

Synchronisation de bursts dans des réseaux d'oscillateurs

Nathalie Corson, Stefan Balev, M. A. Aziz-Alaoui

▶ **To cite this version:**

Nathalie Corson, Stefan Balev, M. A. Aziz-Alaoui. Synchronisation de bursts dans des réseaux d'oscillateurs. 13e rencontre du non-linéaire, Mar 2010, Paris, France. pp.55-60. hal-00465567

HAL Id: hal-00465567
https://hal.science/hal-00465567

Submitted on 22 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Synchronisation de bursts dans des réseaux d'oscillateurs

Nathalie Corson[1], Stefan Balev[2], & M. A. Aziz-Alaoui[1]

[1] LMAH, Université du Havre, 25 rue Philippe Lebon, BP540, 76058 Le Havre Cedex
[2] LITIS, Université du Havre, 25 rue Philippe Lebon, BP540, 76058 Le Havre Cedex
nathalie.corson@univ-lehavre.fr

Résumé. Au sein de nombreux réseaux d'interaction, des phénomènes de synchronisation peuvent être détectés. Il est ainsi fréquent d'étudier le cas de la synchronisation complète, qui signifie que les constituants du réseau ont le même état au même moment. Cependant, dans le cas de réseaux constitués de modèles neuronaux couplés par des fonctions synaptiques non-linéaires, l'apparition de la synchronisation complète impose à la topologie du réseau des conditions très restrictives et biologiquement peu réalistes. Il est donc justifié de s'intéresser à d'autres types de synchronisation, telle que la *synchronisation de bursts*. Dans ce travail, nous proposons un algorithme qui permet de détecter la synchronisation de bursts au sein de différents réseaux. Cet algorithme est ensuite appliqué à des réseaux de différentes tailles et topologies.

Abstract. Interaction networks often exhibit synchronisation phenomena. Complete synchronization, which means sharing the same behaviour at the same time, is frequently studied. However, in the case of networks composed of neuronal models linked together with non-linear coupling functions modelling chemical synapses, the emergence of complete synchronization requires very restrictive and biologically non-realistic network topologies. That is why it is interesting to study different kinds of synchronization, such as *burst synchronization*. In this work we propose an algorithm which detects burst synchronization within different networks. The algorithm is applied to networks of different sizes and topologies.

1 Introduction

En 1952, A.L. Hodgkin et A.F. Huxley décrivent la cinétique des mécanismes ioniques au sein d'un neurone par un système de quatre équations différentielles ordinaires autonomes [8]. Ce système a été par la suite simplifié et généralisé, voir par exemple [5,6,7]. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'un des systèmes résultant de ces modifications, le système de Hindmarsh-Rose (1).

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax^2 - x^3 - z + I \\ \dot{y} = 1 - dx^2 - y \\ \dot{z} = \epsilon(b(x - x_c) - z) \end{cases} \tag{1}$$

Dans ce système, x correspond au potentiel de membrane d'un neurone, y décrit les échanges d'ions à travers la membrane par des canaux rapides, tandis que z décrit les échanges d'ions à travers la membrane par des canaux lents. Les paramètres a, b, d sont des constantes déterminées expérimentalement, I est le courant que l'on applique au neurone pour le stimuler, ϵ représente la différence d'echelle de temps entre la dynamique rapide et la dynamique lente et x_c est la première coordonnée du point d'équilibre le plus à gauche du système lorsque $z = 0$ et $I = 0$.

Ce modèle permet de reproduire différents comportements caractéristiques des neurones, tels que l'émission de potentiels d'action, aussi appelés *spikes* ou encore d'oscillations en salves, aussi appelées *bursts*. Le *bursting* correspond à des poussées de potentiel d'action séparées les unes des autres par des périodes lentes. C'est à ce comportement particulier que nous nous intéressons dans ce travail.

Nous considérons des oscillateurs de type Hindmarsh-Rose connectés en réseau avec matrice d'adjacence $\{c_{ij}\}$ (1). Les neurones sont couplés par des fonctions non-linéaires (2) (voir [1]), modélisant les synapses chimiques qui permettent la transmission de l'influx nerveux entre les neurones.

$$\begin{cases} \dot{x_i} = ax_i^2 - x_i^3 + y_i - z_i - \sum_{j=1}^{n} c_{ij} h(x_i, x_j) \\ \dot{y_i} = (a+\alpha)x_i^2 - y_i \\ \dot{z_i} = \epsilon(bx_i + c - z_i) \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

$$h(x_i, x_j) = g_{\text{syn}}^{(n)} \frac{(x_i - V)}{1 + \exp(-\lambda(x_j - \Theta))} \tag{3}$$

Le paramètre Θ représente le seuil synaptique. C'est le seuil du potentiel de membrane au-delà duquel la synapse s'active. Le paramètre λ contrôle la pente de la fonction sigmoïde h. Plus λ est grand et plus on approche de la fonction de Heaviside. Le paramètre V est le seuil qui rend la synapse inhibitrice ou excitatrice. Enfin, $g_{\text{syn}}^{(n)}$ est la force de couplage synaptique.

Dans un premier temps, nous avons étudié le phénomène de synchronisation complète au sein de tels réseaux [2,3]. Dans ce travail nous nous intéressons à un autre type de synchronisation, la *synchronisation de bursts*. Ce type de synchronisation semble biologiquement plus réaliste car il ne prend en compte ni l'amplitude des spikes qui composent les bursts, ni la durée de ces bursts. Il est en effet biologiquement peu probable que deux neurones émettent des spikes et des bursts identiques. Par ailleurs, la synchronisation complète impose au réseau des caractéristiques très restrictives. En effet, elle ne peut avoir lieu que si les noeuds du réseau reçoivent tous le même nombre de signaux entrants [1]. Ces conditions n'étant pas nécessaires à l'apparition de la synchronisation de bursts, cela rend cette dernière d'autant plus intéressante à étudier. Le phénomène de synchronisation de bursts fait l'objet de nombreuses recherches récentes, on peut citer par exemple [10,11].

2 Synchronisation des bursts

Les noeuds d'un réseau présentent de la synchronisation de bursts lorsque leurs périodes rapides débutent toutes au même moment. Contrairement à la synchronisation complète, la synchronisation de bursts n'est pas facile à détecter numériquement. Même la distinction entre périodes rapides et périodes lentes d'un neurone pose des problèmes car elle nécessite à trouver des seuils appropriés qui changent de manière imprévisible avec le moindre changement des paramètres des neurones ou du réseau. Dans cette partie, nous proposons un algorithme de détection de la synchronisation de bursts au sein d'un réseau. Cet algorithme peut être décomposé en quatre étapes principales. En effet, pour détecter le phénomène de synchronisation de bursts, il est nécessaire de détecter les groupes de bursts associés, ce qui impose la détection des débuts de bursts et enfin, les bursts ne peuvent être localisés que si les spikes l'ont été au préalable.

La première étape de cet algorithme est donc la localisation des spikes, obtenue par la recherche des maxima locaux des séries temporelles au-delà d'un certain seuil.

Les spikes étant localisés, il faut détecter les bursts et plus précisément leurs débuts. Nous considérons que le début d'un burst correspond à l'émission de son premier spike, c'est-à-dire le spike précédé par une période lente. Pour cela, nous listons toutes les distances inter-spikes et nous les séparons avec la méthode de *k-means clustering* en deux groupes : distances « courtes » que nous considérerons comme inter-spikes et distances « longues » que nous considérerons comme inter-bursts, voir [9]. Comme il n'est pas aisé de décider arbitrairement de cette limite, nous utilisons une méthode de clustering. La méthode de k-means est une méthode classique de clustering qui permet de séparer n observations en k groupes. Nous obtenons donc deux groupes de distances : les distances inter-spikes et inter-bursts. Cela nous permet ainsi de déterminer les premiers spikes des bursts. Afin de s'assurer de la présence claire de bursts émis par les neurones, nous calculons, dans chacun des cas, le ratio entre la plus courte distance inter-bursts et la plus longue distance inter-spikes. Si celui-ci est proche de 1, alors on peut considérer que la différence entre la plus grande distance inter-spikes et la plus petite distance inter-bursts n'est pas significative, ainsi, les spikes émis par le neurone ne sont pas clairement organisés en bursts. Si ce ratio est significativement supérieur à 1, alors nous pouvons considérer que les bursts peuvent être clairement identifiés.

L'étape suivante consiste en la détection des groupes de bursts associés. Considérons un burst b_1 émis par un premier neurone et un burst b_2 émis par un second. On dit que b_1 et b_2 sont associés si b_1 est le

burst du premier neurone le plus proche de b_2 et b_2 est le burst du second neurone le plus proche de b_1. Dans le cas de n neurones, on dit que les bursts $b_1, \ldots, b_n$ (b_i étant un burst émis par le neurone i) font partie d'un même groupe de bursts associés si chaque paire de bursts (b_i, b_j) est associée.

Afin de parler de synchronisation de bursts, il faut s'assurer que chacun des bursts des neurones d'un réseau admet un burst associé émis par tous les autres neurones du réseau. Il est donc intéressant de regarder, au niveau du réseau, le nombre total de bursts présents pour un intervalle de temps suffisamment long, le nombre de bursts qui admettent des équivalents émis par tous les autres neurones, mais surtout le ratio entre ces deux quantités.

Même si tous les bursts ont des équivalents émis par les autres neurones, cela ne signifie pas que les bursts sont synchronisés car on ne précise pas s'ils débutent au même moment. Il nous faut alors nous intéresser à la valeur de la durée entre les débuts des bursts associés. Pour ce faire, nous mesurons la différence de temps entre l'émission des bursts associés émis par les différents neurones du réseau. Plus cette différence sera importante, moins les bursts seront synchronisés. C'est pourquoi, dans un réseau de n neurones, pour chaque n-uplet de bursts alignés, nous regardons la distance entre les deux débuts de bursts les plus éloignés. Cette mesure étant effectuée autant de fois qu'il y a de bursts émis, nous prenons la moyenne de toutes ces mesures.

La figure 1 illustre le fonctionnement de notre algorithme. Chaque maximum local d'un neurone est visualisé par un point sur la ligne horizontale correspondant à son numéro. Chaque point correspond donc à un spike. Les segments sous les points représentent les bursts détectés par l'algorithme de k-means clustering. Si le burst appartient à un groupe de bursts alignés, un point apparaît au début de son segment. Finalement, les couples de lignes grises verticales représentent la distance entre les deux bursts les plus éloignés dans chaque groupe de bursts associés.

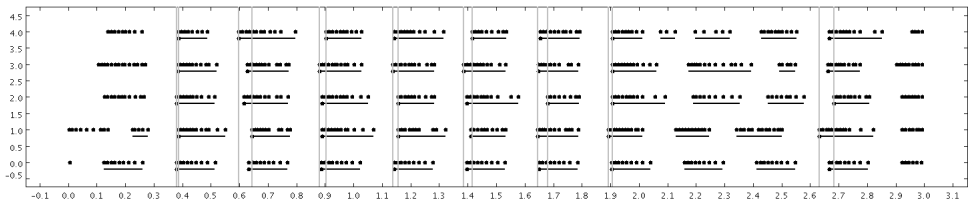


Fig.1. Exemple de motifs temporels de bursts dans un réseau de 5 neurones. L'abscisse représente le temps et l'ordonné le numéro de neurone.

3 Topologie du réseau

Pour que la synchronisation de deux noeuds d'un réseau soit possible, il faut que l'un d'eux soit influencé directement ou indirectement par l'autre, ou bien que tous les deux soient influencés par un troisième noeud. Au niveau du réseau cela implique qu'une condition nécessaire de synchronisation d'un réseau est l'existence d'au moins un noeud « racine » à partir duquel on peut atteindre tous les autres. Autrement dit, le réseau doit posséder un arbre couvrant orienté. Remarquons que c'est une condition nécessaire de synchronisation, quel que soit son type (complète, de bursts ou autre).

Une deuxième condition que nous avons imposée est l'absence de cycles dans le réseau. En effet, la présence de cycles peut modifier de manière significative le comportement individuel des neurones au point de faire disparaître le phénomène de bursting pour certains intervalles de la force de couplage. Pour illustrer ce fait, prenons le cas le plus simple de cycle, deux neurones avec un couplage bidirectionnel (un lien bidirectionnel entre a et b est équivalent à deux liens unidirectionnels de a à b et de b à a et donc d'un cycle de longueur 2). La figure 2 montre qu'avec l'augmentation de la force de couplage, le comportement de bursting se transforme progressivement en spiking. A partir du moment où l'on observe une synchronisation complète, le bursting revient mais sous une forme différente pour disparaître

à nouveau pour des très grandes forces de couplage. Une simulation similaire avec la présence de cycles plus longs montre que le comportement individuel peut être encore plus perturbé. Nos expériences numériques montrent, en l'absence de cycles, que le comportement de bursting est beaucoup plus stable.

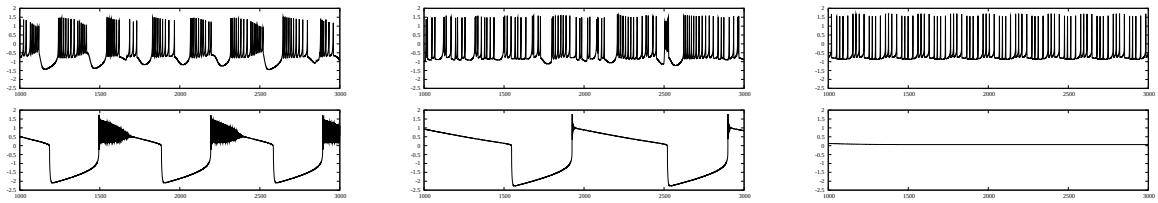


Fig.2. Série temporelle (t, x) d'un neurone couplé bidirectionnellement avec un autre avec force de couplage (de gauche à droite et de haut en bas) 0.1, 0.5, 1.0, 1.3, 2.0 et 3.0.

Nous nous sommes intéressés à deux topologies de réseaux qui vérifient les deux conditions précédentes et qui permettent de construire facilement des réseaux de taille différente mais de caractéristiques communes. Notons que la génération et la manipulation des graphes se fait grâce à la bibliothèque *GraphStream* développée au LITIS [4]. Le premier type de réseau étudié est une chaîne. Une chaîne de n noeuds est un réseau dans lequel le neurone i n'envoie de signal qu'au neurone $i + 1$. Le deuxième type est un réseau complet orienté dans lequel le neurone i reçoit des signaux des neurones $1, \ldots, i - 1$. La figure 3 donne des exemples de ces types de réseaux.

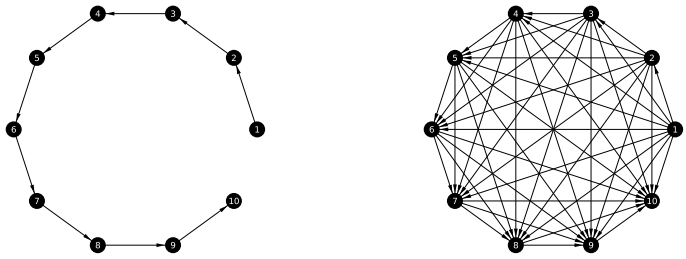


Fig.3. Exemple de réseau en chaîne (gauche) et de réseau complet orienté (droite) de 10 noeuds.

4 Résultats numériques

Nous avons appliqué l'algorithme de détection de synchronisation de bursts présenté dans la section 2 sur des réseaux de différentes tailles de deux topologies que nous avons choisies. Nous nous sommes intéressés aux valeurs de la force de couplage $g_{\text{syn}}^{(n)}$ pour lesquelles la synchronisation de bursts apparaît. Rappelons que trois conditions doivent être vérifiées pour avoir synchronisation de bursts. Premièrement, les neurones doivent avoir un comportement de bursting clairement exprimé, c'est-à-dire le ratio entre la plus petite distance inter-bursts et la plus grande distance inter-spikes doit être suffisamment grand. L'évolution de ce ratio est illustrée sur la figure 4a. Pour des raisons de clarté, nous ne représentons que le dernier neurone d'un réseau de 20 neurones. Nous pouvons constater qu'à partir d'une certaine force de couplage ce ratio se stabilise. Pour les autres neurones la courbe est similaire, mais plus le neurone est proche du premier noeud, plus le point de stabilisation est décalé à gauche. La force de couplage nécessaire est moins importante dans un réseau complet que dans un réseau en chaîne car le degré entrant du noeud i dans un réseau complet est $i - 1$, alors que ce degré est seulement 1 dans un réseau en chaîne.

La seconde condition est que tous les bursts doivent appartenir à des groupes de bursts associés. L'indicateur de cette condition est le ratio entre le nombre de bursts associés et le nombre total de bursts dans le réseau. L'évolution de ce ratio en fonction de la force de couplage est illustrée sur la figure 4b. À nouveau, nous remarquons l'existence d'un seuil à partir duquel ce ratio devient 1 ce qui signifie que tous les bursts sont associés en groupes.

La dernière condition de synchronisation de bursts est que tous les bursts dans un groupe doivent commencer en même temps, autrement dit le décalage dans le temps entre le premier et le dernier burst dans un groupe doit être suffisamment petit. La figure 4c montre que, comme les autres indicateurs, celui-ci se stabilise à partir d'une certaine force de couplage.

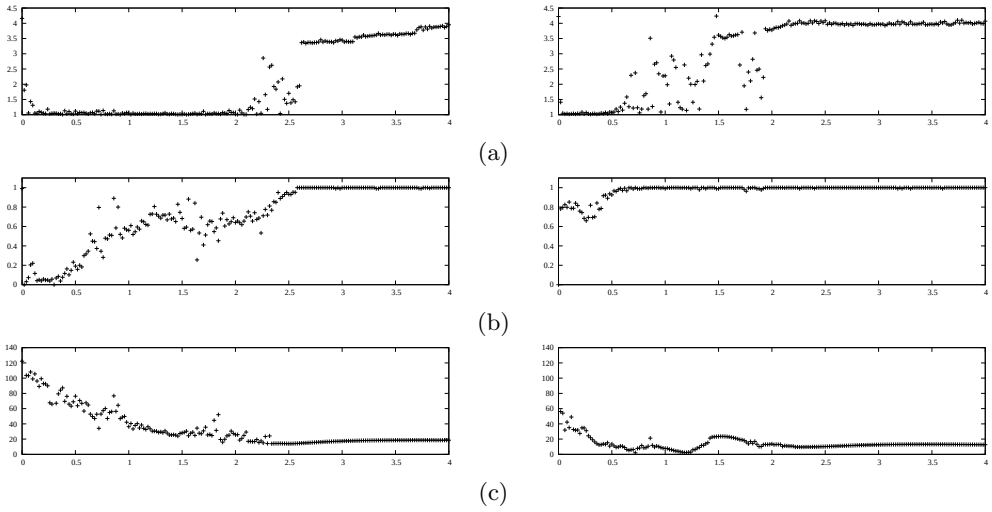


Fig.4. Trois indicateurs de synchronisation de bursts en fonction de la force de couplage. (a) Ratio entre la plus petite distance inter-bursts et la plus grande distance inter-spikes du dernier neurone du réseau. (b) Ratio entre le nombre de bursts associés et le nombre total de bursts. (c) Moyenne du décalage entre le premier et le dernier burst dans un groupe de bursts associés. Les résultats présentés sont sur un réseau de taille 20 de topologie chaîne (gauche) et graphe complet orienté (droite).

En réunissant les trois conditions précédentes, nous pouvons déterminer les forces de couplage pour lesquelles la synchronisation de bursts apparaît. La figure 5 récapitule ces résultats. Nous pouvons constater que pour le cas de réseaux en chaîne la force de couplage nécessaire pour obtenir synchronisation de bursts croît linéairement avec la taille du réseau. Pour les réseaux complets orientés cette force ne dépend pas de la taille du réseau. Par ailleurs, il est intéressant de noter que dans ce dernier cas, on peut observer un phénomène de désynchronisation. En effet, avant que la synchronisation de bursts ne se stabilise au-delà d'une certaine force de couplage, il existe des valeurs de cette force pour laquelle le réseau présente un phénomène de synchronisation de bursts et d'autres pour lesquelles cette synchronisation disparaît.

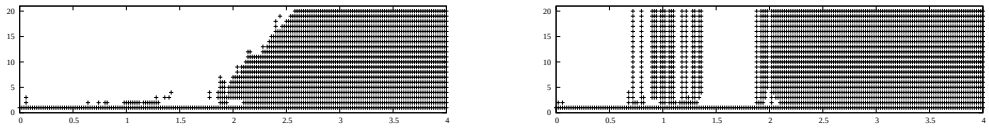


Fig.5. L'abscisse représente la force de couplage est l'ordonnée la taille du réseau. Chaque point indique la présence de synchronisation de bursts pour la force de couplage et la taille de réseau correspondantes (gauche : réseau en chaîne, drote : réseau complet orienté).

5 Conclusion et perspectives

Ainsi, nous avons développé un algorithme de détection de la synchronisation de bursts pouvant s'appliquer à des réseaux de différentes topologies dont les noeuds sont des systèmes dynamiques et les arêtes des fonctions de couplage. Dans ce travail, nous avons présenté le cas de réseaux composés de modèles neuronaux de Hindmarsh-Rose couplés par des fonctions non-linéaires modélisant des synapses chimiques. Les expériences numériques réalisées pour des réseaux de topologie chaîne ou complet unidirectionnel nous ont permis à formuler l'hypothèse selon laquelle la force de couplage nécessaire pour la synchronisation de bursts dans un réseau dépend linéairement de son diamètre. En effet, le diamètre d'un réseau de taille n est $n-1$ dans le cas de chaîne et 1 dans le cas de réseau complet orienté. Ceci est en parfait accord avec la figure 5. Cette hypothèse reste à être confirmée (ou démentie) par d'autres expériences numériques et justifiée par des outils mathématiques théoriques.

Références

1. Belykh I., De Lange E., Hasler M., *Synchronization of bursting neurons : What matters in the network topology*, Phys. Rev. Lett. 188101, 2005.
2. Corson N., Aziz-Alaoui M.A., *Complex emergent properties in synchronized neuronal oscillations*, "From System Complexity to Emergent Properties", Springer, Understanding Complex Systems series, Eds. M.A. Aziz-Alaoui and Cyrille Bertelle, pp 243-259, 2009.
3. Corson N., *Dynamique d'un modèle neuronal, synchronisation et complexité*, Manuscrit de thèse, 2009.
4. Dutot A., Guinand F., Olivier D. Pigné Y., *GraphStream : A Tool for bridging the gap between Complex Systems and Dynamic Graphs*, EPNACS : Emergent Properties in Natural and Artificial Complex Systems, 2007. http ://graphstream.sourceforge.net/
5. FitzHugh R., *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane*, Biophysical J. 1, 445-466, 1961.
6. Hindmarsh J.L., Rose R.M., *A model of the nerve impulse using two first-order differential equations*, Nature vol. 296, 162-164, 1982.
7. Hindmarsh J.L., Rose R.M., *A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations*, Proc. R. Sc. Lond. B221, 87-102, 1984.
8. Hodgkin A.L., Huxley A.F., *A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve*, J. Physiol 117, 500-544, 1952.
9. MacQueen J.B., *Some Methods for classification and Analysis of Multivariate Observations*, Proceedings of 5-th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley, University of California Press, 1 :281-297 , 1967.
10. Shi X., Lu Q., *Burst synchronization of electrically and chemically coupled map-based neurons*, Physica A : Statistical Mechanics and its Applications v. 388, 12, 2410-2419, 2009.
11. Zheng Y.H., Lu Q.S., *Spatiotemporal patterns and chaotic burst synchronization in a small-world neuronal network*, Physica A : Statistical Mechanics and its Applications v. 387, 14, 3719-3728, 2008.