S de Γ" un système projectif $\{G_k\}$, G_k sous-groupe algébrique de Γ_k, avec $\bar{G}_k = G_k \cap \bar{\Gamma}_k$, $G_{k-1} = G_k/\bar{G}_k$. On supposera les $G_k \to G_{k-1}$ et $G_1 \to S$ lisses et surjectifs. On écrira aussi $G = \varprojlim G_k$, $G^k = G \cap \Gamma^k$ (en identifiant comme plus haut les groupes et leurs points sur $\mathbb{C}$).

Un tel sous-groupe est dit *admissible relativement à M* s'il possède les propriétés suivantes.

i) *G laisse stable N, donc agit sur $\Lambda^*/N = M$.*

ii) *Pour tout k, l'algèbre de Lie de G_k est égale à L_k^0.*

Par suite, la dérivée de l'action de G_{k+1} sur M_k coïncide avec l'action coadjointe de L_{k+1}^0 sur M_k.

On appellera "S-groupe virtuel" une paire (M, G) vérifiant les propriétés précédentes (si aucune confusion n'est possible, S sera sous-entendu).

4.4. En passant aux gradués associés, on aura des propriétés généralisant celles obtenues en 4.2.

4.4.i) Pour $k \geq 2$, $\bar{G}_k$ est additif. D'autre part, en appelant G_1^{trans} l'image de G_1 dans $\Gamma_1^{\text{trans}} = G\ell(r) \times S$, G_1 est extension de G_1^{trans} par un groupe additif.

4.4.ii) On voit comme plus haut que l'action de G_1 sur M_0 (qui est algébrique) est fidèle. On voit aussi que l'action de $\bar{G}_{k+1}$ sur M_k est fidèle. De ces résultats, on déduit que l'action de G_{k+1} sur M_k est fidèle, dans le même sens qu'en 4.2.iii).

4.5. On se débarrasse du choix d'une présentation particulière de M de la manière suivante.

Étant donnés deux groupes virtuels (M, G) et (M', G'), un isomorphisme $(M, G) \xrightarrow{\sim} (M', G')$ est par définition la donnée

i) D'un isomorphisme $\alpha : M \xrightarrow{\sim} M'$ de cogèbres filtrées.

ii) D'un isomorphisme $\beta : G \xrightarrow{\sim} G'$ de systèmes projectifs, compatible avec les structures de groupe et les actions sur M et M'.

Cela étant, soit (α, β) un isomorphisme $(M, G) \xrightarrow{\sim} (M', G')$. Soit λ (resp. λ') une présentation de M (resp. M'). D'après 3.8, α se relève en un automorphisme $\tilde{\alpha}$ de Λ^* rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^* & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \Lambda^* \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda'} \\ M & \xrightarrow{\alpha} & M' \end{array}$$

Soit G'' l'image de G par $\tilde{\alpha}$. Alors (M', G'') est isomorphe à (M, G) donc à (M', G'), l'automorphisme de M' étant l'identité. Ce qui précède montre qu'on a $G'' = G'$. Donc, étant donné un groupe virtuel (M, G), G peut être défini à partir de n'importe quelle présentation de M.

4.6. Équivalence de groupes virtuels

La situation considérée ici est provisoire ; un cas un peu plus général sera vu au §7.

Soit (M, G) un groupe virtuel. Par définition, un fibré principal à gauche sous G au-dessus de S sera un système projectif $\{F_k\}$ $(k \geq 1)$ de variétés lisses au-dessus de S, avec F_k fibré principal sous G_k. On demande que pour tout $k \geq 1$, on ait un isomorphisme de G_k-fibré, $F_k \simeq \bar{G}_{k+1} \backslash F_{k+1}$.

À un tel système, on associe

i) $G' =$ le groupe sur S des automorphismes de F (i.e. le système projectif $\{G'_k\}$ des automorphismes de F_k). On note à droite l'action de $G' : f \mapsto fg'$ en notations ensemblistes.

ii) M', le fibré associé à M ; intuitivement, M' est le quotient de $M \underset{S}{\times} F$ par l'équivalence $(m, gf) \sim (mg, f)$. Pour le définir précisément, il faut prendre le fibré associé au principal $J_1(S, F)$ sous $J_1(S, G)$. (Ce fibré est défini par descente, ce qui ne pose pas de problème car il s'agit d'un fibré vectoriel. Voir par exemple [25].)

La structure de (G, S)-cogèbre de M' est évidente. L'action de G' sur M' est donnée par $(m, f) \mapsto (m, fg')$.

Pour voir que ceci fait de (M', G') un groupe virtuel, on opère ainsi : soit $\lambda : \Lambda^* \to M$ une présentation de M. Celle-ci fait de G un sous-groupe de Γ ; en étendant l'action de G sur F à Γ, on obtient un Γ-fibré principal (à gauche) $\tilde{F}$ au-dessus de S.

Lemme 4.6.1. – *Quitte à remplacer S par un ouvert de Zariski dense S', $\tilde{F}$ est un fibré trivial (i.e. les $\tilde{F}_k$ se trivialisent de manière cohérente).*

Il suffit de trivialiser $\tilde{F}_1^{\mathrm{trans}}$, le fibré quotient correspondant à $\Gamma_1^{\mathrm{trans}}$, sur un S' convenable. Ceci peut se faire car on a $\Gamma_1^{\mathrm{trans}} = G\ell(r) \times S$. Ensuite, quitte à supposer S' affine, les $\tilde{F}_k$ se trivialisent alors sur S', car Γ_k est obtenu par extensions successives de $\Gamma_1^{\mathrm{trans}}$ par des groupes additifs.

Le lemme précédent montre qu'on peut supposer qu'on a $\tilde{F} = \Gamma^g$, le groupe Γ considéré comme principal à gauche sur lui-même. On a alors $F \subset \Gamma^g$.

Posons $N = \ker \lambda$; N est invariant (à droite) par $J_1(S, G)$; on aura $N' = N \cdot J_1(S, F)$; $M' = \Lambda^*/N'$ et $G' = ad\, F^{-1}\, G$. On vérifie alors que ceci fait de (M', G') un groupe virtuel.

On dira que (M', G') est équivalent à (M, G). On voit facilement que ceci est une relation d'équivalence (en particulier que la relation est symétrique).

4.6.2. Si F est un fibré trivial, (M', G') est isomorphe à (M, G). Il suffit pour cela que F_1^{trans} = le quotient correspondant à G_1^{trans} soit trivial (cf. 4.6.1). En général, ce ne sera pas le cas, mais (M, G) et (M', G') deviendront isomorphes après remplacement de S par $\tilde{S}$, revêtement étale fini d'un ouvert de Zariski-dense de S.

Cette notion d'équivalence interviendra aux prochains paragraphes, en relation avec l'équivalence des D-groupoïdes. On remarquera qu'elle est beaucoup plus restrictive que cette dernière, puisque deux D-groupoïdes très différents peuvent être équivalents, par exemple le groupe additif et le groupe multiplicatif (ou, plus exactement, les D-groupoïdes associés), alors que deux groupes virtuels équivalents deviennent isomorphes par revêtement fini de S.

5. Connexions de Cartan

5.1. Le but est maintenant la description "à la Cartan" des pseudogroupes de Lie (ou "D-groupoïdes"). Je reprends la situation et les notations de I.5.2. En particulier, X est une variété lisse et connexe sur $\mathbb{C}$, et $Z = \{Z_k\}$, $Z_k \subset J_k^*(X)$ est un D-groupoïde sur X. Quitte à remplacer X par un ouvert Zariski-dense, on suppose vérifiées les propriétés I.5.2.iv) et I.5.3.i) et ii). En particulier Z_0 est une relation d'équivalence sur X. Quitte à restreindre encore X, on peut supposer qu'il existe S lisse et connexe et une surjection lisse $\pi : X \to S$ telle qu'on ait $Z_0 = X \underset{S}{\times} X$. Par analogie avec le cas des feuilletages, on appellera S la "variété des intégrales premières" (en se référant aux fonctions sur S) ou encore la "variété des paramètres" (en se référant à ses points). On note p (resp. q) la dimension de X (resp. S) et l'on pose $r = p - q$.

5.2. Dans ce paragraphe-ci, on s'intéresse seulement au cas particulier où Z est engendré par Z_0 (i.e. les Z_k sont les prolongements successifs de Z_0).

On désigne par $\Pi_k(S, p)$, en abrégé Π_k l'espace des jets inversibles d'applications $S \times \mathbb{C}^r \to X$, de source sur $S \times \{0\}$, commutant avec les projections des deux membres sur S. Soit $t_k : \Pi_k \to X$ la projection but. Par hypothèse, la projection source $\Pi_k \to S$ coïncide avec $\pi \circ t_k$; on la notera $\bar{\omega}_k$ (en omettant le k s'il n'y a pas d'ambiguïté). Avec les notations du §4, Π_k est (au-dessus de S) un Γ_k-fibré principal à droite sur X. Quitte à restreindre X et S on peut supposer que S (resp. X) est un revêtement fini étale d'un ouvert Zariski-dense $U \subset \mathbb{C}^q$ (resp. $V \subset \mathbb{C}^p = \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^r$), le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^r = \mathbb{C}^p \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & \mathbb{C}^q \end{array}$$

étant commutatif. On note $s_1, \ldots, s_q$ (resp. $x_1, \ldots, x_r$) les coordonnées de $\mathbb{C}^q$ (resp. $\mathbb{C}^r$). Soit Π'_k le fibré obtenu en remplaçant S par $\mathbb{C}^q$ et X par $\mathbb{C}^p$. Avec des notations évidentes, les points de Π'_k sont paramétrés par les $(s, x, x_{j,\alpha})$

avec $1 \leq |\alpha| \leq k$, $\alpha = (\beta, \gamma)$, $\beta \in \mathbb{N}^q$, $\gamma \in \mathbb{N}^r$, avec (x_{j,ε_k}) inversible, ε_k l'indice $\beta = 0$, $\gamma = \varepsilon_k$. (Moralement, les β représentent les dérivées partielles en s, et les γ les dérivées partielles par rapport aux autres variables.) D'autre part, on a $\Pi_k = X \underset{\mathbb{C}^p}{\times} \Pi'_k$.

Dans le contexte présent, on appellera "suite de Godbillon-Vey d'ordre k" une collection de formes $\pi_{i,\alpha} \in \Gamma(X, \Omega^1_X)$ avec $1 \leq i \leq p$, $|\alpha| \leq k$, vérifiant les conditions suivantes, à comparer avec 3.7.

i) Pour $1 \leq i \leq q$, $\pi_{i,0} = ds_i$, et $\pi_{i,\alpha} = 0$ pour $|\alpha| \geq 1$.

ii) Les $\pi_{i,0}$ forment une base de $\Gamma(X, \Omega^1_X)$.

iii) Les formules de Godbillon-Vey I.7.1 sont vérifiées pour $|\alpha| \leq k-1$.

Comme au §3, on introduit de nouvelles variables u_i, v_j, avec $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq r$; pour une suite de Godbillon-Vey d'ordre infini $\{\pi_{i,\alpha}\}$, on pose

$$\Omega_j = \sum \pi_{j+q,\alpha} \frac{u^\beta}{\beta!} \frac{v^\gamma}{\gamma!}, \qquad \alpha = (\beta, \gamma)$$

$$\tilde{\Omega} = \sum \frac{\partial}{\partial u_i} \otimes (du_i + ds_i) + \sum \frac{\partial}{\partial v_j} \otimes (dv_j + \Omega_j).$$

On a alors la proposition suivante.

Proposition 5.3. – *Les suites de Godbillon-Vey d'ordre k sont en bijection avec les sections sur X de Π_{k+1}.*

Cette proposition est une variante de I.7.ii), et se démontre de la même manière. J'omets les détails.

La suite associée à une section donnée s'explicite facilement. Je l'écris pour simplifier dans le cas $k = \infty$.

i) On vérifie que la section correspondant à la suite $\tilde{\Omega}$, avec $\Omega_j = dx_j$ est donnée par $x_{j,\varepsilon_k} = \delta_{j,k}$, $x_{j,\alpha} = 0$ dans les autres cas.

ii) On passe de là au cas général : la section $(s, x) \mapsto x_{j,\alpha}(s, x)$ correspond, avec les notations du §3, à la transformation $F : s \mapsto s$, $x \mapsto x$, $u_i \mapsto u_i$, $v_j = V_j(s, x, u, v)$, où l'on a $V_j = \sum\limits_{|\alpha| \geq 1} x_{j,\alpha} \frac{u^\beta}{\beta!} \frac{v^\gamma}{\gamma!}$, $\alpha = (\beta, \gamma)$ [on note abusivement (s, x) un point de X].

La suite associée à cette section est alors donnée par $\tilde{\Omega} \circ F$; en écrivant les $\frac{\partial}{\partial u_i}$ et les $\frac{\partial}{\partial v_j}$ en ligne et les différentielles en colonne on a, en abrégé

$$\tilde{\Omega} \circ F = \frac{\partial}{\partial u} \otimes (du + ds) + \frac{\partial}{\partial v} \otimes dv + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial V}{\partial v} \right)^{-1}$$

$$\otimes \left[\left(\frac{\partial V}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial u} \right) ds + dx + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right]. \tag{5.4}$$

Proposition 5.5. – *Pour $k \geq 0$, il existe sur Π_{k+1} une forme vectorielle $\sigma_k = \{(\sigma_k)_{i,\alpha}\}$, $|\alpha| \leq k$ et une seule ayant la propriété suivante.*

Pour toute section G de $\Pi_{k+1} \to X$, la restriction $\sigma_k \circ G$ est égale à la forme de Godbillon-Vey donnée par 5.3.

La proposition est immédiate ; l'unicité est évidente et l'existence se voit en substituant dans 5.4 des variables indépendantes $x_{j,\alpha}$ aux fonctions $x_{j,\alpha}(s,x)$ qu'on a considéré (ceci, pour $k = \infty$; on redescend à k fini de manière évidente).

Explicitement ; posons ici $\bar{V}_j = \sum x_{j,\alpha} \frac{u^\beta}{\beta!} \frac{v^\gamma}{\gamma!}$ avec $\alpha = (\beta,\gamma)$, avec (x_{j,ε_k}) inversible comme plus haut, et posons $\delta\bar{V}_j = \sum dx_{j,\alpha} \frac{u^\beta}{\beta!} \frac{v^\gamma}{\gamma!}$; alors, à l'ordre infini, les $\sigma_{j+q,\alpha}$ sont les coefficients en $\frac{\partial}{\partial v}$, u, v de $\bar{\Omega}$, avec

$$\bar{\Omega} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial v}\right)^{-1} \otimes \left[-\frac{\partial \bar{V}}{\partial u}\, ds + \delta \bar{V}\right], \qquad \bar{V} = (\bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_n)^T \tag{5.6}$$

(j'omets les autres termes dans 5.4, qui donnent les termes évidents $\sigma_{i,\alpha}$, $i \leq q$).

5.7. Une autre manière de dire ce qui précède est la suivante. Je reprends les notations $\Lambda^*(S,p) = \Lambda^*$ et Λ^*_k des sections précédentes. Alors σ_k définit une application, notée encore $\sigma_k : \Lambda^*_k \to \varpi_* \Omega^1_{\Pi_{k+1}}$ (comme on travaille "à rétrécissement près" de S, on pourrait se contenter de regarder les sections globales $\Gamma(S, \Lambda^*_k) \to \Omega^1(\Pi_{k+1})$, mais peu importe). Ces applications s'induisent pour donner une application $\sigma : \Lambda^* \to \varpi_* \Omega^1_{\Pi_\infty}$.

5.8. Le point essentiel consiste maintenant en une définition "intrinsèque" de σ ; ceci permettra, au prochain paragraphe, de l'utiliser dans l'étude des D-groupoïdes quelconques paramétrés par S. La construction qui suit, un peu longue, demande quelques rappels. Dans le cas transitif $S = p^t$, elle est équivalente à la construction de la "forme fondamentale sur les espaces de repères" de Guillemin-Singer-Sternberg [27], [59] ; cf. 5.10.

5.8.1. Soit $Y \to X$ un morphisme lisse et surjectif de variétés lisses. Je rappelle (cf. I.7) qu'une connexion au sens d'Ehresmann est une section θ de l'application tangente $p' : TY \to p^{-1}TX$. Il est équivalent de se donner un relèvement noté encore θ de la projection $\Omega^1_Y \to \Omega^1_{Y/X}$ des formes sur Y dans les formes relatives. La condition d'intégrabilité (ou de platitude) s'exprime ainsi : $\forall\, \omega \in \Omega^1_{Y/X}$, $d\sigma(\omega)$ est dans l'idéal différentiel engendré par $\sigma\,\Omega^1_{Y/X}$ (une autre expression, en termes de projecteurs, est donnée loc. cit.). Alors $\sigma(\Omega^1_{Y/X})$ définit un feuilletage de Y transverse à la projection $Y \to X$. D'où le nom de "fibrés feuilletés" donné souvent aux connexions d'Ehresmann.

5.8.2. Soient encore X et Y deux variétés lisses, et soit $J_k(X,Y)$ l'espace des jets d'ordre k ($0 \leq k \leq +\infty$) d'applications $X \to Y$; on le munit des projections $s =$ source (sur X) et $t =$ but (sur Y).

Alors $J_\infty(X,Y) \xrightarrow{s} X$ est muni d'une connexion canonique en un sens un peu plus général que le précédent [i.e. on a remplacé la variété Y par la provariété $J_\infty(X,Y)$].

Cette connexion, classique, se définit par exemple ainsi : soient x_i $(1 \leq i \leq n)$ et y_j $(1 \leq j \leq p)$ des coordonnées étales sur X (resp. Y) ; et soient $(x, y, y_{j,\alpha})$ les coordonnées sur $J_\infty(X,Y)$ ($x \in X$, $y \in Y$, $y_{i,\alpha} \in \mathbb{C}$, avec $\alpha \in N^n$, $1 \leq |\alpha|$). Alors on prend $\theta(d_{Y/X}\, y_{j,\alpha}) = dy_{j,\alpha} - \sum y_{j,\alpha+\varepsilon_i}\, dx_i$.

Par restriction à $J_{k+1}(X,Y)$, on trouve une application $\theta_k : p^*\, \Omega^1_{J_k/X} \to \Omega^1_{J_{k+1}}$, p la projection $J_{k+1} \to J_k$, application connue sous le nom de "structure de contact canonique" de J_{k+1} (voir aussi l'introduction).

5.8.3. Revenant à la situation considérée au début de ce paragraphe, on applique d'abord la construction précédente aux $J_k(S \times \mathbb{C}^r, X)$, en se restreignant aux sous-espaces $J^*_k(S \times \mathbb{C}^r, X)$ des jets inversibles $(1 \leq k \leq +\infty)$.

On se restreint ensuite à $J^*_{k,S}(S \times \mathbb{C}^r, X) = \mathbb{C}^r \times \Pi_k$, espace des jets inversibles commutant aux projections sur S des deux membres. On obtient ainsi une application

$$\theta_k : p^*\, \Omega^1_{J^*_{k,S}(S\times\mathbb{C}^r,X)/S\times\mathbb{C}^r} \longrightarrow \Omega_{J^*_{k+1,S}(S\times\mathbb{C}^r,X)}$$

avec p la projection $J^*_{k+1} \to J^*_k$ comme ci-dessus.

5.8.4.

i) On restreint l'application précédente aux formes relatives invariantes sous l'action à gauche de $J^*_{k+1,S}(X,X)$, espace des jets inversibles de X dans X commutant aux projections sur S.

Cette action se définit ainsi (cf. [27] ou [59]) : un jet $\gamma \in J^*_{k+1,S}(X,X)$ de source a et de but b envoie par composition les éléments de $J^*_{k+1,S}(S\times\mathbb{C}^r, X)$ de but a dans ceux de but b. Soit α un tel jet, et $\beta = \gamma(\alpha)$ son image. En relevant par exemple γ en un germe analytique $\tilde{\gamma}$, on envoie un voisinage de α dans un voisinage de β. Prenant l'application tangente relative et sa restriction aux jets d'ordre k, on vérifie que cette dernière application au point $p(\alpha)$ ne dépend que de γ (p, la projection $J^*_{k+1} \to J^*_k$ comme ci-dessus). De plus cette action est algébrique. On passe alors de façon évidente aux formes relatives.

ii) On se restreint finalement à $S \times \{0\} \subset S \times \mathbb{C}^r$. Alors le premier membre s'identifie au sous-espace Λ'^*_k de Λ^*_k engendré par les $\pi_{j,\alpha}$, $j \geq q+1$ (notations de 3.7). [Appliquer la construction précédente à X remplacé par la somme disjointe $S \times \mathbb{C}^r \sqcup X$, et identifier les formes invariantes à gauche à leur valeur initiale au-dessus de l'identité.]

D'autre part la restriction de $J^*_{k+1,S}(S \times \mathbb{C}^r, X)$ à $S \times \{0\}$ s'identifie à Π_{k+1}, d'où une application $\Lambda'^*_k \to \varpi_*\, \Omega^1_{\Pi_{k+1}}$. Cette application s'étend de façon immédiate à Λ^*_k en envoyant Ω^1_S dans son image réciproque par ϖ. D'où finalement une application que je noterai encore $\theta_k : \Lambda^*_k \to \varpi_*\, \Omega^1_{\Pi_{k+1}}$.

5.8.5. On a l'égalité $\theta_k = \sigma_k$, avec σ_k défini par 5.5. J'indique rapidement la vérification. On peut supposer pour les calculs que S est un ouvert de $\mathbb{C}^q$, et que X est à la source (resp. au but) un ouvert de $\mathbb{C}^p = \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^r$, de coordonnées $s = (s_1, \dots, s_q)$ et $x = (x_1, \dots, x_n)$ [resp. $y = (y_1, \dots, y_n)$]. Le cas général se déduit de ce cas particulier en prenant une situation étale au-dessus de la précédente ; ceci donne pour les espaces de jets, et de repères, des produits fibrés, qui ne changent que les coordonnées de degré $|\alpha| = 0$, donc ne changeront essentiellement rien aux formules qui vont suivre.

Dans cette situation particulière, un point de $J^*_{k+1,S}(X, X)$ est une collection $(s_i, x_j, y_{j,\alpha})$, $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq r$, $\alpha = (\beta, \gamma) \in \mathbb{N}^q \times \mathbb{N}^r$, $|\alpha| \leq k+1$. Alors les classes des $dy_{j,\alpha}$ relatives à la projection source, notées $\bar{d}y_{j,\alpha}$, donnent une base des formes relatives de $J^*_{k,S}/X$ (on se restreint ici à $|\alpha| \leq k$).

Pour simplifier un peu les notations, j'écris les choses pour $k = \infty$. On a

$$\theta\, \bar{d}y_{j,\alpha} = dy_{j,\alpha} - \sum y_{j,\beta+\varepsilon_i,\gamma}\, ds_i - \sum y_{j,\beta,\gamma+\varepsilon_k}\, dx_k\,.$$

Posons comme en 5.6

$$\bar{V}_j = \sum y_{j,\alpha}\, \frac{u^\beta}{\beta!}\, \frac{v^\gamma}{\gamma!} \quad \text{et} \quad \delta\, \bar{V}_j = \sum dy_{j,\alpha}\, \frac{u^\beta}{\beta!}\, \frac{v^\gamma}{\gamma!}\,;$$

on écrit $\bar{\delta}\, \bar{V}_j$ pour la formule analogue avec les $\bar{d}y_{j,\alpha}$. La formule précédente s'écrit ainsi

$$\theta\, \bar{\delta}\, \bar{V}_j = \sum \theta\, \bar{d}y_{j,\alpha}\, \frac{u^\beta}{\beta!}\, \frac{v^\gamma}{\gamma!} = \delta\, \bar{V}_j - \sum \frac{\partial\, \bar{V}_j}{\partial\, u_i}\, ds_i - \sum \frac{\partial\, \bar{V}_j}{\partial\, v_j}\, dx_\ell\,.$$

Posons pour abréger $\bar{V} = (\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_r)$. Avec des notations évidentes, ceci s'écrit encore

$$\theta\, \bar{\delta}\, \bar{V} = \delta\, \bar{V} - \frac{\partial\, \bar{V}}{\partial\, u}\, ds - \frac{\partial\, \bar{V}}{\partial\, v}\, dx\,,$$

ou encore

$$\theta \left(\frac{\partial\, \bar{V}}{\partial\, v}\right)^{-1} \bar{\delta}\, \bar{V} = \left(\frac{\partial\, \bar{V}}{\partial\, v}\right)^{-1} \left[\delta\, \bar{V} - \frac{\partial\, \bar{V}}{\partial\, u}\, ds\right] - dx\,.$$

Compte tenu de 5.6, le résultat est alors la conséquence du lemme suivant.

Lemme 5.8.6. – *Une base des formes relatives de $\Omega^1_{\Pi_\infty/X}$, invariantes par l'action de $J^*_{\infty,S}(X, X)$, est donnée par les coefficients en $\frac{\partial}{\partial\, v}$, u, v, de la forme vectorielle $\frac{\partial}{\partial\, v} \otimes \left(\frac{\partial\, \bar{V}}{\partial\, v}\right)^{-1} \bar{\delta}\, \bar{V}$.*

Il suffit de démontrer que les coefficients de cette forme sont invariants sous $J^*_{\infty,S}(X, X)$. D'autre part, l'assertion est équivalente à la même assertion "à l'ordre k" pour tout k. Pour prouver cette dernière, on écrit l'action de $J^*_{k+1,S}(X, X)$ sur $\Omega^1_{\Pi_k/X}$:

Soit $\bar{\Phi} : (s, y) \mapsto (s, z)$, $z = \Phi(s, y)$ un germe d'automorphisme (analytique ou formel) de X commutant à la projection sur S. Il agit sur Π_{k+1} de la manière

suivante : soit $\alpha \in \Pi_{k+1}$ défini par ses coordonnées $(s, y_{j,\alpha})$ (avec s, y_0 dans le domaine de définition de Φ) ; on pose encore $\bar{V} = \sum y_{j,\alpha} \frac{u^\beta}{\beta!} \frac{v^\gamma}{\gamma!}$, $\alpha = (\beta, \gamma)$, $|\alpha| \leq k+1$. Le jet transformé par $\bar{\Phi}$ s'obtient en écrivant $\Phi(s+u, y_0+V)$ en développant en série en u et V et remplaçant finalement V par $\bar{V} - y_0$. L'action sur les différentielles relatives, avec les notations antérieures, est donnée par $\bar{\delta}\,\bar{V} \mapsto \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y}\,(s, \bar{V}) \cdot \bar{\delta}\,\bar{V}$. Le lemme résulte facilement de là.

5.9. Les propriétés de base de σ sont les suivantes.

i) L'espace Π_k, muni de la projection but t_k sur X est (au-dessus de S) un fibré principal sur X de groupe Γ_k. D'autre part la cogèbre des formes invariantes à gauche sur Γ_k s'identifie à Λ_k^*/Λ_0^*. Des propriétés générales des fibrés principaux, on déduit alors un morphisme $\tau_k : \Lambda_k^*/\Lambda_0^* \to \varpi_*\,\Omega^1_{\pi_k/X}$ ($\varpi = \pi \circ t_k$, comme en 5.2).

Ce morphisme est un parallélisme sur les fibres de $\pi_k \to X$, i.e. donne un isomorphisme en chaque point $a \in \Pi_k$ de $T^*_{\Pi_k/X}(a)$ avec $\Lambda_k^*/\Lambda_0^*(b)$, $b = \varpi(a)$.

[Cette flèche classique se construit ainsi : l'action à droite de Γ_k sur Π_k donne une action infinitésimale de son algèbre de Lie relative sur S, $\mathrm{Lie}\,\Gamma_k$, qui définit un morphisme de cette algèbre dans les champs verticaux de $\Pi_k \to X$. L'application τ_k en est la contragrédiente.]

Le résultat est alors le suivant : la flèche $\sigma_k : \Lambda_k^* \to \varpi_*\,\Omega^1_{\Pi_{k+1}}$ donne par passage au quotient une flèche $\bar{\sigma}_k : \Lambda_k^*/\Lambda_0^* \to \varpi_*\,\Omega^1_{\Pi_{k+1}/X}$; alors $\bar{\sigma}_k$ est le composé de τ_k et de l'image réciproque évidente $\varpi_*\,\Omega^1_{\Pi_k/X} \to \varpi_*\,\Omega^1_{\Pi_{k+1}/X}$.

La démonstration est analogue à celle de 5.8.5 et je l'omets.

ii) Soit $a \in \Pi_{k+1}$, et soit b (resp. c) sa projection dans Π_k (resp. S). Alors σ_k est un isomorphisme $\Lambda_k^*(c) \xrightarrow{\sim} T_b^*\,\Pi_k$ (ce dernier étant considéré par image réciproque comme sous-espace de $T_a^*\,\Pi_{k+1}$).

En effet : d'une part l'expression (5.6) de σ_k montre que σ_k envoie $\Lambda_k^*(c)$ dans $T_b^*\,\Pi_k$. D'autre part, le fait que ce soit un isomorphisme résulte de i) et du fait que T_k est un isomorphisme de $\Lambda_k^*/\Lambda_0^*(c)$ avec le cotangent relatif $T_b^*\,\Pi_k/X$.

iii) Le groupe des sections (ou des germes de sections analytiques) de Γ_{k+1} au-dessus de S opère dans Λ_k^* comme il a été vu aux §3 et 4 (= action différentielle d'ordre 1, i.e. action algébrique de $J_1\,\Gamma_{k+1}$). D'autre part son action à droite sur Π_{k+1} donne, dans les mêmes conditions une action à droite sur $\varpi_*\,\Omega^1_{\Pi_{k+1}}$.

Ces deux actions commutent à σ_k. Il suffit de le voir lorsqu'on se restreint aux sections (ou aux sections analytiques) de $\Pi_{k+1} \to X$, i.e. de voir que la bijection (5.3) commute à l'action de Γ_{k+1}. Or l'action de Γ_{k+1} sur Λ_k^* a précisément été définie pour qu'il en soit ainsi.

iv) σ_k commute à l'action de la différentielle extérieure sur Λ_k^* d'une part, sur $\Omega^1_{\Pi_{k+1}}$ d'autre part. Plus précisément, pour α, section de Λ_{k-1}^*, on a $\sigma_k\,d\alpha = d\sigma_k\,\alpha$. Ceci résulte immédiatement de 5.5.

5.10. Voici encore deux propriétés fondamentales de σ. Je garde les notations qui précèdent.

Tout d'abord soit ψ un germe d'automorphisme analytique de X, de source a, commutant à la projection sur S, et soit $j_{k+1}\,\psi$ le germe d'application $X \to J^*_{k+1,S}(X,X)$ qui s'en déduit. Si b est un point de Π_{k+1} de projection a, la composition avec $j_{k+1}\,\psi$ donne un automorphisme de Π_{k+1} défini au voisinage de b. On le notera $\tilde{j}_{k+1}\,\psi$ (en omettant de préciser le point b). On a alors la proposition suivante.

Proposition 5.10.1. – *Soit φ un germe d'automorphisme analytique de Π_{k+1} commutant à la projection sur S. Pour qu'il soit de la forme $\tilde{j}_{k+1}\,\psi$, ψ un germe d'automorphisme analytique de X, il faut et il suffit qu'il laisse fixe σ_k.*

La condition est évidemment nécessaire. La réciproque se démontre par récurrence sur k. Tout d'abord, 5.9.ii) entraîne que φ est fibré pour la projection $\Pi_{k+1} \to \Pi_k$. Soit $\bar{\varphi}$ l'automorphisme de Π_k correspondant. Par hypothèse la récurrence, $\bar{\varphi}$ est de la forme $\tilde{j}_k\,\psi$, ψ un germe d'automorphisme de X, et il suffit de voir qu'on a $\varphi = \tilde{j}_{k+1}\,\psi$. En composant avec ψ^{-1}, on se ramène au cas où ψ est l'identité. En particulier, φ se projette sur X suivant l'identité. Alors 5.3 montre que φ laisse fixes les sections de Π_{k+1}, donc est l'identité.

Je rappelle maintenant ceci : avec les notations de 5.8.2, et en écrivant J_k pour $J_k(X,Y)$, notons $\mathcal{C}_k$ l'image par θ_k de $p^*\,\Omega^1_{J_k/X}$ dans $\Omega^1_{J_{k+1}}$. Appelons $\mathcal{C}_k$ (ou un système de ses générateurs) la "structure de contact canonique" de J_{k+1}. Cette structure est classiquement caractérisée par la propriété suivante : pour qu'un germe analytique $\varphi : X \to J_{k+1}(X,Y)$, section de la projection source, soit de la forme $j_{k+1}\,\psi$, ψ un germe $X \to Y$, il faut et il suffit que $\mathcal{C}_k$ s'annule sur le graphe de φ. Cela s'applique de même à $J^*_{k+1,S}(X,X)$, ou $J^*_{k+1,S}(S \times \mathbb{C}^r, X)$ avec les notations de 5.8.3.

La proposition précédente nous dit donc qu'en un certain sens, la forme $\bar{\sigma}_k - \sigma_k$ sur $\pi_{k+1} \underset{S}{\times} \pi_{k+1}$ est une version "symétrisée entre la source et le but" de la structure de contact.

Il sera aussi utile de "dissymétriser" cette forme, pour retrouver la structure de contact elle-même. Pour cela, on part de l'application $(\alpha, \beta) \mapsto \beta\,\alpha^{-1}$ de $\Pi_{k+1} \underset{S}{\times} \Pi_{k+1}$ dans $J^*_{k+1,S}(X)$, en la composant avec une section u de $\Pi_{k+1} \xrightarrow{t} X$ (une telle section existe, quitte à restreindre X). On obtient alors un isomorphisme $X \underset{S}{\times} \Pi_{k+1} \xrightarrow{\sim} J^*_{k+1,S}(X)$. Notant $\bar{\sigma}_k - \sigma_k \circ u$ la restriction de $\bar{\sigma}_k - \sigma_k$ à $X \underset{S}{\times} \Pi_{k+1}$, on a le résultat suivant.

Proposition 5.10.2. – *Les composantes de l'image dans $J^*_{k+1,S}(X)$ de $\bar{\sigma}_k - \sigma_k \circ u$ engendrent la structure de contact $\mathcal{C}_{k+1}$ de $J^*_{k+1,S}(X)$.*

Soit φ un germe de section analytique de $J^*_{k+1,S}(X) \xrightarrow{s} X$ qui annule $\bar{\sigma}_k - \sigma_k \circ u$; il faut montrer que φ est de la forme $j_{k+1}\,\psi$, ψ un germe inversible $X \to X$.

Soit $\bar{\varphi}$ le relèvement de φ à $X \underset{S}{\times} \Pi_{k+1}$; par hypothèse, $\bar{\varphi}$ annule $\bar{\sigma}_k - \sigma_k \circ u$. La démonstration se fait en deux temps.

i) Le composé de φ (ou $\bar{\varphi}$) avec l'application but est un germe inversible $X \to X$; il suffit par restriction de traiter le cas $k = 1$. Ceci se voit en utilisant, en coordonnées locales, l'expression de σ_1, cas particulier de (5.6). J'omets les détails.

ii) Ceci étant, on prolonge $\bar{\varphi}$ en un germe d'application $\tilde{\varphi}$ de Π_{k+1} dans lui-même, coïncidant avec φ sur l'image de u, et commutant à l'action de Γ_{k+1}. Par i), on voit que c'est un germe d'automorphisme. Par 5.9i) et iii), on voit que $\tilde{\varphi}$ fixe σ_k. On utilise alors 5.10.1 pour conclure.

Voici maintenant la seconde propriété de σ annoncée.

Proposition 5.10.3. – *Soit (au-dessus de S) P_{k+1} un fibré principal sur X de groupe Γ_{k+1}. Pour $0 \leq \ell \leq k$, on note $P_{\ell+1}$ le fibré principal sous $\Gamma_{\ell+1}$ déduit par la projection $\Gamma_{k+1} \to \Gamma_{\ell+1}$. On suppose donné un système projectif $\tau_\ell : \Lambda_\ell^* \to \Omega^1(P_{\ell+1})$, $0 \leq \ell \leq k$ vérifiant* 5.9.i) *à* iv). *Alors il existe un unique système projectif d'isomorphismes $P_{\ell+1} \xrightarrow{\sim} \Pi_{\ell+1}$ qui envoie τ_ℓ sur σ_ℓ ($0 \leq \ell \leq k$).*

L'unicité résulte de 5.10.1. Quitte à remplacer X par un ouvert Zariski-dense, on peut supposer les $P_{\ell+1}$ simultanément trivialisés au-dessus de X [raisonner comme Serre [57] : les $\Gamma_{\ell+1}$ sont tous obtenus à partir d'un groupe linéaire par des extensions unipotentes successives]. On aura donc des isomorphismes $P_{\ell+1} \simeq X \underset{S}{\times} \Gamma_{\ell+1}$. En prenant la restriction de τ_ℓ à $X \times \mathrm{id}$, on obtient une suite de Godbillon-Vey, donc par 5.3 une section de $\Pi_{\ell+1}$. On a donc des isomorphismes $P_{\ell+1} \simeq \Pi_{\ell+1} \simeq X \underset{S}{\times} \Gamma_{\ell+1}$, avec τ_ℓ et σ_ℓ coïncidant sur la section $X \times \mathrm{id}$. On voit alors, en utilisant 5.9.i) et iii), qu'ils coïncident partout.

5.11. Suivant T. Morimoto [50], il est commode dans le cas transitif d'exprimer les propriétés 5.9.i) à iv) en termes de "connexions de Cartan". Je rappelle rapidement de quoi il s'agit. On se donne deux algèbres de Lie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathcal{H} \supset \mathcal{G}$, en supposant que $ad : \mathcal{G} \to \mathcal{G}\ell(\mathcal{H})$ est injectif et s'intègre en une action fidèle $G \to G\ell(\mathcal{H})$, qu'on notera aussi "ad". On se place ici dans un contexte $\mathcal{C}^\infty$, analytique sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou algébrique sur $\mathbb{C}$, peu importe.

Soit X une variété lisse, et $P \to X$ un fibré principal à droite sur X sous G, avec $\dim P = \dim \mathcal{H}$. Par définition, une *connexion de Cartan* relativement à ces données est une forme θ sur P, à valeurs dans $\mathcal{H}$, possédant les propriétés suivantes.

i) La restriction de θ aux fibres de P est la forme de Maurer-Cartan à gauche $g^{-1}\,dg$ (ou, plus exactement, son image canonique dans les fibres de P ; cf. 5.9.i)).

ii) En tout point $a \in P$, θ est un isomorphisme $T_a\,P \simeq \mathcal{H}$.

iii) On a $R_g\,\theta = ad\,g^{-1}\,\theta$ (R, l'action à droite de G sur P).

Soit $\mathcal{H}^*$ le dual de $\mathcal{H}$; il revient au même de se donner une application $\tilde{\theta} : \mathcal{H}'^* \to \Omega^1(P)$ vérifiant les propriétés déduites de i), ii), iii) de façon évidente.

La courbure de θ, ou $\tilde{\theta}$, se définit ainsi : on munit $\mathcal{H}^*$ de la différentielle *duale* du crochet de $\mathcal{H}$. Alors la courbure est donnée par la formule classique $d\tilde{\theta} - \tilde{\theta}d$. En particulier, la courbure est nullle (= la connexion est plate) si $\tilde{\theta}$ commute à d.

L'exemple canonique est le suivant : G est un sous-groupe de Lie d'un groupe de Lie H, les algèbres de Lie respectives (= les champs invariants à gauche) étant $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$. On prend $P = H$, $X = H/G$, et on prend pour θ la forme de Maurer-Cartan à gauche $h^{-1}dh$. Il revient au même de prendre $\tilde{\theta}$ = l'identité sur les formes invariantes à gauche de H.

Pour simplifier la terminologie, j'appelle "groupe virtuel" une paire $(\mathcal{H}, G)$ comme ci-dessus ($\mathcal{G} = \operatorname{Lie} G$ est sous-entendu), ou encore la paire $(\mathcal{H}^*, G)$. Les connexions de Cartan seront toujours supposées plates ; j'abrègerai quelquefois en disant "réalisation de $(\mathcal{H}^*, G)$" au lieu de "connexion de Cartan relative à $(\mathcal{H}^*, G)$".

Je reviens maintenant à la situation considérée au §5, et je suppose d'abord qu'on soit dans le cas transitif $S = p^t$. Alors Λ est l'algèbre des champs formels sur $(\mathbb{C}^p, 0)$ avec la loi de crochet changée de signe. La sous-algèbre Λ^0 des champs nuls en 0 s'intègre en Γ, le groupe des automorphismes formels de $((\mathbb{C}^p, 0)$. Quitte à étendre les notions ci-dessus au contexte plus général des limites projectives, la paire (Λ, Γ) est un groupe virtuel au sens qui vient d'être dit, et les propriétés 5.9i) à iv) expriment que σ est une connexion de Cartan (plate, comme il se doit) pour ce groupe virtuel. Incidemment, le mot "virtuel" s'impose ici : il n'y a aucune chance de trouver un groupe correspondant à l'algèbre de Lie Λ.

5.12. Par extension au cas intransitif, cela m'amène à introduire la terminologie qui va suivre, dans laquelle "groupe virtuel" est entendu au sens précis du §4, et non plus au sens plus ou moins intuitif qui précède. On fera *attention qu'ici, le terme "connexion de Cartan" est entendu en un sens général, qui n'est pas le sens habituel.*

On se donne donc $\pi : X \to S$ comme en 5.1. On se donne encore

a) Un groupe virtuel (M, G), avec M une $(\mathbb{C}, S)$ cogèbre de Lie filtrée, $\dim M_0 = \dim X$.

b) Au-dessus de X/S, un G-fibré principal à droite P, i.e. un système projectif de G_k fibrés principaux (on suppose les P_k lisses, les flèches $P_k \to P_{k-1}$ submersives surjectives et lisses, et bien sûr $P_0 = X$).

c) Notant t_k (resp. $\varpi_k = \pi \circ t_k$) les projections $P_k \to X$ (resp. $P_k \to S$), on se donne un système projectif $\theta = \{\theta_k\}$ d'application $M_k \to \varpi_{k+1,*}\, \Omega^1_{P_{k+1}}$ (dans la suite, j'écrit ϖ pour ϖ_k).

Définition 5.12.1. – *On dit que (P, θ) est une connexion de Cartan (sous-entendu : plate), ou une réalisation de (M, G) si les propriétés* 5.9.i) *à* iv) *sont vérifiées par θ.*

Pour éviter toute ambiguïté, je reprécise ce que cela signifie.

i) Si τ_k désigne l'application canonique $(M_k/M_0) = (\mathrm{Lie}\, G_k)^* \to \varpi_*\, \Omega^1_{P_k/X}$, alors θ_k définit par passage au quotient une application canonique $\bar\theta_k$: $M_k/M_0 \to \varpi_*\, \Omega^1_{P_{k+1}/X}$ qui est composée de τ_k et de l'application canonique $\varpi_*\, \Omega^1_{P_k/X} \to \varpi^*\, \Omega^1_{P_{k+1}/X}$.

ii) Pour tout $a \in P_{k+1}(\mathbb{C})$, de projection b dans P_k et c dans S, θ_k est un isomorphisme $M_k(c) \xrightarrow{\sim} T^*_b(P_k)$ (considéré de façon évidente comme sous-espace de $T^*_a\, P_{k+1}$).

A noter qu'il suffit de supposer ii) pour $k = 0$ [en utilisant i), le cas général s'en déduit par récurrence sur k].

iii) θ_k commute à l'action sur M_k et P_{k+1} des sections sur S de G_{k+1}.

iv) $\theta = \{\theta_k\}$ commute à l'action de d.

5.13. Dans le cas où P est trivial, i.e. où $P \simeq X \underset{S}{\times} G$, on a ceci :

a) La restriction de θ à $X \times \{e\}$ détermine θ. Ceci se voit à partir de i) et iii).

b) Réciproquement, donnons-nous une application $\bar\theta : M \to \pi_*\, \Omega^1_X$ commutant à d et telle que $\bar\theta(M_0)$ soit une base de $\pi_*\, \Omega^1_X$. Il existe alors une connexion de Cartan θ unique à valeurs dans $P = X \underset{S}{\times} G$ dont la restriction à $X \times \{e\}$ soit $\bar\theta$.

Cela se voit ainsi. On traite d'abord le cas où $M = \Lambda^*(S, p)$ (notations du §3), en utilisant 5.3. Soit $\tilde\theta$ l'application obtenue $\Lambda^*(S,p) \to \Omega^1(X \underset{S}{\times} \Gamma)$, $\Gamma = \Gamma(S, p)$ (notations du §4) ; cette application s'explicite par une variante de 5.4. Dans le cas général, soit $\bar\theta'$ l'application obtenue à partir de $\bar\theta \circ \mu$, μ une présentation $\Lambda^*(S,p) \to M$. Alors μ donne une injection $G \to \Gamma$, et on vérifie, en utilisant i) et iii) que la restriction de $\tilde\theta'$ à $\Omega^1(X \underset{S}{\times} G)$ donne le θ cherché. (On l'explicite par restriction de $\tilde\theta'$. Je n'explicite pas la formule générale ici ; je me contenterai de donner des exemples au chapitre IV.)

6. Connexion de Cartan (suite)

Je reprends la situation considérée en I.5.2 et II.5.1. Je vais donner ici la description "à la Cartan" des D-groupoïdes, avec toutefois une restriction : on suppose que la projection $\pi : X \to S$ admet une section λ. On verra au §7 comment se débarrasser de cette restriction.

Moyennant cette hypothèse, on se ramène des groupoïdes aux espaces de repères de la manière suivante.

6.1. On fixe un isomorphisme du voisinage infinitésimal d'ordre infini $(X, \lambda(S))^\wedge$ de $\lambda(S)$ dans X avec $(S \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\})^\wedge$. L'existence d'un tel isomorphisme se

voit par récurrence sur les voisinages infinitésimaux d'ordre k, par un argument de trivialisations successives analogue à celui employé en 4.6.1.

Avec les notations de 5.8.4 l'isomorphisme précédent identifie $\Pi_k(S,p)$, en abrégé Π_k, avec le sous-espace de $J^*_{k,S}(X,X)$ formé des éléments de source $\in \lambda(S)$.

6.2. Soit alors $Z = \{Z_k\}$, $Z_k \subset J^*_{k,S}(X,X)$ un pseudogroupe de Lie dont S soit la variété des intégrales premières (on a donc $Z_0 = X \underset{S}{\times} X$). On fait bien sûr les hypothèses de régularité de 5.1. On va lui associer une connexion de Cartan au sens de 5.10.1, de la manière suivante.

i) Le groupe admissible $G = \{G_k\}$ est la restriction de Z_k aux éléments de source et *but* sur $\lambda(S)$. Moyennant l'isomorphisme 6.1, c'est un sous-groupe de $\Gamma(S,p)$ (en abrégé Γ), et G_k un sous-groupe algébrique sur S de Γ_k.

ii) De même, le sous-espace de Z_k des éléments de source sur $\lambda(S)$ s'identifie à un sous-fibré principal P_k de Π_k, de groupe G_k. On note P le système projectif $\{P_k\}$.

iii) La $(\mathbb{C}, S)$ cogèbre de Lie $M = \{M_k\}$ est le quotient de $\Lambda^*(S,p)$ obtenu de la manière suivante.

On a $\Lambda^* = \Lambda'^* \oplus \Omega^1_S$, Λ'^* le sous-espace engendré par les $\pi_{j,\alpha}$, $j \geq q+1$ (cf. 3.7) ; cette algèbre est duale de l'algèbre des champs de vecteurs $\sum a_j \frac{\partial}{\partial v_j}$ (cf. 4.1) les a_j étant ici des germes sur S de fonctions sur le complété formel $(S \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\})^\wedge$. [Contrairement à 4.1.ii) les a_j ne sont pas supposés nuls sur $S \times \{0\}$; par contre, la convention de signe de loc. cit. est gardée.]

Cette algèbre s'identifie à la restriction à S de l'algèbre de Lie $LJ^*_{\infty,S}$ [notations de I.5 ; le crochet de Lie considéré ici est le crochet fibre par fibre, noté $[\ ,\ ]^\wedge$ dans I.5.6. C'est le seul crochet qui interviendra dans ce chapitre].

On considère alors la sous-algèbre de Lie $L\,Z \mid S$ de la précédente. C'est ici une algèbre de Lie car le crochet $[\ ,\ ]^\wedge$ se restreint à $L\,Z$. Voir par exemple [37], proposition 4.4. On prend $M' =$ le dual topologique de $L\,Z \mid S$ (i.e. la limite inductive des duals des $L\,Z_k$). Et on prend finalement $M = M' \oplus \Omega^1_S$.

iv) On vérifie que la paire (M,G) est un groupe virtuel. On vérifie aussi, à partir de la définition 5.12.1 que la restriction de σ à P est une connexion de Cartan pour (M,G,P). On notera θ cette restriction ; on notera aussi θ_k sa restriction $M_k \to \varpi_*\,\Omega^1_{P_{k+1}}$ (ϖ la projection $P_{k+1} \to S$, comme ci-dessus).

Remarque 6.3. – Si l'on part d'une autre section λ', on obtient une paire (M',G') qui n'est pas nécessairement isomorphe à (M,G), mais lui est seulement équivalente au sens de 4.6. L'équivalence s'obtient en se restreignant aux flèches de Z de source sur $\lambda(S)$ et de but sur $\lambda'(S)$.

6.4. Le but est maintenant d'exprimer le système différentiel $Z = \{Z_k\}$ en fonction de (M,G,P,θ). Observons d'abord ceci : soit $\alpha \in J^*_{k,S}(X)$, de source b, de but c. Par composition, α donne une application $\Pi_{k,b} \to \Pi_{k,c}$ commutant

à l'action de Γ_k et réciproquement. Par restriction, on trouve une bijection "éléments de $Z_{k;b,c}$" $\leftrightarrow$ "applications de $P_{k,b}$ dans $P_{k,c}$ commutant à l'action de G_k". Par conséquent, la donnée de Z_k est équivalente à celle de P_k comme G_k-fibré, *muni de l'injection* $P_k \to \Pi_k$.

Les étapes suivantes consistent à "oublier" cette injection, et à la remplacer par la donnée de θ_{k-1} (pour me conformer aux notations antérieures, j'écrirai plutôt ici P_{k+1} et θ_k). Le premier résultat généralise 5.10.1. La notation $\tilde{j}_{k+1}\,\psi$ a le même sens que dans cette proposition, avec Π_{k+1} remplacé par P_{k+1}.

Proposition 6.5. – *Soit φ un germe d'automorphisme analytique de P_{k+1} commutant à la projection sur S. Pour que φ soit de la forme $\tilde{j}_{k+1}\,\psi$, ψ un germe d'automorphisme de X, il faut et il suffit qu'il fixe θ_k.*

La nécessité est évidente. La suffisance se voit par récurrence sur k. Tout d'abord, on voit comme en loc. cit. que φ est fibré pour la projection $P_{k+1} \to P_k$. Par hypothèse de récurrence, on peut supposer que la restriction $\bar{\varphi}$ de φ à P_k est de la forme $\tilde{j}_k\,\psi$, ψ un germe d'automorphisme de X. Il faut voir qu'on a $\varphi = \tilde{j}_{k+1}\,\psi$. Soit a la source de ψ. Considérons l'application $P_{k+1} \underset{S}{\times} P_{k+1} \to Z_{k+1}$ définie par $(\alpha, \beta) \mapsto \beta\,\alpha^{-1}$. Soit u un germe en a de section $X \to P_{k+1}$; on en déduit une flèche $X \underset{S}{\times} P_{k+1} \to Z_{k+1}$ qui est un isomorphisme. D'après 5.10.2 l'image dans Z_{k+1} de $\theta_k \circ u - \bar{\theta}_k$ ($\bar{\theta}_k$ = la forme θ_k sur la seconde composante) est la structure de contact de Z_{k+1}. Par hypothèse, l'application $x \mapsto \varphi \circ u(x) \cdot u(x)^{-1}$, section de la projection source $Z_{k+1} \to X$ annule cette structure de contact, donc elle est égale à $j_{k+1}\,\psi$. Comme ceci est vrai pour tout u, on obtient facilement le résultat cherché.

Sous les hypothèses de la proposition précédente, ψ n'est pas quelconque : en effet l'assertion $\tilde{j}_{k+1}\,\psi = \varphi$ équivaut au fait que $j_{k+1}\,\varphi$ est une section de Z_{k+1} au-dessus de X (pour la projection source) ; autrement dit, ψ est une *solution* de Z_{k+1}. Si k est assez grand pour que Z_{k+1} engendre Z (i.e. les Z_ℓ sont les prolongements de Z_{k+1}, pour $\ell \geq k+1$), cela voudra dire que ψ est une solution de Z. Cette proposition est donc une manière d'exprimer les solutions d'un D-groupoïde comme les transformations fixant une certaine structure différentielle.

6.6. Partons maintenant d'un groupe virtuel (M, G) et d'une (M, G)-connexion de Cartan (P, θ) au-dessus de $X \xrightarrow{\pi} S$, au sens de la définition 5.12.1. On *ne suppose plus ici l'existence d'une section de* π.

On va voir qu'à ces données, on peut associer un pseudogroupe bien déterminé $Z = \{Z_k\}$, $Z_k \subset J^*_{k,S}(X, X)$. Dans le cas considéré en 6.2, ce sera le pseudogroupe dont on est parti pour construire les données (M, G, P, θ). On procède pour cela de la manière suivante.

i) On fixe une présentation $\mu : \Lambda^*(S, p) \to M$. On fixe une injection $\mu' : G \to \Gamma$. On étend alors le groupe structural de P. Soit $P' = P \overset{G}{\times} \Gamma$ le principal sous Γ obtenu. On va voir que θ s'étend de manière unique en une (Λ^*, Γ) connexion de

Cartan sur P'. Par 5.10.3, on aura donc un isomorphisme $P' \simeq \Pi$ qui transforme θ' en σ.

Pour cela supposons d'abord que P admette une section $\lambda : X \to P$; alors, le résultat suit de 5.13.

Si P n'admet pas de section, on prend une section étale qu'on peut par exemple supposer galoisienne. On raisonne alors comme ci-dessus et on conclut par un argument de descente galoisienne que je ne détaille pas.

ii) L'application $\Pi \underset{S}{\times} \Pi \to J^*_{\infty,S}$ définie par $(\alpha, \beta) \mapsto \beta\,\alpha^{-1}$ donne un isomorphisme $\Pi \underset{S}{\times} \Pi/\Gamma \xrightarrow{\sim} J^*_{\infty,S}$. Par restriction, on obtient un isomorphisme $P \underset{S}{\times} P/G \xrightarrow{\sim} Z$, où $Z = \{Z_k\}$, Z_k un sous-groupoïde de $J^*_{k,S}$.

Pour montrer que Z est un pseudogroupe de Lie, il suffit alors de prouver l'assertion suivante.

Proposition 6.7. – *Avec les notations précédentes, pour chaque k, Z_{k+1} est contenu dans le prolongement de Z_k.*

Définition 6.8. – *Avec les notations qui précèdent, on dira que Z est le pseudogroupe défini par (M, G, P, θ).*

La démonstration de 6.7 est un exercice de traduction "systèmes différentiels" $\leftrightarrow$ "systèmes différentiels extérieurs". Voici les détails.

Considérons, d'une manière générale, deux variétés lisses X et Y, et notons $J_k(X, Y)$ la variété des jets d'ordre k d'applications $X \to Y$. Considérons une famille $Z_0, \ldots, Z_k$ de sous-variétés localement fermées (= fermées dans un ouvert de Zariski) des $J_\ell(X, Y)$, $0 \leq \ell \leq k$, avec les propriétés suivantes : les Z_ℓ sont lisses, l'image de Z_ℓ dans $J_{\ell-1}(X, Y)$ est $Z_{\ell-1}$; enfin les projections $Z_\ell \to Z_{\ell-1}$, sont lisses.

Pour $\ell \leq k$ fixé, je rappelle que le *prolongement* de Z_ℓ est défini ainsi : si $\mathcal{I}_\ell$ est le faisceau d'idéaux (d'un ouvert dense U) de $J_\ell(X, Y)$ définissant Z_ℓ, alors $\mathrm{pr}_1 Z_\ell$ est défini, dans l'image inverse de U dans $J_{\ell+1}(X, Y)$, par l'idéal $\mathrm{pr}_1 \mathcal{I}_\ell$; celui-ci est défini, en coordonnées locales étales x_i sur X, y_j sur Y, par $\mathcal{I}_\ell + \sum D_i \mathcal{I}_\ell$, avec $D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial f}{\partial y_{j,\alpha}} y_{j,\alpha+\varepsilon_i}$, $|\alpha| \leq \ell$ (cf. Introduction).

Définition 6.9. – *On dira que le système $(Z_0, \ldots, Z_k)$ (ou, en abrégé, Z_k) est saturé si Z_k est une sous-variété de $\mathrm{pr}_1 Z_{k-1}$.*

Il est immédiat de vérifier ceci : si Z_k est saturé, alors les Z_ℓ, $\ell \leq k-1$ sont saturés.

Maintenant, le système différentiel défini par Z_k peut aussi être défini par la structure de contact définie en 5.8.2

$$\tau_\ell : p^*\,\Omega^1_{J_\ell/X} \to \Omega^1_{J_{\ell+1}}\,,$$

p la projection $J_{\ell+1} \to J_\ell$.

(J'écris ici τ au lieu de θ, pour éviter les confusions avec les notations de 6.7.) On a le lemme suivant.

Lemme 6.10. – *Pour que Z_k soit saturé, il faut et il suffit que τ_{k-1} donne par restriction une application $\tau'_{k-1} : p'^* \Omega^1_{Z_{k-1}/X} \to \Omega^1_{Z_k}$, p' la projection $Z_k \to Z_{k-1}$.*

Autrement dit, il faut et il suffit que le composé $q \circ \tau_{k-1}$, q la restriction $\Omega^1_{J_k} \to \Omega^1_{Z_k}$ s'annule sur le noyau de $p^* \Omega^1_{J_{k-1}/X} \to p'^* \Omega^1_{Z_{k-1}/X}$. Sous cette condition, les solutions de Z_k (par exemple les solutions analytiques) sont les germes de section $X \to Z_k$ qui annulent l'image de τ'_{k-1}. Intuitivement, la structure de contact "a une bonne restriction" à Z_k.

La démonstration est immédiate. Soit $\mathcal{I}_{k-1}$ (resp. $\mathcal{I}_k$) le faisceau d'idéaux définissant Z_{k-1} dans J_{k-1} (resp. Z_k dans J_k). Soit $f \in \mathcal{I}_{k-1}$. Prenant des coordonnées étales $(x_1, \dots, x_p)$, resp. $(y_1, \dots, y_p)$ à la source, resp. au but, et avec les notations des jets habituelles, on a

$$\tau_{k-1}\, d_{J_{k-1}/X}\, f = \sum_{i,\alpha} \frac{\partial f}{\partial y_{i,\alpha}} \left[d\, y_{i,\alpha} - \sum_j y_{i,\alpha+\varepsilon_j}\, dx_j \right] .$$

On a d'autre part $d\, f \mid Z_k = 0$; en retranchant cette égalité de la formule précédente, on trouve $\tau_{k-1}\, d_{J_{k-1}/X}\, f = -\sum (D_i\, f)\, dx_i$ sur Z_k. Le lemme résulte alors immédiatement de la définition de $\mathrm{pr}_1\, \mathcal{I}_{k-1}$.

Le lemme s'applique aussi avec $Y = X$, et $J_k(X, X)$ remplacé par $J^*_{k,S}(X, X)$. On va l'appliquer (avec $k \to k+1$) à la situation considérée en 6.7. Il s'agit de voir que, dans les conditions de cette proposition, Z_{k+1} est saturé. Si P_{k+1} admet une section, ceci résulte du lemme précédent et de la description donnée en 5.10.2 de la structure de contact de $J^*_{k+1,S}$.

Dans le cas général, on peut par exemple démontrer le résultat dans le contexte analytique au moyen d'une section analytique locale. On redescend ensuite au cadre algébrique par fidèle platitude. D'où la proposition 6.7.

Remarque 6.11. – Plaçons-nous toujours dans la situation de 6.4 et 6.7, et supposons que le pseudogroupe $Z = \{Z_k\}$ construit à partir de (M, G, P, θ) admette une section λ. Avec cette section, on construit un autre quadruplet (M', G', P', θ') associé à Z, par les constructions de 6.1 et 6.2. On vérifie que (M, G) et (M', G') *sont équivalents* au sens de 4.6 (raisonner comme en 6.3).

Deux remarques encore, pour terminer.

i) La proposition 6.5 s'applique ici mutatis mutandis. Je ne détaille pas l'énoncé.

ii) Le plongement $P \to \Pi$ dépend de la présentation $\mu : \Lambda^*(S, p) \to M$ choisie. Mais le plongement $Z \to J^*$ n'en dépend pas. Cela résulte de 3.8 et 3.10.

7. Descente

7.1. Il reste à voir comment les résultats du §6 sur la correspondance "pseudo-groupes de Lie" $\leftrightarrow$ "groupes virtuels munis d'une connexion de Cartan" doivent être modifiés quand la projection $\pi : X \to S$ n'admet pas de section.

Quitte à remplacer S et X par des ouverts de Zariski denses, on dispose d'une *section multiforme*, i.e. d'un revêtement fini étale $\alpha : \tilde{S} \to S$ et d'une application $\lambda : \tilde{S} \to X$ vérifiant $\alpha = \pi \circ \lambda$. Posons $\tilde{X} = \tilde{S} \underset{S}{\times} X$, et notons $\tilde{\lambda}$ l'application $(id, \lambda) : \tilde{S} \to \tilde{X}$, section de la projection $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to \tilde{S}$. Si l'on a un pseudogroupe $Z = \{Z_k\}$, $Z_k \in J^*_{k,S}(X, X)$, il se relève immédiatement en $\tilde{Z} = \{\tilde{Z}_k\}$, $\tilde{Z}_k \subset J^*_{k,\tilde{S}}(\tilde{X}, \tilde{X})$, auquel on pourra appliquer les résultats du §6. En principe, cela suffit, car Z est, en un sens évident, la projection de $\tilde{Z}$ dans $J^*_{k,S}(X, X)$. [Variante : si Z est connexe, remplacer $\tilde{Z}$ par sa composante connexe de l'identité. Je renvoie au chapitre III pour l'étude et l'utilisation de ce procédé.]

Je vais néanmoins indiquer rapidement une autre méthode, qui explicite les conditions de descente. Soit $R = \tilde{S} \underset{S}{\times} \tilde{S}$ la relation d'équivalence définie sur $\tilde{S}$ par $\pi \circ \lambda : \tilde{S} \to S$. L'idée est la suivante : dans la situation ci-dessus, soit (M, G) le groupe virtuel associé à $\tilde{Z}$ et à sa section $\tilde{S}$. Il faudra remplacer G, groupe au-dessus de $\tilde{S}$ par un groupoïde convenable $\tilde{G}$ au-dessus de $\tilde{S} \times \tilde{S}$, dont la projection dans $\tilde{S} \times \tilde{S}$ est R, et dont la restriction à la diagonale est G.

7.2. Voici les détails, en commençant par la situation "universelle". Avec les notations de 3.7, on part de $\Lambda^*(\tilde{S}, p)$, qui reste inchangé. On remplace $\Gamma(\tilde{S}, p)$ par le groupoïde $\tilde{\Gamma}(\tilde{S}, p)$ au-dessus de $\tilde{S} \times \tilde{S}$ dont les points à valeurs dans $\mathbb{C}$ (= "les flèches") sont les jets de transformation $\tilde{s} \mapsto \tilde{s}'$, $u_i \mapsto u_i$, $v_j \to V_j(u, v)$ où les V_j sont des séries formelles sur $(\mathbb{C}^p, 0)$, $\mathbb{C}^p$ paramétré par (u, v) comme en (3.10), et où $\alpha(\tilde{s}) = \alpha(\tilde{s}')$ (α la projection $\tilde{S} \to S$ considérée). La composition se fait comme en loc. cit. au changement près $\tilde{s} \mapsto \tilde{s}'$.

Comme au §3, les sections (algébriques, analytiques, formelles) pour la projection source de $\tilde{\Gamma}(\tilde{S}, p)$ opèrent dans $\tilde{\Lambda}(\tilde{S}, p)$; ici encore, l'action n'est pas algébrique, mais différentielle d'ordre un, donc provient d'une action algébrique de $J_1\,\tilde{\Gamma}(\tilde{S}, p)$ [J_1, pour la projection source].

7.3. On définit maintenant un groupoïde virtuel relativement à $\alpha : \tilde{S} \to S$ de la manière suivante.

On se donne $M, (\mathbb{C}, \tilde{S})$-cogèbre filtrée, munie d'une présentation $\mu : \Lambda^*(\tilde{S}, p) \to M$. Soit $N = \ker \mu$. On se donne d'autre part un sous-groupoïde $\tilde{G}$ de $\tilde{\Gamma}(\tilde{S}, p)$ qui laisse stable N et possède en outre les deux propriétés suivantes :

i) Soit G la restriction de $\tilde{G}$ à $\Delta \subset \tilde{S} \times \tilde{S}$; alors (M, G) est un groupe virtuel sur $\tilde{S}$.

ii) La projection de $\tilde{G}$ sur $\tilde{S} \times \tilde{S}$ est égale à $R = \tilde{S} \underset{S}{\times} \tilde{S}$.

Alors $\tilde{G}$ (ou plus exactement $J_1\tilde{G}$, J_1 pour la projection source) opère sur M par restriction de l'action de $\tilde{\Gamma}(\tilde{S},p)$.

Par définition, la paire $(M,\tilde{G})$ est un groupoïde virtuel (sous-entendu : relativement à α). On peut aussi se débarrasser d'une présentation particulière par des raisonnements généralisant 4.5. J'omets les détails.

7.4. On définit l'*équivalence* de deux groupoïdes virtuels $(M,\tilde{G})$ et $(M',\tilde{G}')$ relativement à deux projections $\alpha : \tilde{S} \to S$ et $\alpha' : \tilde{S}' \to S$ de la manière suivante. On remarque d'abord que, dans les définitions qui précèdent, $\tilde{S}$ n'a pas besoin d'être connexe (mais il doit être un revêtement de S). On considère alors la somme disjointe $\tilde{S}'' = \tilde{S} \sqcup \tilde{S}'$, muni de la projection $\alpha'' = \alpha \sqcup \alpha'$ sur S. Par définition, une équivalence de $(M,\tilde{G})$ et $(M,\tilde{G}')$ est un groupoïde virtuel $(M'',\tilde{G}'')$ relativement à α'' qui possède la propriété suivante : la restriction de (M'',G'') à $\tilde{S}$ (resp. $\tilde{S}'$) est égale à $(M,\tilde{G})$ [resp. $(M',\tilde{G}')$].

Il est immédiat que l'équivalence en ce sens est transitive. D'autre part, on vérifie facilement que l'équivalence au sens de 4.6 est simplement le cas particulier où $\tilde{S} = \tilde{S}' = S$. Dans la suite, le terme "équivalence" sera entendu au sens plus général qui vient d'être défini.

7.5. Soient $X, S, \tilde{S}$ comme en 7.1, α la projection $\tilde{S} \to S$ et $\tilde{X} = \tilde{S} \underset{S}{\times} X$. Soit $(M,\tilde{G})$ un groupoïde virtuel relativement à α. On veut généraliser à cette siutation la définition 5.11.1 des fibrés principaux et des connexions de Cartan.

Pour cela, soit G la restriction de $\tilde{G}$ à la diagonale $\Delta \subset \tilde{S} \underset{S}{\times} \tilde{S}$; soit (P,θ) une connexion de Cartan relativement à (M,G), avec ici (S,X) remplacé par $\tilde{S}$ et $\tilde{X}$.

i) On dira que P est un $\tilde{G}$-fibré principal si l'action de G sur P s'étend en une action de $\tilde{G}$ commutant à la projection $P \to \tilde{S}$ et à l'action de $\tilde{G}$ sur $\tilde{S}$.

ii) On dira que (P,θ) est une connexion de Cartan relativement à $(M,\tilde{G})$ si θ commute à l'action de $\tilde{G}$ sur M d'une part, sur P d'autre part.

[On pourrait dire aussi que les conditions i) et ii) sont les "conditions de descente" pour (P,θ)].

L'exemple de base est le suivant : soit $\Pi_k(\tilde{S},p)$, en abrégé $\tilde{\Pi}_k$ l'espace des jets inversibles d'application $\tilde{S} \times \mathbb{C}^r \to X$, de source sur $\tilde{S} \times \{0\}$, commutant avec la projection des deux membres sur S. (Il revient au même de prendre les jets $\tilde{S} \times \mathbb{C}^r \to \tilde{X}$ de source sur $\tilde{S} \times \{0\}$ commutant avec les projections sur $\tilde{S}$.) Les mêmes constructions qu'au §5 donnent une connexion de Cartan de fibré $\tilde{\Pi} = \varprojlim \tilde{\Pi}_k$ pour le groupe virtuel $(M,\tilde{G})$, avec $M = \Lambda^*(\tilde{S},p)$, $G = \tilde{\Gamma}(\tilde{S},p)$ (notations de 7.1).

7.6. À partir de ce qui précède, on peut pratiquement répéter le §6 dans la situation plus générale considérée ici.

i) Soit $Z = \{Z_k\}$, $Z \subset J^*_{k,S}(X,X)$ un pseudogroupe de Lie dont S soit la variété des intégrales premières, et soit $\alpha : \tilde{S} \to S$ une section étale de $\pi : X \to S$. On

construit comme en 6.2 un sous-groupoïde virtuel $(M, \tilde{G})$ de $(\Lambda^*(\tilde{S}, p), \tilde{\Gamma}(\tilde{S}, p))$ et une connexion de Cartan correspondante (P, θ). L'ensemble de ces données sera appelé la "connexion de Cartan associée à Z et $\tilde{S}$".

(ii) Inversement, donnons-nous un revêtement $\alpha : \tilde{S} \to S$ (on ne suppose pas que $\tilde{S}$ soit une section de X) ; donnons-nous aussi un groupoïde virtuel $(M, \tilde{G})$ pour α et une connexion de Cartan (P, θ) sur X relativement à $(M, \tilde{G})$ (noter que la définition d'une telle connexion ne suppose pas que $\tilde{S}$ soit une section de X).

À ces données, on va faire correspondre un pseudogroupe de Lie sur X dont la variété des intégrales premières est S ; dans le cas considéré en i) ce sera le pseudogroupe dont on est parti. On opère ainsi : soit G la restriction de $\tilde{G}$ à la diagonale ; alors (P, θ) est une connexion de Cartan pour (M, G) sur $\tilde{X} = \tilde{S} \underset{S}{\times} X$. La construction faite en 6.6/6.8 donne un pseudogroupe $\tilde{Z}$ sur $\tilde{X}$. Un jet de $\tilde{Z}$ est simplement une paire $(\tilde{s}, \alpha)$ où α est un objet de $J^*_{\infty,S}(X, X)$ et $\tilde{s}$ un point de $\tilde{S}$, tous deux de même projection sur S. La projection de $\tilde{Z}$ dans $J^*_{\infty,S}(X, X)$ est finie, donc l'image fermée (en chaque degré k). Elle donne le pseudogroupe Z voulu.

iii) On obtient encore une description des germes de sections de pseudogroupes, généralisant 6.5. J'omets les détails.

iv) Les résultats qui suivent se voient par des arguments analogues à ceux utilisés plus haut, notamment en 2.2, 4.6, 6.3 et 6.11. Je me contente de les énoncer.

7.7. Deux groupoïdes virtuels qui définissent le même pseudogroupe Z sur X sont équivalents.

Plus généralement, soient X et X' deux variétés (connexes) de même dimension, et soient Z et Z' deux pseudogroupes respectivement sur X et X'. Si Z et Z' sont équivalents, au sens de 2.1, en particulier les quotients de X et X' par les relations d'équivalences Z_0 et Z'_0 sont isomorphes ; dans le langage de cet article, les variétés d'intégrales premières de Z et Z' sont isomorphes. On a alors le résultat suivant, qui répond à la question posée au §2.

Théorème 7.8. – *Deux pseudogroupes Z et Z' respectivement sur X et X' admettant la même variété S d'intégrales premières sont équivalents si et seulement si les groupoïdes virtuels associés sont équivalents.*

Comme déjà remarqué en 4.7, les deux emplois du mot "équivalent" dans l'énoncé précédent recouvrent des réalités assez différentes : deux pseudogroupes équivalents peuvent être "très différents", contrairement aux groupes (ou groupoïdes) virtuels équivalents.

Plus précisément : soient respectivement $(M, \tilde{G})$ et $(M', \tilde{G}')$ deux groupoïdes virtuels relativement aux projections $\alpha : \tilde{S} \to S$ et $\alpha' : \tilde{S}' \to S$. On a en particulier le résultat suivant.

Proposition 7.9. – *Quitte à remplacer S par un ouvert dense, et $\tilde{S}$ et $\tilde{S}'$ par leurs images réciproques, il existe $\tilde{\Sigma}$, revêtement commun à $\tilde{S}$ et $\tilde{S}'$ qui possède la propriété suivante :*

Soit respectivement $(M_1, \tilde{G}_1)$ et $(M_2, \tilde{G}_2)$ les relèvements respectifs de $(M, \tilde{G})$ et $(M', \tilde{G}')$ à $\tilde{\Sigma}$. Alors M_1 et M_2 sont isomorphes.

En prenant un revêtement commun à $\tilde{S}$ et $\tilde{S}'$, on se ramène au cas où $\tilde{S} = \tilde{S}'$. Notons alors (M, G) et (M', G') les groupes virtuels sur $\tilde{S}$ obtenus en restreignant $\tilde{G}$ à $\tilde{G}'$ à la diagonale, comme en 7.3. On est alors ramené à une équivalence des groupes virtuels au sens de 4.6. D'après 4.6.2, ces groupes virtuels deviennent isomorphes en passant à un revêtement convenable, ce qui est plus fort que le résultat indiqué.

Chapitre III

Théorie de Galois différentielle et prolongements

1. Connexions de Cartan transverses

1.1. Le premier but de ce chapitre est de combiner les considérations de I.5 à I.7 sur le pseudogroupe de Galois d'un feuilletage avec la description des pseudogroupes étudiée au chapitre II. Ceci sera fait au §1. Les paragraphes suivants traiteront quelques compléments sur les prolongements.

Je reprends donc la situation de I.6. : X est une variété lisse et connexe sur $\mathbb{C}$, de dimension n. On la remplace au besoin par un ouvert (Zariski) dense, et on ne distingue par les deux situations. On désigne par F un feuilletage sur X, défini par un sous-faisceau cohérent $N \subset \Omega^1_X$, de rang p, vérifiant génériquement la condition de Frobenius. Quitte à restreindre X, on peut supposer N libre, de rang constant (en tant que sous-fibré de Ω^1_X) et vérifiant partout la condition de Frobenius. On note aussi $F = \{F_k\}$ la sous-D-algèbre de Lie de $J_\infty(TX)$ définie par N (cf. I.5.7 et I.5.8).

Soit $Z = \{Z_k\}$ un sous-pseudogroupe de $J^*_\infty(X)$. Je rappelle qu'il est dit *admissible par rapport à* F, ou F-admissible, au sens de I.6.4. s'il possède les propriétés suivantes :

i) C'est un sous-pseudogroupe de $\operatorname{Aut} F$ (définition dans loc. cit.).

ii) Son algèbre de Lie contient la D-algèbre de Lie de F.

Par définition, le pseudogroupe de Galois de F est le plus petit pseudogroupe F-admissible.

L'espace des *intégrales premières* de Z est défini ainsi : comme $Z_0 \subset X \times X$ est une relation d'équivalence, quitte à restreindre X, on peut supposer qu'il existe un S lisse et un morphisme surjectif et lisse (= submersif) $\pi : X \to S$ tel qu'on ait $Z_0 = X \underset{S}{\times} X$. Dans le cas où Z est le pseudogroupe de Galois de F, S est égal à l'espace des intégrales premières de F, au sens de I.3.1. Dans le cas plus général où Z est F-admissible, cela ne sera pas nécessairement vrai. Mais les fonctions sur S seront constantes sur les feuilles, donc seront des intégrales premières. On en déduit que (quitte à restreindre encore X), et en notant $\pi' : X \to S'$ l'espace des intégrales premières de F, il existe une surjection lisse $\psi : S' \to S$ avec $\pi = \psi \circ \pi'$.

Dans la suite, j'appellerai (F, S) *admissible* un pseudogroupe admissible pour F, et d'espace d'intégrales premières S. On note q la dimension de S, et on pose $r = p - q$ (il est évident qu'on a $q \leq p$). On note $\operatorname{Aut}(F, S) = \{\operatorname{Aut}_k(F, S)\}$ le plus grand des pseudogroupes (F, S) admissibles. Si Z est (F, S)-admissible, je

rappelle qu'on peut supposer que les hypothèses de régularité I.5.2.iv) et I.5.3i) et ii) sont satisfaites au-dessus de $X \times X$ tout entier.

Pour décrire un tel Z, appliquons les résultats de II.6 et II.7, et supposons pour simplifier qu'il existe une section de π, $\lambda : S \to X$. Alors Z sera décrit par (M, G, P, θ), avec (M, G) un groupe virtuel au-dessus de S, P un G/S fibré principal sur X/S, et θ une connexion de Cartan relative à ces données (a priori, le groupe virtuel n'est défini qu'à équivalence près ; ici, on peut prendre celui qui est fabriqué à partir de la section λ).

Il semblerait donc qu'il n'y a rien de plus à dire en général. En fait, ces données sont surabondantes, du fait que Z est F-admissible, et la "partie transverse" de ces données est suffisante. De façon plus précise, les données transverses à considérer sont les suivantes :

a) Un groupe virtuel (M, G), avec M quotient de $\Lambda^*(S, p)$ [je rappelle que p est la codimension du feuilletage].

b) Un fibré principal P sur X de groupe G, au-dessus de S (i.e. une collection P_k de G_k fibrés principaux sur X, au-dessus de S, avec les mêmes conditions de compatibilité qu'en II.5.12).

Le fibré universel dans lequel P sera, soit plongé a priori, soit destiné à être plongé, est le fibré $\bar{\Pi}(F, S) = \{\bar{\Pi}_k(F, S)\}$ des S-repères transverses, défini de la manière suivante :

On pose $s = n - p$; soient $x_1, \dots, x_r$ [resp. $(y_1, \dots, y_s)$] les coordonnées de $\mathbb{C}^r$ (resp. $\mathbb{C}^s$) ; on munit $S \times \mathbb{C}^{r+s}$ du feuilletage $\tilde{F}$ défini par $dx_1, \dots, dx_r$, et l'image réciproque de Ω^1_S. On considère alors l'espace $\Pi_k(F, S)$ des jets d'ordre k de $S \times \mathbb{C}^{r+s}$ dans X, de source sur $S \times \{0\}$, qui sont compatibles avec la projection sur S d'une part, les feuilletages $\tilde{F}$ et F d'autre part. On prend pour $\bar{\Pi}_k(F, S)$ le "quotient transverse" de $\Pi_k(F, S)$, au sens de I.6. Il est clair que $\bar{\Pi}_k(F, S)$ est, au-dessus de S, un fibré sur X de groupe $\Gamma(S, p)$.

c) Toujours au-dessus de S, étant donné un groupe virtuel (M, G) du type considéré en a), et un fibré principal P sur X de groupe G, on définit une (M, G, P)-*connexion de Cartan transverse à* F par la variante suivante de II.5.12.

On reprend les notations t_k et $\varpi_k = \pi \circ t_k$ de loc. cit., et on écrit encore ϖ pour ϖ_k. On se donne alors un système projectif $\theta = \{\theta_k\}$ d'applications $M_k \to \varpi_* \, \Omega^1_{P_{k+1}}$, satisfaisant les propriétés suivantes qui généralisent II.5.12.1.

Les propriétés i), iii) et iv) sont inchangées. La propriété ii) est remplacée par la suivante.

ii)$_F$ $\theta_0(M_0)$ engendre dans $\Omega^1_{P_1}$ l'image inverse par t_1 du sous-module $N \subset \Omega^1_X$ qui définit F (en particulier, en chaque point $a \in P_1$, de projection $b \in X$, $\theta_0(M_0)(a)$ est égal au relevé dans $T^*_a P_1$ du conormal $N(b)$ au feuilletage).

Cela étant, les résultats de II.6 s'étendent de la manière suivante (II.6 correspond au cas particulier du "feuilletage discret", i.e. $N = \Omega^1_X$).

Proposition 1.2. – a) *Étant donné $Z = \{Z_k\}$ un sous-pseudogroupe (F, S)-admissible de $J^*_\infty(X)$, à toute section $\lambda : S \to X$ de π est associé un quadruplet*

(M, G, P, θ), *avec* (M, G, P) *comme ci-dessus en* a) *et* b), *et* θ *une* (M, G, P) *connexion de Cartan transverse à* F.

b) *Réciproquement, étant donné un quadruplet* (M, G, P, θ) *comme ci-dessus, il lui est associé un sous-pseudogroupe* (F, S)*-admissible* Z *de* $J^*_\infty(X)$. *Dans la situation considérée en* a), *on retrouve le pseudogroupe dont on était parti.*

c) *Dans la situation* b), *supposons que* $\pi : X \to S$ *ait une section* λ, *et soit* (M', G', P', θ') *le quadruplet associé à* Z *et* λ. *Alors* (M, G) *et* (M', G') *sont équivalents au sens de* II.4.6 *(en particulier, les groupes virtuels associés à deux sections sont équivalents).*

J'indique rapidement la démonstration de a) et de la première assertion de b) [la seconde assertion de b) et l'assertion c) se font sans difficulté comme au chapitre II].

Démonstration de a). *On traite d'abord le cas où* $Z = \mathrm{Aut}(F, S)$. Ici, on prend $M = \Lambda^*(S, p)$, $G = \Gamma(S, p)$, $P = \bar{\Pi}(F, S)$. Le seul point consiste en la définition de θ. Ceci se fait par passage au quotient à partir de la construction de II.6.2 pour $Z = \mathrm{Aut}(F, S)$.

Ensuite, soit $Z = \{Z_k\}$ un pseudogroupe (F, S)-admissible et soit $\bar{Z} \subset \overline{\mathrm{Aut}}(F, S)$ son quotient transverse. On raisonne encore comme en II.6.2, en se restreignant de $\overline{\mathrm{Aut}}(F, S)$ à Z.

Démonstration de b). Le raisonnement combine les arguments de I.6-7 et de II.5-6.

i) On traite d'abord le cas où $M = \Lambda^*(S, p)$ et $G = \Gamma(S, p)$. Il s'agit ici de démontrer que la donnée de θ détermine un isomorphisme canonique $P \simeq \bar{\Pi}(F, S)$. Pour cela, on prend une section de P qui l'identifie à $X \times \Gamma(S, p)$; on raisonne ensuite comme à la proposition II.5.10.3 en utilisant I.7.4 au lieu de II.5.3.

ii) Dans le cas général, on fixe une présentation $\mu : \Lambda^*(S, p) \to M$, et l'injection correspondante $\mu' : G \to \Gamma(S, p)$. On voit alors comme en II.6.6 que θ s'étend de manière unique en une (Λ^*, Γ, P')-connexion transverse à F, soit θ' ; par i), ceci donne un isomorphisme $P' = \bar{\Pi}(F, S)$. En chaque degré k, le groupoïde associé $\bar{\Pi}_k(F, S) \underset{\Gamma_k}{\times} \bar{\Pi}_k(F, S)$ est égal à $\overline{\mathrm{Aut}}_k(F, S)$. Par restriction de P' à P, on obtient en chaque degré un sous-groupoïde $\bar{Z}_k$ de $\overline{\mathrm{Aut}}_k(F, S)$ et l'on doit vérifier deux choses.

ii-1) D'une part, $\bar{Z}_k$ se relève en un sous-groupoïde Z_k de $\mathrm{Aut}_k(F, S)$. Pour le voir, d'après I.6.5, il suffit de vérifier que $\mathrm{Lie}\, \bar{Z}_k$ contient les champs de vecteur de la connexion d'holonomie de $\bar{\Pi}_k(S, F)$. [L'adjonction de S par rapport à I.6.5 est ici sans importance].

En appliquant I.7.4, on voit que la relation entre la connexion de Cartan θ' et la connexion d'holonomie est la suivante : d'une part $\theta'_k[\Lambda^*_k(S, p)]$ définit un feuilletage de P'_{k+1} dont on vérifie qu'il est l'image inverse d'un feuilletage $\tilde{F}_k$ de

$\bar{\Pi}_k(F,S)$. D'autre part, ce dernier feuilletage est celui qui est défini sur $\bar{\Pi}_k(F,S)$ par la connexion d'holonomie ; c'est le prolongement à $\bar{\Pi}_k(F,S)$ du feuilletage F, en un sens qui généralise celui qu'on a considéré en I.2.

Le résultat cherché revient à démontrer que le feuilletage $\tilde{F}_k$ est tangent à P, ce qui résulte aussitôt des définitions.

ii-2) D'autre part, on doit démontrer que Z_{k+1} est contenu dans le prolongement de Z_k. Il suffit de démontrer ce résultat pour les variétés analytiques associées [on se place alors dans le contexte "analytique-algébrique" utilisé dans [39] et [41] : analytique sur la base algébrique par rapport aux coordonnées d'ordre ≥ 1 des jets ; cf. loc.cit.].

On prend alors les transversales analytiques locales Y et Y', de dimension p, à la source et au but. Alors la connexion de Cartan F-transverse θ donne par restriction à $Y \sqcup Y'$ une connexion de Cartan tout court au sens de 5.12, à laquelle on peut appliquer II.6.7 (ou plus exactement, sa variante analytique qui se démontre de la même manière). La démonstration se termine facilement à partir de là, en utilisant des coordonnées locales (analytiques) adaptées au feuilletage, et l'invariance par la connexion d'holonomie.

Remarque 1.3. – Dans la situation 1.2.b, si P est trivial, donc isomorphe à $X \times G$, on voit comme en II.5.12 que θ est déterminé par sa restriction $\bar{\theta}$ à $X \times \{e\}$. Autrement dit la donnée de θ est équivalente à la donnée d'une application $\bar{\theta} : M \to \pi_* \Omega^1_X$ commutant à d, et telle que $\bar{\theta}(M_0)$ engendre $\pi_* N$ (N le sous-faisceau de Ω^1_X qui définit le feuilletage).

1.4. Notre but est maintenant l'extension des propositions II.5.10.1 et II.6.5. On se place dans la situation 1.2.b, et on note comme d'habitude $\{Z_k\}$ la filtration de Z. Si ψ est un germe analytique de solution de Z_{k+1} (i.e. $j_{k+1}\,\psi$ est un germe de section de Z_{k+1}), et si b est un point de P_{k+1} de projection $a \in X$, alors la composition à gauche avec $j_{k+1}\,\psi$ donne un germe d'automorphisme φ de P_{k+1}, qu'on notera $\tilde{j}_{k+1}\,\psi$, de source b, qui possède les propriétés suivantes :

i) Il commute à la projection sur S

ii) Il laisse fixe θ_k.

Réciproquement, en gardant les mêmes notations

Proposition 1.5. – *Soit φ un germe en b d'automorphisme analytique de P_{k+1} ($k \geq 0$) qui possède les propriétés* i) *et* ii). *Alors il existe un germe unique ψ de solution en a de Z_{k+1} vérifiant $\varphi = \tilde{j}_{k+1}\,\psi$.*

Comme en loc. cit., la démonstration se fait par récurrence sur k.

a) Cas $k = 0$. On peut se placer dans les coordonnées locales analytiques en a adaptées au feuilletage $(s_1, \ldots, s_q; x_1, \ldots, x_r; y_1, \ldots, y_s)$, avec $s_1, \ldots, s_q$ des coordonnées de S, et $N \subset \Omega^1_X$ engendré par $ds_1, \ldots, ds_q\,;\ dx_1, \ldots, dx_r$. Avec une base convenable $\varpi = (ds_1, \ldots, ds_q, \omega_1, \ldots, \omega_r)^T$ de N, et G un groupe au-dessous de S de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$, la forme vectorielle $\theta_0(N)$ est $g^{-1}\,\varpi$, avec g

section sur S de G (au voisinage de $\pi(a)$). Si maintenant φ vérifie i) et ii), on voit d'abord que φ est projetable en un germe ψ d'automorphisme de X, qui le détermine ; d'autre part ψ laisse stable N, donc laisse stable le feuilletage. Le résultat suit facilement.

b) Cas général. Supposons le résultat démontré pour $k-1$, et démontrons-le pour k.

Comme en a), ou en loc. cit., on voit d'abord que φ et projetable en un germe d'automorphisme de P_k ; par hypothèse de récurrence, on peut supposer que cette projection est de la forme $\tilde{j}_k\,\psi$, ψ de la forme voulue. En composant avec $\tilde{j}_{k+1}\,\psi^{-1}$, on peut supposer $\psi = \mathrm{id}$, donc la projection de φ sur P_k égale à l'identité. D'autre part, l'hypothèse implique que φ laisse invariante la connexion d'holonomie de P_{k+1} (celle-ci ne dépend que de θ_k ; cf. théorème I.7.4). Pour conclure, il suffit alors de montrer que la restriction de φ à des transversales est l'identité (cf. fin de la démonstration de 1.2.b). On est alors ramené à II.6.5.

La version infinitésimale de cette proposition est la suivante (je laisse les détails au lecteur).

Proposition 1.6. – *Sous les mêmes hypothèses qu'en* 6.5, *les germes de solutions analytiques de Lie Z_{k+1} sont donnés par les champs de vecteurs de P_{k+1} qui sont verticaux pour ϖ_{k+1} (la projection sur S) et fixent θ_k.*

Exemple (qui aurait déjà pu être donné au chapitre II). – Soit H un groupe algébrique, et soit Z le pseudogroupe sur H dont les solutions sont les translations à gauche de H. Alors les solutions de $\mathrm{Lie}\,Z$ sont les translations infinitésimales à gauche, donc les champs invariants *à droite*. Ici, $G = \{0\}$, $M = M_0$ est la cogèbre des formes invariantes à gauche, et la connexion de Cartan est l'identité.

Plus généralement, soit X une variété lisse de dimension n, et L une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie de dimension n. Un parallélisme est une application de L dans les champs de vecteurs de X qui soit partout de rang n, et commute au crochet ; il revient au même de se donner $M = M_0 = L^*$ et l'application contragrédiente $M \xrightarrow{\theta} \Omega^1(X)$.

Un parallélisme définit un pseudogroupe sur X, celui qui fixe l'image de L, ou $\theta(M)$. Sa D-algèbre de Lie est définie par $L_\xi\,\theta(m) = 0$, $\forall\, m \in M$. Il faut se garder de la confondre avec L ! D'une part l'algèbre de Lie de ses solutions formelles en un point $a \in X$ n'est pas isomorphe à L, mais à son opposé (cf. le cas ci-dessus des groupes). D'autre part cette D-algèbre de Lie peut être très différente de L. Par exemple si l'on prend sur $\mathbb{C}^2$ le parallélisme défini par $\xi = \frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y}$, $\eta = \frac{\partial}{\partial y}$ (ou $\omega = dx$, $\pi = -y\,dx + dy$), la D-algèbre de Lie fixant ξ et η est formée des $a\,\frac{\partial}{\partial x} + b\,\frac{\partial}{\partial y}$ vérifiant $da = 0$, $db - b\,dx = 0$, i.e. $a = c_1$, $b = c_2\,e^x$; les solutions ne sont donc pas algébriques. Sur ce sujet, voir aussi l'appendice B.

1.7. Reste à examiner comment les résultats énoncés plus haut doivent être modifiés lorsqu'on ne dispose pas de section $\pi : X \to S$, mais seulement de

sections multiformes. Les modifications sont en tout point semblables à celles indiquées en II.7. Avant tout, il faudra remplacer les groupes virtuels par des groupoïdes virtuels associés à des revêtements $\tilde{S} \to S$. Deux groupoïdes virtuels associés au même pseudogroupe (F, S)-admissible seront équivalents dans le même sens qu'en II.7.

Je n'examine pas ce que donnerait la notion d'équivalence pour des pseudogroupes admissibles sur des variétés différentes.

2. Prolongements

Soit X une variété algébrique sur $\mathbb{C}$, lisse, séparée et connexe. La notion de D-variété sur X est la variante algébrique de celle utilisée dans [41] et [43]. Je rappelle d'abord les notions de *morphisme strict* et de *morphisme* (tout court) définies dans ce dernier article.

Soient $Z = \{Z_\ell\}$ et $Z' = \{Z'_\ell\}$, $\ell \in \mathbb{N}$ deux D-variétés sur X. Un morphisme strict $Z \to Z'$ est une collection de morphismes au-dessus de X : $Z_\ell \to Z'_\ell$ commutant aux projections $Z_{\ell+1} \to Z_\ell$ et $Z'_{\ell+1} \to Z'_\ell$ et aux dérivations. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit maintenant $Z\,[k]$ la D-variété définie par $Z\,[k]_\ell = Z_{k+\ell}$. On a un morphisme strict évident dit "décalage" $Z\,[k] \to Z$.

Ceci étant, par définition un morphisme $Z \to Z'$ est défini par un morphisme strict $u : Z\,[k] \to Z'$ pour un certain k, avec l'identification suivante : on identifie u avec le morphisme strict $Z\,[k+\ell] \to Z'$ obtenu en composant u avec le décalage $Z\,[k+\ell] \to Z\,[k]$; en particulier, les décalages sont identifiés à l'identité.

Soit u un morphisme strict $Z \to Z'$; pour que ce soit un isomorphisme (non strict), il faut et il suffit qu'il existe un ℓ et un morphisme strict $v : Z'[\ell] \to Z$ tel que les composés (en un sens évident) $v \circ u : Z\,[\ell] \to Z$ et $u \circ v : Z'[\ell] \to Z'$ soient des décalages.

Dans le cas algébrique considéré ici, une autre définition, plus naturelle, est possible : notons p_k la projection $Z_k \to X$, et notons $\mathcal{O}_{Z_k}$ le faisceau sur X image directe par p_k du faisceau structural de Z_k ; alors on a des inclusions naturelles

$$\mathcal{O}_{Z_k} \to \mathcal{O}_{Z_{k+1}}\,,$$

et on pose

$$\mathcal{O}_Z = \varinjlim \mathcal{O}_{Z_k}\,.$$

On vérifie alors ceci : un morphisme $Z \to Z'$ est un morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{O}_{Z'} \to \mathcal{O}_Z$, compatible avec les dérivations. En particulier, un morphisme (strict ou non) $Z \to Z'$ est un isomorphisme si la flèche correspondante $\mathcal{O}_{Z'} \to \mathcal{O}_Z$ est un isomorphisme. Par exemple, dans le cas linéaire, la notion de morphisme se réduit à celle, classique, de morphisme de D-modules, compte non tenu des filtrations.

Nous allons utiliser ces notions dans le contexte des pseudogroupes de la manière suivante. Soient X et Y deux variétés lisses et connexes, et soit $p : Y \to X$ un morphisme lisse et surjectif (comme d'habitude, on peut remplacer

X et Y par des ouverts de Zariski denses, en conservant toutefois la surjectivité de p). Notons $\mathrm{proj}\,(Y,X) = \{\mathrm{proj}_k(Y,X)\}$ le pseudogroupe des jets d'automorphismes de Y projetables en des automorphismes de X. On note q_k la projection $\mathrm{proj}_k(Y,X) \to J^*_k(X)$ (on abrègera souvent q_k en q).

On se donne maintenant deux pseudogroupes Z et Z' respectivement sur X et Y, avec $Z' \subset \mathrm{proj}(Y,X)$ et $q(Z') \subset Z$ [i.e. $q(Z'_k) \subset Z_k$ pour tout k]. Soit $p^*(Z)$ la D-sous-variété de $J_\infty(Y,X)$ obtenue en ajoutant aux équations de Z l'annulation des dérivées par rapport aux vecteurs verticaux de p ; on aura $p^*(Z)_k = Y \underset{X}{\times} (Z_k, s)$, s la projection "source".

On vérifie que l'hypothèse $q(Z') \subset Z$ donne un morphisme strict de D-variétés sur $Y : Z' \to p^*(Z)$ (voir des calculs relatifs à cette situation dans [9]). On pose alors la définition suivante.

Définition 2.1. – *On dit que Z' est un prolongement de Z si la flèche $Z' \to p^*(Z)$ est un isomorphisme.*

Si cette flèche admet un inverse $p^*(Z)[\ell] \to Z'$, on parle de "prolongement d'ordre ℓ" (ou : $\leq \ell$). Intuitivement, ceci veut dire ceci : les solutions (par exemple analytiques) de Z se relèvent en des solutions de Z' d'une manière unique, et données par des équations différentielles d'ordre $\leq \ell$. De plus, on obtient ainsi toutes les solutions de Z'.

Dans cette situation, on pourra donc si nécessaire utiliser le résultat de [43] sur l'invariance de la variété caractéristique. Pour être systématique, il faudrait aussi examiner de manière générale la relation qui existe entre les groupes (ou les groupoïdes) virtuels associés à Z et Z'. Je ne regarderai pas le cas général, qui parait assez compliqué, et me contenterai de quelques exemples simples.

Exemples 2.2. – Soit $Z \subset J^*_\infty(X)$ un pseudogroupe sur X. Je suppose pour simplifier que le morphisme "intégrales premières" $\pi : X \to S$ admet une section λ. A partir de cette section, on fabrique comme expliqué en II.6 un quadruplet (M, G, P, θ), avec (M, G) groupe virtuel au-dessus de S, $P = \{P_k\}$ un fibré principal sur X/S de groupe G/S, et θ une connexion de Cartan relative à ces données.

Prenons $Y = P_k$, et notons encore p la projection $Y \to X$. Sur Y, il existe un pseudogroupe Z' défini à partir de Z par composition comme en II.5.10 et II.6.1. Montrons que Z' est un prolongement de Z.

D'une part, on voit facilement que Z' est projetable, i.e. $\subset \mathrm{proj}\,(Y,X)$ et qu'on a, avec q défini comme ci-dessus, $q(Z') = Z$. Soit d'autre part $\alpha \in Y = P_k$, avec $p(\alpha) = a$. Désignant par $Z'_{\ell;\alpha,\cdot}$ l'espace des jets d'ordre ℓ de Z' de source α, on a un isomorphisme $Z'_{\ell;\alpha,\cdot} = Z_{k+\ell;a,\cdot}$; autrement dit on a un isomorphisme $Z'_\ell = Y \underset{X}{\times} (Z_{k+\ell}, s)$, $s =$ "source". Ceci donne un isomorphisme strict $p^*Z\,[k] \to Z'$, qui est aussi l'inverse de $Z' \to p^*Z$; d'où le résultat.

On a en particulier $Z'_0 = Y \underset{X}{\times} (Z_k, s) = P_k \underset{X}{\times} (Z_k, s)$. Considérons l'application $P_k \underset{S}{\times} P_k \to P_k \times Z_k$ dont la première composante est la première projection, et la seconde l'application $(\alpha, \beta) \mapsto \beta\,\alpha^{-1}$, déjà vue en II.6.6 ; on vérifie immédiatement qu'elle donne un isomorphisme $P_k \underset{S}{\times} P_k \simeq P_k \underset{X}{\times} (Z_k, s) = Z'_0$. Autrement dit, *l'espace des intégrales premières de Z' est encore S ;* le prolongement n'introduit pas ici de nouvelles intégrales premières. Une section $\lambda'(S)$ s'obtient en composant à la source l'identité de Z_k restreinte à S avec l'isomorphisme qu'on s'est donné $(X, \lambda(S))^\wedge \simeq (S \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\})^\wedge$. Cf. II.6.1. Alors, avec cette section, les données (M', G', P', θ') relatives à Z' s'obtiennent ainsi :

a) On a $M' = M$ en tant que $(\mathbb{C}, S)$-cogèbre de Lie, avec un décalage de filtration $M'_\ell = M_{k+\ell}$ $(\ell \geq 0)$.

b) G' est le sous-groupe G^k de G, avec le même décalage $G'^\ell = G^{k+\ell}$ $(\ell \geq 0)$. Même chose pour P' et θ'.

Ces résultats se voient en déterminant les solutions de Z' à partir de II.6.5 (je laisse le lecteur examiner comment faire lorsque $\pi : X \to S$ admet seulement des sections multiformes).

On remarquera qu'on "perd un peu d'information" du fait qu'on a remplacé G par G^k. Toutefois, cette perte se produit seulement en passant de X à P_1. Ensuite, en considérant P_k comme prolongement de P_1, on "ne perd plus d'information" : les groupes qui interviennent sont unipotents, donc déterminés par leur algèbre de Lie.

Variante. Prendre le prolongement d'ordre un, i.e. remplacer X par P_1, et itérer k fois. On peut voir qu'on obtient le même résultat, i.e. P_k muni du prolongement déjà considéré. Dans le cas transitif, voir à ce sujet des remarques dans [59].

Exemple 2.3. – "Prolongement trivial". On suppose qu'on a $Y = X \times T$, et, qu'avec des notations évidentes, on a $Z'_k = Z_k \times \mathrm{Id}_T$ (tous les produits et produits tensoriels sont ici pris sur $\mathbb{C}$). Cet exemple évident, et sans intérêt par lui-même, sera utilisé dans l'exemple suivant.

On suppose encore l'existence d'une section $\lambda : S \to X$ de la projection π (je laisse le lecteur regarder le cas général). Soient (M, G, P, θ) les données relatives à Z et λ. L'espace des intégrales premières de Z' est évidemment $S \times T$, et une section est $\lambda' = \lambda \times \mathrm{id}_T$. Soient (M', G', P', θ') les données relatives à Z' et λ'. On a évidemment $M' = M \boxtimes \mathcal{O}_T \oplus \mathcal{O}_S \boxtimes \Omega^1_T$ ($\boxtimes$, le produit tensoriel "total" ou "complété") ; on a aussi $G' = G \times T$. Les filtrations de M' et G' sont évidentes. Je laisse le lecteur décrire de même P' et θ'.

Exemple 2.4. – Soit $Z \subset J^*_\infty(X)$ un pseudogroupe sur X. Ici encore, je suppose pour simplifier que le morphisme "intégrales premières" $\pi : X \to S$ admet une section λ, en laissant le lecteur regarder le cas général. Soit Π_k l'espace des repères d'ordre k de X. Le pseudogroupe $J^*_\infty(X)$ a un prolongement canonique à Π_k ; par restriction ceci donne un prolongement $Z' = \{Z'_\ell\}$ de Z à Π_k.

Une différence importante avec 2.2 est, qu'ici, il apparaît de nouvelles intégrales premières. Nous allons voir, qu'en gros, cet exemple se réduit à une combinaison des deux précédents.

i) *Le cas transitif.* On choisit un point-base $a \in X$, et une identification de $(X,a)^\wedge$ à $(\mathbb{C}^p,0)^\wedge$, $p = \dim X$. Si (M,G,P,θ) sont les données associées à Z, on aura en particulier un plongement $G_k \to \Gamma_k$, et un isomorphisme $\Pi_k = P_k \underset{G_k}{\times} \Gamma_k$. L'espace des intégrales premières qui apparaît est $T = G_k\backslash\Gamma_k$. Supposons que $\Gamma_k \to T$ ait génériquement une section. Quitte à se restreindre à des ouverts Zariski denses, on aura un isomorphisme $\Pi_k = T \times P_k$. Soit alors Z'' l'extension de Z à P_k, décrite en 2.2. On vérifie que Z' est extension triviale de Z'', au sens de 2.3.

Si $\Gamma_k \to T$ n'admet pas de section, on prendra une section multiforme $\lambda : \tilde{T} \to \Gamma_k$, $\tilde{T}$ un revêtement fini (qu'on peut supposer étale) de T. Soit alors $\tilde{Z}'$ le relèvement de Z' à $\tilde{\Pi}_k = \Pi_k \underset{T}{\times} \tilde{T}$; comme ci-dessus, $\tilde{Z}'$ sera un relèvement trivial de Z''. Le pseudogroupe Z' (que l'on pourrait qualifier de "prolongement isotrivial" de Z'') s'obtient à partir de Z'' par une condition de descente analogue à celle considérée en II.7 ; j'omets les détails.

ii) *Le cas général ("intransitif").* La construction est analogue, en un peu plus compliqué. Soient encore (M,G,P,θ) les données relatives à Z et λ [avec, sous-entendu, un isomorphisme de $(X,\lambda(S))^\wedge$ et $(S\times\mathbb{C}^r, S\times\{0\})^\wedge$]. On se donne une représentation de S comme revêtement étale d'un ouvert de Zariski de $\mathbb{C}^q$, avec $q = \dim S$, $q+r = \dim X$. Ceci donne en particulier un plongement au-dessus de S de G_k dans $\Gamma_k \times S$, et un isomorphisme au-dessus de S : $\Pi_k \simeq P_k \underset{G_k}{\times} (\Gamma_k \times S)$. On conclut alors comme en i).

Variante 2.5. – On se place dans les hypothèses de 2.4. Soit $\Pi^{(1)}$ l'espace des repères d'ordre 1 de X, et soit $Z^{(1)}$ le prolongement de Z à $\Pi^{(1)}$. En itérant k fois cette construction, on obtient un prolongement $Z^{(k)}$ de Z à $\Pi^{(k)}$, l'itéré k-ième de $\Pi^{(1)}$. La description de $Z^{(k)}$ au moyen d'un groupe virtuel et d'une connexion de Cartan s'obtient en itérant k fois les constructions faites en 2.4 (restreintes au cas particulier $k = 1$). On obtient essentiellement le même résultat que dans le cas précédent, la seule différence étant dans l'espace d'intégrales premières qu'il convient d'ajouter.

Je me contenterai d'expliciter la situation pour les cogèbres de Lie, sans supposer ici que $\pi : X \to S$ a une section. On part d'une $(\mathbb{C},\tilde{S})$-cogèbre de Lie M associée à Z ($\tilde{S}$ est un revêtement de S tel que $X \underset{S}{\times} \tilde{S} \to \tilde{S}$ ait une section ; je rappelle que les cogèbres associées à deux telles $\tilde{S}$ ne sont pas nécessairement isomorphes, mais le deviennent après passage à un revêtement convenable). Soit $T \to S$ l'espace des intégrales premières qu'il faut rajouter, et soit $\tilde{T}$ un revêtement convenable de $T \underset{S}{\times} \tilde{S}$. Posons $M' = M \underset{\mathcal{O}_{\tilde{S}}}{\otimes} \mathcal{O}_{\tilde{T}}$, avec la filtration décalée de k de celle de M, comme en 2.2. Posons encore $\tilde{\Omega}^1_{\tilde{S}} = \Omega^1_{\tilde{S}} \underset{\mathcal{O}_{\tilde{S}}}{\otimes} \mathcal{O}_{\tilde{T}}$. Alors la $(\mathbb{C},\tilde{T})$-cogèbre de Lie associée à $Z^{(k)}$ sera $M^{(k)} = (M' \oplus \Omega^1_{\tilde{T}})/\delta(\tilde{\Omega}^1_{\tilde{S}})$, δ

l'application diagonale. L'expression de la différentielle de $M^{(k)}$ à partir de celle de M est immédiate.

3. Prolongements et théorie de Galois différentielle

3.1. Les situations que j'aurai à considérer sont des cas particuliers de la suivante. Soient, comme au §2, X et Y deux variétés lisses et connexes, et $p : Y \to X$ un morphisme lisse et surjectif. Soit F un feuilletage de X, et soit $\tilde{F}$ un feuilletage de Y vérifiant les deux conditions suivantes.

i) $\tilde{F}$ est contenu dans l'image inverse de F : si $N \subset \Omega'_X$ définit F et $\tilde{N} \subset \Omega'_Y$ définit $\tilde{F}$, on a $N \circ p \subset \tilde{N}$.

ii) $\tilde{F}$ est *étale sur* F, i.e. localement, en topologie transcendante, les feuilles de $\tilde{F}$ sont isomorphes aux feuilles de F sur lesquelles elles se prolongent [dit autrement : pour tout point $b \in Y(\mathbb{C})$, de projection $a \in X(\mathbb{C})$, la flèche

$$(\Omega^1_{X,a}/N_a)^\wedge \to (\Omega^1_{Y,b}/\tilde{N}_b)^\wedge$$

est bijective].

Soit alors Z (resp. $\tilde{Z}$) le pseudogroupe de Galois de F (resp. $\tilde{F}$) ; on a le résultat suivant.

Théorème 3.2. – *Quitte à remplacer X et Y par des ouverts de Zariski denses (en gardant la surjectivité $Y \to X$), on a les propriétés suivantes :*

i) $\tilde{Z} \subset \mathrm{proj}\,(Y, X)$.

ii) *Pour tout point $a \in X(\mathbb{C})$, notons $Z_{a,\cdot} = \varprojlim Z_{k;a,\cdot}$ les jets d'ordre infini de Z de source a ; définissons de même $\tilde{Z}_{b,\cdot}$ pour $b \in Y(\mathbb{C})$.*

Alors, pour tout point $b \in Y(\mathbb{C})$, avec $p(b) = a \in X(\mathbb{C})$, la projection de $\tilde{Z}_{b,\cdot}$ dans $J^*_{\infty,a}(X)$ est égale à $Z_{a,\cdot}$.

iii) *Le même résultat est vrai pour les algèbres de Lie : avec des notations évidentes, la projection de $L\,\tilde{Z}_b$ est égale à $L\,Z_a$.*

Ce résultat est essentiellement démontré dans [9] : les énoncés i) et ii) sont démontrés dans le cas des feuilletages de dimension un. Le cas général et l'assertion iii) se démontrent de façon analogue (le point-clef consiste à utiliser une décomposition $Y \xrightarrow{p'} X' \xrightarrow{q} X$, avec p' à fibres connexes, et q fini ; cf. loc. cit.).

3.3. Le but de ce paragraphe est de répondre à la question posée en I.2.5 sur la relation qui existe entre le pseudogroupe de Galois d'une feuilletage et celui de son prolongement d'ordre un.

Je rappelle de quoi il s'agit. Soit F un feuilletage sur X, défini par $N \subset \Omega^1_X$; on fait les hypothèses de régularité usuelles, i.e. N est un sous-fibré de rang constant de Ω^1_X (i.e. Ω^1_X/N est localement libre). Quitte à restreindre X, on

peut supposer N libre, de base $\omega_1, \ldots, \omega_p$. Alors le fibré normal N^* de F est muni d'une F-connexion de forme $\pi = (\pi_{ij})$ mod N, défini ainsi : posant $\omega = {}^t(\omega_1, \ldots, \omega_p)$, on a $d\pi = -\pi \wedge \omega$, ou $d\pi_i = \sum \omega_j \wedge \pi_{ij}$.

Le prolongement d'ordre un $\tilde{F}$ de F, au sens de I.2 est le feuilletage obtenu sur le fibré principal $P(N^*) = P$ (ici, explicitement, $X \times G\ell(p)$, moyennant le choix de la base ω). Ce feuilletage est défini par l'image inverse de N, plus les coefficients de $\tilde{\pi} = f^{-1}\,\pi f + f^{-1}\,df$, $f \in G\ell(p)$. Il est étale sur F au sens de 3.1.

Pour énoncer les résultats, j'ai besoin d'une "variante transverse" des considérations du dernier paragraphe. Considérons la projection $p : P \to X$, avec X et P munis respectivement des feuilletages F et $\tilde{F}$. Alors les jets de $J^*_{k+1}(X)$ compatibles à F (i.e. appartenant à $\mathrm{Aut}_{k+1} F$, avec les notations de I.6.4) induisent des jets de $J^*_k(P)$ compatibles à $\tilde{F}$, par une construction analogue à celle de 2.2. On déduit de là qu'à un pseudogroupe F-admissible Z sur X correspond un pseudogroupe $\tilde{F}$-admissible $\tilde{Z}$ sur P, qui est un prolongement de Z au sens de 2.1.

La description transverse au sens de III.1 de $\tilde{Z}$ à partir de celle de Z se fait comme en 2.4 ou 2.5, restreints au cas $k = 1$. Je laisse le lecteur expliciter l'énoncé.

Le résultat est alors le suivant.

Théorème 3.4. – *Dans la situation précédente, si Z est le pseudogroupe de Galois de F, alors $\tilde{Z}$ est le pseudogroupe de Galois de $\tilde{F}$.*

Ceci est une conséquence immédiate de 3.2. Comme $\tilde{Z}$ est $\tilde{F}$-admissible, le pseudogroupe de Galois de $\tilde{F}$, soit $\tilde{Z}'$, est contenu dans $\tilde{Z}$; si $\tilde{Z}' \neq \tilde{Z}$, il existe un point b tel que $\tilde{Z}'_{b,\cdot} \neq \tilde{Z}_{b,\cdot}$. Mais alors la projection $\tilde{Z}'_{b,\cdot} \to \tilde{Z}_{a,\cdot}$, avec $a = \pi(b)$ ne peut pas être bijective.

3.5. Différentes variantes du théorème précédent sont possibles. La plus intéressante consiste à prendre une *prolongement minimal*, variante transverse de l'exemple 2.2. Je me borne ici à l'ordre un (l'ordre supérieur peut se traiter, soit par généralisation à l'ordre k de la construction qui suit, soit par itération ce qui reviendra au même ; cf. remarque à la fin de 2.2.).

Pour simplifier, je me limite aussi au cas où le morphisme "intégrales premières de F", soit $\pi : X \to S$, admet une section λ. Soit $Z = \{Z_k\}$ le pseudogroupe de Galois de F, et soient (M, G, P, θ) les données transverses correspondant à F et λ, décrites en 3.1. On prendra comme fibré $Q = P_1$. Sur Q, on dispose de deux objets (j'omets les détails).

i) Un feuilletage $\tilde{F}$ qui est l'image inverse sur $Q = P_1$ du feuilletage de P_1 donné par $\theta(M_1)$ [cf. démonstration de 1.2.b].

ii) Un pseudogroupe $\tilde{Z}'$, $\tilde{F}$-admissible, prolongement de Z, obtenu par la variante transverse de 2.2. En particulier, sa description est analogue à 2.2.

a) Il admet les mêmes intégrales premières que Z ; cf. I.3.2.1 et I.6.2. De plus λ se relève en $\tilde{\lambda}$ comme en 2.2.

b) Le groupe virtuel $(\tilde{M}, \tilde{G})$ associé à $\tilde{Z}$ et $\tilde{\lambda}$ est décrit par le même décalage qu'en 2.2 ; on a $\tilde{M}_\ell = M_{\ell+1}$, et $\tilde{G}^\ell = G^{\ell+1}$ $(\ell \geq 0)$.

Le résultat est alors le suivant : $\tilde{Z}$ est le pseudogroupe de Galois de $\tilde{F}$. La démonstration est la même que celle de 3.4.

4. Passage à un revêtement

Soit encore X muni d'un feuilletage F, et soit $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ un revêtement fini ; quitte à restreindre X, on peut supposer p étale. $\tilde{X}$ est alors muni d'un feuilletage $\tilde{F}$, image réciproque de F.

Soit Z un pseudogroupe sur X ; on définit une image réciproque $\tilde{Z}$ sur $\tilde{X}$ par $\tilde{Z}_{b,c} = Z_{p(b),p(c)}$. Ceci n'est pas un prolongement au sens de 2.1 (la flèche $\tilde{Z} \to p^* Z$ est un revêtement et non un isomorphisme). Cependant, on a le résultat suivant.

Théorème 4.1. – *Si Z est le pseudogroupe de Galois de F, le pseudogroupe de Galois de $\tilde{F}$ est la composante connexe de l'identité $\tilde{Z}'$ de $\tilde{Z}$.*

On utilise ici les algèbres de Lie. Soit $\tilde{Z}''$ le pseudogroupe de Galois de $\tilde{F}$. On a évidemment $\tilde{Z}'' \subset \tilde{Z}'$. Si on n'avait pas l'égalité, il y aurait un point $b \in \tilde{X}(\mathbb{C})$, avec $L\,\tilde{Z}''_b \neq L\,\tilde{Z}'_b$; donc, si $a = p(b)$, on ne pourrait pas avoir $L\,\tilde{Z}''_b \sim L\,Z_a$, ce qui contredit 3.2.iii).

Le résultat précédent, joint à 3.2, montre que les pseudogroupes de Galois de F et $\tilde{F}$ se déterminent réciproquement. Ceci peut permettre, dans les exemples, de simplifier la situation : en remplaçant X par un $\tilde{X}$ convenable, on pourra supposer :

i) Que $X \to S$ admet une section λ.

Soit alors (M, G, P, θ) la donnée correspondant à Z et λ. En prenant encore un revêtement, on pourra encore supposer :

ii) Que P est un fibré trivial.

iii) Que G est connexe.

Les conditions i) et ii) éliminent les problèmes de descente considérés en II.7. D'autre part, sous la condition iii), G est déterminée par M, donc n'apporte pas d'information supplémentaire.

Chapitre IV
Intégrabilité : exemples

1. Généralités

Soit encore X une variété lisse et connexe sur $\mathbb{C}$. On la suppose munie d'un feuilletage F défini par un sous-faisceau cohérent $N \subset \Omega^1_X$. Quitte à restreindre X, on peut supposer N engendré par p formes $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Gamma(X, \Omega^1_X)$, linéairement indépendantes en chaque point, et vérifiant la condition de Frobenius.

On s'intéresse dans ce chapitre aux feuilletages intégrables (sous-entendu, par quadratures). Voici une définition provisoire.

Définition 1.1. – *On dit que F est naïvement (ou : trivialement) intégrable si après remplacement éventuel de X par un ouvert dense U, il existe une base $\omega_1, \ldots, \omega_p$ de N et une suite d'entiers $1 \leq p_1 < p_2 < \ldots < p_k = p$ vérifiant*

$$\begin{aligned} &d\omega_1 = \ldots = d\omega_{p_1} = 0 \\ &\ldots \\ &d\omega_{p_i+1} = \ldots = d\omega_{p_{i+1}} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \omega_1, \ldots, \omega_{p_i}) \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

L'explication intuitive de cette définition est la suivante : en passant à un contexte analytique, on intègre localement : $\omega_i = df_i$ $(1 \leq i \leq p_1)$ puis on intègre $\omega_{p_1+1}, \ldots, \omega_{p_2}$ sur $f_1 = c^{te}, \ldots, f_{p_1} = c^{te}$ et ainsi de suite. On obtient bien ce qui est appelé généralement une "intégration par quadrature".

Il est naturel de caractériser les feuilletages naïvement intégrables par les groupes virtuels transverses au sens de III.1, qui leur sont associés. Cette question ne présente pas de difficulté. Néanmoins, je ne le ferai pas explicitement, et ceci pour deux raisons.

Tout d'abord, le résultat est essentiellement une paraphrase de la définition et ne présente guère d'intérêt.

Une seconde raison, plus importante, est la suivante : cette définition n'est manifestement pas assez générale. Par exemple, nous avons vu dans I.4 un exemple simple (les équations linéaires affines de rang 1) d'un feuilletage qui n'est pas naïvement intégrable, mais dont le prolongement d'ordre un l'est. Plus généralement, il paraît naturel de dire que F est intégrable si les conditions suivantes sont réalisées : il existe une surjection lisse $q : Y \to X$ et un feuilletage G de Y qui possèdent les propriétés suivantes :

a) G est naïvement intégrable.

b) Les feuilles de G sont étales sur celles de F [i.e., en tout point $b \in Y(\mathbb{C})$, le tangent à G en b se projette bijectivement sur le tangent à F en $q(b)$].

b') [Variante : remplacer dans b) "bijectivement" par "surjectivement".]

Il serait intéressant de caractériser les pseudogroupes de Galois des feuilletages vérifiant ces conditions (la condition devrait être du type suivant : en un sens convenable, la cogèbre de Lie transverse est résoluble).

Je n'aborderai pas ce problème ici. Dans la suite du chapitre, je me contenterai de déterminer les pseudogroupes de Galois de quelques exemples que j'espère significatifs.

2. Exponentielle, logarithme

Cet exemple a déjà été traité dans [39]. Je le reprends en le détaillant davantage. Malgré sa simplicité, il contient déjà beaucoup de phénomènes de base de la théorie.

On considère le feuilletage F de $\mathbb{C}^2$ défini par $x\,dy - dx$; il est plus commode d'ôter la droite $x = 0$ et de le considérer comme défini par $\omega = dy - \frac{dx}{x}$; on a $d\omega = 0$. Par suite, si ξ est un champ de vecteurs orthogonal à ω, on a $L_\xi\,\omega = i_\xi\,d\omega + d\langle\xi,\omega\rangle = 0$. On en déduit qu'un pseudogroupe admissible est obtenu en fixant ω, ce que j'écris $\bar{\omega} = \omega$.

Ce pseudogroupe est minimal, et est donc le pseudogroupe de Galois de F. En effet, on voit immédiatement qu'une équation supplémentaire devrait être de degré 0, donc donner une intégrale première. Mais une telle intégrale première n'existe pas ; on a même un résultat plus fort : *la seule courbe algébrique qui soit une feuille de F est $x = 0$* ; ceci peut se voir, soit par un argument de monodromie autour de $x = 0$, soit par le résultat suivant dont je laisse la démonstration au lecteur : si $P \in \mathbb{C}[x,y]$ est un polynôme non constant qui divise $x\,\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}$, alors $P = \lambda\,x^k$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \geq 1$.

L'interprétation "géométrique" s'obtient en prenant une transversale à F, et en restreignant le pseudogroupe à une transversale. Si l'on prend $x = c^{te}$ le pseudogroupe est celui qui fixe dy, i.e. le pseudogroupe provenant de G_a. Si l'on prend $y = c^{te}$, de même, on trouvera G_m. Ces deux groupes ne sont pas isomorphes, mais les pseudogroupes qu'ils définissent sont équivalents au sens de II.2.

On peut aussi faire d'autres choix, par exemple fixer $x + y$: on obtient alors sur $\mathbb{C}^*$ le parallélisme fixant $dx\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Ce parallélisme est encore équivalent aux groupes précédents. *Mais il ne provient pas d'un groupe.* Une façon de le prouver consiste à remarquer que le feuilletage défini par $d\bar{x}\left(1 + \frac{1}{\bar{x}}\right) - dx\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ n'a pas d'intégrale première, comme on va le voir.

Par le changement de variables $(x,y) \to (x,t)$ avec $t = x + y$, on transforme ω en $\omega' = dx\left(1 + \frac{1}{x}\right) - dt$, ce qui se lit comme l'équation différentielle $(1 + x)\,\frac{dx}{dt} = x$. Il se trouve que cette équation différentielle a été étudiée par Kolchin [34], au changement de variable près $1 + x = \frac{1}{z}$ qui la ramène à la

forme $\frac{dz}{dt} = z^3 - z^2$. Kolchin montre que les différentes solutions $\neq 0$, prises dans une extension différentielle de $\mathbb{C}(t)$ admettant $\mathbb{C}$ pour corps des constantes (par exemple $\mathbb{C}[[t]][t^{-1}]$) sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}(t)$. Il montre aussi que, quel que soit l'entier $n \geq 1$ le feuilletage F_n de $(\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}$ donné par $dx_1 \left(1 + \frac{1}{x_1}\right) = \ldots = dx_n \left(1 + \frac{1}{x_n}\right) = dt$ n'admet pas d'autre intégrale première rationnelle que les constantes. En particulier, le cas $n = 2$ prouve l'assertion indiquée plus haut.

On en déduit aussi que le pseudogroupe de Galois de F_n est obtenu en fixant les formes $dx_k \left(1 + \frac{1}{x_k}\right) - dt$. En prenant une transversale $t = c^{te}$, on trouve le produit de n copies du parallélisme indiqué plus haut.

3. La fonction $y = x^s$

L'exemple qui suit a été traité par P. Cassidy et M. Singer ([13], exemple 3). Ces auteurs travaillent dans le cadre de leur "théorie de Picard-Vessiot paramétrique".

Je ne ferai pas ici la comparaison des deux méthodes. Mais il serait intéressant de le faire ; plus généralement, il y aurait lieu de comparer systématiquement, là où les deux s'appliquent, le point de vue développé ici et le point de vue "à la Kolchin" utilisant les corps différentiels et leurs automorphismes. J'espère avoir l'occasion de revenir sur cette question.

On considère ici le feuilletage (d'un ouvert de Zariski) de $\mathbb{C}^3$, de coordonnées (s, x, y), défini par les formes $\omega_1 = ds$, $\omega_2 = \frac{dy}{y} - s\,\frac{dx}{x}$. On obtient des feuilles particulières en prenant les différentes déterminations de $y = e^{s \log x}$ $(= x^s)$, avec s fixé, d'où le titre.

Ce feuilletage admet s comme intégrale première ; on voit facilement qu'il n'existe pas d'intégrale première indépendante de s ; donc l'application "intégrale première" est donnée par $(s, x, y) \mapsto s$, avec $S = \mathbb{C}$.

On a $d\omega_1 = 0$, $d\omega_2 = \pi \wedge \omega_1$, avec $\pi = \frac{dx}{x}$, et $d\pi = 0$ (en particulier, ce feuilletage est naïvement intégrable). En prolongeant comme en I.4, on doit prendre $G = \Gamma \times S$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$. Notant t la variable de Γ, le prolongement (ici à $\mathbb{C}^4$) est donné par $\tilde{\omega}_1 = \omega_1$, $\tilde{\omega}_2 = \omega_2 - t\omega_1$, $\tilde{\pi} = \pi - dt$. On a encore $d\tilde{\omega}_1 = 0$, $d\tilde{\omega}_2 = \tilde{\pi} \wedge \tilde{\omega}_1$, $d\tilde{\pi} = 0$. Les formes $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ et $\tilde{\pi}$ engendrent le feuilletage $\tilde{F}$ prolongé.

En vertu des équations précédentes, un pseudogroupe admissible s'obtient en fixant s, $\tilde{\omega}_2$ et $\tilde{\pi}$; explicitement, ceci s'écrit

$$\bar{s} = s\,;\ \frac{d\bar{y}}{\bar{y}} - \bar{s}\,\frac{d\bar{x}}{\bar{x}} - \bar{t}\,d\bar{s} = \frac{dy}{y} - s\,\frac{dx}{x} - t\,ds\,;\ \frac{d\bar{x}}{\bar{x}} - d\bar{t} = \frac{dx}{x} - dt\,.$$

Ce système est équivalent à un système différentiel d'ordre 2 avec s, x, y comme variables, $\bar{s}, \bar{x}, \bar{y}$ comme fonctions, système (ici, pseudogroupe de Lie)

que je noterai Z. Pour l'écrire, on fait d'abord $ds = d\bar{s}$ dans la seconde équation, d'où

$$\bar{t} - t = \frac{1}{\bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial s} - \frac{s}{\bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial s} ;$$

on reporte ceci dans la troisième équation qu'on écrit comme un système différentiel auquel on ajoute la première équation $\bar{s} = s$ (l'expression explicite est sans intérêt).

La $(\mathbb{C}, S)$ cogèbre de Lie transverse, et son image par la connexion de Cartan, sont donnés par $M_0 = \Omega^1_S + \mathcal{O}_S\, \tilde{\omega}_2$, $M_1 = M_0 \oplus \mathcal{O}_S\, \tilde{\pi}$. L'action de G est évidente.

Pour voir qu'on a bien le pseudogroupe de Galois, il suffit, par application de I.3.2.1 (en fait de la partie triviale de cet énoncé), de montrer que $\tilde{F}$ n'a pas de nouvelle intégrale première par rapport à s.

Soit $\xi = x \frac{\partial}{\partial x} + sy \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t}$ une base des champs tangents à $\tilde{F}$. Soit $f = P/Q$ est une intégrale première, avec $P, Q \in \mathbb{C}[s, x, y, t]$, premiers entre eux. Ceci s'écrit $\xi P/P = \xi Q/Q$, donc $\xi P = aP$, et $\xi Q = aQ$, $a \in \mathbb{C}[s, x, y, t]$. On conclut facilement en décomposant en composantes homogènes en x, y, t, à coefficients dans $\mathbb{C}[s]$.

(Une méthode différente consisterait à se ramener à un calcul de cohomologie relative par rapport à s ; cf. les exemples suivants de ce chapitre).

Pour interpréter Z, on prend une section transverse au feuilletage. Pour comparer avec [13], il faut prendre une section $x = c^{te}$; on trouve alors le pseudogroupe des translations d'un groupe différentiel, plus précisément $S \times G_a \times G_m$, $s \in S$, $t \in G_a$, $y \in G_m$, avec les équations $\frac{dt}{ds} = 0$, $\frac{1}{y}\frac{dy}{ds} = t$ [ou aussi $S \times G_m$, avec $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{ds}\right) = 0$].

Pour les groupes différentiels voir [12], [33], et aussi [13] et les références qui s'y trouvent. Pour un point de vue plus proche de celui de ce paragraphe, voir l'appendice A et [42].

On peut aussi prendre d'autres transversales, par exemple $t = c^{te}$; on trouve alors les équations $\bar{s} = s$, $\frac{d\bar{x}}{\bar{x}} = \frac{dx}{x}$, $\frac{d\bar{y}}{\bar{y}} = \frac{dy}{y}$. Ceci s'interprète comme le groupe différentiel $G_m^2 \times S$ sur S, muni de la connexion triviale.

A titre d'autre exemple compliquant le précédent, le lecteur pourra examiner ce que donne la méthode présente dans le cas de la "fonction Γ incomplète" (exemple 7.2 de [13]).

4. L'intégrale $\int P(x, \log x)\, dx$

On considère ici un feuilletage F sur un ouvert de Zariski de $\mathbb{C}^3$ (qu'il n'est pas nécessaire de préciser autrement), donné par les deux formes $\pi = dy - \frac{dx}{x}$, $\omega = dz - P\, dx$, avec $P \in \mathbb{C}(x, y)$. On a $d\pi = 0$, $d\omega = \frac{\partial P}{\partial y}\, dx \wedge \pi$, donc le feuilletage est naïvement intégrable. Sans faire une étude complète, je vais indiquer les diverses circonstances qui peuvent se produire lorsqu'on cherche à déterminer le pseudogroupe de Galois.

4.1. Intégrales premières

Dans certains cas, F peut admettre une intégrale première. Le pseudogroupe de Galois est alors obtenu en fixant π et l'intégrale première.

C'est par exemple le cas lorsque P est un polynôme : alors il existe une telle intégrale de la forme $z-Q$, $Q \in \mathbb{C}[x,y]$; cette assertion n'est rien d'autre que la méthode élémentaire d'intégration de $\int P(x, \log x)\, dx$. J'en rappelle rapidement une démonstration.

Étant donné $P \in \mathbb{C}[x,y]$, il suffit de montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[x,y]$, unique à l'addition près d'une constante, tel qu'on ait

$$P\, dx = \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx + \frac{\partial Q}{\partial y}\, \frac{dx}{x}\,,$$

ou encore

$$xP = x\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\,.$$

L'unicité de Q (et même son unicité dans $\mathbb{C}(x,y)$) résulte du fait que le champ $x\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, ou la forme $dy - \frac{dx}{x}$, n'admet pas d'intégrale première non constante.

L'existence se voit ainsi : posant

$$xP = \sum_{k\geq 0} a_k\, x^k\,, \quad Q = \sum_{k\geq 0} b_k\, x^k\,, \quad \text{avec} \quad a_k, b_k \in \mathbb{C}[y]\,,$$

on doit avoir $a_k = kb_k + \frac{db_k}{dy}$; on est alors ramené à démontrer ceci :

Pour $k \geq 1$, l'application $b \mapsto kb + \frac{db}{dy}$ est bijective dans $\mathbb{C}[y]$.

En fait, cette application envoie l'espace des polynômes de degré $\leq \ell$ dans lui-même, pour tout $\ell \geq 0$. On vérifie immédiatement qu'elle est injective, donc bijective.

4.2. À partir de maintenant, on fait l'hypothèse que F *n'a pas d'intégrale première*. On se place dans U, affine, ouvert de Zariski de $\mathbb{C}^2$, de coordonnées x, y, ne contenant ni la droite $x = 0$, ni les pôles de P (on pourrait aussi bien se placer au point générique de $\mathbb{C}^2$; peu importe).

La clef de la situation réside dans l'étude de la 1-*cohomologie relative* de U modulo π. De façon précise, posons $\Omega^i_{U/\pi} = \Omega^i_U/\pi \wedge \Omega^{i-1}_U$ ($i \geq 1$), et considérons le complexe de de Rham relatif $0 \to \mathcal{O}_U \xrightarrow{\bar d} \Omega^1_{U/\pi} \xrightarrow{\bar d} \Omega^2_{U/\pi} \to 0$, $\bar d$ étant la différentielle d usuelle modulo le passage au quotient par $\pi\wedge$ (ce passage au quotient est possible du fait qu'on a $d\pi = 0$).

Vu l'hypothèse que U est affine, l'hypercohomologie de ce complexe se réduit à la cohomologie des sections globales (pour ce type de raisonnements, voir par exemple [14]) :

$$0 \to \mathcal{O}(U) \xrightarrow{\bar d} \Omega^1(U)/\pi \wedge \mathcal{O}(U) \xrightarrow{\bar d} \Omega^2(U)/\pi \wedge \Omega^1(U) \to 0\,.$$

On note $H^i(U,\pi)$ les groupes de cohomologie ; du fait que π n'a pas d'intégrale première non constante, on a $H^0(U,\pi)=\mathbb{C}$.

L'ingrédient essentiel est la *variante relative à π de la connexion de Gauss-Manin*, qui se définit ainsi : soit α un cocyle de $\Omega^1(U)/\pi\wedge\mathcal{O}(U)$; on le relève en $\bar\alpha\in\Omega^1(U)$; il vérifie $d\bar\alpha=\pi\wedge\tilde\beta$, $\tilde\beta\in\Omega^1(U)$; on a $\pi\wedge d\tilde\beta=0$, donc $\tilde\beta$ est un 1-cocycle ; on vérifie que la classe $\beta\in H^1(U,\pi)$ de $\tilde\beta$ ne dépend que de la classe de α ; ceci donne une application $D : H^1(U,\pi)\to H^1(U,\pi)$ que j'appellerai par analogie avec la situation usuelle (où π est remplacé par une forme exacte) "connexion de Gauss-Manin par rapport à π".

Considérons alors le sous-espace vectoriel/$\mathbb{C}$ de $H^1(U,\pi)$ engendré par $[P\,dx]$, la classe de $P\,dx$ et par D. On le munit de la filtration suivante :

$$E_0=\mathbb{C}\,[P\,dx]\,,\quad E_1=E_0+D\,E_0,\dots,\quad E_k=E_{k-1}+D\,E_{k-1},\dots$$

Nous verrons que, suivant les exemples, E peut être de dimension finie ou infinie (on n'a pas ici de théorème de finitude, contrairement au cas usuel). Un énoncé partiel du résultat est le suivant ; le résultat complet viendra en cours de démonstration.

Théorème 4.3. – *(On fait toujours l'hypothèse "pas d'intégrale première".) La $\mathbb{C}$-cogèbre de Lie M du pseudogroupe de Galois de F est égale à $M=\mathbb{C}\,\pi\oplus E$, avec la filtration $M_k=\mathbb{C}\,\pi\oplus E_k$, $k\geq 0$, la différentielle d donnée par $d\pi=0$, $de=\pi\wedge De$, $e\in E$.*

Posons $\tilde U=U\times\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ de coordonnée z. Nous aurons besoin de la cohomologie relative à π de $\tilde U$, plutôt que de celle de U (définition analogue). En fait, elles sont égales par un argument classique : la dérivée de Lie du champ $\xi=z\frac{\partial}{\partial z}$ décompose les $\Omega^i(\tilde U)$ en composantes homogènes de degré $k\geq 0$ par rapport à z ; l'identité $L_\xi=i_\xi\,d+d\,i_\xi$ montre alors que la cohomologie relative à π est nulle en tous les degrés, sauf en degré 0. Ceci montre que l'application $H^i(\tilde U,\pi)\to H^i(U,\pi)$ induite par l'injection $U=U\times\{0\}\subset\tilde U$ est un isomorphisme. On vérifie aussi que cet isomorphisme commute à la connexion de Gauss-Manin.

On va donc considérer ici que E est contenu dans $H^1(\tilde U,\pi)$, et engendré par la classe $[\omega]$ de $\omega=dz-P\,dx$ et par D. La définition de M est modifiée en conséquence.

On va voir ceci : *On peut relever M dans $\Omega^1(\tilde U)$ (avec π relevé en π, $[\omega]$ relevé en ω) d'une manière compatible avec les différentielles extérieures sur M et $\Omega^1(U)$.*

Deux cas sont à distinguer :

i) E est de dimension infinie, i.e. les $D^i[\omega]$ sont linéairement indépendants : on relève de proche en proche ; appelant ω_k l'image cherchée de $D^k[\omega]$, on prend $\omega_0=\omega$, puis par récurrence ω_{k+1} vérifiant $d\omega_k=\pi\wedge\omega_{k+1}$. Un choix possible est, par exemple, $\omega_k=-\frac{\partial^k P}{\partial y^k}\,dx$.

ii) E est de dimension finie ; soit ℓ le plus petit entier tel qu'on ait une relation

$$D^\ell[\omega] + \sum a_i\, D^{\ell-i}[\omega] = 0\,.$$

En relevant jusqu'à l'ordre ℓ comme ci-dessus, on aura

$$\omega_\ell + \sum a_i\, \omega_{\ell-i} = df + g\pi\,, \quad f, g \in \mathcal{O}(U)\,.$$

On remplace alors $\omega_{\ell-1}$ par $\omega_{\ell-1} + f\pi$ (et on oublie ω_ℓ). Avec cette nouvelle valeur, on a bien

$$d\omega_{\ell-1} = -\pi \wedge (a_1\, \omega_{\ell-1} + \ldots + a_\ell\, \omega_0)\,;$$

ceci donne le relèvement cherché.

Notons σ l'application $M \to \Omega^1(\tilde{U})$ qui vient d'être définie ; on construit à partir de là une connexion de Cartan transverse de la manière suivante :

a) Cas de dimension infinie : la cogèbre M/M_0 est abélienne ; on voit qu'il faut prendre ici le groupe additif de dimension infinie $G = \varprojlim G_a^k$, de coordonnées $t_1, \ldots, t_k, \ldots$ (je n'écrit pas son action sur M ; elle sera claire quand la connexion sera écrite).

Le principal est ici $\tilde{U} \times G$; soit $\tilde{\sigma}$ le relèvement de σ à $\tilde{U} \times G$; posant $\tilde{\omega}_i = \tilde{\sigma}(D^i[\omega])$. On trouve que ce relèvement est donné par

$$\tilde{\sigma}(\pi) = \pi\,;\ \tilde{\omega}_0 = \omega_0 + t_1\,\pi\,, \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}_k = \omega_k + t_{k+1}\,\pi - dt_k\,, \quad k \geq 1\,.$$

On a encore, comme il se doit

$$d\tilde{\omega}_k = \pi \wedge \tilde{\omega}_{k+1}\,.$$

On obtient un pseudogroupe admissible pour le feuilletage F en fixant les $\tilde{\omega}_k$. Conformément à la théorie générale, il s'interprète comme le prolongement d'un pseudogroupe F-admissible sur $\tilde{U}$. Je me contenterai d'écrire ses équations sur une transversale $x = c^{te}$. La première équation s'écrit

$$d\bar{y} = dy\,, \quad d\bar{z} = dz + (\bar{t}_1 - t_1)\, dy\,,$$

d'où

$$\frac{\partial\, \bar{y}}{\partial\, y} = 1\,, \quad \frac{\partial\, \bar{y}}{\partial\, z} = 0\,; \quad \frac{\partial\, \bar{z}}{\partial\, z} = 1\,.$$

On voit que les autres équations donnent des prolongements de ces équations, sans donner rien de nouveau. Les solutions sont données par :

$$\bar{y} = y + c^{te}\,, \quad \bar{z} = z + \varphi(y)\,, \quad \varphi \text{ “arbitraire”}.$$

b) Cas de dimension finie. On reprend les notations de ii). Ici, on a $G = G_a^{\ell-1}$, de coordonnées $t_1, \ldots, t_{\ell-1}$. Avec des notations analogues à a), $\tilde{\sigma}(\pi)$ et les $\tilde{\omega}_k$, $k \leq \ell - 2$ sont données par la même formule que plus haut, et l'on a

$$\tilde{\omega}_{\ell-1} = \omega_{\ell-1} - dt_{\ell-1} - (a_1\, t_{\ell-1} + \ldots + a_{\ell-1}\, t_1)\, \pi\,.$$

On aura bien encore

$$d\tilde{\omega}_k = \pi \wedge \tilde{\omega}_{k+1}\,, \quad k \leq \ell - 2\,; \quad d\tilde{\omega}_{\ell-1} = -\pi \wedge (a_1\,\tilde{\omega}_{\ell-1} + \ldots + a_\ell\,\tilde{\omega}_0)\,.$$

On obtient encore un pseudogroupe admissible, prolongement d'un pseudogroupe F-admissible sur $\tilde{U}$. Sur une transversale $x = c^{te}$, le pseudogroupe obtenu est celui dont les solutions sont

$$\bar{y} = y + c^{te}\,, \quad \bar{z} = z + \varphi(y)\,, \quad \text{avec} \quad \frac{d^\ell\,\varphi}{dy^\ell} + \sum a_i\,\frac{d^{\ell-i}}{dy^i}\,\varphi = 0\,.$$

[Ceci peut se voir ainsi : on commence par choisir les ω_k comme plus haut $\omega_i = -\frac{\partial^k P}{\partial y^k}\,dx$; en restriction à $x = c^{\text{te}}$, ceci donne $\omega_0 = dz$, $\omega_k = 0$. La modification ii) ne change pas les ω_k, $k \leq 2$, et donne $\omega_{\ell-1} = a_\ell\,dz$. Avec ces valeurs, on calcule comme en b) les restrictions des $\tilde{\omega}_k$ à $x = c^{te}$, $0 \leq k \leq \ell - 1$, et on conclut facilement.]

Pour établir le théorème, il reste à démontrer que le pseudogroupe F-admissible obtenu est bien minimal, i.e. égal au pseudogroupe de Galois Z de F. Soit $W \subset \tilde{U}$ un ouvert sur lequel Z vérifie les conditions de régularité qui permettent de le représenter par une connexion de Cartan. L'invariance par translation en z permet de supposer que W est de la forme $\tilde{V} = V \times \mathbb{C}$, V ouvert de Zariski $\subset U$. On peut supposer $U = \mathbb{C}^2 - S$, $V = \mathbb{C}^2 - S'$, avec S et S' des courbes fermées, $S' \supset S$.

La cogèbre de Lie correspondant à Z est un quotient $\bar{M}$ de M (cf. appendice B) ; le groupe correspondant $\bar{G} \subset G$ est déterminé par $\bar{M}$ parce que G est additif. Comme $\bar{G}$ est aussi additif, le $\bar{G}$ fibré est trivial, donc égal à $\tilde{V} \times \bar{G}$. La connexion de Cartan donnera, par restriction à $V \times \{0\} \times \{e\}$, une application $\bar{M} \to \Omega^1(V)$; l'image de $\bar{M}_0$ coïncide avec celle de M_0, i.e. le sous-espace engendré par π et $P\,dx$; vu la forme de la différentielle de $\bar{M}$, ceci donne par passage au quotient une application $\bar{M} \to H^1(V, \pi)$. Pour démontrer que $\bar{M} = M$, i.e. que le passage au quotient est trivial, il suffit de démontrer ceci.

Lemme 4.4. – *La restriction $H^1(U, \pi) \to H^1(V, \pi)$ est injective.*

Soit donc $\alpha \in \Omega^1(U)$ un 1-cocycle, et supposons qu'on ait $\alpha = df + g\pi$, $f, g \in \mathcal{O}(V)$. Montrons que f et g proviennent de $\mathcal{O}(U)$.

Il suffit de le faire pour f ; supposons que ce ne soit pas le cas, et soit C une composante irréductible de $S' - S$ sur laquelle f a un pôle. On va voir que C est une feuille du feuilletage défini par $\left(dy - \frac{dx}{x}\right)$; mais on a vu au §2 que ceci est impossible.

Posons $\xi = x\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$; comme $\langle \xi, \pi \rangle = 0$, on a $\xi f = h \in \mathcal{O}(U)$; soit c le point générique de C, $\mathcal{O}_{U,c}$ son anneau local, et m son idéal maximal ; l'image de f dans le corps des fractions $\mathcal{O}_{U,c}$ s'écrit

$$\frac{P}{Q^{\ell'}} \quad \text{avec} \quad P, Q \in \mathcal{O}_{U,c}\,,\ P \notin m\,,\ Q \in m - m^2\,.$$

On a

$$\xi\left(\frac{P}{Q^\ell}\right) = \xi(h)\,,\ \text{d'où}\ \ell\,P\,\xi(Q) = Q\,\xi(P) - Q^{\ell+1}\,\xi(h) \in m\,;\ \text{d'où}\ \xi(Q) \in m\,,$$

ce qui entraîne le résultat cherché.

Remarque 4.5. – L'existence d'une intégrale première se ramène aussi à une question de cohomologie relative à π ; en effet, si $P\,dx$ est un cobord, on a

$$P\,dx = df + g\pi\,,\ f \in \mathbb{C}(x,y)\,,\ \text{d'où}\ dz - P\,dx - g\pi = d(z-f)$$

et $z-f$ est une intégrale première. Montrons la réciproque : soit $f = \frac{g}{h}$ une intégrale première, avec $g, h \in \mathbb{C}[x,y]$, premiers entre eux. Écrivons aussi $P = \frac{R}{S}$, avec $R, S \in \mathbb{C}[x,y]$, premiers entre eux, et posons

$$\xi = x\,S\,\frac{\partial}{\partial\,x} + S\,\frac{\partial}{\partial\,y} + x\,R\,\frac{\partial}{\partial\,z}\,;$$

on a

$$\xi\,f = 0\,,\ \text{d'où}\ \frac{\xi\,g}{g} = \frac{\xi\,h}{h}\,,\ \text{et}\ \xi\,g = ag\,,\ \xi\,h = ah\,,\ a \in \mathbb{C}\,[x,y,z]\,;$$

pour des raisons de degré en z, on voit que a en est indépendant. D'autre part un des deux g ou h dépend de z ; sinon f en serait indépendant, et serait une intégrale première de $dy - \frac{dx}{x}$, ce qui est impossible ; soit donc $g = g_0 + \ldots + g_\ell\,z^\ell$, $g_\ell \neq 0$ une solution de $\xi g = ag$; les $\frac{\partial\,\xi_g}{\partial\,z^k}$ en sont encore solutions ; on peut donc supposer $\ell = 1$; mais alors $g = g_0 + g_1\,z$ et g_1 sont solutions de cette équation ; donc $z + \frac{g_0}{g_1}$ est une intégrale première, et le résultat suit immédiatement.

4.6. Premiers exemples

Je donne ici deux exemples où, avec les notations de 4.4, M est de dimension finie. J'omets la vérification de l'absence d'intégrale première ; ceci peut se faire, en plus simple, comme dans l'exemple 4.7.

Prenons d'abord $P = \frac{1}{xy}$. Les solutions sont les déterminations de $\log\log x$; pour calculer M, il est plus simple, au lieu de Pdx, de partir de

$$\alpha = \frac{dy}{y} = Pdx + \frac{1}{y}\left(dy - \frac{dx}{x}\right)\,.$$

On a $d\alpha = 0$. Donc ici $M = M_0$, avec $d\left[\frac{dx}{xy}\right] = 0$.

Prenons ensuite $P = \frac{1}{y}$. Les solutions sont les déterminations de $\int \frac{dx}{\log x}$. Partant de

$$\alpha = x\,\frac{dy}{y} = Pdx + \frac{x}{y}\left(dy - \frac{dx}{x}\right)\,,$$

on trouve

$$d\alpha = dx \wedge \frac{dy}{y} = \frac{dx}{y} \wedge \pi = \alpha \wedge \pi\,.$$

On a encore

$$M = M_0\,, \quad \text{avec} \quad d\left[\frac{dx}{y}\right] = \left[\frac{dx}{y}\right] \wedge \pi\,.$$

Remarquons aussi que ces deux exemples peuvent se traiter autrement, en remarquant que, dans les deux cas, les feuilletages sont donnés par des équations différentielles linéaires en x et z lorsqu'on prend y comme variable. On peut alors appliquer la théorie linéaire classique (cf. I.5.9) ; incidemment, ceci rend la finitude de $\dim M$ évidente a priori.

4.7. Un autre exemple

Pour terminer, je vais montrer qu'en prenant $P = \frac{1}{x+y}$ on trouve une cogèbre de Lie M de dimension infinie.

Pour voir que le feuilletage F défini par $\pi = dy - \frac{dx}{x}$ et $\omega = dz - P dx$ n'a pas d'intégrale première, il suffit (cf. 4.5) de voir que $P dx$ n'est pas un cobord relativement à π. D'autre part on peut prendre les $\frac{\partial^k}{\partial\, y^k}\left(\frac{1}{x+y}\right) dx$ comme représentants des classes $D^k\left[\frac{dx}{x+y}\right]$. Finalement, l'absence d'intégrale première et la non finitude de $\dim M$ résultent du lemme suivant.

Lemme 4.7.1. – *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, non tous nuls ; alors la forme $Q\,dx$, avec $Q = \frac{\alpha_1}{x+y} + \ldots + \frac{\alpha_n}{(x+y)^n}$ n'est pas un cobord relativement à π.*

Il est commode de faire le changement de variable $(x, y) \to (x, t)$, avec $t = x + y$. Alors $\pi = dt - \frac{x+1}{x}\,dx$, et le lemme s'énonce ainsi : il n'existe pas de $f \in \mathbb{C}(x, t)$ vérifiant

$$\sum_1^n \frac{\alpha_k}{t^k} = \frac{\partial\, f}{\partial\, x} + \frac{x+1}{x}\,\frac{\partial\, f}{\partial\, t}\,.$$

On vérifie facilement qu'une variété polaire de f hors de $t = 0$ donne une solution algébrique de π, qui ne peut donc être que $x = 0$. On peut donc écrire

$$f = \sum \frac{f_k}{t^k}\,, \quad f_k \in \mathbb{C}\left[x, \frac{1}{x}\right]\,.$$

Si $\alpha_n \neq 0$, on voit, par récurrence sur l'ordre du pôle de f en t, que le terme le plus polaire est $\frac{f_{n-1}}{t^{n-1}}$; alors f_{n-1} doit vérifier

$$-(n-1)\,\frac{x+1}{x}\,f_{n-1} = \alpha_n\,;$$

si $n = 1$ ceci est impossible ; si $n \geq 2$ ceci est aussi impossible, car $\frac{x}{x+1} \notin \mathbb{C}\left[x, \frac{1}{x}\right]$. Ceci termine la démonstration.

5. Systèmes hamiltoniens intégrables

Soit X une variété de dimension $2n$, lisse et connexe, munie d'une 2-forme symplectique λ. On suppose qu'il existe n fonctions $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ linéairement indépendantes, leurs crochets de Poisson (pour λ) vérifiant $\{f_i, f_j\} = 0$, $1 \leq i, j \leq n$. Quitte à restreindre X, on peut supposer, ce qu'on fera désormais, que X est affine et que $df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$ est partout $\neq 0$.

Soit ξ le champ hamiltonien de $h = f_1$, défini par $\xi \rfloor \lambda = dh$; alors $\xi + \frac{\partial}{\partial t}$ définit un feuilletage F de dimension un de $X \times \mathbb{C}$. Le résultat suivant est classique.

Proposition 5.1. (Liouville) – *Au sens de la définition* 1.1, *F est naïvement intégrable (avec $k = 2$).*

Montrons d'abord ceci : on peut trouver $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tels qu'on ait $\lambda = -\sum df_i \wedge \omega_i$. Comme X est affine, il suffit de démontrer le résultat localement, au voisinage (de Zariski) de tout point $a \in X(\mathbb{C})$. En utilisant la fidèle platitude de $\hat{\mathcal{O}}_{X,a}$ sur $\mathcal{O}_{X,a}$ [56], il suffit d'établir le résultat pour les séries formelles en a. Mais alors le résultat est bien connu [on a même un résultat plus fort : il existe un voisinage V de a pour la topologie transcendante et des fonctions holomorphes $g_1, \ldots, g_n$ sur V telles que $f_1, \ldots, f_n$; $g_1, \ldots, g_n$ soit un système de "coordonnées de Darboux", i.e. vérifiant $\lambda = \sum df_i \wedge dg_i$].

Maintenant, je dis que le feuilletage F est défini par $df_1, \ldots, df_n$; $\omega_1 - dt$; $\omega_2, \ldots, \omega_n$. En effet, d'une part, par définition du crochet de Poisson, on a $\langle \xi, df_i \rangle = \{f_1, f_i\} = 0$, $1 \leq i \leq n$. D'autre part, on a $df_1 = \xi \rfloor \lambda = \sum \langle \xi, \omega_i \rangle \, df_i$, d'où $\langle \xi, \omega_i \rangle = 0$ pour $i \geq 2$, et $\langle \xi, \omega_1 \rangle = 1$, donc $\langle \xi + \frac{\partial}{\partial t}, \omega_1 - dt \rangle = 0$. Pour établir le résultat, il suffit donc de montrer que $df_1, \ldots, df_n, \omega_1, \ldots, \omega_n$ sont linéairement indépendantes ; en fait, elles forment une base de $\Omega^1_X(a)$ en tout point $a \in X(\mathbb{C})$; ceci parce que, par définition des formes symplectiques, λ^n est partout $\neq 0$.

Pour démontrer la proposition, on remarque maintenant ceci : de $d\lambda = 0$, on déduit qu'on a $\sum df_i \wedge d\omega_i = 0$. On en déduit qu'il existe des $\pi_{ij} \in \Gamma(X, \Omega^1_X)$ avec $\pi_{ij} = \pi_{ji}$, vérifiant $d\omega_j = \sum df_j \wedge \pi_{ij} = 0$ (utiliser le fait que les df_i et les ω_j forment une base de Ω^1_X). La proposition résulte immédiatement de là.

5.2. Quitte à restreindre X, on peut supposer que $f = (f_1, \ldots, f_n)$ définit une surjection submersive de X sur un ouvert de Zariski affine $T \subset \mathbb{C}^n$. Soit d'autre part S la variété des intégrales premières de F, et soit π la projection ; alors (toujours quitte à prendre des rétrécissements convenables) f factorise à travers une surjection $\psi : S \to T$.

Dans la suite, je ferai l'hypothèse suivante (dans la terminologie classique, "F n'est pas super intégrable").

$(*)$ *La dimension de S est égale à n.*

Sous cette hypothèse S est un revêtement fini de T, qu'on peut supposer étale. Je noterai dans la suite $(s_1, \ldots, s_n)$ les coordonnées de T ; alors $(s_1 \circ \psi, \ldots, s_n \circ \psi)$ (que je noterai aussi $s_1, \ldots, s_n$) sont des coordonnées étales de S. Pour simplifier, je noterai aussi $s_1, \ldots, s_n$, au lieu de $f_1, \ldots, f_n$, leurs relèvements à X.

Pour $c \in S(\mathbb{C})$, notons $X(c)$ la fibre de π au-dessus de c. Posons aussi $\omega_i(c) = \omega_i \mid X(\mathbb{C})$. Comme ces formes sont fermées, un pseudogroupe admissible pour $F(c) =$ la restriction de F à $X(c) \times \mathbb{C}$ sera donné par les équations

$$\overline{\omega_1(c)} - \overline{dt} = \omega_1(c) - dt\,, \quad \text{et} \quad \bar{\omega}_i(c) = \bar{\omega}_2(c) \quad (i \geq 2)\,.$$

On voit que ce sera le pseudogroupe de Galois de $F(c)$ si ce feuilletage n'admet pas d'intégrale première. Il me parait probable que, sous l'hypothèse $(*)$, ce sera vrai sauf pour une famille dénombrable de valeurs de c, mais je n'en ai pas de démonstration.

5.3. La détermination du pseudogroupe de Galois de F lui-même va faire intervenir de façon essentielle la cohomologie relative de $\pi : X \to S$ en dimension 1, et la connexion de Gauss-Manin qui lui est associée.

Je vais rappeler rapidement ce dont il s'agit. Les résultats dont j'aurai besoin se trouvent, par exemple, dans [14].

On pose

$$\Omega^k_{X/S} = \Omega^k_X / \sum ds_i \wedge \Omega^{k-1}_X \quad (k \geq 0)\,.$$

Le complexe de de Rham relatif $DR_{X/S}$ est le complexe

$$\mathcal{O}_X = \Omega^0_{X/S} \to \Omega^1_{X/S} \to \ldots \to \Omega^k_{X/S} \to \ldots$$

dont la différentielle $\bar{d}$ est obtenue par passage au quotient à partir de la différentielle d usuelle.

Quitte à prendre des rétrécissements, on peut faire les hypothèses suivantes :

i) π est affine ; alors l'hypercohomologie $R^\bullet \pi_*(DR_{X/S})$ du complexe de de Rham relatif est égale à la cohomologie du complexe $\pi_*(DR_{X/S})$.

ii) $\pi : X \to S$ est une fibration topologiquement triviale ; de plus les $\mathcal{O}_S$-faisceaux de cohomologie du complexe précédent, notés $H^k_{DR}(X/S)$ sont libres de type fini ; leur fibre au point $c \in S(\mathbb{C})$ sont égales aux groupes $H^k(X(c), \mathbb{C})$ de cohomologie de de Rham (algébrique ou analytique), ou de cohomologie singulière.

iii) Les $\mathcal{O}_S$-faisceaux $H^k_{DR}(X/S)$ sont munis d'une connexion, notée D, la "connexion de Gauss-Manin" ; le système local de ses sections horizontales analytiques correspond au système local de la cohomologie singulière (obtenu par l'isomorphisme des fibres topologiques $X(c)^{\mathrm{top}}$).

iv) Dans les coordonnées $(s_1, \ldots, s_n)$, D s'exprime ainsi : soit $\alpha \in \pi_* \Omega^k_X$ dont l'image $\bar{\alpha}$ dans $\pi_*(\Omega^k_{X/S})$ soit un $\bar{d}$-cocycle ; on a alors $d\alpha = \sum ds_i \wedge \beta_i$, $\beta_i \in$

$\pi_*\,\Omega^k_X$; soit $[\alpha]$ la classe de α dans $H^k_{DR}(X/S)$; alors on vérifie que les $\bar\beta_i$ sont aussi des cocycles, et que les classes $[\beta_i]$ ne dépendent que de $[\alpha]$. On a $D\,[\alpha] = \sum [\beta_i]\,ds_i$; j'écrirai ci-dessous en abrégé $\frac{\partial\,[\alpha]}{\partial\,s_i} = [\beta_i]$.

5.4. Remarques diverses

i) L'hypothèse $(*)$ entraîne que les $[\omega_i]$ sont linéairement indépendants sur $\mathcal{O}_S$; en effet, dans le cas contraire, on aurait $\sum \varphi_i\,\omega_i = \sum \psi_j\,ds_j + d\chi$, avec $\varphi_i \in \Gamma(S,\mathcal{O}_S)$, non tous nuls, et $\psi_i, \chi \in \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$; on aura donc

$$\varphi_1(\omega_1 - dt) + \sum_{i\geq 2} \varphi_i\,\omega_i \equiv d(\chi - t\,\varphi_1) \mod ds_1, \ldots, ds_n\,.$$

Par suite, $\chi - t\,\varphi_1$ sera une intégrale première, dont on vérifie facilement qu'elle n'est pas dans $\Gamma(S,\mathcal{O}_S)$.

ii) Supposons qu'il existe $\Lambda \in \Gamma(X,\Omega^1_X)$ avec $\lambda = d\Lambda$ (dans le langage classique, Λ est "l'action"). La classe de Λ est un cocycle, et l'on a $[\omega_i] = \frac{\partial}{\partial\,s_i}\,[\Lambda]$. Dans le cas général, où l'on ne suppose pas l'existence de Λ, on aura cependant

$$\frac{\partial}{\partial\,s_j}\,[\omega_i] = \frac{\partial}{\partial\,s_i}\,[\omega_j]$$

(à cause de la symétrie $\pi_{ij} = \pi_{ji}$ de 5.1).

iii) Dans la suite on pourra remplacer (X,S) par un rétrécissement (X',S), à cause du fait suivant : si ce rétrécissement vérifie aussi les propriétés 5.3, la restriction $H^k_{DR}(X/S) \to H^k_{DR}(X'/S)$ est injective pour $k = 0, 1$. Compte-tenu de 5.3.ii) ceci se ramène à une propriété analogue, et élémentaire, de la cohomologie des fibres.

iv) On aura aussi besoin de la projection $X \times \mathbb{C} \to S$, composée de $X \to S$ et de la projection évidente $X \times \mathbb{C} \to X$. On vérifie, comme au §4, que les inclusions $X \times \{a\} \to X$, $a \in \mathbb{C}$ donnent des isomorphismes $H^k_{DR}(X \times \mathbb{C}/S) \to H^k_{DR}(X/S)$.

5.5. Soit $\mathcal{D}_S$ le faisceau des opérateurs différentiels linéaires sur S, à coefficients dans $\mathcal{O}_S$; les formules de 5.3.iv) munissent les $H^k_{DR}(X/S)$ d'une structure de $\mathcal{D}_S$-module (en fait, d'un type très particulier : il est cohérent et même libre sur $\mathcal{O}_S$, en particulier holonome sur $\mathcal{D}_S$).

Prenons en particulier $k = 1$. Par définition, je noterai M le sous-$\mathcal{D}_S$-module de $H^1_{DR}(X/S)$ engendré par les $[\omega_i]$; on le munit de la filtration engendrée par les $[\omega_i]$, i.e. $M_0 = \sum \mathcal{O}_S[\omega_i]$, $M_1 = \mathcal{D}_{S,1}\,M_0, \ldots, M_k = \mathcal{D}_{S,k}\,M_0$, avec $\mathcal{D}_{S,k}$ les opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$. Par le résultat de finitude rappelé plus haut, on a $M = M_k$ pour $k \gg 0$. Quitte à restreindre encore S, on peut supposer tous les M_k libres sur $\mathcal{O}_S$.

Posons $\tilde M = M \oplus \Omega^1_S$, muni de la filtration $\tilde M_k = M_k \oplus \Omega^1_S$ $(k \gg 0)$; on peut considérer $\tilde M$ comme une $(\mathbb{C},S)$-cogèbre de Lie, avec la différentielle évidente sur Ω^1_S, et la différentielle sur M donnée par $dm = \sum ds_i \wedge \frac{\partial\,m}{\partial\,s_i}$.

Définissons maintenant le groupe virtuel associé (cette construction est en fait valable pour tous les systèmes différentiels linéaires ; elle n'apporte aucune information supplémentaire par rapport à M, mais sera utile pour fabriquer les espaces de repères qui interviendront). Le groupe G admissible par rapport à M doit avoir M/M_0 pour cogèbre de Lie ; cette cogèbre est abélienne. On prendra pour G le groupe additif au-dessus de S correspondant, i.e. le fibré vectoriel sur S défini par M/M_0 (je rappelle que je prends, comme au Chapitre I, la correspondance *contravariante* faisceaux-fibrés ; les sections de G sur S sont donc les duales de celles de M/M_0) ; G est muni de la filtration duale de celle de M/M_0.

Pour écrire l'action des sections de G sur celles de M, on remarque que l'application $\mathcal{D}_S^n \to M$ définie par $(p_1, \dots, p_n) \mapsto \sum p_i[\omega_i]$ fait de M un quotient filtré de $\mathcal{D}_S^n$. Il suffit donc de décrire cette action avec M remplacé par $\mathcal{D}_S^n$, et ensuite de faire une restriction – passage au quotient. Ici, la $(\mathbb{C}, S)$ algèbre de Lie est $\mathcal{D}_S^n \oplus \Omega_S^1$, avec la différentielle

$$dp_i = \sum ds_j \wedge \frac{\partial}{\partial s_j} p_i \,, \quad p_i \in \mathcal{D}_S^n$$

(et la différentielle évidente sur Ω_S^1). Le groupe G est la limite projective des $G_k = \oplus \mathcal{O}_S \, t_{i,\alpha}$, $1 \le i \le n$, $1 \le |\alpha| \le k$ $(\alpha \in \mathbb{N}^n)$; notons de même $\pi_{i,\alpha}$ la base évidente de $\mathcal{D}_S^n$; on a

$$d\,\pi_{i,\alpha} = \sum ds_j \wedge \pi_{i,\alpha+\varepsilon_j}$$

et l'action de G est donnée de la manière suivante, cas particulier "linéaire" des formules de II.3.

Soit $g = \{t_{i,\alpha}\}$, $1 \le i \le n$, $(\alpha) \ge 1$ une section de G, i.e. une collection de sections de $\mathcal{O}_S$, paramétrées par (i, α) ; on convient que $t_{i,0} = 0$. Sur Ω_S^1, l'action de g est l'identité. Sur $\mathcal{D}_S$, elle est $\mathcal{O}_S$-linéaire, avec

$$\pi_{i,\alpha}^g = \pi_{i,\alpha} \, - dt_{i,\alpha} + \sum t_{i,\alpha+\varepsilon_j} \, ds_j \,.$$

Revenant à la situation $(\tilde{M}, G)$, les choses peuvent s'écrire ainsi : soit $m \to \bar{m}$ la projection $M \to M/M_0$, et considérons M/M_0 comme le faisceau sur S des fonctions sur G linéaires dans les fibres. Alors une section de G est une flèche $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(M/M_0, \mathcal{O}_S)$ et l'on a

$$m^g = m - dg(\bar{m}) + \sum g \left(\overline{\frac{\partial\, m}{\partial\, s_i}} \right) ds_i \,,$$

sur une section de M.

Ceci posé, le résultat principal de ce paragraphe est le suivant. Comme au §4, je donne un énoncé partiel. Le résultat complet viendra en cours de démonstration.

Théorème 5.6. – *Outre l'hypothèse* $(*)$*, supposons que* $\pi : X \to S$ *admet une section. Alors le groupe virtuel transverse du pseudogroupe de Galois de* F *est égal à* $(\tilde{M}, G)$*, muni de la filtration indiquée.*

D'après la remarque 5.4iv), on peut considérer M comme le sous-$\mathcal{D}_S$-module de $H^1_{DR}(X \times \mathbb{C}/S)$ engendré par les classes $[\omega_1 - dt]$, $[\omega_2], \ldots, [\omega_n]$. Comme au §3, le point essentiel consiste à relever $\tilde{M}$ dans les formes différentielles d'un espace de repères convenable au-dessus de $X \times \mathbb{C}$, i.e. $(X \times \mathbb{C}) \underset{S}{\times} G$. Dans le cas où $n = 1$, la démonstration est la même qu'au §4. Dans le cas général, elle est un peu plus compliquée. Bien entendu, les hypothèses de 5.3 et 5.5 seront faites implicitement chaque fois que nécessaire.

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

a) Relèvement de $\tilde{M}$ dans les formes sur $X \times \mathbb{C}$

Prenons des formes $\pi_i \in \Gamma(X \times \mathbb{C}, \Omega^1_{X\times\mathbb{C}})$, $1 \leq i \leq N$, dont les classes relatives soient des cocycles, et telles que les $[\pi_i]$ forment une base de $H^1_{DR}(X \times \mathbb{C}/S) = H^1_{DR}(X/S)$; on peut supposer qu'on a $\pi_1 = \omega_1 - dt$, $\pi_i = \omega_i$, $2 \leq i \leq n$ (les classes correspondantes sont indépendantes, donc on a $n \leq N$).

Posons

$$D\,[\pi_i] = \sum \varphi_i^{jk}\,[\pi_k]\,ds_j\,, \qquad \varphi_i^{jk} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)\,.$$

Posons d'autre part,

$$d\pi_i = \sum ds_j \wedge \psi_i^j\,, \qquad \psi_i^j \in \Gamma(X \times \mathbb{C}, \Omega^1_{X\times\mathbb{C}})\,;$$

les ψ sont des cocycles relatifs, et l'on a

$$D\,[\pi_i] = \sum ds_j\,[\psi_i^j]\,;$$

par suite, on a

$$\psi_i^j = \sum \varphi_i^{jk}\,\pi_k + \sum \chi_i^{jk}\,ds_k + d\lambda_i^j\,,\ \text{avec}\ \chi_i^{jk}\,,\ \lambda_i^j \in \Gamma(X \times \mathbb{C}, \Omega^1_{X\times\mathbb{C}})\,;$$

en reportant dans l'expression de $d\pi_i$, il vient

$$d\pi_i = \sum \varphi_i^{jk}\,ds_j \wedge \pi_k + \sum ds_j \wedge d\lambda_i^j \mod (ds_j \wedge ds_k\,,\ 1 \leq j\,,\ k \leq n)\,.$$

La première opération consiste à remplacer π_i par $\pi_i + \sum \lambda_i^j\,ds_j$, ce qui ne change pas sa classe relative ; avec cette nouvelle valeur, on a

$$(5.7)\quad d\pi_i = \sum \varphi_i^{jk}\,ds_j \wedge \pi_k + \sum \mu_i^{jk}\,ds_j \wedge ds_k\,, \quad \mu_i^{jk} \text{ sections de } \mathcal{O}(X \times \mathbb{C})\,.$$

En fait, on a le résultat suivant :

Lemme 5.8. – *Les μ_i^{jk} sont des sections de $\mathcal{O}(S)$.*

Il suffit de vérifier qu'on a $d\mu_i^{jk} = 0 \mod (ds_1, \ldots, ds_n)$; pour le voir on dérive 5.7 ; en utilisant le fait que les φ_i^{jk} sont les coefficients d'une connexion plate, on trouve

$$\sum_{j,k} d\mu_i^{jk} \wedge ds_j \wedge ds_k = 0 \quad (\mathrm{mod}\ ds_\ell \wedge ds_m \wedge ds_p)\,,$$

et le résultat suit aussitôt.

b) Relèvement à l'espace des repères

Le relèvement à l'espace des repères $P = (X \times \mathbb{C}) \underset{S}{\times} G$ est donné ici par les formules suivantes, où $\overline{[\pi_i]}$ désigne la classe de $[\pi_i]$ dans M/M_0, cet espace étant considéré comme espace de fonctions sur G ; les formules sont analogues à celles qu'on a écrites plus haut pour l'action de G

$$\tilde{\pi}_i = \pi_i - d\overline{[\pi_i]} + \sum ds_j \wedge \overline{\frac{\partial}{\partial s_j}\,[\pi_i]}\,.$$

Par linéarité, la formule (5.7) est encore vraie pour les $\tilde{\pi}_i$; explicitement, on a

$$(5.7)^{\sim} \quad d\tilde{\pi}_i = \sum \varphi_i^{jk}\, ds_j \wedge \tilde{\pi}_k + \sum \mu_i^{jk}\, ds_j \wedge ds_k\,, \text{ avec } \varphi_i^{jk}, \mu_i^{jk} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)\,.$$

Les formes ds_j et $\tilde{\pi}_j$ définissent un feuilletage $\tilde{F}$ de dimension un de P, dont les feuilles sont étales sur celles de F ; ceci résulte de ce que les $d\overline{[\pi_i]}$, $n+1 \leq i \leq N$ sont linéairement indépendantes ; donc les $\tilde{\pi}_i$ et les ds_j sont linéairement indépendantes. La condition de Frobenius résulte de $(5.7)^{\sim}$.

Posons d'autre part $\tilde{N} = \Omega^1_S \oplus N$, avec N égal à M comme $\mathcal{O}_S$-module, la dérivation sur N étant donnée par (5.7) ou $(5.7)^{\sim}$. Alors $\tilde{N}$ est une $(\mathbb{C}, S)$-cogèbre de Lie : la condition de Jacobi $d^2 = 0$ se voit à partir de $(5.7)^{\sim}$. [Noter que (5.7) ne suffirait pas ici, les π_i n'étant pas nécessairement indépendantes.] En faisant agir G sur $\tilde{N}$ comme sur $\tilde{M}$, on obtient un groupe virtuel $(N, \tilde{G})$ et une connexion de Cartan transverse pour F admettant ce groupe virtuel ; ces données définissent un pseudogroupe admissible Z pour F. Le résultat final de ce paragraphe est alors le suivant ; il contient (5.6) comme cas particulier.

Théorème 5.9. – *Avec les notations précédentes, on a ceci :*

1) *Si $\pi : X \to S$ admet une section, $(\tilde{N}, G)$ est isomorphe à $(\tilde{M}, G)$.*
2) *Dans le cas général, Z est le pseudogroupe de Galois de F.*

Par contre, je ne sais pas si $(\tilde{N}, G)$ est isomorphe à $(\tilde{M}, G)$ en général.

Démontrons d'abord 1). Il suffit de voir que l'existence d'une section $\lambda : S \to X$ de π permet de se débarasser des termes quadratiques dans (5.6.a) or ceci est immédiat : il suffit de remplacer π_i par $\pi_i - \pi_i \circ (\lambda \circ \pi)$ qui est équivalent à π_i et s'annule sur $\lambda(S)$.

Démontrons maintenant 2), en admettant l'existence de λ. Remarquons d'abord ceci : représentons Z à partir de la section λ, et soit (M', G') le groupe virtuel obtenu. Ce groupe virtuel est équivalent à (M, G) au sens de II.4.6 (cf. remarque II.6.11). Mais, ici, G est additif, donc le fibré décrivant l'équivalence est trivial. Donc (M', G') est isomorphe à (M, G).

Maintenant, la démonstration est analogue à celle du §4. Si Z n'était pas minimal, le pseudogroupe de Galois $Z' \subset Z$ serait représenté, à partir de la

section λ, par un groupe virtuel $(\tilde{M}', G')$ au-dessus de S, avec M' quotient de M et G' sous-groupe de G (noter que l'hypothèse $(*)$ est essentielle ici). Mais G, donc G', étant additif, le fibré correspondant serait trivial, et la connexion de Cartan proviendrait d'une application $M' \to \Gamma(X \times \mathbb{C}, \Omega^1_{X\times\mathbb{C}})$ quotient de celle de M. Or, compte tenu de 5.4.iii) (appliqué ici à $X \times \mathbb{C}$ au lieu de X), ceci est impossible si $M' \neq M$.

Reste à démontrer 2) dans le cas général. Pour cela, on prend une section multiforme de π, i.e. un revêtement étale convenable $\alpha : \tilde{S} \to S$, et une application $\lambda : \tilde{S} \to X$ vérifiant $\alpha = \pi \circ \lambda$. Posons $\tilde{X} = \tilde{S} \underset{S}{\times} X$. On relève F à $\tilde{X}$; on peut alors appliquer ce qui précède. Il suffit ensuite de redescendre de $\tilde{X}$ à X, en utilisant les résultats de III.4.

6. Suite du précédent : le pendule simple

6.1. Je garde les notations du §5. Un cas particulier intéressant est celui des systèmes dits "algébriquement intégrables", c'est-à-dire, en gros, ceux dont l'intégration fait intervenir une famille Y de variétés abéliennes au-dessus de S et de champs verticaux dans Y, qui seront nécessairement linéaires dans chaque fibre. On trouvera différents exemples (géodésiques des quadriques, toupies de Lagrange et Kovalevskaia, etc...), et une introduction au sujet, par exemple dans [1].

Il serait intéressant d'étudier ces exemples, du point de vue Galois différentiel, car ils font très probablement intervenir des groupes algébriques différentiels construits à partir de familles de variétés abéliennes ; sur ce dernier sujet, cf. [3].

Je me contenterai ici de traiter le cas du pendule simple, en reprenant et complétant ce que j'en dis dans [42]. Incidemment, un exemple voisin, l'oscillateur cubique donnerait des résultats tout à fait analogues [cet exemple est donné par $\lambda = dx \wedge dy$, $h = y^2 - (x^3 + x)$].

Le pendule simple décrit le mouvement d'une particule sans frottement sur un cercle vertical sous l'action de la pesanteur. Je prends ici les normalisations suivantes : le cercle est donné, dans le plan (x, y) par l'équation $x^2 + y^2 - y = 0$; la force est verticale le long de l'axe des y ; l'intégrale d'énergie est donnée par $4(x'^2 + y'^2) + y = s$; on suppose dans la suite $s \neq 0, 1$.

En dérivant l'équation du cercle, on a $2xx' + (2y - 1)\, y' = 0$; en éliminant x et x', on trouve $y'^2 = y(y - 1)(y - s)$. C'est un système hamiltonien, que l'on peut décrire ainsi en utilisant les calculs de 5.1 : S est la courbe $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ (ou $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$) ; $X \subset \mathbb{C}^2 \times S$ est la famille $z^2 = y(y - 1)(y - s)$; le feuilletage F de $X \times \mathbb{C}$ est donné par $\left(ds, \frac{dy}{z} - dt\right)$, et la structure symplectique par $\frac{dy}{z} \wedge ds$.

[Le sens de ces formules est le suivant : la forme $\frac{dy}{z}$ est rationnelle sur X, mais sa classe relative $\bmod ds$ est régulière ; il suffit alors de remplacer $\frac{dy}{z}$ par n'importe quelle forme $\omega_0 \in \Omega^1(X)$ dont la classe relative est de celle de $\frac{dy}{z}$;

comme X est affine, un tel ω existe. Le feuilletage et la forme symplectique ne dépendent pas de ω.]

Il est connu que X peut être complété en $\bar{X} \xrightarrow{\bar{\pi}} S$ par l'adjonction d'une famille de points à l'infini (notée ∞ dans la suite) en une famille de courbes elliptiques, la *courbe* (ou *famille*) *de Legendre*. La classe relative de $\frac{dy}{z}$ est régulière sur $\bar{X}$ ("$\frac{dy}{z}$ est de première espèce") ; le feuilletage et la structure symplectique s'étendent alors à $\bar{X}$; on notera $\bar{F}$ l'extension de F.

6.2. Pour l'instant, je n'utilise pas la dernière remarque. Le pseudogroupe de Galois du feuilletage F de X est donné par 5.6 (comme on est en dimension un, les sections de $\pi : X \to S$ n'interviennent pas ; si l'on tient à en avoir une, on peut prendre $y = z = 0$).

Je reprends les notations de 5.6. Soit $\omega_0 \in \Omega^1(X)$, de même classe relative que $\frac{dy}{z} \bmod ds$; la cogèbre de Lie M est le sous-faisceau de $H^1_{DR}(X \times \mathbb{C}/S)$ engendré par la classe $[\omega_0 - dt]$; il revient au même de considérer le sous-faisceau de $H^1_{DR}(X/S)$ engendré par $[\omega_0]$. D'après un résultat classique de Legendre, le polynôme minimal de $[\omega_0]$ est

$$L = \frac{d^2}{ds^2} + a\,\frac{d}{ds} + b\,, \text{ avec } a = \frac{1-2s}{s(1-s)}\,,\ b = \frac{-1}{4s(1-s)}\,.$$

On voit alors qu'il existe $\omega_1 \in \Omega^1(X \times \mathbb{C})$ vérifiant

$$d(\omega_0 - dt) = ds \wedge \omega_1\,;$$

$$d\omega_1 = -ds_1[a\omega_1 + b(\omega_0 - dt)]\,.$$

Le calcul est un cas particulier de ceux des §4 et 5 : on commence par choisir un ω_1' vérifiant $d(\omega_0 - dt) = ds \wedge \omega_1'$; on a nécessairement

$$d\omega_1' = -ds \wedge [a\omega_1 + b(\omega_0 - dt) + df]\,;$$

il suffit alors de prendre $\omega_1 = \omega_1' - f\,ds$. Notons aussi que, ω_0 étant fixé, ω_1 est unique à un facteur $\varphi\,ds$ près, $\varphi \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ (vérification immédiate).

Le groupe virtuel est alors $(\tilde{M}, G)$ avec $\tilde{M} = M \oplus \Omega^1_S$, $G = G_a$, qu'on paramètre par u. Le relèvement ("connexion de Cartan") de (ω_0, ω_1) à l'espace des repères $X \times \mathbb{C} \times G_a = X \times \mathbb{C}^2$, est (π_0, π_1), avec

$$\pi_0 \equiv \omega_0 - dt + u\,ds\,; \qquad \pi_1 = \omega_1 - du - au\,ds\,. \tag{6.2.1}$$

Cela détermine le pseudogroupe de Galois de F, qu'on notera Z (l'indétermination de π_1 est sans effet ici : en effet remplacer π_1 par $\pi_1 + \varphi\,ds$ ne change pas les équations du pseudogroupe qui s'écrivent $\bar{s} = s$, $\bar{\pi}_0 = \pi_0$, $\bar{\pi}_1 = \pi_1$).

6.3. Avant d'étudier les sections transversales de Z, il est naturel d'étudier l'extension de Z à $\bar{X}$. Pour le décrire au voisinage de l'infini, prenons une autre carte affine X', avec $X \cup X' = \bar{X}$, par exemple $X' = \bar{X}$ privé de $z = 0$.

Il existe alors $\omega'_0 \in \Omega^1(X')$ ayant même classe relative par rapport à ds que $\frac{dy}{z}$; on aura $\omega'_0 = \omega_0 + f\,ds$, f régulière sur $X \cap X'$; on a encore $L[\omega'_0] = 0$. Comme ci-dessus, on trouve alors $\omega'_1 \in \Omega^1(X' \times \mathbb{C})$ vérifiant

$$d(\omega'_0 - dt) = ds \wedge \omega'_1\,; \quad d\omega'_1 = -ds \wedge [a\omega'_1 + b(\omega'_0 - dt)]\,.$$

On relève alors à $X' \times \mathbb{C} \times G_a$ par des formules analogues à (6.2.1), avec (ω_0, ω_1, u) remplacés par $(\omega'_0, \omega'_1, u')$.

Ces deux cartes se recollent de la manière suivante ; en utilisant les équations de $d\omega_0$ et $d\omega'_0$, on trouve $\omega'_1 = \omega_1 - df + g\,ds$, g régulière sur $(X \cap X') \times \mathbb{C}$. Ensuite, en utilisant les équations de $d\omega_1$ et $d\omega'_1$, on trouve $g = -af + \varphi$, $\varphi \in \mathcal{O}(S)$; on peut sans inconvénient supposer $\varphi = 0$ (cf. remarque à la fin de 5.2).

On recolle alors les deux fibrés en un G_a-fibré V sur $X \times \mathbb{C}$ par $u' = u + f$; les deux connexions de Cartan se recollent pour donner une extension $\bar{Z}$ de Z à $\bar{X} \times \mathbb{C}$. On voit en particulier que les conditions de régularité considérées en I.5.3 sont satisfaites sur $\bar{X} \times \mathbb{C}$ tout entier.

A noter que le fibré V n'est pas trivial, même en restriction aux fibres au-dessus de $\bar{X} \times \mathbb{C}$ (il est en fait égal à l'image réciproque par $\bar{X} \times \mathbb{C} \to \bar{X}$ de $J_1(\bar{\pi})$; je n'entre pas dans les détails).

6.4. Déterminons la restriction de $\bar{Z}$ à une transversale déterminée par une section de $\bar{\pi}$, par exemple la transversale $y = z = 0$. Ceci se fait immédiatement en se restreignant dans 6.2 à la section $y = z = 0$; il est encore plus simple de reprendre les calculs de 6.2 en partant de $\omega''_0 = -dt$ et en cherchant ω''_1 vérifiant

$$d\omega''_0 = ds \wedge \omega''_1\,, \quad d\omega''_1 = -ds \wedge (a\omega''_1 + b\omega''_0)\,;$$

on trouve immédiatement $\omega''_1 = -b\,t\,ds$, modulo un terme négligeable $\varphi\,ds$, $\varphi \in \mathcal{O}(S)$, qu'on peut supposer nul.

Le relèvement est donné par

$$\pi''_0 = -dt + u\,ds\,, \quad \pi''_1 \equiv -du - (au + bt)\,ds\,.$$

Le pseudogroupe est donné par $\bar{s} = s$, $\bar{\pi}''_0 = \pi''_0$, $\bar{\pi}''_1 = \pi''_1$; on trouve

$$\bar{u} - u = \frac{d}{ds}(\bar{t} - t)\,, \quad \frac{d}{ds}(\bar{u} - u) = -[a(\bar{u} - u) + b(\bar{t} - t)]\,,$$

i.e. $L(\bar{t} - t) = 0$. C'est le pseudogroupe des translations du groupe différentiel additif $L(t) = 0$, c'est-à-dire de la connexion de Gauss-Manin $\mathbb{H}^1_{DR}(\bar{X}/S)$, $\mathbb{H}$ l'hypercohomologie.

6.5. La restriction Z' de $\bar{Z}$ à une transversale $t = c^{te}$ est plus intéressante (peu importe la constante, car $\bar{Z}$ est stable par translation en t).

Pour l'étudier, je rappelle que la famille $\bar{X} \xrightarrow{\bar{\pi}} S$ est un fibré en groupes au-dessus de S, dont on prend traditionnellement la section ∞ comme section

unité. Le théorème d'Abel nous dit ceci : soit $S \times \mathbb{C}$ l'algèbre de Lie au-dessus de S de $\bar{X}$ (c'est bien un fibré trivial sur S, car $\Omega^1_{\bar{X}/S}$ est trivial, de section la classe de $\frac{dy}{z}$). Alors l'application exponentielle $p : (S \times \mathbb{C})^{\mathrm{an}} \to \bar{X}^{\mathrm{an}}$ est un revêtement ; de plus l'image inverse de la classe relative $\frac{dy}{z} \bmod ds$ peut être prise égale à $d\tau \bmod ds$, τ la coordonnée de $\mathbb{C}$. De plus la loi de groupe sur $\bar{X}$ se relève en l'addition de τ.

Montrons d'abord que Z' est le pseudogroupe des translations d'un groupe différentiel construit sur $\bar{X} \to S$. Écrivons G pour $\bar{X}$, et soit $\tilde{G}$ le groupe différentiel "sans équations" construit sur $G \xrightarrow{\bar{\pi}} S$, i.e. $\tilde{G}_k = J_k(\bar{\pi})$ (cf. Appendice A). En vertu des propriétés de régularité de Σ (donc de Z') vues en 6.3, il suffit pour cela de voir que Z' est un sous-pseudogroupe du pseudogroupe des translations de $\tilde{G}$ (cf. loc.cit.). Or, si l'on note $\{\omega_0\}$ la classe relative $\bmod ds$ de $\frac{dy}{z}$, $\tilde{G}$ est défini par les équations $\bar{s} = s$, $\{\bar{\omega}_0\} = \{\omega_0\}$; d'autre part, ces équations sont satisfaites par Z' (pour le voir, il suffit de restreindre à $t = c^{te}$ les équations de 6.3).

Pour expliciter le groupe différentiel en question, il est commode de se placer dans la catégorie analytique, et de décrire le relèvement de ce groupe à $S \times \mathbb{C}$. Pour cela, on remplace $\frac{dy}{z} \bmod ds$ par $d\tau \bmod ds$. Le même calcul qu'à la fin de 6.4 donne $L(\tau) = 0$.

Sous cette forme, cette équation a d'abord été considérée par Picard [53], chez qui elle est écrite

$$L \int_{\infty}^{y,z} \frac{dy}{z} = 0 \,.$$

Pour terminer, je me borne à quelques indications et quelques références sur cette équation, l'une des plus étudiées de la littérature. Elle est apparue ensuite comme un cas particulier de l'équation dite "Painlevé VI", découverte par Gambier et R. Fuchs [21], [19], et est connue maintenant sous le nom de "Painlevé VI-Picard" (voir par exemple [47] ; c'est le cas particulier de Painlevé VI correspondant, dans les notations traditionnelles, à $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\delta = \frac{1}{2}$).

On doit aussi à R. Fuchs (loc. cit.) deux interprétations de Painlevé VI.

i) Une interprétation en termes d'intégrales elliptiques qui généralise le cas de Picard. Sur ce sujet voir aussi Manin [44].

ii) Une interprétation en termes de déformations isomonodromiques : il s'agit ici de la déformation d'un système linéaire du type de Fuchs de rang 2 sur $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, s, \infty\}$ lorsqu'on fait varier s. Sur ce sujet, voit [19] et [30].

Le cas de Picard correspond à celui où les monodromies locales aux points singuliers sont conjuguées à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Dans cette interprétation, l'aspect "groupe différentiel" disparaît. Il est par contre apparent dans une autre interprétation la "connexion de Gauss-Manin multiplicative". Il s'agit, dans le cas particulier de la famille de Legendre, d'une construction qui, mutatis mutandis, s'applique à toutes les familles de variétés abéliennes ; cf [3] ou [46].

Voici quelques détails : l'équation de Picard est d'ordre 2 sur $\bar{X}$; elle peut donc être considérée comme une équation d'ordre un, en fait une connexion, sur $J_1(\bar{\pi})$. On commence par remarquer que les fibres de $J_1(\bar{\pi})$ au-dessus de S peuvent être identifiées à "l'extension vectorielle universelle" de $\bar{X}(s)$, $s \in S(\mathbb{C})$, ou encore à la famille des fibrés vectoriels de rang un sur $\bar{X}(s)$ munis d'une connexion plate (cf. loc. cit.).

La connexion "de Picard" correspond alors aux déformations isomonodromiques de ces fibrés ; et, bien entendu, la loi de groupe est donnée par le produit tensoriel des fibrés.

Que l'équation ainsi obtenue soit isomorphe à "l'équation de Picard" résulte de l'unicité d'un groupe différentiel défini par une connexion sur $J_1(\bar{\pi})$ (cf. [3]). Une autre manière de voir consiste à passer d'un fibré de rang un sur $\bar{X}(s)$ à un fibré de rang 2 sur $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, s, \infty\}$ par image directe par la projection $(y, z, s) \mapsto (y, s)$. Dans cette projection, la condition indiquée ci-dessus sur la monodromie locale apparaît de façon évidente.

Pour terminer, et quoique ceci ait peu de rapports avec la théorie du pendule, je signale la détermination du pseudogroupe de Galois de l'équation de Picard par Casale [11], et celle du pseudogroupe de Galois de Painlevé VI pour les autres valeurs des paramètres par Cantat-Loray [4] (chez ces auteurs, ces paramètres sont fixés ; il faudrait encore voir ce qui se produit dans la situation "intransitive" où ils jouent le rôle d'intégrales premières).

7. Problème de Képler

Revenons un instant aux systèmes hamiltoniens intégrables généraux. On peut se demander ce qui se passe lorsqu'on ne fait pas l'hypothèse $(*)$, autrement dit lorsqu'on étudie un système superintégrable. Comme ces systèmes ne sont pas très courants, contrairement aux systèmes intégrables généraux, je me contenterai d'un exemple historique célèbre, le problème de Képler plan.

Il s'agit du mouvement dans $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ d'une particule sous l'action d'un potentiel en $\frac{1}{r}$, r la distance à l'origine. Comme ce problème est traité dans tous les ouvrages de mécanique, je serai très rapide. Le plus simple est de le traiter d'abord en coordonnées polaires r, θ ; soient ρ et τ les variables conjuguées, la forme symplectique étant égale à $dr \wedge d\rho + d\theta \wedge d\tau$; avec une normalisation convenable, l'hamiltonien est

$$H = \frac{1}{2}\left(\rho^2 + \frac{\tau^2}{r^2}\right) - \frac{1}{r}\,.$$

Les intégrales premières classiques sont H et τ, l'énergie et le moment cinétique. On supposera dans la suite $\tau \neq 0$. En écrivant les équations du mouvement, et éliminant dt, on trouve, avec $u = \frac{1}{r}$:

$$\frac{d^2\,u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{\tau^2}\,, \quad \rho = -\tau\,\frac{du}{d\theta}\,;$$

d'où

$$u = \frac{1}{\tau^2}\left[1 + b\cos\theta + c\sin\theta\right], \quad \rho = \frac{1}{\tau}\left(b\sin\theta - c\cos\theta\right).$$

L'équation de u nous dit que les orbites sont des coniques de foyer 0 (première loi de Képler). Les intégrales premières sont τ, b, c, avec $H = \frac{1}{2}\,\frac{b^2+c^2-1}{\tau^2}$. Dans le cas d'une ellipse, $b^2+c^2 < 1$ (ou $H < 0$), le grand axe A est égal à $-H^{-1}$. Enfin le mouvement est donné par le loi des aires (2ème loi de Képler) $r^2\,\frac{d\theta}{dt} = \tau$.

Passant au cas complexe, on est amené à la situation suivante. S est l'espace $\mathbb{C}^3$ de paramètres b, c, τ, privé de $\tau = 0$. $X \subset \mathbb{C}^2 \times S$ est la famille des coniques de foyer 0, donnée par l'équation $x^2 + y^2 = (bx + cy - \tau^2)^2$. La condition $\tau \neq 0$ assume que ces coniques sont non dégénérées.

Le feuilletage F est donné, outre $d\tau, db, dc$, par la forme exprimant la loi des aires, $\omega = dt - \frac{1}{\tau}\,(x\,dy - y\,dx)$. Je définirai encore H et A par les formules ci-dessus.

Soit $P \subset S$ l'espace des paraboles $\{b^2 + c^2 = 1\}$, et posons $S' = S - P$; soit X' la partie de X au-dessus de S'. Alors $X' \to S'$ est une fibration de fibre $\mathbb{P}^1$-(deux points) $= C^*$. Donc la cohomologie relative $H^1_{DR}(X/S) = H^1_{DR}(X \times \mathbb{C}/S)$ est de rang 1 ; elle est engendrée par la classe $[\omega]$ de ω.

Le calcul de la différentielle de Gauss-Manin est immédiat : en effet, la période de ω se calcule explicitement ; elle est proportionnelle à $A^{3/2}$ ou $H^{-3/2}$ (troisième loi de Képler). Donc on a $D\,[\omega] = \frac{3}{2}\,[\omega]\,A^{-1}\,dA$. En particulier la monodromie autour de P est égale à -1.

Le groupe virtuel (M, G) du pseudogroupe de Galois de F se calcule comme au §5 [noter que $X \to S$ admet des sections rationnelles, par exemple $x = \frac{\tau^2}{1+b}$, $y = 0$]. On trouve $G = \{e\}$, $M = M_0 = \Omega^1_S \oplus \mathcal{O}_S[\omega]$, avec la différentielle donnée par la formule ci-dessus.

Pour être tout à fait complet, il faudrait expliciter le relèvement de $[\omega]$ qu'il convient de prendre. J'omets ce point.

8. Espaces de repères et intégrales indéfinies

Dans tous les exemples qui précèdent, le relèvement aux espaces de repères peut être interprété de façon plus élémentaire. Je ne développerai pas systématiquement ce point de vue : contrairement à la méthode de Cartan, tout-à-fait générale, il semble limité aux systèmes intégrables. Je vais me contenter d'un exemple simple.

Prenons l'espace $\mathbb{C}^2$, de coordonnées x, y, muni de la forme symplectique $\lambda = dx \wedge dy$ et du hamiltonien $h \in \mathbb{C}\,[x, y]$. Soit ξ son champ hamiltonien, défini par $\xi \rfloor \lambda = dh$, et soit F le feuilletage de $\mathbb{C}^3$ défini par $\xi + \frac{\partial}{\partial t}$. Sur $X \times \mathbb{C}$, X ouvert de Zariski convenable de $\mathbb{C}^2$, ce feuilletage est défini par $(dh, \omega_0 - dt)$, avec $\omega_0 \in \Omega^1(X)$ vérifiant $\lambda = -dh \wedge \omega_0$; par exemple on peut prendre pour X l'ouvert $\mathbb{C}^2 - \left\{\frac{\partial\,h}{\partial\,y} = 0\right\}$, et prendre $\omega_0 = \left(\frac{\partial\,h}{\partial\,y}\right)^{-1} dx$.

Posons $S = \mathbb{C}$, muni de la projection $h : X \to S$. Comme au §5, on considère la cohomologie relative $H^1_{DR}(X/S)$, et, dans cette cohomologie, la partie de la connexion de Gauss-Manin engendrée par $[\omega_0]$. Soit

$$L = \frac{d^\ell}{ds^\ell} + \sum a_i \, \frac{d^{\ell-i}}{ds^{\ell-i}} \,, \quad a_i \in \mathbb{C}(s)$$

l'équation minimale de $[\omega_0]$. Les calculs du §5 (voir aussi §4) nous fournissent des formes $\omega_1, \ldots, \omega_{\ell-1} \in \Omega^1(X)$ qui vérifient

$$d\omega_0 = dh \wedge \omega_1, \ldots, d\omega_k = dh \wedge \omega_{k+1} \quad (k \leq h-2) \,,$$

et

$$d\omega_{\ell-1} = -dh \wedge [a_1 \, \omega_{\ell-1} + \ldots + a_\ell \, \omega_0] \,.$$

Cherchons maintenant des équations différentielles algébriques satisfaites par le flot de $\xi : (x, y, t) \to (\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$; on a évidemment $h(\bar{x}, \bar{y}) = h(x, y)$ ce que j'écris en abrégé $\bar{h} = h$.

Il suffit d'écrire de telles équations dans un voisinage (pour la topologie transcendante) de la diagonale. On a

$$\bar{t} - t = \int_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}} \omega_0 \,,$$

l'intégrale étant prise sur un "petit chemin" [ce qui signifie par exemple un chemin contenu dans une boule de $h = h(x, y)$ contenant (x, y) et $(\bar{x}, \bar{y})$].

Posons

$$I_0 = \int_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}} \omega_0 \,,$$

et plus généralement

$$I_k = \int_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}} \omega_k$$

(même chemin d'intégration). En utilisant la formule de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre, et l'expression des $d\omega_k$, on trouve

$$d\bar{t} - dt = dI_0 = \bar{\omega}_0 - \omega_0 + I_1 \, dh, \ldots, dI_k = \bar{\omega}_k - \omega_k + I_{k+1} \, dh \quad (k \leq \ell - 2) \,,$$

et

$$dI_{\ell-1} = \bar{\omega}_{\ell-1} - \omega_{\ell-1} + I_k \, dh \,, \text{ avec } I_\ell = -(a_1 \, I_{\ell-1} + \ldots + a_\ell \, I_0) \,.$$

Ceci donne les relations différentielles cherchées. Le résultat est le même que celui obtenu au §5. En effet, au §5, on commence par chercher des $\omega'_i \in \Omega^1(X \times \mathbb{C})$, avec $\omega'_0 = \omega_0$ vérifiant

$$d\omega_0 = dh \wedge \omega'_1, \ldots, d\omega'_k = dh \wedge \omega'_{k+1} \quad (k \leq \ell - 2) \,,$$

et

$$d\omega'_{\ell-1} = -dh \wedge [a_1 \, \omega'_{\ell-1} + \ldots + a_k \, \omega'_{\ell-k} + \ldots + a_\ell(\omega_0 - dt)] \,.$$

On relève ensuite aux espaces de repères par

$$\pi_0 = \omega_0 - dt + u_1\, dh, \ldots, \pi_k = \omega'_k + u_{k+1}\, dh - du_k\,, \quad (k \leq \ell - 2)\,,$$

et

$$\pi_{\ell-1} = \omega'_{\ell-1} - du_{\ell-1} - (a_1\, u_{\ell-1} + \ldots + a_{\ell-1}\, u_1)\, dh\,;$$

le pseudogroupe est donné par $\bar{s} = s$, $\bar{\pi}_k = \pi_k$, $0 \leq k \leq \ell - 1$. Pour identifier ces équations aux précédentes, il suffit de prendre $\omega'_k = \omega_k$, $k \leq \ell - 2$, $\omega'_{\ell-1} = \omega_{\ell-1} - a_\ell\, t\, ds$, et de faire $I_k = \bar{u}_k - u_k$, $1 \leq k \leq \ell - 1$.

Par contre, je ne sais pas si, en restant dans ce contexte, on voit facilement le caractère minimal du pseudogroupe obtenu, i.e. le fait que c'est bien le pseudogroupe de Galois du feuilletage donné.

Appendice A

Pseudogroupes de Lie et groupes différentiels algébriques

Cette question n'intervient pas beaucoup dans cet article, en fait uniquement dans les exemples IV.3 et IV.6. Néanmoins, vu son intérêt, je crois utile d'en dire quelques mots. Je reprends la définition des groupes différentiels algébriques donnée dans [42] ; je la rappelle rapidement.

Soient G et S deux variétés algébriques sur $\mathbb{C}$, lisses et connexes, et π un morphisme $G \to S$. On suppose π lisse et surjectif. Une structure de "groupe au-dessus de S" de G est définie par les données suivantes :

i) Un morphisme $\mu : G \underset{S}{\times} G \to G$, compatible aux projections sur S.

ii) Un morphisme $\lambda : G \to G$, compatible à π.

iii) Un morphisme $\varepsilon : S \to G$, section de π.

On suppose que ces morphismes donnent respectivement, dans chaque fibre $\pi^{-1}(s)$, $s \in S(\mathbb{C})$, le produit, l'inverse, et l'unité d'une structure de groupe (je laisse le lecteur écrire les expressions explicites).

Pour $k \geq 0$, on note $J_k(\pi)$ la variété des jets d'ordre k de π. Il est immédiat de vérifier que la structure de groupe au-dessus de S de G s'étend aux $J_k(\pi)$; désignons par $\mu_k, \lambda_k, \varepsilon_k$ les morphismes correspondants. Un sous-schéma fermé Y_k de $J_k(\pi)$ sera dit "sous-groupe au-dessus de S" si μ_k et λ_k se restreignent respectivement à $Y_k \underset{S}{\times} Y_k$ et Y_k, et si ε_k est une section de Y_k. Désignant par p_k la projection $J_k(\pi) \to J_{k-1}(\pi)$, on pose alors la définition suivante :

Définition 1. *Une famille $Y = \{Y_k\}$ de sous-schémas fermés des $J_k(\pi)$ définit une structure de groupe différentiel (algébrique) sur G si l'on a $p_k\, Y_k \subset Y_{k-1}$ et s'il existe un ouvert de Zariski dense U de S tel que les restrictions $Y_k \mid U$ vérifient les propriétés suivantes :*

i) *Les $Y_k \mid U$ sont lisses, et les morphismes $p_k : Y_k \mid U \to Y_{k-1} \mid U$ ($k \geq 1$) et $\pi : Y_0 \mid U \to U$ sont lisses et surjectifs.*

ii) *Sur U, Y_{k+1} est contenu dans le prolongement* $\mathrm{pr}_1\, Y_k$ *(pour cette notion, voir* II.6.9 *ou l'introduction).*

iii) *$Y_k \mid U$ est un sous-groupe au-dessus de U de $J_k(\pi) \mid U$.*

Comme en I.5, on se bornera à considérer les *solutions analytiques* de Y, i.e. les germes de sections analytiques σ de π qui vérifient, pour tout k : $j_k\, \sigma \subset Y_k^{\mathrm{an}}$. Les conditions i) à iii) entrainent ceci : pour $a \in S(\mathbb{C})$, les solutions de source a forment un groupe (ceci est évident si $a \in S(U)$; on voit que c'est encore vrai

pour tout $a \in S(\mathbb{C})$ en utilisant ce résultat pour les $b \in S(U)$ voisins de a en topologie transcendante, et en passant à la limite).

Comme dans [42], on travaille "génériquement sur S", i.e. on identifie des structures qui coïncident sur un ouvert Zariski-dense non précisé de S. Ceci permet si nécessaire, en rétrécissant S, de supposer que les propriétés i) à iii) sont vraies sur S tout entier, ce que je ferai implicitement ci-dessous.

Comme dans loc. cit., on dira, suivant Kolchin [33], qu'un groupe différentiel Y sur G est "dense dans G" si l'on a $Y_0 = J_0(\pi)(= G)$.

La notion d'algèbre de Lie d'un groupe différentiel est définie dans loc. cit. ; je renvoie à cet article pour ce point.

2. À un groupe différentiel Y sur G, on va associer un pseudogroupe de Lie $\hat{Y}$ sur G. Il est commode de commencer par définir ses solutions, ce qui se fait ainsi : si σ est une solution de Y de source $a \in S(\mathbb{C})$, on lui associe, pour tout $b \in G(\mathbb{C})$ avec $\pi(b) = a$, le germe en b d'automorphisme de G "translation à gauche par σ", i.e. $g \mapsto \mu(\sigma(\pi(g)), g)$ [j'abrégerai cette formule en $g \mapsto \sigma(s)\, g$, $s = \pi(g)$]. Cette construction se restreint de façon évidente aux jets d'ordre k et donne une collection $\hat{Y} = \{\hat{Y}_k\}$, avec $\hat{Y}_k \subset J^*_{k,S}(G)$, espace des jets inversibles de G dans G commutant avec la projection sur S (cf. notations de II.5.8). Les $\hat{Y}_k$ sont évidemment des sous-groupoïdes des $J^*_{k,S}(G)$. Donc pour démontrer que $\hat{Y}$ est un pseudogroupe de Lie, il suffit de démontrer que c'est une *D-variété* (cf. III.2 et les références qui s'y trouvent). J'indique rapidement comment on peut faire.

On remarque que le passage de Y à $\hat{Y}$ est le composé de deux opérations.

i) **Image réciproque.** Soit, généralement, X une variété algébrique lisse, et $Z = \{Z_k\}$, $Z_k \subset J_k(S, X)$ une D-variété ($J_k(S, X)$, les jets d'ordre k de S dans X). Il existe une D-variété $\pi^* Z = \{(\pi^* Z)_k\}$, avec $(\pi^* Z)_k \subset J_k(G, X)$, obtenue par composition de Z avec la projection $\pi : G \to S$; en particulier, les solutions sont de la forme $\varphi \circ \pi$, φ une solution de Z. Les détails, en particulier la définition précise des $(\pi^* Z)_k$ peuvent être laissés au lecteur (en gros, les équations de $\pi^* Z$ sont celles de Z, auxquelles il faut ajouter que les solutions sont constantes dans les fibres de G ; mais de telles solutions étant seulement locales, ceci s'écrit en termes différentiels).

ii) **Multiplication par G.** Si $Z = \{Z_k\}$ est une D-variété avec $Z_k \subset J_{k,S}(G, G)$, espace des jets (non nécessairement inversibles) de G dans G, il existe une D-variété $Z \cdot g$ dont les solutions sont de la forme $\varphi \cdot g$ [$= \mu(\varphi, g)$], φ une solution de Z. Ici encore, la définition des $(Z \cdot g)_k$ et le fait qu'on obtienne une D-variété peuvent être laissés au lecteur.

Le résultat cherché s'obtient alors en remarquant qu'on a $\hat{Y} = (\pi^* Y) \cdot g$.

3. Si Y est dense dans G, S est l'espace des intégrales premières de $\hat{Y}$; si Y n'est pas dense, l'espace des intégrales premières de $\hat{Y}$ contient S, sans lui être égal. Par exemple, si S est un point, et G un groupe algébrique connexe

sur $\mathbb{C}$, les sous-groupes différentiels sont les sous-groupes fermés $H \subset G$. Le pseudogroupe correspondant est l'espace des translations à gauche par H, et l'espace des intégrales premières est $H\backslash G$.

4. Soit $\tilde{G}$ le groupe différentiel défini sur G "sans équations différentielles", i.e. $\tilde{G}_k = J_k(\pi)$. Si $Y = \{Y_k\}$ est un groupe différentiel sur G, alors $\hat{Y}$ est un sous-pseudogroupe de Lie de $\hat{\tilde{G}}$.

Réciproquement, donnons-nous un sous-pseudogroupe de Lie de $\hat{\tilde{G}}$, et supposons les hypothèses de régularité suivantes : les Z_k sont lisses, et les morphismes $Z_k \to Z_{k-1}$ lisses et surjectifs. Il existe alors un sous-groupe différentiel Y de G au-dessus de S tel qu'on ait $Z = \hat{Y}$ (en fait, avec les conventions qu'on a faites, il suffirait de supposer ces hypothèses de régularité satisfaites au-dessus de $U \times U$, U ouvert de Zariski dense de S, mais peu importe).

Cela se voit ainsi. Soit $J_{k,S}(G,G)$ les jets d'ordre k de G dans G commutant à la projection sur S, et munissons-le de la projection "source" sur G. On a un morphisme évident $J_{k,S}(G,G) \underset{G}{\times} (S,\varepsilon) \to J_k(\pi)$ (intuitivement "on oublie les dérivations dans les directions verticales pour π"). On remarque alors que la restriction $\hat{\tilde{G}}_k \underset{G}{\times} S \to J_k(\pi)$ est *bijective*. Ceci résulte du fait que $\hat{\tilde{G}}$ est un pseudogroupe défini localement par le système $\bar{\omega}_i = \omega_i$, ω_i une base des formes relatives de $\Omega^1_{X/S}$ invariantes à gauche. La traduction en termes d'équations différentielles donne un système résolu par rapport aux dérivations verticales, et le résultat suit facilement.

En restreignant l'isomorphisme précédent à $Z_k \subset \hat{\tilde{G}}_k$, on trouve un système projectif $Y_k \subset J_k(\pi)$, avec $Y_k \simeq Z_k \underset{G}{\times} (S,\varepsilon)$. On vérifie alors que le système Y_k définit le groupe différentiel cherché. Le seul point non trivial est le fait qu'on a $Y_{k+1} \subset \mathrm{pr}_1 Y_k$. Ceci se voit en montrant que l'isomorphisme $Y_k \simeq Z_k \underset{G}{\times} (S,\varepsilon)$ commute au prolongement, i.e. qu'on a $\mathrm{pr}_1 Y_k \simeq \mathrm{pr}_1 Z_k \underset{G}{\times} (S,\varepsilon)$. Ceci se fait par le même argument ; j'omets les détails.

Il me paraît probable que le résultat reste vrai sans faire l'hypothèse de régularité faite ci-dessus, i.e. en prenant un sous-pseudogroupe de Lie quelconque de $\hat{\tilde{G}}$ (a priori, les hypothèses de régularité seront vérifiées sur un ouvert de Zariski V dense de G ; il faudrait voir qu'on peut les étendre à $\pi^{-1}(U)$, U ouvert de Zariski de S).

5. Pour terminer, je vais dire quelques mots de la représentation de $\hat{Y}$ en termes de groupes virtuels et de connexions de Cartan (ici, Y est un groupe différentiel sur G et $\hat{Y}$ le pseudogroupe associé). Compte tenu de 3, je me limiterai au cas où Y est dense.

On dispose d'une section de π, i.e. la section nulle ε de G. On peut donc en particulier considérer le groupe virtuel (M,Γ) défini par $\hat{Y}$ et cette section (cf. II.6). Le groupe Γ ne présente pas d'intérêt particulier (c'est la restriction de Y à la section nulle).

Quant à M, il admet une scission au sens de II.3.3, obtenue à partir de la section ε (cf. appendice B). On a donc

$$M = M' \oplus \Omega^1_S\,, \quad \text{et} \quad d \mid M' = d' + d''\,,$$

avec

$$d' : M' \to \Lambda^2 M'\,, \quad d'' : M' \to M' \otimes \Omega^1_S\,.$$

On vérifie que M' est isomorphe au faisceau sur S des formes relatives invariantes à gauche sur Y (plus précisément, M'_k est isomorphe aux formes relatives invariantes à gauche sur Y_k).

Dans cet isomorphisme, d' correspond à la différentielle relative $d_{Y/S}$; on aura donc en particulier

$$d' M'_k \subset \Lambda^2\, M'_k\,.$$

D'autre part, on a

$$d'' M'_k \subset M'_{k+1} \otimes \Omega^1_S\,.$$

Voici un exemple simple : si $S = \mathbb{C}^n$, $G = S \times G_a$, $Y = \tilde{G}$, on trouve que M'_k est l'espace vectoriel de base ω_α, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq k$, avec les différentielles suivantes :

$$d' = 0\,, \quad d''\,\omega_\alpha = \sum ds_i \otimes \omega_{\alpha+\varepsilon_i} \quad (s_1, \ldots, s_n \text{ les coordonnées de } S).$$

Si (x_α), $|\alpha| \leq k$ désigne les coordonnées de $J_k(\pi) = J_k(S, \mathbb{C})$, l'image de ω_α par la connexion de Cartan est la forme de contact standard

$$dx_\alpha - \sum x_{\alpha+\varepsilon_i}\, ds_i\,.$$

Notons encore que, d'une façon générale, la connexion de Cartan construite sur M est essentiellement ce que Kolchin et Buium nomment "dérivée logarithmique" ; cf. [33], [3].

Remarquons enfin ceci : le fait d'avoir une cogèbre de Lie filtrée du type précédent ne caractérise pas les pseudogroupes de la forme $\hat{Y}$, Y un groupe différentiel provenant d'un groupe $G \to S$. Par exemple, si $S = p^t$, on a $M = M'$; c'est une $\mathbb{C}$-cogèbre de Lie de dimension finie munie de la filtration triviale $M_0 = M$, et le pseudogroupe est un parallélisme (cf. III.1.6).

Incidemment, ceci pose la question de savoir quelles conditions caractérisent les groupes (au moins birationnellement) parmi les parallélismes. Une condition nécessaire évidente est la suivante : si X est une variété munie d'un parallélisme de base $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega^1(X)$, le feuilletage sur $X \times X$ défini par les formes $\bar{\omega}_i - \omega_i$ doit être trivial, i.e. déterminé par ses intégrales premières (cette remarque a déjà été utilisée en IV.1). Mais cette condition n'est pas suffisante : si X est un groupe, et V un ouvert étale au-dessus d'un ouvert de Zariski de X, le parallélisme défini sur V par image réciproque de celui de X vérifie cette condition. J'ignore si la condition ci-dessus caractérise ou non ce type de parallélismes.

Appendice B
Sur le troisième théorème fondamental

Dans la terminologie traditionnelle, le "troisième théorème fondamental" de Lie est l'énoncé suivant : si L est une algèbre de Lie (de dimension finie) sur $\mathbb{C}$, il existe un groupe de Lie $\mathbb{C}$-analytique d'algèbre de Lie L.

Cet énoncé est faux dans le cas algébrique ; l'énoncé analogue pour les pseudogroupes de Lie algébriques est également faux : ce fait est même à la base de la théorie de Galois différentielle telle qu'elle est présentée ici.

On peut se poser un problème voisin, à savoir le suivant : étant donné un groupe virtuel, existe-t-il un pseudogroupe de Lie qui lui soit associé ?

i) *Dans le cas transitif*, je note d'abord que l'on a une réponse positive dans la catégorie analytique (au moins pour un énoncé un peu plus faible ; existence d'un pseudogroupe de Lie d'algèbre de Lie filtrée donnée) cf. [23].

Dans la catégorie algébrique, i.e. dans le cas considéré dans cet article, j'ignore la réponse générale (je ne vois a priori aucune condition à mettre sur le groupe virtuel). Je connais seulement dans cette direction le cas particulier des parallélismes (voir définition en III.1.6).

Pour toute algèbre de Lie L sur $\mathbb{C}$, il existe une variété algébrique munie d'un parallélisme (algébrique) d'algèbre de Lie L.

Ce résultat est dû à P. Deligne ; voir ses lettres plus loin.

[C'est bien un cas particulier du problème posé ci-dessus : prendre l'algèbre de Lie filtrée égale à L avec $L^0 = \{0\}$, $G = \{e\}$.]

Le résultat est bien sûr évident si L est l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique G : il suffit de prendre $X = G$, et de considérer le parallélisme donné par les champs invariants à gauche. Le résultat n'a donc d'intérêt que dans le cas contraire.

En voici un exemple simple ; sur $\mathbb{C}^3$, de coordonnées x, y_1, y_2, on prend

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \lambda_2 y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}\,, \text{ avec } \lambda_1 \lambda_2 \neq 0\,,\ \lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{Q}\,, \text{ et } \eta_i = \frac{\partial}{\partial y_i}\,.$$

L'algèbre de Lie est donnée par

$$[\xi, \eta_1] = -\lambda_1 \eta_1\,,\ [\xi, \eta_2] = -\lambda_2 \eta_2\,,\ [\eta_1, \eta_2] = 0\,.$$

Elle n'est pas l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique. [Indication : comme $ad : L \to \mathcal{G}\ell(L)$ est injectif, un tel groupe pourrait être pris linéaire, en le remplaçant par le groupe adjoint. L'hypothèse $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{Q}$ permet alors de conclure facilement.]

ii) Examinons maintenant le cas intransitif. Soit $\pi : X \to S$ comme en 2.6, et supposons d'abord que π admette une section λ. Soit $Z = \{Z_k\}$ un pseudogroupe

de Lie algébrique sur X, d'espace des intégrales premières S ; soit (M, G, P, θ) la représentation de Z obtenue à partir de la section λ (notations de II.6). Alors λ se relève en une section $\tilde{\lambda}$ de P sur S (utiliser l'homomorphisme II.6.1) et la restriction de $\theta(M)$ à $\tilde{\lambda}(S)$ donne une application $M \to \Omega^1_S$, qui donne une scission de M au sens de II.3.3.

En reprenant les arguments de descente de II.7, on trouve ceci : soit Z un pseudogroupe algébrique sur X, d'espace d'intégrales premières S. Alors, étant donné un groupoïde virtuel (M, G) relativement à $\alpha : \tilde{S} \to S$ associé à Z, il en existe un autre équivalent (M', G'), relativement à un autre revêtement $\alpha' : \tilde{S}' \to S$, tel que M' admette une scission sur $\tilde{S}'$.

Cette condition est une restriction non triviale sur (M, G) [déjà dans le cas où $G = \{e\}$ et où $M = M_0$ est modulo Ω^1_S de rang 1 sur $\mathcal{O}_S$; je laisse le lecteur examiner ce cas]. En étant optimiste, on peut espérer que ceci soit la seule restriction à l'existence d'un pseudogroupe de Lie associé à (M, G). Si l'on se place dans le cas $\mathcal{C}^\infty$ au lieu du cas algébrique considéré ici, on trouvera des résultats sur ce genre de questions dans [36], Chapitre IV.

Remarque (que je case ici, faute de mieux). – Soient $Z = \{Z_k\}$ et $Z' = \{Z'_k\}$ deux pseudogroupes de Lie sur X ; on dit que Z' est un sous-pseudogroupe de Z si, en remplaçant au besoin X par un ouvert Zariski-dense, les Z'_k sont des sous-variétés fermées des Z_k. La question consiste à examiner la relation qui existe entre les descriptions de Z et Z' en termes de groupes (ou groupoïdes) virtuels et connexions de Cartan.

Si Z' admet plus d'intégrales premières que Z, la réponse ne paraît pas bien simple, et je ne l'aborderai pas. Je suppose donc que Z et Z' admettent la même variété S des intégrales premières, ou, ce qui est équivalent, qu'on a $Z_0 = Z'_0$.

Pour simplifier, je suppose que le morphisme $\pi : X \to S$ admet une section λ (le cas général s'en déduirait par descente comme en II.7). Soient (M, G, P, θ) et (M', G', P', θ') les descriptions de Z et Z' obtenues à partir de λ (et de l'isomorphisme de II.6.1). En reprenant les descriptions de II.6, on trouve ceci : M' est un quotient de M ; G' est un sous-groupe de G (avec la compatibilité évidente de l'action de G sur M et de celle de G' sur M'). Enfin P' est un sous-fibré principal de P, de groupe G', et θ' s'obtient par restriction à P' de θ.

Ces résultats ont été utilisés, plus ou moins implicitement, au Chapitre IV, §3 et suivants.

Princeton, le 15 novembre 2005

Cher Malgrange,

Pour toute algèbre de Lie g sur $\mathbb{C}$, il existe effectivement une variété algébrique et une trivialisation du fibré tangent T' :

$$\textit{fibré constant } g \to T'$$

compatible au crochet. La construction imite celle du cas particulier $\mathbb{C} \ltimes (\mathbb{C} \times \mathbb{C})$ que tu m'as dite.

Toute algèbre de Lie g est obtenue comme suit : on part d'un groupe algébrique

$$(T \times L) \ltimes U$$

avec T un tore, L semi-simple et U unipotent. On l'obtient comme revêtement fini de l'enveloppe algébrique de g dans une représentation linéaire. On prend son algèbre de Lie $(t \times \ell) \ltimes u$, $t' \subset t$, et $g := (t' \times \ell) \ltimes u$. Mettant ensemble L et U, $H = L \cdot U$ j'écris plutôt : groupe algébrique $T \ltimes H$, $t' \subset t = Lie\,(T)$, $g = t' \ltimes h$ avec $h = Lie\,H$.

Identifions $T \ltimes H$, comme variété, à $T \times H$ par $(t, h) \mapsto t \cdot h$. On dispose de $\exp : Lie\,(T) \to T$ *et de là d'un morphisme analytique entre variétés algébriques*

$$Lie\,(T) \times H \to T \times H \xrightarrow{\sim} T \ltimes H\,.$$

A t' correspond un sous-groupe analytique (non fermé) T' de T, avec

$$\begin{array}{ccc} Lie\,(T') \times H & \longrightarrow & T' \ltimes H \\ \downarrow\cap & & \cap \\ Lie\,(T) \times H & \longrightarrow & T \ltimes H \end{array}$$

et le point est que l'image inverse des champs de vecteurs invariants à gauche sur $T' \ltimes H$ sont des champs de vecteur algébriques sur $Lie\,(T') \times H$. Il suffit de le vérifier pour $Lie\,(T) \times H$. Pour $h \in Lie\,(H)$, on prend juste le "même" champ de vecteur sur $Lie\,(T) \times H$ (projection nulle sur $Lie\,(T)$). Pour $\tau \in Lie\,T$, vu comme élément infinitésimal de T, le champ de vecteur invariant à gauche correspondant est donné en th par :

$$th \cdot \tau = th\,\tau\,h^{-1}h = t\tau(h\,\tau\,h^{-1} - \tau)h = t\tau \cdot h(\tau - h^{-1}\tau h)\,,$$

i.e. τ dans la direction de T et le champ de vecteur invariant à gauche attaché à $\tau - h^{-1}\tau h$, en h, dans la direction de H. C'est bien algébrique.

Ceci dit, je n'ai aucune idée quant à comment décrire toutes les parallélisations

$$\textit{fibré constant } g \xrightarrow{\sim} T$$

compatible à $[\ ,\ ]$, même déjà pour $g = sL(2)$.

Bien à toi,

P. Deligne

Princeton, le 16 février 2010

Cher Malgrange,

Mea culpa. La construction d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à partir de celle d'un groupe algébrique est plus compliquée que ce que j'affirmais. Contre-exemple : $\mathbb{C} \ltimes (\mathbb{C} \times \mathbb{C})$ où $\mathbb{C}$ agit sur l'algèbre de Lie commutative $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de façon ni semi-simple, ni unipotente. L'idée essentielle, inspirée par ton exemple, continue toutefois à marcher.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$. Soit V une représentation linéaire fidèle de $\mathfrak{g}$ (théorème d'Ado), et E l'enveloppe algébrique de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{GL}(V)$: le plus petit sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}(V)$ dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{e}$ contient $\mathfrak{g}$.

Lemme. $[\mathfrak{e}, \mathfrak{e}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Preuve. Puisque $\mathfrak{g}$ normalise $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et agit trivialement sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$, le groupe algébrique H des $h \in \mathrm{GL}(V)$ stabilisant $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ et agissant trivialement sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ a une algèbre de Lie contenant $\mathfrak{g}$, donc contient E, et $[\mathfrak{e}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}'$. Le groupe algébrique H_1 des h stabilisant $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}'$ et agissant trivialement sur $\mathfrak{e}/\mathfrak{g}'$, par le même argument, contient E, d'où $[\mathfrak{e}, \mathfrak{e}] \subset \mathfrak{g}'$ et le lemme.

Choisissons une décomposition de Levi

$$E = L \ltimes U$$

de E (L réductif, U unipotent). Le centre connexe T de L est un tore $\mathbb{G}_m^a$, le groupe dérivé L' de L est semi-simple, et $T \times L' \to L$ est une isogénie :

$$\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{l}' \xrightarrow{\sim} \mathfrak{l}$$

sur les algèbres de Lie. Si $\bar{\mathfrak{u}}$ est le quotient du plus grand quotient abélien $\mathfrak{u}^{\mathrm{ab}}$ de $\mathfrak{u}$: égal aux coinvariants de l'action de L sur $\mathfrak{u}^{\mathrm{ab}}$, on a

$$\mathfrak{e}^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{t} \times \bar{\mathfrak{u}}\,.$$

D'après le lemme, $\mathfrak{g}$ est l'image inverse dans $\mathfrak{e}$ d'un sous-espace vectoriel V de $\mathfrak{t} \times \bar{\mathfrak{u}} = \mathfrak{e}^{\mathrm{ab}}$.

L'application exponentielle de $\mathfrak{t}$ dans T fournit une application analytique étale

$$\mathrm{Lie}\,(T) \times L' \times U \to L \ltimes U = E : \tag{1}$$

$(t, l', u) \mapsto (\exp(t) \cdot l') \cdot u$. Le membre de gauche est un groupe analytique $(\mathrm{Lie}\,(T) \times L') \ltimes U$, s'envoyant par un morphisme de groupe sur $\mathrm{Lie}\,(T) \times \bar{\mathfrak{u}}$ (par $U \to U^{\mathrm{ab}} \xleftarrow{\sim} \mathfrak{u}^{\mathrm{ab}} \to \bar{\mathfrak{u}}$). Le morphisme est aussi un morphisme de variétés algébriques, et l'image inverse W de V est et une sous-variété algébrique, et un

sous-groupe analytique. Comme expliqué dans la lettre précédente, les champs de vecteurs invariants à gauche (d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$*) sont algébriques, car cette algébricité vaut déjà pour* $\mathrm{Lie}\,(T) \times L' \times U$*.*

Avec mes excuses. Bien à toi,

P. Deligne

P.S. Il est essentiel qu'on ait pris les champs de vecteurs invariants par translations à gauche, et le produit dans (1) *dans l'ordre écrit : il assure une expression triviale, algébrique, pour les translations à gauche par* $\mathrm{Lie}\,(T)$*, ce qui ramène l'algébricité à ce qui se passe le long de* $L' \ltimes U$*. Ceci se passe dans* $\mathrm{Lie}\,(T)^{\wedge} \times L' \ltimes U$*, un complété formel où la différence entre* $\mathrm{Lie}\,(T)$ *et* T *disparaît.*

Appendice C
Sur le problème d'équivalence

1. Cet appendice a seulement pour but de poser quelques questions, de manière assez informelle. Étant donnée une variété algébrique X sur $\mathbb{C}$, lisse et séparée, on définit les *sous-groupoïdes* de $J_k^*(X)$ comme en 5.1, à ceci près qu'ici X n'est pas nécessairement supposé connexe. Comme en loc. cit., on ne distinguera pas les objets au-dessus de $J_0^*(X) = X \times X$ de leur restriction à $U \times U$, U ouvert de Zariski dense de X. On pourra donc toujours supposer les propriétés de régularité I.5.1 a) à c) satisfaites. En particulier, si Z_k et un tel sous-groupoïde, ses projections Z_ℓ dans les $J_\ell^*(X)$ $(0 \leq \ell \leq k)$ pourront être supposées des sous-groupoïdes stricts fermés et lisses des $J_\ell^*(X)$.

Cela étant, la notion "d'équivalence de D-groupoïdes" définie en II.2, se transpose immédiatement au présent contexte : étant données deux variétés algébriques lisses X et X' de même dimension (qu'on peut sans inconvénient supposer connexes), et deux sous-groupoïdes respectivement Z_k de $J_k^*(X)$ et Z'_k de $J_k^*(X')$, une *équivalence* entre Z_k et Z'_k est un sous-groupoïde Z'' de $J_k^*(X'')$, avec $X'' = X \sqcup X'$, possédant les deux propriétés II.2.1 i) et ii).

On peut se poser le problème de caractériser l'équivalence des sous-groupoïdes de J_k^* d'une manière analogue à ce qu'on a fait en II.7 pour les D-groupoïdes au moyen de groupes (ou groupoïdes) virtuels et de connexions de Cartan.

Sans que j'aie regardé la question en détail, il me semble possible de faire une telle description, en termes de $(\mathbb{C} - S)$-cogèbres de Lie, groupes virtuels, et connexions de Cartan *tronquées* (modulo des définitions convenables...), *à condition de se restreindre aux Z_k qui sont saturés au sens de* V.6.9, ce qui, je le rappelle, siginifie ceci : "Z_k est contenu dans le prolongement $\mathrm{pr}_1 Z_{k-1}$".

Cette restriction est, à mon avis, indispensable pour la raison suivante : elle est nécessaire pour exprimer un système Z_k au moyen de la structure de contact canonique (cf. le lemme II.6.10 ; bien sûr, on se place dans les conditions de régularité indiquées ci-dessus en restreignant convenablement X). Or précisément, cette structure de contact est essentielle dans la définition de la connexion de Cartan associée par les constructions de II.5 et II.6.

Une autre raison de faire intervenir cette restriction est la suivante : si Z_k est un sous-groupoïde de $J_k^*(X)$, Lie Z_k est bien stable par le "crochet de Spencer" noté $[\cdot,\cdot]$ en I.5.6. Mais le "crochet formel" $[\cdot,\cdot]^\wedge$ n'envoie pas nécessairement $\mathrm{Lie}\, Z_k \times \mathrm{Lie}\, Z_k$ dans $\mathrm{Lie}\, Z_{k-1}$. Ce sera toutefois le cas si Z_k est saturé (voir [37], proposition 4.4). Or c'est précisément ce crochet formel qui intervient ici, via la différentielle duale ; voir par exemple II.6.2.

2. Supposons décrit un sous-groupoïde saturé Z_k de $J_k^*(X)$ en termes de connexion de Cartan tronquée. Le problème suivant est celui-ci : *analyser de la même manière les prolongements de Z_k.*

Ce problème intervient au moins dans deux situations.

i) Dans le cas des feuilletages : on suppose avoir trouvé un "groupoïde admissible d'ordre k" au sens de I.6.4 ; on se propose de le prolonger pour obtenir un pseudogroupe admissible, donc un majorant du pseudogroupe de Galois.

ii) Dans la théorie des "problèmes d'équivalence" au sens de Cartan. Ce problème peut en gros être énoncé ainsi : on se donne une équivalence à l'ordre k (donc un sous-groupoïde de $J_k^*(X'')$, $X'' = X \sqcup X'$ comme ci-dessus). On se propose de chercher si, par prolongement, on obtient encore une équivalence.

[L'exemple le plus classique est celui où $k = 1$, et les sous-groupoïdes Z_1, Z_1', Z'', sont transitifs ; le problème est classiquement étudié sous le nom d'"équivalence de G-structures".]

Dans le second contexte, le problème est étudié dans de nombreux exemples dans la littérature, à commencer chez Cartan lui-même. Pour des exemples et des exposés plus récents, voir par exemple [22], [31], [52]. Il me semble cependant que ces auteurs traitent principalement des situations transitives, et que le cas général mérite encore du travail. Comme je l'indiquais au début, je me bornerai ici à quelques remarques.

Le premier point consiste en l'analyse des *obstructions à l'intégrabilité*. Deux cas sont possibles.

i) Il n'y a pas d'obstruction, i.e. $\mathrm{pr}_1 Z_k \to Z_k$ est surjectif. Dans ce cas, on sera facilement ramené à un problème analogue au précédent, avec k remplacé par $k+1$.

ii) La projection $\mathrm{pr}_1 Z_k \to Z_k$ n'est pas surjective : son image donne alors un autre groupoïde $Z_k^{(1)} \subset Z_k$.

Deux remarques à ce propos.

a) *Dans le cas où Z_k est saturé*, les obstructions en question (i.e. l'image de $\mathrm{pr}_1 Z_k$) s'expriment bien en termes de "torsion" (voir par exemple [2] ; la question, qui remonte d'ailleurs à Cartan lui-même, est reprise rapidement dans [41], Appendice B, §1). La traduction en termes de connexions de Cartan est indiquée dans différents articles, en particulier [52] : elle s'exprime en termes de "constantes" (ou "fonctions") de structure d'algèbres de Lie (ou cogèbres de Lie) filtrées tronquées. La question mériterait d'être reprise plus systématiquement.

b) Le $Z_k^{(1)}$ qu'on obtient ainsi n'est pas saturé en général. Pour pouvoir continuer, il faut le remplacer par le plus grand $Z_k^{(2)} \subset Z_k^{(1)}$ qui soit saturé. Ceci est en pratique la partie la plus difficile du travail, correspondant à ce qui est décrit dans la littérature comme "restriction du groupe structural", avec éventuellement adjonction de nouvelles intégrales premières. Je ne peux ici que renvoyer aux exemples de loc. cit. qui permettront au lecteur de se faire une idée de ces questions.

Bien sûr, lorsqu'on a obtenu un sous-groupe saturé, le prolongement d'ordre un permet de passer de k à $k+1$. En continuant, d'après l'involutivité générique [41], on arrive à une situation involutive, et les prolongements suivants n'apportent alors aucune information supplémentaire.

3. Cette dernière assertion n'est exacte qu'en première approximation, pour la raison suivante : en pratique, dans un problème d'équivalence, on ne part pas d'*une équivalence* d'ordre k, mais d'*une famille*, dépendant d'un certain nombre de fonctions qui jouent le rôle d'indéterminées différentielles ; la discussion des prolongements se fait en fonction de celles-ci.

Pour prendre un exemple typique, on peut considérer le problème d'équivalence de G-structures suivant : G est un sous-groupe algébrique fixé de $G\ell(n)$; on se donne n formes

$$\omega_i = \sum \lambda_i^j \, dx_j \,, \quad \text{resp. } \omega'_i = \sum \lambda_i'^j \, dx'_j \,,$$

bases de T^*X resp. T^*X', X et X' deux ouverts de Zariski de $\mathbb{C}^n$. Le problème est ici d'étudier les germes (analytiques) inversibles $f : X \to X'$ vérifiant $\omega' \circ f = \omega g$, g germe d'application de X dans G. Les indéterminées différentielles sont ici ω et ω', ou, si l'on préfère, les λ_i^j et $\lambda_i'^j$.

Il est probable (c'est le cas dans les exemples traités) que la réponse est donnée par un ensemble différentiellement constructible, fabriqué à partir d'invariants différentiels des deux G-structures (cet énoncé, un peu vague, demanderait à être précisé). Mais, à l'heure actuelle on n'a même pas, à ma connaissance, de théorème de finitude à la Ritt-Raudenbush, ou de théorème d'involutivité générique "avec paramètres différentiels". On pourrait penser pour cela à utiliser la théorie de l'élimination différentielle (voir [58] ; pour un énoncé en termes de théorie des modèles, voir par exemple [45]) ; mais ce théorème semble s'appliquer seulement si l'une des données ω ou ω' est explicite ; voir à ce sujet des remarques dans [51].

N.B. Cet article était terminé quand j'ai pris connaissance des travaux de P. Olver et J. Pohjanpelto sur les formes de Maurer-Cartan (appelées ici "connexions de Cartan"). Voir notamment *Selecta Math.* **11** (2005), 99-126. Leur formalisme, très simple et naturel, permettrait de simplifier les constructions faites ici en II.5 et II.6.

Néanmoins, il me semble que, dans le cas intransitif, leur utilisation de ces formes est différente de celle qui est faite ici, du fait que leurs espaces de repères sont pris en fixant un point et non une section de l'espace des invariants (= des intégrales premières). Ceci les conduit à des formules un peu différentes de celles de cet article-ci.

Références

[1] M. Audin, Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité, Cours spécialisés, Collection S.M.F., EDP Sciences 2001.

[2] R.L. Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt, P.A. Griffiths, *Exterior differential systems*, Springer 1991.

[3] A. Buium, Differential groups of finite dimension, *Lect. Notes in Math.* **1506**, Springer, 1991.

[4] S. Cantat, F. Loray, Holomorphic dynamics, Painlevé VI equation and character varieties, à paraître.

[5] E. Cartan, Les groupes de transformations continus, infinis, simples, *Ann. E.N.S.* **26** (1909), 93-161.

[6] H. Cartan, Séminaire E.N.S. 1949/50, exposé 19, Benjamin 1967.

[7] P. Cartier, Groupoïdes de Lie et leurs algébroïdes, *Séminaire Bourbaki* **987**, (2007-2008).

[8] G. Casale, Feuilletages singuliers de codimension un, *Annales Inst. Fourier* **26-3** (2006), 735-779.

[9] G. Casale, Le groupoïde de Galois de P1 et son irréductibilité, *Comm. Math. Helv.* **83** (2008), 471-519.

[10] G. Casale, Une preuve galoisienne de l'irréductibilité au sens de Nishioka-Umemura de la première équation de Painlevé, *Astérisque* **324** (2009), 83-100.

[11] G. Casale, The Galois groupoid of Picard-Painlevé VI equation, *R.I.M.S. Kôkyûroku Bessatu*, **B2** (2007), Kyoto.

[12] P.J. Cassidy, Differential algebraic groups, *Amer. J. Math.* **94** (1972), 891-954.

[13] P.J. Cassidy, M.F. Singer, *Galois theory of parameterized differential equations and linear differential algebraic groups, Differential equations and quantum groups*, D. Bertrand et al. editors, European Math. Soc. 2007.

[14] P. Deligne, Equations différentielles à points singuliers réguliers, *Lect. Notes in Math.* **163**, Springer, 1970.

[15] P. Deligne, *Catégories tannakiennes*, P. Cartier et al. editors, Grothendieck Festschrift vol. 2, *Progress in Math.* **87**, Birkhäuser 1990, 111-195.

[16] P. Deligne, J. Milne, Tannakian categories, *Lect. Notes in Math.* **900**, Springer (1982), 101-228.

[17] T. Dyckerhoff, *Picard-Vessiot extensions over number fields*, Diplomarbeit, Heidelberg (2005).

[18] A. Frölicher, A. Nijenhuis, Theory of vector valued differential forms, I. *Nederland Akad. Wetensch. Proc.* Ser. A **59** (1956), 338-359.

[19] R. Fuchs, Ueber lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Math. Annalen* **63** (1907), 301-321.

[20] P. Gabriel, *Construction de préschémas quotients*, in SGA 62-63, fasc. 2a, exposé 5, I.H.É.S.

[21] B. Gambier, Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale est à points critiques fixes, *C.R. Acad. Sc. Paris* **142** (1906) 266-269, et *Acta Math.* **33** (1910), 1-55.

[22] R.B. Gardner, Differential methods interfacing control theory, Brackett et.al. editors, *Progress in Math.* **27**, Birkhäusesr 1983, 117-180.

[23] H. Goldschmidt, Sur la structure des équations de Lie, I. Le troisième théorème fondamental, *J. Diff. Geometry* **63** (1972), 357-373.

[24] A. Grothendieck, SGA 1960-61, exposé IV, I.H.E.S.

[25] A. Grothendieck, Techniques de descente et théorèmes d'existence I, Séminaire Bourbaki 1959-60, exposé 190.

[26] A. Grothendieck, *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie analytique*, Séminaire Cartan 1960-61, vol. 13, Benjamin 1967, exposés 7-17.

[27] V. Guillemin, S. Sternberg, An algebraic model for transitive differential geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* **70** (1964), 16-47.

[28] A. Haefliger, Groupoïdes d'holonomie et classifiants, *Astérisque* **116** (1984), 70-97.

[29] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate texts in Math. 52, Springer 1977.

[30] M. Jimbo, T. Miwa, Monodromy preserving deformations of linear ordinary differential equations, II, *Physica* **2D** (1981), 407-448.

[31] N. Kamran, K.G. Lamb, W.F. Shadwick, The local equivalence problem for $\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ and the Painlevé transcendants, *J. Diff. Geometry* **22** (1985), 139-150.

[32] E.R. Kolchin, *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press 1973.

[33] E.R. Kolchin, *Differential algebraic groups*, Academic Press 1985.

[34] E.R. Kolchin, Constrained extensions of differential fields, *Adv. in Math.* **12** (1974), 147-170.

[35] G. Laumon, L. Moret-Bailly, Champs algébriques, *Ergebnisse der Math.* **39**, Springer 2000.

[36] K. Mackensie, Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry, *London Math. Soc. Lect. Notes Series* **124**, Cambridge University Press, 1987.

[37] B. Malgrange, Equations de Lie I, *J. Diff. Geometry* **6-4** (1972), 503-522.

[38] B. Malgrange, Frobenius avec singularités, 2. Le cas général, *Inventiones Math.* **39** (1977), 67-89.

[39] B. Malgrange, Le groupoïde de Galois d'un feuilletage, *Monographies de L'Enseignement Math.* **38** (2001), 465-501.

[40] B. Malgrange, On nonlinear differential Galois theory, *Chinese Ann. of Math.* **23** B : 2 (2002), 219-226.

[41] B. Malgrange, Systèmes différentiels involutifs, Panoramas et Synthèses, *Société Math. France* **19**, 2005.

[42] B. Malgrange, Differential algebraic groups, à paraître.

[43] B. Malgrange, La variété caractéristique d'un système différentiel analytique, *Ann. Inst. Fourier* **50** (2000), 491-518.

[44] Yu I. Manin, Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve and mirror of $\mathbb{P}^2$, *AMS transl.* (2) **186** (1998), 131-151.

[45] D. Marker, Model theory ; an Introduction, Graduate texts in Math., Springer 2002.

[46] B. Mazur, W. Messing, Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology, *Lect. Notes in Math.* **370**, Springer 1974.

[47] M. Mazzocco, Picard and Chazy solutions to the Painlevé VI equation, *Math. Ann.* **321** (2001) 157-195.

[48] J.J. Moralès-Ruiz, J.P. Ramis, Galoisian obstruction to integrability of hamiltonian systems, *Methods and Appl. of Analysis* **8** (2001), 33-96.

[49] J.J. Moralès-Ruiz, J.P. Ramis, C. Simo, Integrability of Hamiltonian systems and differential Galois groups of higher variational equations, *Ann. ENS* **40** - 6 (2007), 845-884.

[50] T. Morimoto, Lie algebras, Geometric Structures, and Differential Equations on Filtered Manifolds, *Adv. St. in Pure Mathematics* **37**, Math. Soc. of Japan (2002) 205-252.

[51] S. Neut, Implantation et nouvelles applications de la méthode d'équivalence de Cartan, Thèse, Université de Lille 1, LIFL, 2003.

[52] P.J. Olver, *Equivalence, invariants and symmetry*, Cambridge University Press, 1993.

[53] E. Picard, Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables, *J. de Liouville* **5** (1889), 135-319.

[54] A. Pillay, Differential Galois theory, *Ill. J. of Math.* **42-4** (1998), 678-699.

[55] A. Pillay, Algebraic D-groups and differential Galois theory, *Pacific J. Math.* **216** (2004), 343-360.

[56] J.-P. Serre, Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier* **6** (1955-56), 1-42.

[57] J.-P. Serre, Espaces fibrés algébriques, *Séminaire Chevalley* (1958), exposé 1.

[58] A. Seidenberg, An elimination theorem for differential algebra, *Univ. of California Publ. in Math.* **3-2** (1956), 31-66.

[59] I.M. Singer, S. Sternberg, The infinite groups of Lie and Cartan. Part I : the transitive groups, *J. Anal. Math.* **15** (1965), 1-114.

[60] H. Umemura, Differential Galois theory of infinite dimension, *Nagoya Math. J.* **144** (1996), 59-134.

[61] H. Umemura, Sur l'équivalence des théories de Galois différentielles générales, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Série 1, **346** (2008), 1155-1158.

[62] M. van der Put, M.F. Singer, Galois theory of linear differential equations, *Grundlehren der Math. Wissenschaften* **328**, Springer 2003.

[63] S.L. Ziglin, Branching of solutions and non existence of first integrals in hamiltonian mechanics I, *Funct. An. Appl.* **16** (1982), 181-189.