



HAL
open science

Compactification d'espaces de représentations de groupes de type fini.

Anne Parreau

► **To cite this version:**

Anne Parreau. Compactification d'espaces de représentations de groupes de type fini.. Mathematische Zeitschrift, 2011, pp.1-36. 10.1007/s00209-011-0921-8 . hal-00461218v2

HAL Id: hal-00461218

<https://hal.science/hal-00461218v2>

Submitted on 27 Sep 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Compactification d'espaces de représentations de groupes de type fini.

Anne Parreau

Abstract Let Γ be a finitely generated group and G be a noncompact semisimple connected real Lie group with finite center. We consider the space $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ of conjugacy classes of semisimple representations of Γ into G , which is the maximal Hausdorff quotient of $\text{Hom}(\Gamma, G)/G$. We define the *translation vector* of $g \in G$, with value in a Weyl chamber, as a natural refinement of the translation length of g in the symmetric space associated with G . We construct a compactification of $\mathcal{X}(\Gamma, G)$, induced by the marked translation vector spectrum, generalizing Thurston's compactification of the Teichmüller space. We show that the boundary points are projectivized marked translation vector spectra of actions of Γ on affine buildings with no global fixed point. An analogous result holds for any reductive group G over a local field.

Keywords Moduli spaces of representations · Higher teichmüller theory · Reductive groups · Symmetric spaces · Euclidean buildings · Asymptotic cones

1 Introduction

Espaces de représentations. Soit Γ un groupe infini de type fini. Soit G un groupe de Lie semisimple réel, connexe, non compact, de centre fini. On s'intéresse à l'espace $\text{R}(\Gamma, G) = \text{Hom}(\Gamma, G)$ des représentations de Γ dans G , muni de la topologie de la convergence simple et de l'action de G par conjugaison. L'espace topologique quotient $\text{R}(\Gamma, G)/G$ n'étant pas séparé, on le remplace par son plus gros quotient séparé $\mathcal{X}(\Gamma, G) = \text{R}(\Gamma, G) // G$, que l'on peut décrire de la manière suivante (voir section 5.1, et [Par5]).

On considère l'action de G par isométries sur son espace symétrique (sans facteur compact) X associé. On note $\partial_\infty X$ le bord à l'infini de X . Une représentation $\rho : \Gamma \rightarrow G$ est dite *complètement réductible* (cr) si pour tout $\alpha \in \partial_\infty X$ fixé par ρ , il existe $\beta \in \partial_\infty X$ fixé par ρ et opposé à α (ie. joint à α par une géodésique dans X). Cette

avec le soutien de l'ANR Repsurf : ANR-06-BLAN-0311

Institut Fourier, Université Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères cedex, France.
E-mail: Anne.Parreau@ujf-grenoble.fr

propriété géométrique (introduite par J.P Serre [Serre]) est équivalente aux notions algébriques classiques de réductivité ou semisimplicité.

L'espace $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ s'identifie alors naturellement au sous-espace $R_{\text{cr}}(\Gamma, G)/G$ de $R(\Gamma, G)/G$ formé par les classes de représentations cr. Cet espace est considéré de manière classique dans la littérature. Il est légèrement “plus gros” que le quotient algèbro-géométrique usuel (voir section 5.1).

On s'intéresse aussi plus spécialement au sous-espace $\mathcal{X}_{\text{fd}}(\Gamma, G)$ de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ formé des classes de représentations fidèles et discrètes.

Quelques exemples. Si Γ est le groupe fondamental d'une surface Σ connexe orientée fermée, de genre $g \geq 2$, et $G = \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, alors X est le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 , et l'espace de Teichmüller \mathcal{T} des structures hyperboliques (marquées) sur Σ s'identifie naturellement à l'une des composantes connexes de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$, incluse dans $\mathcal{X}_{\text{fd}}(\Gamma, G)$.

Si $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$ et $G = \text{PSL}_n(\mathbb{R})$, alors d'après [Hit] et [Lab] la composante de Hitchin de l'espace des modules de G -fibrés plats sur Σ est une composante connexe de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$, incluse dans $\mathcal{X}_{\text{fd}}(\Gamma, G)$, et c'est une cellule de dimension $(2g - 2) \dim G$. Pour $n = 3$ Goldman et Choi ont montré dans [ChGo] qu'elle s'identifie à l'espace des structures projectives réelles convexes (marquées) sur la surface Σ .

Par contre, si Γ est un réseau irréductible d'un groupe de Lie H semisimple réel, connexe, sans facteurs compacts, de centre fini, avec $\text{rang}(H) \geq 2$, le théorème de super-rigidité de Margulis [Mar] entraîne que l'espace $\mathcal{X}(\Gamma, \text{SL}_n(\mathbb{C}))$ est fini pour tout n (voir aussi [Bass]).

Les réseaux des groupes de Lie réels semisimples (connexes, sans facteurs compacts, de centre fini) H de rang 1 non localement isomorphes à $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ (comme $\text{SO}_0(n, 1)$ pour $n \geq 3$) n'ont pas de déformations non triviales en des réseaux dans H par les résultats de rigidité de Mostow [Mos]. Par contre ils ont dans certains cas de riches espaces de déformations fidèles et discrètes dans d'autres groupes G , correspondant par exemple aux structures conformes ($G = \text{SO}_0(n + 1, 1)$) et projectives réelles ($G = \text{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})$) marquées sur une variété M de groupe fondamental Γ (voir par exemple [JoMi]).

Objectif. W. Thurston a construit une compactification de l'espace de Teichmüller (voir par exemple [FLP]). Plus généralement, Morgan et Shalen (voir [MoSh], [Mor], [Chi]) puis Bestvina [Bes] et Paulin [Pau1], ont généralisé la compactification de Thurston pour $\mathcal{X}_{\text{fd}}(\Gamma, G)$ avec $G = \text{SO}_0(n, 1)$. Les points du bord proviennent d'actions de Γ sur des *arbres réels*, à “petits” (i.e. virtuellement cycliques) stabilisateurs d'arêtes. L'un des outils fondamentaux est le *spectre marqué des longueurs*.

Le but de ce travail est de généraliser cette compactification pour G de rang supérieur ou égal à 2. La possibilité d'une telle compactification a été envisagée auparavant par de nombreuses personnes (Gromov, Paulin [Pau2], Kleiner-Leeb, ...). En rang supérieur ou égal à 2, il convient de remplacer les arbres réels par une catégorie plus générale d'espaces métriques, les *immeubles affines*, ou encore *euclidiens*. Expliquons maintenant plus en détail le résultat présenté dans cet article.

Pour compactifier $\mathcal{X}(\Gamma, G)$, on introduit (en section 4) un raffinement de la notion de longueur de translation, la *vecteur de translation*. On se fixe une chambre de

Weyl fermée $\overline{\mathcal{C}}$ de X . On considère la projection naturelle $\delta : X \times X \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}$, qui raffine la distance usuelle. Le *vecteur de translation* $v(g) \in \overline{\mathcal{C}}$ de $g \in G$ est l'unique vecteur de longueur minimale dans l'adhérence de $\{\delta(x, gx), x \in X\}$. Algébriquement, c'est la "projection de Jordan" de g [Ben]. Pour $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, cet invariant de conjugaison est égal à la suite décroissante des logarithmes des modules des valeurs propres de g .

On considère l'application suivante

$$\mathcal{V} : \begin{array}{ccc} \mathcal{X}(\Gamma, G) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{C}}^\Gamma \\ [\rho] & \longmapsto & v \circ \rho \end{array}.$$

Soit $\mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ le projectifié de $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$, c'est-à-dire l'espace topologique quotient de $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma - \{0\}$ par multiplication dans \mathbb{R}_+^* , et $\mathbb{P} : \overline{\mathcal{C}}^\Gamma - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ la projection canonique. On démontre alors le théorème suivant (voir théorème 5.2 pour un énoncé plus précis).

Théorème 1 *L'application continue*

$$\mathbb{P} \circ \mathcal{V} : \mathcal{X}(\Gamma, G) - \mathcal{V}^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$$

induit une compactification $\widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma, G)$ de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$, dont le bord $\partial_\infty \mathcal{X}(\Gamma, G) \subset \mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ est formé de points de la forme $x = [v \circ \rho]$, où ρ est une action de Γ sur un immeuble affine (pas nécessairement discret), sans point fixe global.

L'action du groupe $\mathrm{Out}(\Gamma)$ des automorphismes extérieurs de Γ sur $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ s'étend naturellement à $\widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma, G)$.

Si Γ n'a pas de sous-groupe d'indice fini possédant un sous-groupe abélien distingué infini (par exemple si Γ est un sous-groupe discret fortement irréductible de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$), alors le sous-espace $\mathcal{X}_{\mathrm{fid}}(\Gamma, G)$ des classes de représentations fidèles et discrètes est un fermé de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ (section 6.3). La compactification de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ construite induit donc une compactification naturelle $\widetilde{\mathcal{X}}_{\mathrm{fid}}(\Gamma, G)$ de $\mathcal{X}_{\mathrm{fid}}(\Gamma, G)$. Dans ce cas, F. Paulin a démontré que les actions ρ dont proviennent les points du bord sont à stabilisateurs de germes d'appartements virtuellement résolubles [Pau3].

En particulier, lorsque Γ est un groupe de surface et $G = \mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$, ceci donne une compactification de la composante de Hitchin. On a étudié dans [Par1] des exemples de dégénérescences de structures projectives réelles (cas où $n = 3$) par pliage, et calculé les spectres limites correspondants.

Sur la structure de la preuve. Les actions sur des immeubles affines sont obtenues par passage à des cônes asymptotiques, comme dans [Pau3] et [KaLe]. L'essentiel de la difficulté consiste ici, premièrement, à démontrer la continuité du vecteur de translation par passage à un cône asymptotique (Prop. 4.4), et deuxièmement, que le spectre limite obtenu est non nul, fait crucial pour cette compactification.

Cette dernière propriété est obtenue en utilisant un modèle algébrique pour le cône asymptotique. On peut en effet voir l'action limite comme provenant d'une représentation $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$, agissant sur son immeuble de Bruhat-Tits, où \mathbb{K}_ω est un corps valué, ni localement compact, ni à valuation discrète, obtenu à partir de \mathbb{R} par un procédé de passage à un cône asymptotique (en utilisant un ultrafiltre ω).

Cette construction est détaillée dans la section 3. La non nullité du spectre découle alors de l'absence de point fixe global par [Par3].

On obtient également les résultats analogues dans le cadre des groupes réductifs sur les corps locaux non archimédiens.

2 Préliminaires

Cette section est consacrée à des préliminaires géométriques. On introduit les notations utilisées et on rappelle ou on établit les propriétés dont on aura besoin, d'abord pour les espaces métriques CAT(0) (section 2.1), puis plus spécifiquement pour les espaces symétriques et les immeubles affines (section 2.2). Enfin on rappelle la notion de cône asymptotique d'un espace métrique et les propriétés des cônes asymptotiques des espaces symétriques et des immeubles qu'on utilisera (section 2.3).

2.1 Espaces métriques CAT(0)

Dans cette section X est un espace métrique CAT(0). On renvoie à [BrHa] comme référence générale. Etant donnés $x, y \in X$, on notera $[x, y]$ ou bien xy l'unique segment géodésique joignant x à y . Etant donnés $x, y, z \in X$ avec $y, z \neq x$, on notera $\tilde{\angle}_x(y, z)$ l'angle de comparaison en x entre y et z , et $\angle_x(y, z)$ l'angle en x entre y et z .

L'espace X se décompose canoniquement en produit $X_0 \times X'$, où X_0 est euclidien et X' est un espace métrique CAT(0) sans facteur euclidien. Les isométries de X préservent cette décomposition [BrHa, Thm II.6.15]. On appellera X_0 le *facteur euclidien (maximal)* de X .

Le groupe $\text{Is}(X)$ des isométries de X est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés (qui est métrisable). Lorsque X est propre (i.e. si ses boules fermées sont compactes) $\text{Is}(X)$ est localement compact, et agit proprement sur X (c'est-à-dire que si $x \in X$ et $M \geq 0$, alors $\{g \in \text{Is}(X), d(x, gx) \leq M\}$ est un compact).

Faisceaux. Soit $r : \mathbb{R} \rightarrow X$ une géodésique. Le *faisceau* F_r est la réunion des géodésiques parallèles à r . C'est un sous-espace convexe et il se décompose [BrHa, Thm II.2.14] canoniquement en un produit $C_r \times r$, où $C_r \subset X$ est un convexe et $\{x\} \times r$ est une géodésique parallèle à r pour tout $x \in C_r$. Si X est complet, alors F_r et C_r aussi.

2.1.1 Déplacement et longueur de translation [BrHa, II.6].

Soit $g \in \text{Is}(X)$. On appelle fonction *de déplacement* de g la fonction convexe

$$d_g : X \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto d(x, gx)$$

et *longueur de translation* de g le réel positif

$$\ell(g) = \inf_{x \in X} d_g(x).$$

L'ensemble minimal de g est le convexe fermé (éventuellement vide)

$$\text{Min}(g) = \{x \in X, d(x, gx) = \ell(g)\}.$$

On dit que g est *semi-simple* si $\text{Min}(g) \neq \emptyset$, *parabolique* sinon. Dans le premier cas, ou bien si $\ell(g) = 0$ et g possède un point fixe (g est alors dite *elliptique*) ou bien $\ell(g) > 0$, et translate alors une géodésique (g est alors dite *axiale*).

Si g envoie une géodésique r sur une géodésique parallèle, alors le faisceau $F_r = C_r \times r$ est stable par g et g agit dessus comme (g', t) où $g' \in \text{Is}(C_r)$ et $t \in \mathbb{R}$ désigne la translation $r(s) \mapsto r(s+t)$ de r . On a alors $\text{Min}(g) = \text{Min}(g') \times r \subset F_r$ et

$$\ell(g) = \ell(g|_{F_r}) = \sqrt{\ell(g')^2 + t^2}. \quad (1)$$

On montre facilement que pour tout $x \in X$ la limite $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} d(x, g^k x)$ existe et ne dépend pas de $x \in X$ (voir [BrHa, II.6.6]). Comme $\frac{1}{k} d(x, g^k x) \leq d_g(x)$ pour tout k , on a de plus

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} d(x, g^k x) \leq \ell(g) \quad (2)$$

avec égalité si g semisimple.

On obtient aisément les propriétés suivantes.

Lemme 2.1 Soit $g_k \rightarrow g$ dans $\text{Is}(X)$.

1. On a $d_{g_k} \rightarrow d_g$ uniformément sur les bornés de X .
2. (semicontinuité) On a $\limsup_k \ell(g_k) \leq \ell(g)$.
3. Soit M l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites $(x_k)_k$ dans X telles que $x_k \in \text{Min}(g_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors $M \subset \text{Min}(g)$.

En particulier, si X est propre et si $\text{Min}(g_k)$ est non vide et reste à distance bornée de $x_0 \in X$ fixé, alors quitte à extraire $\text{Min}(g_k)$ converge (pour la topologie de Hausdorff pointée [Gro2]) vers un sous-ensemble non vide N de $\text{Min}(g)$. En particulier g est semisimple et $\ell(g) = \lim_k \ell(g_k)$. \square

2.1.2 Bord à l'infini.

On suppose désormais X complet. On notera $\partial_\infty X$ le bord (à l'infini) de X et $\bar{X} = X \cup \partial_\infty X$. Si $r : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ est un rayon géodésique, on note $r(\infty)$ le point de $\partial_\infty X$ défini par r , qu'on appellera l'*extrémité* de r .

Définition 2.2 (Ombre $O_x(y, D)$ d'une boule) Soit $x \in \bar{X}$. Pour tout $y \in X$, et pour tout $D \geq 0$, on notera $O_x(y, D)$ l'*ombre vue du point x de la boule $B(y, D)$* , c'est-à-dire l'ensemble des $r(+\infty)$, où r est une géodésique issue de x telle que $d(y, r) \leq D$.

L'espace \bar{X} est muni de la topologie des cônes [BrHa, II.8.6]. L'action de $\text{Is}(X)$ s'étend continûment sur \bar{X} . Soient $\xi, \xi' \in \bar{X}$. Pour $x \in X$, on notera $\angle_x(\xi, \xi')$ l'angle en x entre ξ et ξ' . On notera $\angle_T(\xi, \xi') = \sup_{x \in X} \angle_x(\xi, \xi')$ l'*angle de Tits*, qui est une métrique sur $\partial_\infty X$ (voir II 9.4 et 9.5 dans [BrHa]). Si ξ^+ et ξ^- sont les deux extrémités d'une géodésique r , on dira que ξ^+ et ξ^- sont *opposés* et on notera $F_{\xi^- \xi^+} = F_r$ (alors $\angle_T(\xi^-, \xi^+) = \pi$).

2.1.3 Quelques propriétés des isométries relatives au bord à l'infini.

Proposition 2.3 (Points fixes à l'infini d'une isométrie axiale) Soit $g \in \text{Is}(X)$ translantant (non trivialement) une géodésique r . Notons $\xi^- = r(-\infty)$ et $\xi^+ = r(+\infty)$. Si g fixe $\xi \in \partial_\infty X$, alors $\angle_T(\xi^-, \xi) + \angle_T(\xi, \xi^+) = \pi$. En particulier, si ξ est opposé à ξ^- , alors $\xi = \xi^+$.

Démonstration On a $\angle_T(\xi^-, \xi) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \angle_{r(t)}(\xi^-, \xi)$ quand $t \rightarrow -\infty$, voir [BrHa, Prop. II.9.8]. Notons $\ell = \ell(g)$, et $x = r(0)$ et $y = r(\ell)$. En faisant agir g^n pour $n \in \mathbb{Z}$ on obtient que $\angle_x(\xi^-, \xi) = \angle_y(\xi^-, \xi) = \angle_T(\xi^-, \xi)$ et $\angle_T(\xi, \xi^+) = \angle_x(\xi, \xi^+)$. Or $\angle_x(\xi^-, \xi) + \angle_x(\xi, \xi^+) \geq \pi$ et $\angle_x(\xi, y) + \angle_y(x, \xi) \leq \pi$, ce qui conclut. \square

Définition 2.4 (Points attractif et répulsif) On dira que $g \in \text{Is}(X)$ a des points fixes attractif et répulsif à l'infini s'il existe $\xi_g^+, \xi_g^- \in \partial_\infty X$ opposés (nécessairement uniques) tels que pour un (tout) $x \in X$ on ait $g^k x \rightarrow \xi_g^+$ et $g^{-k} x \rightarrow \xi_g^-$ quand $k \rightarrow +\infty$. Alors ξ_g^+ et ξ_g^- sont clairement fixés par g .

Remarque 2.5 Si g est axiale, alors les extrémités d'un axe de g conviennent. Si X est un immeuble affine complet, ils existent donc dès que $\ell(g) > 0$ par le théorème 2.14. On verra que c'est également le cas lorsque X est un espace symétrique de type non compact (proposition 2.15).

Proposition 2.6 Soit $g \in \text{Is}(X)$ fixant deux points opposés ξ^- et ξ^+ dans $\partial_\infty X$. On note $g = (g', t)$ la décomposition de g sur $F = F_{\xi^- \xi^+} = C \times \mathbb{R}$.

Si on a $t = \ell(g)$, ou, de manière équivalente par (1), si $t > 0$ et $\ell(g') = 0$, alors g a des points fixes attractif et répulsif à l'infini, et ce sont ξ^+ et ξ^- .

Démonstration Soit $x = (x', 0)$ dans F . Alors $\frac{1}{kt} d(g^k x, (x', kt)) = \frac{1}{kt} d(x', (g')^k x')$, qui tend vers 0 car $\ell(g') = 0$ par (2). Donc $g^k x \rightarrow \xi^+$ et $g^{-k} x \rightarrow \xi^-$ quand $k \rightarrow +\infty$. \square

Proposition 2.7 Soit g ayant des points fixes attractif et répulsif ξ^+ et ξ^- à l'infini.

Pour tout $x \in F_g$ et tout $D > 0$, pour tout voisinage V de ξ^+ dans $\partial_\infty X$ on a pour k suffisamment grand

$$g^k(O_{\xi^-}(x, D)) \subset V$$

En particulier, ξ^+ est le seul point fixe de g dans $\partial_\infty X$ qui est opposé à ξ^- .

Démonstration Soit $x \in F_{\xi^- \xi^+}$ et $D > 0$. Soit V un voisinage de ξ^+ dans $\partial_\infty X$. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $(\xi_k)_k$ dans $O_{\xi^-}(x, D)$ et une suite croissante $(n_k)_k$ d'entiers avec $\xi_k' = g^{n_k} \xi_k \notin V$ pour tout k . Soit y_k dans $F_{\xi^- \xi_k}$ tel que $d(x, y_k) \leq D$. Comme $g^{n_k} x \rightarrow \xi^+$, on a aussi $g^{n_k} y_k \rightarrow \xi^+$, car $d(g^{n_k} y_k, g^{n_k} x) \leq D$. Par conséquent $\angle_x(\xi^+, g^{n_k} y_k) \rightarrow 0$ et $\angle_x(\xi^-, g^{n_k} y_k) \rightarrow \pi$. On en déduit que $\angle_{g^{n_k} y_k}(x, \xi^-) \rightarrow 0$, puis que $\angle_{g^{n_k} y_k}(x, \xi_k') \rightarrow \pi$ (car $\angle_{g^{n_k} y_k}(\xi^-, \xi_k') = \pi$), puis que $\angle_x(g^{n_k} y_k, \xi_k') \rightarrow 0$. Comme $\angle_x(\xi^+, \xi_k') \leq \angle_x(\xi^+, g^{n_k} y_k) + \angle_x(g^{n_k} y_k, \xi_k')$, on a $\angle_x(\xi^+, \xi_k') \rightarrow 0$ et $\xi_k' \rightarrow \xi^+$, contradiction. \square

Proposition 2.8 Soit $g \in \text{Aut}(X)$ fixant deux points opposés $\xi^+, \xi^- \in \partial_\infty X$. Notons (g', t) la décomposition de g sur $F = F_{\xi^- \xi^+} = C \times \mathbb{R}$. On suppose que g possède des points fixes attractif et répulsif ξ_g^+ et ξ_g^- dans $\partial_\infty X$. Alors $\xi_g^+, \xi_g^- \in \partial_\infty F$ et

$$\tan(\angle_T(\xi_g^+, \xi^+)) \leq \frac{\ell(g')}{t}$$

Démonstration Soit $x \in F$. Comme $\xi_g^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} g^n x$ et $g(F) = F$, on a $\xi_g^+ \in \partial_\infty F$. De plus $\angle_T(\xi_g^+, \xi^+) = \angle_x(\xi_g^+, \xi^+) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \angle_x(g^n x, \xi^+)$ et pour $x = (x', 0)$ on a $\tan(\angle_x(g^n x, \xi^+)) = \frac{1}{n} d(x', (g')^n x')$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} d(x', (g')^n x') \leq \ell(g')$ par (2). \square

2.2 Espaces symétriques et immeubles affines

2.2.1 Généralités

Espaces symétriques. Les espaces symétriques considérés dans cet article sont sans facteurs compacts. On renvoie à [Hel] et [Ebe] comme références générales.

Soit X un espace symétrique. Rappelons que X est une variété riemannienne complète simplement connexe, à courbure sectionnelle négative ou nulle. En particulier X est un espace métrique CAT(0) complet et propre, et on reprendra les notations de la section 2.1.

On note X_0 le facteur euclidien de X et $X = X_0 \times X'$ la décomposition correspondante. On appellera groupe des *automorphismes* de X et on notera $G = \text{Aut}(X)$ la composante neutre du sous-groupe des isométries de X agissant par translation sur X_0 . Le groupe G agit proprement et transitivement sur X et c'est un groupe de Lie réel. On a $G = G_0 \times G'$ où $G_0 = \text{Aut}(X_0) = (\mathbb{R}^k, +)$ (avec $k = \dim X_0$) et $G' = \text{Aut}(X')$ est semisimple de centre trivial.

Si r est une géodésique de X alors F_r et C_r sont des sous-espaces totalement géodésiques de X .

Si X' est un sous-espace totalement géodésique de X , alors X' est un espace symétrique sans facteur compact, et la composante neutre de $\text{Stab}_G(X')$ agit sur X' par automorphismes, transitivement.

On fixe un *plat* (sous-espace totalement géodésique euclidien) maximal (pour l'inclusion) \mathbb{A} de X . Les restrictions à \mathbb{A} des éléments de G seront appelés *plats maximaux marqués* de X .

Immeubles affines. Les immeubles affines considérés dans cet article sont métriques, pas nécessairement localement compacts, ni discrets, c'est-à-dire qu'ils n'admettent pas nécessairement de structure de complexe (poly)simplicial [Tit]. Pour leur définition, on renvoie à [Par2], où elle est étudiée en détail. On reprendra le vocabulaire et les notations de cet article, auquel on renvoie également pour les propriétés utilisées et non démontrées ci-dessous (notamment pour l'équivalence avec la définition de Kleiner-Leeb [KILe], dont on aura besoin pour le théorème 2.20).

On se fixe un espace vectoriel \mathbb{A} euclidien de dimension finie et un groupe de réflexions fini \overline{W} agissant sur \mathbb{A} (c'est-à-dire un sous-groupe fini d'isométries vectorielles de \mathbb{A} , engendré par des réflexions). On fixe également une chambre de Weyl fermée $\overline{\mathcal{C}}$ de \mathbb{A} . Soit W un groupe de réflexions affine de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$, c'est-à-dire un sous-groupe d'isométries affines de \mathbb{A} , de projection vectorielle \overline{W} , tel qu'il existe a dans \mathbb{A} tel que $W = TW_a$, où W_a fixe a et T est un sous-groupe de translations de \mathbb{A} (ou, de manière équivalente, engendré par des réflexions affines).

Soit X un immeuble affine, modelé sur (\mathbb{A}, W) . On note \mathcal{A} son système d'appartements marqués aussi appelés *plats maximaux marqués*. Un *automorphisme* de X

est une bijection de X dans lui-même qui préserve \mathcal{A} . On rappelle que (X, d) est un espace métrique CAT(0) (pas nécessairement complet).

Sous-immeubles. On dira qu'un groupe de réflexions (\mathbb{A}', W') est un *sous-groupe de réflexions* de (\mathbb{A}, W) si \mathbb{A}' est un sous-espace affine de \mathbb{A} et les éléments de W' sont les restrictions à \mathbb{A}' d'éléments de W stabilisant \mathbb{A}' . On dira alors qu'un immeuble (X', \mathcal{A}') modelé sur (\mathbb{A}', W') est un *sous-immeuble* de X si $X' \subset X$ et si les appartements marqués de X' sont les restrictions à \mathbb{A}' d'appartements marqués de X . Alors X' est un sous-espace convexe de (X, d) .

Par exemple, si X est un produit d'immeubles (X_i, \mathcal{A}_i) modelés sur (\mathbb{A}_i, W_i) , on vérifie facilement que les facteurs sont des sous-immeubles de X . Un autre exemple de base est le suivant. Soit r une géodésique de X , incluse dans un appartement (ce qui est toujours le cas si \mathcal{A} est le système d'appartements maximal) et $X' = F_r$. Alors X' est la réunion des appartements de X contenant $r(+\infty)$ et $r(-\infty)$ dans leur bord à l'infini. Soit $u \in \mathbb{A}$ un vecteur tel que r est égale à $t \mapsto f(a + tu)$ pour un plat maximal marqué $f : \mathbb{A} \rightarrow X$ de X et un $a \in \mathbb{A}$. Soit W' le sous-groupe des éléments de W fixant (vectoriellement) u . On peut démontrer (par exemple en suivant [KILe, prop. 4.8.1]) que X' est un sous-immeuble de X modelé sur (\mathbb{A}, W') . Les plats maximaux marqués de X' sont les plats maximaux marqués $f : \mathbb{A} \rightarrow X$ de X tels que $t \mapsto f(tu)$ est une géodésique parallèle à r .

2.2.2 Espace associé à un groupe réductif

Soit \mathbb{K} un corps valué, ou bien égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} , ou bien ultramétrique.

Groupe réductif sur \mathbb{K} . Soit \underline{G} un groupe algébrique linéaire connexe réductif défini sur \mathbb{K} . On peut supposer que \underline{G} est un sous-groupe algébrique défini sur \mathbb{K} de SL_n .

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on suppose que G est un sous-groupe fermé de $\underline{G}(\mathbb{R})$ contenant sa composante neutre $\underline{G}(\mathbb{R})^0$. Si $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$, on suppose que $G = \underline{G}(\mathbb{K})$.

Le groupe G est muni de la topologie induite par celle de \mathbb{K} . C'est un groupe topologique métrisable, à base dénombrable, localement compact si \mathbb{K} l'est.

Espace symétrique associé à un groupe réductif archimédien. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} (notons que, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ le groupe G est le groupe des points réels du \mathbb{R} -groupe réductif connexe \underline{H} obtenu à partir de \underline{G} par restriction des scalaires).

Soit K un sous-groupe compact maximal de G . Alors l'espace homogène $X = G/K$ est un espace symétrique sans facteur compact, dit *associé* à G , pour toute métrique riemannienne G -invariante sur X (cela découle de l'existence d'une involution de Cartan de (G, K) , voir [Bor, 24.6(a)] et [Hel]). Le groupe G agit proprement, transitivement, par automorphismes, sur X .

Immeuble d'un groupe réductif non archimédien [BrTi1, BrTi2]. On renvoie par exemple à [Rou] pour plus de détails. On suppose que \mathbb{K} est ultramétrique et que les hypothèses de [BrTi2, 4 ou 5] sont satisfaites. Rappelons que c'est notamment le cas dans les deux situations suivantes :

- G est déployé sur le corps \mathbb{K} (par exemple $\underline{G} = \mathrm{SL}_n$).

- \mathbb{K} est à valuation discrète, hensélien (par exemple complet), de corps résiduel parfait (par exemple fini).

On peut alors construire l'immeuble de Bruhat-Tits (élargi) $X = \mathcal{B}(\underline{G}, \mathbb{K})$ de \underline{G} sur \mathbb{K} . C'est un immeuble affine, pas nécessairement discret ni complet. Le groupe G agit continûment, par automorphismes de X , transitivement sur les appartements marqués, cocompactement sur X . Si \mathbb{K} est un corps local, alors X est propre et l'action de G sur X est propre [Tit2, 2.2].

2.2.3 Type des segments

On suppose désormais que X est un espace symétrique ou un immeuble affine (voir section 2.2) et on note $G = \text{Aut}(X)$. On fixe une chambre de Weyl fermée $\bar{\mathcal{C}}$ du plat modèle \mathbb{A} . C'est un domaine fondamental strict pour l'action du groupe de Weyl (vectoriel) \bar{W} sur \mathbb{A} . On note $\Theta : \mathbb{A} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$ la projection correspondante, qui à un vecteur dans \mathbb{A} associe son *type* dans $\bar{\mathcal{C}}$. On note $v^{\text{opp}} = \Theta(-v)$ type *opposé* à $v \in \bar{\mathcal{C}}$.

Si $x, y \in X$, il existe un unique vecteur de $\bar{\mathcal{C}}$, appelé le *type* du segment xy (ou la *C-distance* de x à y) et noté $\delta(x, y)$ ou δ_{xy} , tel qu'il existe un plat maximal marqué $f : \mathbb{A} \rightarrow X$, et deux points A et B de \mathbb{A} , avec $f(A) = x$, $f(B) = y$ et $\overrightarrow{AB} = \delta(x, y)$. On a clairement $\|\delta(x, y)\| = d(x, y)$ et $\delta(y, x) = \delta(x, y)^{\text{opp}}$ pour tous x, y de X . Les automorphismes de X préservent le type des segments. Dans le cas des espaces symétriques G agit transitivement sur les segments de type donné.

Remarque 2.9 Lorsque X est l'espace associé à un groupe réductif G sur un corps local (voir section 2.2.2), si K est un sous-groupe compact maximal de G et $x_0 \in X$ est le point fixé par K , alors, pour g dans G , le vecteur $\delta(x_0, gx_0) \in \bar{\mathcal{C}}$ s'identifie à la projection de Cartan de g associée à K (voir par exemple [Ben, 1.1 et 2.3]).

On renvoie à [Par4] pour de plus fines propriétés du type des segments. On utilisera la propriété suivante.

Proposition 2.10 [Par4] *Le type est 1-Lipschitz en chaque coordonnée, plus précisément pour tous x, y, x', y' de X , on a*

$$\|\delta(x, y) - \delta(x', y')\| \leq d(x, x') + d(y, y')$$

En particulier, $\delta : X \times X \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$ est continue □

Etant donné $g \in \text{Aut}(X)$, on note δ_g l'application continue

$$\delta_g : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \bar{\mathcal{C}} \\ x & \longmapsto & \delta(x, gx) \end{array}$$

On utilisera la propriété suivante, qui découle de la proposition 2.10.

Proposition 2.11 *Soit $g_k \rightarrow g$ dans $\text{Aut}(X)$. Alors $\delta_{g_k} \rightarrow \delta_g$ uniformément sur les bornés.* □

Propriétés fonctorielles. Si X est euclidien, alors $\mathbb{A} = X$, $\overline{W} = \{\text{id}\}$, $\overline{\mathcal{C}} = \mathbb{A} = X$, et $\delta(x, y) = \overline{xy}$ pour tous x, y de X . Si $X = X_1 \times X_2$ est un produit de deux espaces symétriques ou immeubles affines X_i . Alors $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2$ où \mathbb{A}_i est un plat maximal de X_i , $\overline{W} = \overline{W}_1 \times \overline{W}_2$ où \overline{W}_i est le groupe de Weyl de \mathbb{A}_i , et $\overline{\mathcal{C}} = \overline{\mathcal{C}}_1 + \overline{\mathcal{C}}_2$ où $\overline{\mathcal{C}}_i$ est une chambre de Weyl fermée de \mathbb{A}_i . Les plats maximaux marqués $f : \mathbb{A} \rightarrow X$ sont de la forme $f = (f_1, f_2)$ où $f_i : \mathbb{A}_i \rightarrow X_i$ est un plat maximal marqué. Si $\delta_i : X_i \times X_i \rightarrow \overline{\mathcal{C}}_i$ est le type des segments de X_i , on a

$$\delta(x, y) = \delta_1(x_1, y_1) + \delta_2(x_2, y_2) \quad (3)$$

pour tous $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de X .

Soit X' un sous-espace symétrique ou un sous-immeuble de X . Soit \mathbb{A}' un plat maximal de X' , et \overline{W}' son groupe de Weyl, et $\overline{\mathcal{C}}'$ une chambre de Weyl fermée de \mathbb{A}' . Alors \mathbb{A}' s'identifie à un sous-espace totalement géodésique de \mathbb{A} , et les éléments de \overline{W}' sont des restrictions à \mathbb{A}' d'éléments de \overline{W} stabilisant \mathbb{A}' . Par conséquent, si $\delta' : X' \times X' \rightarrow \overline{\mathcal{C}}'$ est le type des segments de X' , on a

$$\delta = \Theta \circ \delta' \quad (4)$$

en restriction à $X' \times X'$.

Type de direction. Notons $\partial\mathbb{A}$ l'ensemble des vecteurs unitaires de \mathbb{A} , identifié à l'ensemble des demi-droites de \mathbb{A} , muni de la distance angulaire, et $\partial : \mathbb{A} \rightarrow \partial\mathbb{A}$ la projection correspondante. Pour $\tau, \tau' \in \partial\overline{\mathcal{C}}$ (qui est l'ensemble noté Δ_{mod} dans [KILe]), on note $D(\tau, \tau')$ l'ensemble fini des angles possibles entre v et v' de $\partial\mathbb{A}$ de types respectifs τ et τ' .

Si X est un immeuble affine, alors il y a rigidité des angles [KILe, 4.1.2] : pour tous $x, y, z \in X$ avec $y, z \neq x$ on a $\angle_x(y, z) \in D(\tau, \tau')$ avec $\tau = \partial\delta(x, y)$ et $\tau' = \partial\delta(x, z)$.

Le type (de direction) Θr d'une géodésique (ou d'un rayon) r est $\partial\delta(r(s), r(t))$ pour tout $s < t$. Deux géodésiques parallèles ont même type. Les automorphismes de X préservent le type des géodésiques.

Dans le cas des espaces symétriques, le stabilisateur $\text{Stab}_G(x)$ dans G de $x \in X$ agit transitivement sur les géodésiques de type donné issues de x .

2.2.4 Structure du bord à l'infini

On suppose que X est un espace symétrique ou un immeuble affine complet.

Type d'un point à l'infini. Deux rayons géodésiques asymptotes ont même type. On peut donc définir le type (noté également Θ) dans $\partial\overline{\mathcal{C}}$ des points de $\partial_\infty X$. Notons $(\partial_\infty X)_\tau$ le sous-ensemble des points de $\partial_\infty X$ de type $\tau \in \partial\overline{\mathcal{C}}$.

L'action de $\text{Aut}(X)$ sur $\partial_\infty X$ préserve le type des points.

Dans le cas des espaces symétriques l'action de G sur $\partial_\infty X$ est transitive sur $(\partial_\infty X)_\tau$ pour tout $\tau \in \partial\overline{\mathcal{C}}$, et si $\xi \in \partial_\infty X$, alors $(\partial_\infty X)_\tau = G\xi$ s'identifie à la variété G/P , où P est le sous-groupe parabolique $\text{Stab}_G(\xi)$ de G .

Si X est complet, son bord $\partial_\infty X$ muni de la distance de Tits (donnée par \angle_T) est isométrique à la réalisation géométrique modelée sur $(\partial\mathbb{A}, \overline{W})$ [Par2, section

2.6] d'un immeuble sphérique. Les chambres de cet immeuble sont les bords des chambres de Weyl de X , et ses appartements sont les bords des plats maximaux de X . Si $\xi, \xi' \in \partial_\infty X$, il existe un plat maximal A de X tel que $\xi, \xi' \in \partial_\infty A$, voir [Ebe, 2.21.14], [Par2, 1.2, (A4)]. Pour tout $x \in A$, on a $\angle_x(\xi, \xi') = \angle_T(\xi, \xi') \in D(\Theta(\xi), \Theta(\xi'))$. En particulier si $\angle_T(\xi, \xi') = \pi$, alors ξ et ξ' sont opposés.

Dans le cas des espaces symétriques $\text{Aut}(X)$ agit transitivement sur les couples de points du bord opposés, de types donnés.

Points visuellement presque opposés. Si X est un immeuble affine, si $\xi^-, \xi^+ \in \partial_\infty X$ sont visuellement presque opposés en $x \in X$, alors ils sont effectivement opposés en x : plus précisément, en notant τ et τ^{opp} les types respectifs de ξ^- et ξ^+ , si $\angle_x(\xi^-, \xi^+) > \max(D(\tau, \tau^{\text{opp}}) - \{\pi\})$ alors $x \in F_{\xi^-, \xi^+}$ (par rigidité des angles).

Dans les espaces symétriques on a la propriété analogue plus faible suivante.

Proposition 2.12 *Soit $\tau \in \partial \bar{\mathcal{C}}$ et τ^{opp} le type opposé. Pour tout $D > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tous $\xi^-, \xi^+ \in \partial_\infty X$ de types respectifs τ et τ^{opp} , et pour tout $x \in X$, si $\angle_x(\xi^-, \xi^+) \geq \pi - \varepsilon$ alors $d(x, F_{\xi^-, \xi^+}) \leq D$.*

Démonstration Sinon il existe $D > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ un point $x_k \in X$ et ξ_k^+, ξ_k^- dans $\partial_\infty X$ de types respectifs τ et τ^{opp} tels que $\angle_{x_k}(\xi_k^-, \xi_k^+) \rightarrow \pi$ et $d(x_k, F_{\xi_k^-, \xi_k^+}) \geq D$. Pour k assez grand, $F_{\xi_k^-, \xi_k^+}$ est non vide (car $\angle_x(\xi^-, \xi^+) > \max(D(\tau, \tau^{\text{opp}}) - \{\pi\})$) implique $\angle_T(\xi^-, \xi^+) = \pi$. Soit y_k la projection de x_k sur $F_{\xi_k^-, \xi_k^+}$. Quitte à appliquer des automorphismes, on peut supposer que les suites y_k , ξ_k^- et ξ_k^+ sont constantes, respectivement égales à y , ξ^- et ξ^+ . Soit $z_k \in [x_k, y]$ tel que $d(z_k, y) = D$. On a $\angle_{x_k}(y, \xi^-) \leq \angle_{z_k}(y, \xi^-) \leq \frac{\pi}{2}$ et $\angle_{x_k}(y, \xi^+) \leq \angle_{z_k}(y, \xi^+) \leq \frac{\pi}{2}$. Comme $\angle_{x_k}(\xi^-, \xi^+) \leq \angle_{x_k}(y, \xi^-) + \angle_{x_k}(y, \xi^+)$, on a donc $\angle_{z_k}(y, \xi^-) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ainsi que $\angle_{z_k}(y, \xi^+) \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Quitte à extraire on a $z_k \rightarrow z$ avec $d(z, F_{\xi^-, \xi^+}) = D > 0$ et $\angle_z(\xi^-, \xi^+) = \pi$, impossible. \square

Ombres vues de l'infini.

Proposition 2.13 *Soit $\xi \in \partial_\infty X$ et r une géodésique telle que $r(+\infty) = \xi$. Notons $\xi^- = r(-\infty)$. Les ombres $O_{\xi^-}(r(t), D)$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $D > 0$, forment une base de voisinages de ξ dans $(\partial_\infty X)_\tau$, où τ est le type de ξ .*

Démonstration On a clairement toujours $O_{\xi^-}(r(t), D) \subset (\partial_\infty X)_\tau$. Soit $x = r(0)$. Les ombres $O_x(r(t), D)$, avec $t \in \mathbb{R}^+$ et $D > 0$, forment une base de voisinages de ξ dans $\partial_\infty X$, par définition de la topologie des cônes. Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $D > 0$. On vérifie facilement que $O_{\xi^-}(r(t), \frac{1}{2}D) \subset O_x(r(t), D)$. Soit $\varepsilon > 0$ donné par la proposition 2.12. Soit $0 < D' \leq \tan(\varepsilon)t$. Alors $O_x(r(t), D') \cap (\partial_\infty X)_\tau$ est inclus dans $O_{\xi^-}(r(t), D)$. En effet si ξ' est dans $O_x(r(t), D') \cap G\xi$, alors

$$\angle_x(r(t), \xi') \leq \tilde{\angle}_x(r(t), \xi') \leq \arctan(D'/t) \leq \varepsilon$$

D'après la proposition 2.12, comme ξ' est de même type que ξ et ξ^- de type opposé, on a alors $d(x, F_{\xi^-, \xi'}) \leq D$, c'est-à-dire $\xi' \in O_{\xi^-}(r(t), D)$. \square

2.2.5 Isométries

Dans les immeubles affines complets, on a le résultat suivant (qu'on utilisera de manière cruciale en section 4).

Théorème 2.14 [Par2, Théorème 4.1]) *Soit X un immeuble affine complet. Il existe $K > 0$ tel que pour tout $g \in \text{Aut}(X)$ et pour tout $x \in X$, on a $d(x, \text{Min}(g)) \leq Kd(x, gx)$. En particulier g est semisimple.*

Dans les espaces symétriques, la situation n'est pas si simple mais la décomposition de Jordan va nous permettre d'établir quelques propriétés dont on aura besoin en section 4.

On suppose désormais que X est un espace symétrique.

Décomposition de Jordan. On renvoie à [Ebe, 2.19] pour plus de détails et pour le rapport avec la décomposition de Jordan usuelle dans le groupe linéaire, via la représentation adjointe de $G = \text{Aut}(X)$.

Si r est une géodésique de X et $t \in \mathbb{R}$, il existe $g \in G$, appelé *transvection* le long de r de longueur t , réalisant le transport parallèle le long de r de $r(s)$ à $r(s+t)$, voir [Hel, IV, thm 3.3 et remarque]. Si $t \neq 0$ on a $\text{Min}(g) = F_r$. De plus [Ebe, Prop. 4.1.4] le centralisateur $Z_G(g)$ de g dans G agit transitivement sur $\text{Min}(g)$. On dit que $g \in G$ est *hyperbolique* si g est une transvection [Ebe, 2.19.21].

On dira que $g \in G$ est *unipotent* si l'adhérence de sa classe de conjugaison dans G contient l'identité [Ebe, 2.19.27]. Alors on a clairement $\ell(g) = 0$.

Pour tout $g \in G$, il existe une unique décomposition $g = heu$ dans G , appelée la *décomposition de Jordan* de g , telle que e, h et u sont respectivement elliptique, hyperbolique et unipotent, et commutent deux à deux [Ebe, 2.19.24]. On vérifie aisément que si $h = \text{id}$ alors $\ell(g) = 0$.

Isométries des espaces symétriques. Soit $g \in \text{Aut}(X)$. Soit $g = heu$ la décomposition de Jordan de g . Notons $\varphi = eu$ et $F_g = \text{Min}(h)$, qui est stable par h, e et u . Si $\ell(g) > 0$ on note r une géodésique translatée par h (alors $F_g = F_r$).

Proposition 2.15 *On suppose que $\ell(g) > 0$. En restriction à $F_g = C_r \times r$ on a $h = (\text{id}, \ell(g))$, $\varphi = (\varphi, 0)$ et $g = (\varphi, \ell(g))$. En particulier $\ell(g) = \ell(h)$ et g possède des points fixes attractif et répulsif à l'infini, qui sont les extrémités de r .*

Démonstration Sur $\text{Min}(h) = F_r$ on a $h = (\text{id}, \ell(h))$ avec $\ell(h) > 0$, $\varphi = (\varphi', t)$. On a alors $0 = \ell(\varphi) = \sqrt{\ell(\varphi')^2 + t^2}$, donc $t = 0$ et $\varphi' = \varphi$ sur C_r . On a donc $g = (\varphi, \ell(h))$ sur F_g , donc $\ell(g) = \sqrt{\ell(\varphi)^2 + \ell(h)^2} = \ell(h)$. On conclut par la proposition 2.6. \square

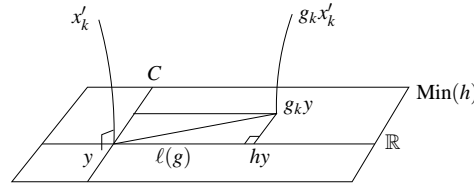
On aura besoin en section 4 de contrôler la distance à $\text{Min}(h)$ en fonction du déplacement, avec le lemme suivant.

Lemme 2.16 *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in X$ vérifie $d_g(x) \leq \ell(g) + \eta$, et y est la projection de x sur F_g , alors*

1. $d(gy, hy) \leq \varepsilon$.
2. $d(x, \text{Min}(h)) \leq \varepsilon$

Démonstration C'est trivialement vrai si $\ell(g) = 0$, car alors $h = \text{id}$ et $F_g = \text{Min}(h) = X$. Supposons que $\ell(g) > 0$, et soit $\varepsilon > 0$. Le point 1 découle de $d_g(y) \leq d_g(x)$ et $d_g(y) = \sqrt{\ell(g)^2 + d(gy, hy)^2}$ (proposition 2.15).

Pour le point 2, on raisonne par l'absurde. Sinon il existe une suite $x_k \in X$ telle que $d_g(x_k) \rightarrow \ell(g)$ et $d(x_k, \text{Min}(h)) \geq \varepsilon$. On note y_k la projection de x_k sur $\text{Min}(h)$. Alors $d(hy_k, gy_k) \rightarrow 0$. Fixons $y \in \text{Min}(h)$. Comme le commutateur $Z_G(h)$ de h agit transitivement sur $\text{Min}(h)$, on peut choisir $z_k \in Z_G(h)$ telle que $z_k y_k = y$. Soit $x'_k = z_k x_k$ et $g_k = z_k g z_k^{-1}$. Alors $g_k y \rightarrow hy$. Soit r_k le rayon géodésique issu de y et passant par



x'_k , et $r'_k = g_k r_k$. Alors quitte à extraire $r_k \rightarrow r$ avec r orthogonal à $\text{Min}(h)$ en y , et $r'_k \rightarrow r'$ avec r' orthogonal à $\text{Min}(h)$ en hy . Pour $0 < t < \varepsilon$ fixé et k suffisamment grand, on a $\ell(g_k) \leq d(r_k(t), r'_k(t)) \leq d(x'_k, g_k x'_k)$. Or $\ell(g_k) = \ell(g)$ et $d(x'_k, g_k x'_k) = d_g(x_k) \rightarrow \ell(g)$. On a donc $d(r(t), r'(t)) = \ell(g) = d(y, hy)$. Par conséquent, la géodésique passant par $r(t)$ et $r'(t)$ est parallèle à celle passant par y et hy , qui est translatée par h . On a donc $r(t) \in \text{Min}(h)$, ce qui est impossible car r est orthogonal à $\text{Min}(h)$. \square

2.3 Cônes asymptotiques

On renvoie par exemple à [KILe, 2.4] pour les résultats rappelés et non démontrés dans cette section.

Ultrafiltres. Voir [Bou, Ch. 1]. Dans tout cet article, ω désigne un ultrafiltre sur \mathbb{N} , plus fin que le filtre de Fréchet. c'est-à-dire une mesure de probabilité finiment additive définie sur toutes les parties de \mathbb{N} , à valeurs dans $\{0, 1\}$, nulle sur les parties finies. Une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans un espace topologique quelconque E admet $x \in E$ comme limite suivant l'ultrafiltre ω (ω -limite) si pour tout voisinage V de x dans E , on a $x_k \in V$ pour ω -presque tout k . Cette limite est l'une des valeurs d'adhérences de la suite (x_k) , et elle est unique si E est séparé. On notera alors $\lim_{\omega} x_k = x$ ou $x_k \rightarrow_{\omega} x$. Une suite contenue dans un compact admet toujours une ω -limite. Les ω -limites des suites réelles sont prises dans le compact $[-\infty, +\infty]$. On dit qu'une suite x_k dans \mathbb{R} est ω -majorée (resp. ω -bornée) si $\lim_{\omega} x_k < +\infty$ (resp. si $-\infty < \lim_{\omega} x_k < +\infty$). On note $=_{\omega}$ la relation d'équivalence "égalité ω -presque partout".

Ultraproduits. On utilisera dans la section 3 le formalisme suivant.

Si E est un ensemble, on notera E^* son *ultraproduit*, c'est-à-dire l'ensemble des suites d'éléments de E , modulo $=_\omega$. On note $[[x_k]]$ la classe de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ modulo $=_\omega$. L'ensemble E se plonge canoniquement dans E^* via les suites constantes. On identifiera E et son image lorsque cela n'engendre pas de confusion. Si E et F sont deux ensembles et si $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications de E dans F , on note $[[f_k]]$ l'application qui à $[[x_k]] \in E^*$ associe $[[f_k(x_k)]] \in F^*$.

Si F est un espace topologique compact, on note $\lim_\omega f_k : E^* \rightarrow F$ l'application $[[x_k]] \mapsto \lim_\omega f_k(x_k)$. C'est la composée de $\lim_\omega : F^* \rightarrow F$ et de $[[f_k]]$.

Ultralimites d'espaces métriques pointés. Soit $(X_k, d_k, *_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques pointés. On note

$$X' = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k \mid d_k(*_k, x_k) \text{ est bornée}\},$$

l'ensemble des suites ω -bornées. Il est muni de la pseudo-distance d_ω définie par $d_\omega((x_k), (y_k)) = \lim_\omega d_k(x_k, y_k)$. Le quotient de X' par la relation "être à pseudo-distance d_ω nulle" est un espace métrique (X_ω, d_ω) , pointé en $*_\omega = [*_k]$, appelé *ultralimite* de la suite $(X_k, d_k, *_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Pour $(x_k) \in X'$, on note $[x_k]$ le point de X_ω associé. Si $A_k \subset X_k$ on note $[A_k] = \{[x_k]; (x_k) \in X' \text{ et } \forall k, x_k \in A_k\}$.

Proposition 2.17 *L'espace métrique X_ω est complet. [KLe, Lemma 2.4.2] \square*

Cônes asymptotiques d'un espace métrique. On se fixe désormais un espace métrique X , une suite $*_k \in X$, et une suite $\lambda_k \in \mathbb{R}_+^*$, avec $\lambda_k \rightarrow +\infty$. On se donne également un groupe G agissant par isométries sur X . Le *cône asymptotique* de X , suivant ω , par rapport à la suite de points d'observation $(*_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et à la suite de scalaires $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est par définition l'ultralimite $(X_\omega, d_\omega, *_\omega)$ de la suite d'espaces métriques pointés $(X_k, d_k = \frac{1}{\lambda_k} d, *_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Remarquons que si X est euclidien, alors X_ω est isométrique à X (car il existe des applications de X dans lui-même envoyant un point donné sur $*_k$ et d sur $\frac{1}{\lambda_k} d$).

Soit X' un autre espace métrique, et une suite $*'_k \in X'$. Notons X'_ω le cône asymptotique de $(X', (*'_k), (\lambda_k))$. Une suite d'applications isométriques $f_k : X' \rightarrow X$ est dite ω -bornée si $f_k(*'_k)$ est ω -bornée dans X . Alors on peut définir son ω -limite $f_\omega : X'_\omega \rightarrow X_\omega$, notée aussi $[f_k]$, par $f_\omega([x_k]) = [f_k(x_k)]$. Elle est isométrique.

En particulier, si $X' = \mathbb{R}$, une suite $r_k : \mathbb{R} \rightarrow X$ de géodésiques de X est ω -bornée si la suite $\frac{1}{\lambda_k} d(*_k, r_k(0))$ est ω -bornée. Son ω -limite s'identifie à $r_\omega : t \mapsto r_k(\lambda_k t)$ et c'est une géodésique de X_ω .

On note G' l'ensemble des suites $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G telles que $d_k(*_k, g_k *_k)$ est ω -bornée. Pour $(g_k) \in G'$, on note $[g_k] : [x_k] \mapsto [g_k x_k]$ l'isométrie associée de X_ω . On note G_ω le sous-groupe de $\text{Is}(X_\omega)$ formé par ces isométries.

Cônes asymptotiques d'espaces CAT(0). On suppose désormais que X est CAT(0).

Proposition 2.18 1. *Le cône asymptotique X_ω est CAT(0).*

2. *Les géodésiques de X_ω sont les ω -limites des géodésiques de X .*

3. Pour tous $x_\omega = [x_k]$, $y_\omega = [y_k]$ et $z_\omega = [z_k]$ dans X_ω , on a

$$\tilde{\angle}_{x_\omega}(y_\omega, z_\omega) = \lim_{\omega} \tilde{\angle}_{x_k}(y_k, z_k) \quad \text{et} \quad \angle_{x_\omega}(y_\omega, z_\omega) \geq \lim_{\omega} \angle_{x_k}(y_k, z_k).$$

4. Soit r_k une suite ω -bornée de géodésiques et $r_\omega = [r_k]$. La projection orthogonale sur r_ω est la ω -limite de la suite des projections orthogonales sur r_k .

Démonstration Le point 1 et 2 découlent du lemme 2.4.4 de [KILe].

La première assertion du point 3 est facile à voir en regardant les triangles de comparaison dans le plan (car les angles sont inchangés par homothéties). La deuxième en découle. En effet soient $y'_\omega = [y'_k]$ et $z'_\omega = [z'_k]$ avec $y'_k \in]x_k, y_k]$ et $z'_k \in]x_k, z_k]$. On a $\tilde{\angle}_{x'_k}(y'_k, z'_k) \geq \angle_{x'_k}(y'_k, z'_k)$ et $\angle_{x'_k}(y'_k, z'_k) = \angle_{x_k}(y_k, z_k)$ pour tout k . Donc en passant à la limite suivant ω on a $\tilde{\angle}_{x'_\omega}(y'_\omega, z'_\omega) \geq \lim_{\omega} \angle_{x_k}(y_k, z_k)$. On conclut en passant à la limite pour $y'_\omega \rightarrow x_\omega$ et $z'_\omega \rightarrow x_\omega$.

Le point 4 découle du fait que les angles augmentent (point 3). \square

Bord à l'infini. Il est clair que les ω -limites de rayons asymptotes restent asymptotes. À toute suite $(\xi_k)_k$ dans $\partial_\infty X$ on peut donc associer un point $\xi_\omega = [\xi_k]$ dans $\partial_\infty X_\omega$, défini de la manière suivante. Soit r_k une suite ω -bornée de rayons de X tels que $\xi_k = r_k(\infty)$ et $r_\omega = [r_k]$. Alors $\xi_\omega = r_\omega(\infty)$. Tous les points de $\partial_\infty X_\omega$ sont de cette forme.

Longueur de translation. Le lemme suivant se vérifie aisément.

Lemme 2.19 Soit g_k une suite ω -bornée dans $\text{Is}(X)$ et $g_\omega = [g_k]$. On a

1. $\lim_{\omega} \frac{1}{\lambda_k} d_{g_k} = d_{g_\omega}$
2. $\lim_{\omega} \frac{1}{\lambda_k} \ell(g_k) \leq \ell(g_\omega)$.
3. $[\text{Min}(g_k)] \subset \text{Min}(g_\omega)$.
4. Si $\frac{1}{\lambda_k} d(*_k, \text{Min}(g_k))$ est ω -borné, alors $\text{Min}(g_\omega) \neq \emptyset$ et $\lim_{\omega} \frac{1}{\lambda_k} \ell(g_k) = \ell(g_\omega)$ \square

Cônes asymptotiques d'espaces symétriques et d'immeubles. On suppose dorénavant que X est ou bien un espace symétrique, ou bien un immeuble affine, et que G est un sous-groupe fermé du groupe des automorphismes de X . On se fixe un plat maximal \mathbb{A} de X , de groupe de Weyl \overline{W} et une chambre de Weyl \overline{C} de \mathbb{A} . Une suite $f_k : \mathbb{A} \rightarrow X$ de plats maximaux marqués est ω -bornée si la suite $f_k(0)$ l'est, et son ω -limite est alors l'application isométrique $[f_k] : \mathbb{A} \rightarrow X_\omega$, $\alpha \mapsto [f_k(\lambda_k \alpha)]$. On note \mathcal{A}_ω l'ensemble des ω -limites des suites ω -bornées de plats maximaux marqués de X .

Théorème 2.20 (Kleiner-Leeb [KILe]) Le cône asymptotique X_ω , muni du système d'appartements marqués \mathcal{A}_ω , est un immeuble affine complet, de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$. Le groupe G_ω agit sur X_ω , par automorphismes. Si G agit cocompactement sur X , alors G_ω agit transitivement sur X_ω . Si G agit transitivement sur les plats maximaux marqués de X , alors G_ω agit transitivement sur \mathcal{A}_ω . \square

On termine par deux propriétés du type des segments dont on aura besoin par la suite, et qui se vérifient aisément.

Proposition 2.21 *Pour tous $x_\omega = [x_k]$ et $y_\omega = [y_k]$ de X_ω , on a dans $\overline{\mathcal{C}}$*

$$\delta(x_\omega, y_\omega) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} \delta(x_k, y_k).$$

□

Proposition 2.22 *Soit r_ω une géodésique de X_ω . Il existe une suite (r_k) ω -bornée de géodésiques de X de type constant $\Theta(r_\omega)$ telle que $[r_k] = r_\omega$. Si G agit cocompactement sur X et transitivement sur les plats maximaux marqués de X , alors G_ω agit transitivement sur les géodésiques de X_ω de type donné.* □

3 Cônes asymptotiques d'espaces symétriques : Modèle algébrique

Soit \mathbb{K} un corps valué ou bien égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} ou bien ultramétrique (la valuation n'est alors pas nécessairement discrète). On note $|\cdot|$ la valeur absolue de \mathbb{K} . On note $X(\mathbb{K})$ ou X l'espace associé à $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ (voir section 2.2.2).

Cette section est consacrée à montrer que tout cône asymptotique de $X(\mathbb{K})$ s'identifie à $X(\mathbb{K}_\omega)$ (théorème 3.21), pour un corps valué non archimédien ad hoc \mathbb{K}_ω qu'on construit préalablement (dont la valeur absolue prend toutes les valeurs réelles).

La preuve repose sur l'utilisation du modèle des "bonnes normes" de volume 1 sur \mathbb{K}^n pour $X(\mathbb{K})$, qu'on expose au préalable en section 3.2.

3.1 Pseudo-valeurs absolues et pseudo-normes

On commence par clarifier quelques notions de base qu'on va utiliser plusieurs fois par la suite. Soit \mathbb{F} un corps et E un espace vectoriel sur \mathbb{F} .

Définition 3.1 (Pseudo-valeur absolue) On appellera *pseudo-valeur absolue* sur \mathbb{F} une application $|\cdot| : \mathbb{F} \rightarrow [0, +\infty]$ telle que pour tous a, b dans \mathbb{F} on a

1. $|0| = 0$
2. $|ab| = |a||b|$ (lorsque $|a|, |b| < +\infty$)
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$

On dira que $|\cdot|$ est *ultramétrique* si elle vérifie en outre $|a + b| \leq \max(|a|, |b|)$.

Si le corps \mathbb{F} est muni d'un ordre total \leq , on dira que $|\cdot|$ est *compatible* avec l'ordre si pour tous $a, b \in \mathbb{F}$ tels que $0 \leq b \leq a$, on a $|b| \leq |a|$.

Une pseudo-valeur absolue $|\cdot|$ est une *valeur absolue* si elle vérifie $|a| < +\infty$ et $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$. On dira qu'elle est *triviale* si $|a| = 1$ pour tout $a \neq 0$.

Proposition 3.2 *On suppose que (\mathbb{F}, \leq) est un corps totalement ordonné et que $|\cdot|$ est une pseudo-valeur absolue sur \mathbb{F} compatible avec l'ordre.*

1. Si $|\cdot|$ est ultramétrique, alors pour tous $a, b \geq 0$ dans \mathbb{F} , on a

$$|a + b| = \max(|a|, |b|)$$

2. Si $|\cdot|$ est triviale sur le sous-corps premier de \mathbb{F} , alors elle est ultramétrique. \square

Démonstration La première assertion est claire. Soient $a, b \geq 0$ dans \mathbb{F} . On peut supposer que $b \leq a$. On a alors $0 \leq a + b \leq 2a$ donc $|a + b| \leq |2a| = |2||a| = |a|$. \square

On suppose désormais que \mathbb{F} est muni d'une pseudo-valeur absolue $|\cdot|$. On démontre sans difficultés les résultats suivants.

Proposition 3.3 (Corps valué associé) Notons $\mathbb{F}' = \{a \in \mathbb{F} \mid |a| < +\infty\}$ et $\mathbb{F}_0 = \{a \in \mathbb{F} \mid |a| = 0\}$. Alors \mathbb{F}' est un sous-anneau de \mathbb{F} et \mathbb{F}_0 est un idéal maximal de \mathbb{F}' . La pseudo-valeur absolue $|\cdot|$ passe au quotient en une valeur absolue sur le corps quotient $\mathbb{F}'_{/|\cdot|} = \mathbb{F}'/\mathbb{F}_0$.

Si le corps \mathbb{F} est muni d'un ordre total \leq compatible avec $|\cdot|$, alors \leq passe au quotient en un ordre total sur le corps $\mathbb{F}'_{/|\cdot|}$ compatible avec $|\cdot|$. \square

Définition 3.4 (Pseudo-norme) On appellera *pseudo-norme* sur E (compatible avec $|\cdot|$) une application $\eta : E \rightarrow [0, +\infty]$ telle que pour tous $v, v' \in E$ et $a \in \mathbb{F}$ on a

1. $\eta(0) = 0$
2. $\eta(av) = |a|\eta(v)$ (lorsque cela a un sens)
3. $\eta(v + v') \leq \eta(v) + \eta(v')$

On dira que η est *ultramétrique* si on a en outre $\eta(a + b) \leq \max(\eta(a), \eta(b))$. On dira que η est une *norme* si $|\cdot|$ est une valeur absolue et si η vérifie en outre $\eta(v) < +\infty$ et $\eta(v) = 0 \Rightarrow v = 0$.

Soit η une pseudo-norme sur E (compatible avec $|\cdot|$).

Proposition 3.5 (Espace vectoriel normé associé) On a deux sous- \mathbb{F}' modules $E' = \{v \in E \mid \eta(v) < +\infty\}$ et $E_0 = \{v \in E \mid \eta(v) = 0\}$. La structure passe au quotient en une structure de $\mathbb{F}'_{/|\cdot|}$ -espace vectoriel sur $E_{/\eta} = E'/E_0$, et η passe au quotient en une norme sur $E_{/\eta}$ compatible avec $|\cdot|$. \square

On utilisera également la propriété analogue suivante.

Proposition 3.6 Soit A une algèbre normée sur \mathbb{F} et N une pseudo-norme sur A sous-multiplicative. Notons $A' = \{u \in A \mid N(u) < +\infty\}$ et $A_0 = \{v \in A \mid N(u) = 0\}$. La structure passe au quotient en une structure de $\mathbb{F}'_{/|\cdot|}$ -algèbre sur $\mathcal{A}_{/N} = A'/A_0$, et η passe au quotient en une norme sous-multiplicative sur $A_{/N}$ compatible avec $|\cdot|$. \square

Définition 3.7 (Pseudo-norme d'endomorphismes) On définit la pseudo-norme N_η sur $\text{End}(E)$ associée à η par

$$N_\eta(u) = \inf \{M \in [0, +\infty] ; \forall v \in E, \eta(u(v)) \leq M\eta(v)\}$$

On vérifie que c'est une pseudo-norme sous-multiplicative sur $\text{End}(E)$.

3.2 Espace $X = \mathcal{N}^1(V)$ des bonnes normes de volume 1

On expose ici la construction de l'espace X associé à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ comme espace de normes sur \mathbb{K}^n (voir aussi [Par2]).

On note $V = \mathbb{K}^n$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ sa base canonique.

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on dira qu'une norme η sur V est une *bonne* norme si elle est *euclidienne*, c'est-à-dire si elle est de la forme $v \mapsto \sqrt{q(v)}$, où q est une forme quadratique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, définie positive sur V . On dira qu'une base $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ de V est *adaptée* à η si elle est *orthogonale* pour η , c'est-à-dire si on a $\eta(\sum_{i=1}^n a_i e_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \eta(e_i)^2 |a_i|^2}$ pour tous a_1, \dots, a_n dans \mathbb{K} . La bonne norme *canonique* η_0 de V est la norme provenant du produit scalaire canonique.

Dans le cas où \mathbb{K} est ultramétrique, Une base \mathbf{e} de V est dite *adaptée* à une norme ultramétrique η si on a $\eta(\sum_{i=1}^n a_i e_i) = \max_{i=1 \dots n} \eta(e_i) |a_i|$ pour tous a_1, \dots, a_n dans \mathbb{K} .

On dira que η est *adaptable* si elle admet une base adaptée. (ce qui est toujours le cas si \mathbb{K} est un corps local [GoIw]). Une *bonne* norme est une norme ultramétrique et adaptable. La bonne norme *canonique* est $\eta_0 : (a_1, \dots, a_n) \mapsto \max_{i=1 \dots n} |a_i|$.

On dit qu'une bonne norme η est de *volume* 1 si on a $\prod_{i=1}^n \eta(e_i) = 1$ pour toute base (e_1, \dots, e_n) de V adaptée à η , de déterminant 1. On note $\mathcal{N}^1(V)$ l'espace des bonnes normes de volume 1 sur V .

Le groupe $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ agit naturellement sur $\mathcal{N}^1(V)$ par $g \cdot \eta = \eta \circ g^{-1}$ pour $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et $\eta \in \mathcal{N}^1(V)$. Le stabilisateur de η_0 est $\mathrm{SO}(n)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le groupe $\mathrm{SU}(n)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O})$ si \mathbb{K} est ultramétrique et $\mathcal{O} = \{a \in \mathbb{K}, |a| \leq 1\}$ est son anneau des entiers.

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , l'espace $\mathcal{N}^1(V)$ s'identifie à l'espace symétrique X associé à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ (voir 2.2.2). Dans le cas où \mathbb{K} est ultramétrique, l'espace $\mathcal{N}^1(V)$ est alors un immeuble affine (voir par exemple [Par2]), qui s'identifie à l'immeuble de Bruhat-Tits X de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, voir les théorèmes 2.11 et 2.11 bis (dans l'appendice) de [BrTi3].

Rappelons maintenant quelques propriétés dont on aura besoin par la suite.

Plats maximaux marqués. Le plat maximal modèle de $\mathcal{N}^1(V)$ est identifié à

$$\mathbb{A} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \sum \alpha_i = 0\}$$

muni de la métrique euclidienne canonique de \mathbb{R}^n . Soit \mathbf{e} une base de V de déterminant 1. Le plat maximal marqué $f_{\mathbf{e}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{N}^1(V)$ de $\mathcal{N}^1(V)$ associé à \mathbf{e} est défini par : $\eta = f(\alpha)$ est adaptée à \mathbf{e} et $\eta(e_i) = e^{-\alpha_i}$ pour $i = 1 \dots n$. Tous les plats maximaux marqués de $\mathcal{N}^1(V)$ sont de cette forme. Pour tout $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, on a $g \circ f_{\mathbf{e}} = f_{g\mathbf{e}}$.

Les distances d et d^∞ . Si $\eta, \mu \in \mathcal{N}^1(V)$ et \mathbf{e} est une base adaptée commune, alors

$$d(\eta, \mu) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \log \frac{\mu}{\eta}(e_i) \right|^2}. \quad (5)$$

Un autre distance naturelle plus simple sur $\mathcal{N}^1(V)$ est

$$d^\infty(\eta, \mu) = \sup_{v \neq 0} \left| \log \frac{\mu(v)}{\eta(v)} \right|.$$

Les distances d et d^∞ sont équivalentes, car [Par2, prop. 3.12]

$$d^\infty \leq d \leq \sqrt{n} d^\infty \text{ sur } \mathcal{N}^1(V). \quad (6)$$

Estimations. Soit $N = N_{\eta_0}$ la norme sur $\text{End}(V)$ associée à η_0 . Pour tout $g \in \text{SL}_n(\mathbb{K})$, on a $\sup_{v \neq 0} \frac{g \cdot \eta_0}{\eta_0}(v) = N(g^{-1})$ et donc

$$\begin{aligned} d^\infty(\eta_0, g \cdot \eta_0) &= \max \{ \log N(g), \log N(g^{-1}) \} \\ &\leq (n-1) \log N(g) \end{aligned} \quad (7)$$

Le lemme suivant sera utilisé en section 3.6.

Lemme 3.8 *Soit $\eta \in \mathcal{N}^1(V)$ et $g \in \text{SL}_n(\mathbb{K})$. On a*

$$d^\infty(\eta, g \cdot \eta) \leq \log \left(1 + e^{2d^\infty(\eta_0, \eta)} \max \{ N(g - \text{id}), N(g^{-1} - \text{id}) \} \right).$$

Démonstration Pour tout $v \in V$ non nul, on a $g \cdot \eta(v) \leq \eta(v) + \eta((g^{-1} - \text{id})v)$, et en posant $h = g^{-1} - \text{id}$ on a

$$\eta(hv) \leq e^{d^\infty(\eta_0, \eta)} \eta_0(hv) \leq e^{d^\infty(\eta_0, \eta)} N(h) \eta_0(v) \leq e^{2d^\infty(\eta_0, \eta)} N(h) \eta(v)$$

donc $\sup_{v \neq 0} \frac{g \cdot \eta}{\eta}(v) \leq 1 + e^{2d^\infty(\eta_0, \eta)} N(g^{-1} - \text{id})$. On conclut en échangeant η et $g \cdot \eta$. \square

On se fixe désormais un ultrafiltre ω sur \mathbb{N} plus fin que le filtre de Fréchet (voir 2.3) et une suite $\lambda = (\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $[1, +\infty[$ telle que $\lambda_k \rightarrow \infty$.

3.3 Le cône asymptotique \mathbb{K}_ω du corps valué \mathbb{K}

Proposition 3.9 *On munit l'ensemble*

$$\mathbb{K}_\omega = \{ (a_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid |a_k|^{1/\lambda_k} \text{ est borné} \} / \lim_{\omega} |a_k - b_k|^{1/\lambda_k} = 0$$

de l'addition et de la multiplication terme à terme. On plonge \mathbb{K} dans \mathbb{K}_ω via les suites constantes. Pour $a_\omega = [a_k]$ dans \mathbb{K}_ω , on note

$$|a_\omega|^\omega = \lim_{\omega} |a_k|^{1/\lambda_k}$$

Alors \mathbb{K}_ω est un corps et $|\cdot|^\omega$ est une valeur absolue ultramétrique sur \mathbb{K}_ω , triviale sur \mathbb{K} . Ce corps valué sera appelé le cône asymptotique de $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ par rapport à la suite de scalaires (λ_k) .

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut définir une relation d'ordre total sur \mathbb{K}_ω par

$$a_\omega \leq b_\omega \Leftrightarrow a_k \leq b_k \text{ } \omega\text{-presque partout}$$

Alors $|\cdot|^\omega$ est compatible avec l'ordre.

Remarque 3.10 On notera que, si d_k désigne la distance sur \mathbb{K} induite par la valeur absolue $|\cdot|^{1/\lambda_k}$ et d_ω désigne la distance sur \mathbb{K}_ω induite par la valeur absolue $|\cdot|^\omega$, alors l'espace métrique pointé $(\mathbb{K}_\omega, d_\omega, 0)$ est l'ultralimite des espaces métriques pointés $(\mathbb{K}, d_k, 0)$ (en particulier \mathbb{K}_ω est complet).

Démonstration On utilise la description alternative de \mathbb{K}_ω via l'ultraproduit \mathbb{K}^* de \mathbb{K} . On munit \mathbb{K}^* des opérations termes à terme, ce qui en fait un corps. Pour $a_* = [[a_k]] \in \mathbb{K}^*$ on définit $|a_*|^\omega = \lim_\omega |a_k|^{1/\lambda_k}$ dans $[0, +\infty]$. La relation \leq sur \mathbb{R}^* définie par

$$[[a_k]] \leq [[b_k]] \text{ si et seulement si } a_k \leq b_k \text{ } \omega\text{-presque partout}$$

fait de \mathbb{R}^* un corps totalement ordonné.

D'après la proposition 3.3, et la proposition 3.2, il suffit de prouver que $|\cdot|^\omega$ est une pseudo-valeur absolue sur \mathbb{K}^* , triviale sur \mathbb{K} , compatible avec l'ordre si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On le vérifie sans difficulté. On a alors clairement que $(\mathbb{K}_\omega, |\cdot|^\omega)$ est le corps valué canoniquement associé au corps pseudo-valué $(\mathbb{K}^*, |\cdot|^\omega)$. \square

Remarque 3.11 1) Pour tout $a_\omega = [a_k] \geq 0$ dans \mathbb{R}_ω , il existe un unique élément positif de \mathbb{R}_ω de carré a_ω , qui est $\sqrt{a_\omega} = [\sqrt{a_k}]$.

2) Pour tous $a_\omega^1, \dots, a_\omega^n$ dans \mathbb{R}_ω , on a

$$\left| \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_\omega^i)^2} \right|^\omega = \max_{i=1, \dots, n} |a_\omega^i|^\omega \quad (8)$$

(cela découle de $|\sqrt{a_\omega}|^\omega = \sqrt{|a_\omega|^\omega}$ et $|a_\omega + b_\omega|^\omega = \max(a_\omega, b_\omega)$ pour $a_\omega, b_\omega \geq 0$).

3.4 Cône asymptotique de l'espace vectoriel normé V

L'espace vectoriel $V = \mathbb{K}^n$ est muni de sa norme canonique η_0 (voir section 3.2).

Remarque 3.12 Si $v_k = (a_k^1, \dots, a_k^n)$ dans $V = \mathbb{K}^n$, on vérifie sans difficulté (par (8) dans le cas archimédien) que

$$\lim_\omega \eta_0(v_k)^{1/\lambda_k} = \max_i \lim_\omega |a_k^i|^{1/\lambda_k} \quad (9)$$

Proposition 3.13 *On note*

$$V_\omega = \{(v_k) \in V^{\mathbb{N}} \mid \eta_0(v_k)^{1/\lambda_k} \text{ est borné}\} / \lim_\omega \eta_0(v_k - v'_k)^{1/\lambda_k} = 0$$

Alors l'addition et la multiplication terme à terme définissent une structure de \mathbb{K}_ω -espace vectoriel sur V_ω . Pour $v_\omega = [v_k]$ dans V_ω , on note

$$\eta_0^\omega(v_\omega) = \lim_\omega \eta_0(v_k)^{1/\lambda_k}$$

Alors η_0^ω est une norme ultramétrique sur V_ω , compatible avec $|\cdot|^\omega$. Cet espace vectoriel normé sera appelé le cône asymptotique de (V, η_0) par rapport à la suite de scalaires (λ_k) .

Démonstration On utilise l'ultraproduit V^* de V , muni des opérations terme à terme, ce qui en fait un espace vectoriel sur \mathbb{K}^* . Pour $v_* = [[v_k]] \in V^*$ on définit $\eta_0^\omega(v_*) = \lim_\omega \eta_0(v_k)^{1/\lambda_k}$ dans $[0, +\infty]$. D'après la proposition 3.5 il suffit de prouver que η_0^ω est une pseudo-norme sur V^* compatible avec $|\cdot|^\omega$. On le vérifie sans difficulté. On a alors clairement que $(V_\omega, \eta_0^\omega)$ est l'espace vectoriel normé canoniquement associé à (V^*, η_0^ω) . Il est clair que η_0^ω est ultramétrique par la remarque 3.12. \square

On note $v_\omega = [v_k]$ le vecteur de V_ω défini par $v_* = [[v_k]] \in V^*$.

Identification avec $(\mathbb{K}_\omega)^n$. La proposition suivante découle de la remarque 3.12

Proposition 3.14 *Pour $i = 1 \dots n$, soit $\varepsilon_\omega^i = [\varepsilon_i]$. Alors $\varepsilon_\omega = (\varepsilon_\omega^i)_{i=1 \dots n}$ est une base de V_ω . Elle induit un isomorphisme d'espace vectoriels normés entre $V_\omega = (\mathbb{K}^n)_\omega$ muni de η_0^ω et $(\mathbb{K}_\omega)^n$ muni de la bonne norme canonique. Plus précisément, pour tout v_ω de V_ω de coordonnées $(a_\omega^1, \dots, a_\omega^n)$ dans la base ε_ω , on a*

$$\eta_0^\omega(v_\omega) = \max_{i=1 \dots n} |a_\omega^i|^\omega$$

On identifiera dorénavant ces deux espaces, et on les notera \mathbb{K}_ω^n .

3.5 Cône asymptotique de $\text{End}(V)$ et de $\text{SL}_n(\mathbb{K})$

L'algèbre $\text{End}(V)$ est munie de la norme N associée à η_0 .

Proposition 3.15 (Cône asymptotique de $\text{End}(V)$) *On note*

$$\text{End}(V)_\omega = \{(u_k) \in \text{End}(V)^\mathbb{N} \mid N(u_k)^{1/\lambda_k} \text{ est borné}\} / \lim_\omega N(u_k - u'_k)^{1/\lambda_k} = 0$$

Les opérations terme à terme définissent une structure de \mathbb{K}_ω -algèbre sur $\text{End}(V)_\omega$.

Pour $u_\omega = [u_k]$ dans $\text{End}(V)_\omega$, on note

$$N^\omega(u_\omega) = \lim_\omega N(u_k)^{1/\lambda_k}$$

Alors N^ω est une norme ultramétrique sous-multiplicative sur $\text{End}(V)_\omega$, compatible avec $|\cdot|^\omega$. Cette algèbre normée sera appelé le cône asymptotique de $(\text{End}(V), N)$ par rapport à la suite de scalaires (λ_k) .

Démonstration De même qu'avant, il suffit de prouver que $N^\omega(u_*) = \lim_\omega N(u_k)^{1/\lambda_k}$ définit une pseudo-norme sous-multiplicative sur $\text{End}(V)^*$ compatible avec $|\cdot|^\omega$ (voir proposition 3.6). On le vérifie sans difficulté. \square

Définition 3.16 (Cône asymptotique $\text{SL}_n(\mathbb{K})_\omega$ de $\text{SL}_n(\mathbb{K})$) Si $U \subset \text{End}(V)$ on note $U_\omega = \{[u_k] \mid \forall k \in \mathbb{N}, u_k \in U\}$. Alors $\text{GL}(V)_\omega$ est un groupe pour la loi induite par la composition, et $\text{SL}_n(\mathbb{K})_\omega$ est l'un de ses sous-groupes.

Identification de $\text{End}(V)_\omega$ avec $\text{End}(V_\omega)$. On rappelle que $V_\omega = (\mathbb{K}_\omega)^n$ est muni de la bonne norme canonique η_0^ω . L'algèbre $\text{End}(V_\omega) \simeq M_n(\mathbb{K}_\omega)$ est munie de la norme $N_\omega = N_{\eta_0^\omega}$, qui vérifie

$$N_\omega((a_\omega^{ij})_{ij}) = \max_{ij} |a_\omega^{ij}|^\omega$$

Proposition 3.17 *Soit $u_\omega = [u_k] \in \text{End}(V)_\omega$. On peut lui associer $u^\omega \in \text{End}(V_\omega)$ défini par*

$$u^\omega : [v_k] \mapsto [u_k(v_k)] .$$

On note $(a_\omega^{ij})_{ij}$ la matrice de u^ω dans la base canonique, et $(a_k^{ij})_{ij}$ la matrice de u_k dans la base canonique, pour tout k . On a

1. $N_\omega(u^\omega) = N^\omega(u_\omega)$.
2. $\det(u^\omega) = [\det u_k]$.
3. $a_\omega^{ij} = [a_k^{ij}]$ pour tous i, j .

Démonstration Vérifions tout d'abord que u^ω est bien défini. Notons $u_* = [[u_k]] \in \text{End}(V)^*$. On a $N^\omega(u_*) < +\infty$. Notons $u^* : [[v_k]] \mapsto [[u_k(v_k)]]$ l'endomorphisme de V^* associé à u_* , qui est clairement bien défini.

On note N_ω la pseudo-norme sur $\text{End}(V^*)$ associée à la pseudo-norme η_0^ω sur V^* . Montrons qu'on a $N_\omega(u^*) = N^\omega(u_*)$. En effet, pour tout v_* de V^* ,

$$\eta_0^\omega(u^*(v_*)) \leq N^\omega(u_*) \eta_0^\omega(v_*), \quad (10)$$

donc $N_\omega(u^*) \leq N^\omega(u_*)$. Soit $v_k \in V$ tel que $\eta_0(v_k) = 1$ et $\eta_0(v_k) \geq \frac{1}{2} N(u_k) \eta_0(v_k)$. Si $v_* = [[v_k]] \in V^*$ on a $\eta_0^\omega(u^*(v_*)) \geq N^\omega(u_*) \eta_0^\omega(v_*)$, et donc $N_\omega(u^*) \geq N^\omega(u_*)$.

Par conséquent u^* conserve V' et V_0 . Donc u^* passe bien au quotient en un endomorphisme de $V_\omega = V'/V_0$, qui est clairement u^ω . De plus, si $N^\omega(u_*) = 0$, alors $u^\omega = 0$ dans $\text{End}(V_\omega)$ par (10). Donc u^ω ne dépend que de $[u_k]$ dans $\text{End}(V)_\omega$. \square

Corollaire 3.18 1. *L'application*

$$\psi : \begin{array}{ccc} \text{End}(V)_\omega & \longrightarrow & \text{End}(V_\omega) \\ u_\omega & \mapsto & u^\omega \end{array}$$

est un isomorphisme de \mathbb{K}_ω -algèbres normées.

2. *Elle induit un isomorphisme de groupes $\psi : \text{SL}_n(\mathbb{K})_\omega \longrightarrow \text{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$.* \square

Remarque 3.19 1) Soit \underline{G} un sous-groupe algébrique de SL_n défini sur \mathbb{K} et $G = \underline{G}(\mathbb{K})$. Comme $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_\omega$ (via les suites constantes), on peut considérer le groupe $\underline{G}(\mathbb{K}_\omega)$, et on a alors $\psi(G_\omega) \subset \underline{G}(\mathbb{K}_\omega)$.

2) Soit Γ un groupe de type fini, et S une partie génératrice de Γ . Soit $\rho_k : \Gamma \longrightarrow \underline{G}(\mathbb{K})$ une suite de représentations telles que $N(\rho_k(s))^{\frac{1}{k}}$ est borné pour tout $s \in S$. Alors la suite ρ_k induit une représentation $\rho_\omega : \Gamma \longrightarrow G_\omega$ définie par $\rho_\omega(\gamma) = [\rho_k(\gamma)]$ pour tout γ de Γ . Par la remarque précédente $\psi \circ \rho_\omega$ est alors une représentation de Γ dans $\underline{G}(\mathbb{K}_\omega) \subset \text{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$.

3.6 Cône asymptotique de X et immeuble de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$.

Pour $\mathbb{F} = \mathbb{K}$ ou \mathbb{K}_ω , on rappelle qu'on note $X(\mathbb{F})$ l'espace associé à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$, qu'on identifie à $\mathcal{N}^1(\mathbb{F}^n)$ (voir section 3.2). On notera aussi $X = X(\mathbb{K})$. On note $(X_\omega, *_\omega, d_\omega)$ le cône asymptotique de $(X, \eta_0, d_k = \frac{1}{\lambda_k} d)$.

Proposition 3.20 *On peut définir une action naturelle de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})_\omega$ sur l'immeuble X_ω (par automorphismes) par*

$$([g_k], [\eta_k]) \mapsto [g_k \cdot \eta_k] .$$

Démonstration Soit (g_k) une suite dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Par la formule (7) de la section 3.2 on a que $N(g_k)^{1/\lambda_k}$ ω -borné équivaut à $\frac{1}{\lambda_k} d(\eta_0, g_k \eta_0)$ ω -borné. Alors $g'_\omega : [\eta_k] \mapsto [g_k \cdot \eta_k]$ définit bien un automorphisme de X_ω (voir section 2.3).

Il reste à voir que si $\lim_\omega N(g_k - \mathrm{id})^{1/\lambda_k} = 0$ alors $g'_\omega = \mathrm{id}_{X_\omega}$. Soit alors $\eta_\omega = [\eta_k]$ dans X_ω . D'après le lemme 3.8, on a

$$\frac{1}{\lambda_k} d^\infty(\eta_k, g_k \eta_k) \leq \log \left(1 + e^{\frac{2}{\lambda_k} d^\infty(\eta_0, \eta_k)} \max \left\{ N(g_k - \mathrm{id})^{\frac{1}{\lambda_k}}, N(g_k^{-1} - \mathrm{id})^{\frac{1}{\lambda_k}} \right\} \right)$$

Or $\frac{1}{\lambda_k} d^\infty(\eta_0, \eta_k)$ est ω -borné et, comme $\lim_\omega N(g_k - \mathrm{id})^{\frac{1}{\lambda_k}} = 0$, on a également que $\lim_\omega N(g_k^{-1} - \mathrm{id})^{\frac{1}{\lambda_k}} = 0$. Donc $\frac{1}{\lambda_k} d^\infty(\eta_k, g_k \eta_k) \rightarrow_\omega 0$, et $g'_\omega \eta_\omega = \eta_\omega$. \square

On note $\psi : \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})_\omega \longrightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$ l'isomorphisme du corollaire 3.18.

Théorème 3.21 *L'application*

$$\varphi : \begin{array}{ccc} X_\omega(\mathbb{K}) & \longrightarrow & X(\mathbb{K}_\omega) \\ [\eta_k] & \mapsto & \lim_\omega \eta_k^{1/\lambda_k} \end{array}$$

définit un isomorphisme d'immeubles affines, ψ -équivariant.

Démonstration Montrons tout d'abord que φ est bien définie. Pour toute suite $\eta_* = [[\eta_k]]$ dans X^* on peut définir $\eta^\omega : V^* \mapsto [0, +\infty]$ par $\eta^\omega([[u_k]]) = \lim_\omega \eta_k(u_k)^{1/\lambda_k}$. On voit facilement que η^ω est une pseudo-norme ultramétrique sur V^* .

Soient $\eta_* = [[\eta_k]]$ et $\mu_* = [[\mu_k]]$ dans X^* . On considère la pseudo-distance d_ω^∞ sur X^* définie par $d_\omega^\infty(\eta_*, \mu_*) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} d^\infty(\eta_k, \mu_k)$. Elle est équivalente à d_ω par la formule (6). On suppose que $d_\omega^\infty(\eta_*, \mu_*) < +\infty$. Soit $v_* = [[v_k]] \in V^*$. Pour tout k , on a dans \mathbb{R}

$$0 \leq e^{-d^\infty(\eta_k, \mu_k)} \mu_k(v_k) \leq \eta_k(v_k) \leq e^{d^\infty(\eta_k, \mu_k)} \mu_k(v_k)$$

Par conséquent, on a dans \mathbb{R}^*

$$0 \leq [[e^{-d^\infty(\eta_k, \mu_k)}]] [[\mu_k(v_k)]] \leq [[\eta_k(v_k)]] \leq [[e^{d^\infty(\eta_k, \mu_k)}]] [[\mu_k(v_k)]]$$

et en prenant la pseudo-valeur absolue $|\cdot|^\omega$ de chaque terme, on obtient dans $[0, +\infty]$

$$0 \leq e^{-d_\omega^\infty(\eta_*, \mu_*)} \mu^\omega(v_*) \leq \eta^\omega(v_*) \leq e^{d_\omega^\infty(\eta_*, \mu_*)} \mu^\omega(v_*) . \quad (11)$$

Supposons maintenant que $d_\omega^\infty(\eta_*, [[\eta_0]]) < +\infty$. En appliquant (11) à $\mu_* = \eta_0^\omega$, on voit que $\eta^\omega(v) < +\infty$ si et seulement si $\eta_0^\omega(v) < +\infty$ et que $\eta^\omega(v) = 0$ si et seulement si $\eta_0^\omega(v) = 0$. Donc η^ω passe bien au quotient en une norme ultramétrique sur V_ω , qu'on notera également η^ω . La formule (11) implique également que si $d_\omega^\infty(\eta_*, \mu_*) = 0$, alors $\eta^\omega = \mu^\omega$. Par conséquent η^ω ne dépend que du point $\eta_\omega = [\eta_k]$ de X_ω défini par η_* .

On a donc vérifié que l'application $[\eta_k] \mapsto \lim_\omega \eta_k^{1/\lambda_k}$ est bien définie de X_ω dans l'espace $\mathcal{N}(V_\omega)$ des normes ultramétriques sur V_ω .

Il est clair que φ est ψ -équivariante. Comme $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})_\omega$ agit transitivement sur les appartements marqués de X_ω , et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$ agit transitivement sur les appartements marqués de $X(\mathbb{K}_\omega)$, il suffit maintenant de montrer que, si $f_\varepsilon^\omega : \mathbb{A} \rightarrow X_\omega$ est l'appartement marqué canonique $[f_\varepsilon]$, on a $\varphi \circ f_\varepsilon^\omega = f_{\varepsilon_\omega}$.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{A}$. Notons $\eta_k = f_\varepsilon(\lambda_k \alpha)$. Soit $a_\omega = (a_\omega^1, \dots, a_\omega^n)$ dans \mathbb{K}_ω^n avec $a_\omega^i = [a_k^i]$. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on a

$$\begin{aligned} \varphi(f_\varepsilon^\omega(\alpha))(a_\omega) &= |[\eta_k(a_k^1, \dots, a_k^n)]|^\omega = \left| \left[\sqrt{\sum_{i=1}^n e^{\lambda_k \alpha_i} |a_k^i|^2} \right] \right|^\omega \\ &= \left| \sqrt{\sum_{i=1}^n [e^{\lambda_k \alpha_i}] [a_k^i]^2} \right|^\omega = \max_{i=1, \dots, n} e^{\alpha_i} |a_\omega^i|^\omega = f_{\varepsilon_\omega}(\alpha)(a_\omega) \end{aligned}$$

d'après (8). Le cas où \mathbb{K} est ultramétrique est clair. \square

4 Vecteur de translation

Dans cette section, on suppose que X est un espace symétrique ou un immeuble affine complet (voir section 2.2, dont on reprend les hypothèses et notations). On introduit le *vecteur de translation* $v(g)$ d'un automorphisme g de X de manière géométrique, comme un raffinement de la longueur de translation $\ell(g)$. On établit ensuite des propriétés de continuité de v , la continuité asymptotique (Proposition 4.4).

4.1 Vecteur de translation d'une isométrie

Soit $g \in \mathrm{Aut}(X)$. Si $\mathrm{Min}(g) \neq \emptyset$, ce qui est toujours le cas si X est un immeuble (théorème 2.14), le type $\delta_g(x) = \delta(x, gx)$ du segment joignant $x \in \mathrm{Min}(g)$ à gx est constant (car deux géodésiques translatées par g sont parallèles donc dans un même plat maximal). Le *vecteur de translation* de g est alors par définition $v(g) = \delta(x, gx)$ pour un (tout) point $x \in \mathrm{Min}(g)$. On peut le définir plus généralement pour tout g grâce au résultat suivant.

Proposition 4.1 *Soit X un espace symétrique et $g \in \mathrm{Aut}(X)$. L'adhérence dans $\overline{\mathcal{C}}$ de $\{\delta(x, gx), x \in X\}$ contient un unique segment de longueur minimale, qu'on note $v(g)$, et qu'on appelle vecteur de translation de g .*

Démonstration On a $\inf_{x \in X} \|\delta(x, gx)\| = \ell(g)$. L'existence est claire, montrons l'unicité. Soit $g = \text{heu}$ la décomposition de Jordan de g et $\varepsilon > 0$. Soit η donné par le lemme 2.16. Si $x \in X$ est tel que $d_g(x) \leq \ell(g) + \eta$ et si y est la projection de x sur $\text{Min}(h)$, alors la proposition 2.10 entraîne que $\|\delta_g(x) - \delta_g(y)\| \leq 2d(x, y) \leq 2\varepsilon$ et $\|\delta_g(y) - \delta_h(y)\| \leq d(gy, hy) \leq \varepsilon$. On en déduit que $\|\delta_g(x) - \delta_h(y)\| \leq 3\varepsilon$, ce qui conclut car $\delta_h(y)$ ne dépend pas de $y \in \text{Min}(h)$. \square

Remarques 1. La notion de vecteur de translation est plus fine que celle de longueur de translation (car $\ell(g) = \|v(g)\|$).

2. v est invariant par conjugaison, et pour tout g , on a $v(g^k) = kv(g)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. Dans le cas des espaces symétriques, on a $v(g) = v(h)$ où h est la partie hyperbolique dans la décomposition de Jordan de g (d'après la preuve de la proposition 4.1). Cet invariant coïncide donc avec la *projection de Jordan* de g (i.e. la projection de h sur $\overline{\mathcal{C}}$, voir par exemple [Ben, 1.1 et 2.4]).

Exemple Dans le cas où X est l'espace symétrique associé à $G = \text{SL}_n(\mathbb{R})$, on peut choisir $\overline{\mathcal{C}} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0, \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n\}$ et pour $g \in G$ de valeurs propres $\lambda_1(g), \dots, \lambda_n(g)$ on a alors

$$v(g) = (\log |\lambda_1(g)|, \dots, \log |\lambda_n(g)|)$$

Propriétés fonctorielles. Si X est euclidien, alors on a $\overline{\mathcal{C}} = \mathbb{A} = X$, et tout $g \in \text{Aut}(X)$ est une translation de vecteur $v(g)$.

Supposons que $X = X_1 \times X_2$ est le produit de deux espaces symétriques ou immeubles affines X_i . Soit $G_i = \text{Aut}(X_i)$. Soient $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ les plats maximaux de X_1 et X_2 tels que $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2$, et $\overline{\mathcal{C}}_1$ et $\overline{\mathcal{C}}_2$ les chambres de Weyl fermées de \mathbb{A}_1 et \mathbb{A}_2 telles que $\overline{\mathcal{C}} = \overline{\mathcal{C}}_1 + \overline{\mathcal{C}}_2$. Soit $v_i : G_i \rightarrow \overline{\mathcal{C}}_i$ la fonction vecteur de translation de X_i . Alors tout automorphisme g de X est de la forme (g_1, g_2) où $g_i \in G_i$, et, d'après la section 2.2.3, on a

$$v(g) = v_1(g_1) + v_2(g_2). \quad (12)$$

Soit X' un sous-espace symétrique ou un sous-immeuble de X . Soit $G' = \text{Aut}(X')$. Soit $\overline{\mathcal{C}}'$ une chambre de Weyl fermée de X' . Soit $v_{X'} : G' \rightarrow \overline{\mathcal{C}}'$ la fonction vecteur de translation de X' . Si $g \in \text{Aut}(X)$ préserve X' et $g' = g|_{X'}$ est un automorphisme de X' , alors d'après la section 2.2.3 on a

$$v(g) = \Theta(v_{X'}(g')) \quad (13)$$

Proposition 4.2 *La fonction $v : G \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ est continue.*

Remarques 1. Ceci entraîne que, lorsque X n'a pas de facteur euclidien, la longueur de translation est continue sur $\text{Is}(X)_0$. Cette propriété n'est pas vraie pour tous les espaces métriques CAT(0). Par exemple, dans le plan euclidien, les translations non nulles sont limites de rotations.

2. Pour $G = \text{SL}_n(\mathbb{R})$, il s'agit de voir que la liste des modules des valeurs propres, en ordre décroissant, dépend continûment de la matrice, ce qui est bien connu.

Nous allons donner maintenant une démonstration purement géométrique de la continuité de v , reposant sur la dynamique des isométries sur $\partial_\infty X$.

Démonstration Soit $g_k \rightarrow g$ dans G . Montrons que quitte à extraire $v(g_k) \rightarrow v(g)$.

Si $\ell(g) = 0$, alors, par semi-continuité supérieure de ℓ , on a $\ell(g_k) \rightarrow 0$ et donc $v(g_k) \rightarrow 0$, ce qui conclut.

Dans le cas où $d(\text{Min}(g_k), x_0)$ reste borné, ce qui est toujours le cas quand X est un immeuble affine (théorème 2.14), cela découle aisément du lemme 2.1 et de la proposition 2.11.

On peut donc supposer que X est un espace symétrique et que $\ell(g) > 0$. Cela découle alors du résultat plus fort suivant.

Lemme 4.3 *Soit X un espace symétrique et $g_k \rightarrow g$ dans $\text{Aut}(X)$ avec $\ell(g) > 0$. On note ξ^+ et ξ^- les points fixes attractif et répulsif de g dans $\partial_\infty X$ (cf. remarque 2.5) et $F = F_{\xi^- \xi^+}$. Alors pour k suffisamment grand il existe ξ_k^+ et ξ_k^- opposés dans $\partial_\infty X$, de même types que ξ^+ et ξ^- , tels que*

1. $\xi_k^+ \rightarrow \xi^+$ et $\xi_k^- \rightarrow \xi^-$.
2. En notant $F_k = F_{\xi_k^- \xi_k^+}$, on a $F_k \rightarrow F$ pour la topologie de Hausdorff pointée.
3. g_k fixe ξ_k^+ et ξ_k^- , et, si $g_k = (g'_k, t_k)$ sur $F_k = C_k \times \mathbb{R}$, on a $\ell(g'_k) \rightarrow 0$ et $t_k \rightarrow \ell(g)$.
4. $v(g_k) \rightarrow v(g)$.
5. En notant $\xi_{g_k}^+$ le point fixe attractif de g_k dans $\partial_\infty X$, on a $\angle_T(\xi_k^+, \xi_{g_k}^+) \rightarrow 0$, $\xi_{g_k}^+ \in \partial_\infty F_k$ et ξ_k^+ est l'unique point de de même type que ξ^+ dans l'adhérence de la facette ouverte de $\partial_\infty X$ contenant $\xi_{g_k}^+$.

En particulier, si $v(g)$ est régulier alors $\text{Min}(g_k) \rightarrow \text{Min}(g)$.

Démonstration (Lemme 4.3) Soit $p \in F$ et $D > 0$. Il existe une boule topologique fermée B telle que $\xi^+ \in \mathring{B}$ et $B \subset O_{\xi^-}(p, D)$ (voir section 2.2.4). D'après la proposition 2.7, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $g^N(O_{\xi^-}(p, D)) \subset \mathring{B}$.

Notons $h_k = g_k^N$ et $h = g^N$. On a $h_k \rightarrow h$ et $\ell(h) = N\ell(g) > 0$, $F_h = F_g = F$ et ξ^+ et ξ^- sont les points fixes attractif et répulsif de h .

On a $h(B) \subset \mathring{B}$. Comme l'action de $G = \text{Aut}(X)$ sur $G\xi^+$ est continue, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geq K$, on a $h_k(B) \subset B$. Comme h_k est continue sur B , elle admet alors un point fixe ξ_k^+ dans B (donc de même type que ξ^+) par le théorème de Brouwer. Quitte à extraire $\xi_k^+ \rightarrow z$ dans B , fixé par h . Comme ξ^+ est le seul point fixe de h dans B (proposition 2.7), on a $z = \xi^+$. De même, il existe $\xi_k^- \in \partial_\infty X$ fixé par h_k , de même type que ξ^- , tel que $\xi_k^- \rightarrow \xi^-$. La proposition 2.12 entraîne alors que $F_k \rightarrow F$.

On note (g', t) la décomposition de g sur $F = C \times \mathbb{R}$. Alors $t = \ell(g)$ et $\ell(g') = 0$ (proposition 2.15). La décomposition de h sur $F = C \times \mathbb{R}$ est alors (h', s) avec $h' = (g')^N$ et $s = Nt$. En notant (h'_k, s_k) la décomposition de h_k sur $F_k = C_k \times \mathbb{R}$, on a alors que $h'_k \rightarrow h'$ et $s_k \rightarrow s$. Donc $\ell(h') = N\ell(g') = 0$ et $\limsup \ell(h'_k) \leq \ell(h')$, donc $\ell(h'_k) \rightarrow 0$.

Nous pouvons maintenant montrer le point 4. Soit $\bar{\mathcal{C}}_k$ une chambre de Weyl fermée de F_k et $\bar{\mathcal{C}}'_k$ la chambre de Weyl fermée de C_k telle que $\bar{\mathcal{C}}_k = \bar{\mathcal{C}}'_k \times \mathbb{R}$. Notons $v_{F_k} : \text{Aut}(F_k) \rightarrow \bar{\mathcal{C}}_k$ et $v_{C_k} : \text{Aut}(C_k) \rightarrow \bar{\mathcal{C}}'_k$ les fonctions vecteur de translation. D'après (12) et (13), on a $v_{F_k}(h_k) = v_{C_k}(h'_k) + s_k$ et $v(h_k) = \Theta(v_{F_k}(h_k))$. Comme $\Theta(s_k) \rightarrow v(h)$ et $v_{C_k}(h'_k) \rightarrow 0$, on en déduit que $v(h_k) \rightarrow v(h)$, car Θ est continue. Donc $v(g_k) = \frac{1}{N}v(h_k) \rightarrow \frac{1}{N}v(h) = v(g)$.

Pour k suffisamment grand, le point fixe attractif $\xi_{g_k}^+$ de g_k existe car $\ell(g_k) > 0$ (par ce qui précède) (cf. remarque 2.5), et il coïncide avec celui de $h_k = g_k^N$. Les deux premières assertions du point 5 découlent de la proposition 2.8 (appliquée à h_k), car $\ell(h_k) \rightarrow 0$. La troisième assertion en découle par les propriétés des immeubles sphériques. En effet, notons τ le type de ξ^+ . Le type de $\xi_{h_k}^+$ est $\tau_k = \partial v(g_k)$, qui tend vers $\partial v(g) = \bar{\tau}$ dans $\bar{\mathcal{C}}$. Donc pour k assez grand τ est dans l'adhérence de la facette ouverte de $\bar{\mathcal{C}}$ contenant τ_k . Il existe donc un unique point α_k de de type τ dans l'adhérence de la facette ouverte de $\partial_\infty X$ contenant $\xi_{g_k}^+$. Alors $\langle \tau, \alpha_k \rangle = \langle \tau_k, \tau \rangle \rightarrow 0$, donc $\langle \tau, \alpha_k \rangle \rightarrow 0$, et $\langle \tau, \alpha_k \rangle$ est dans l'ensemble fini $D(\tau, \tau)$, donc $\alpha_k = \xi_k^+$ pour k assez grand.

Il ne reste qu'à montrer le 3. Comme g_k fixe l'adhérence de la facette contenant $\xi_{g_k}^+$, on obtient -enfin- que g_k fixe ξ_k^+ . De même, on a que g_k fixe ξ_k^- . On a alors $h_k' = (g_k')^N$ et $s_k = Nt_k$, ce qui conclut. \square

4.2 Continuité asymptotique du vecteur de translation

Soit ω un ultrafiltre sur \mathbb{N} plus fin que le filtre de Fréchet. Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$, et $(*_k)_k$ une suite de points de X . Soit $(X_\omega, *_\omega, d_\omega)$ le cône asymptotique de $(X, *_k, \frac{1}{\lambda_k}d)$ suivant l'ultrafiltre ω (voir section 2.3).

Proposition 4.4 *Soit (g_k) une suite dans G telle que $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_k}d(*_k, g_k *_k) < +\infty$. Soit $g_\omega = [g_k]$ l'isométrie de X_ω associée. Alors $\frac{1}{\lambda_k}v(g_k) \rightarrow_\omega v(g_\omega)$ dans $\bar{\mathcal{C}}$.*

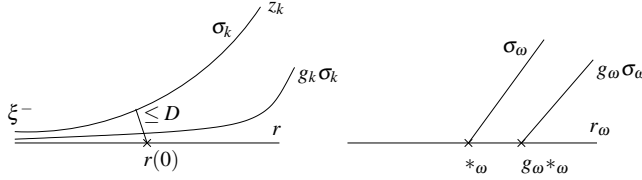
Démonstration Commençons par le cas où $\frac{1}{\lambda_k}d(\text{Min}(g_k), x_0)$ reste borné, ce qui est toujours le cas quand X est un immeuble affine complet d'après le théorème 2.14, qui se traite simplement de manière analogue à la preuve de la continuité de v . Alors $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_k}d(\text{Min}(g_k), *_k) < +\infty$. Soit x_k dans $\text{Min}(g_k)$ tel que $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_k}d(x_k, *_k) < +\infty$. Soit $x_\omega = [x_k]$. Le lemme 2.19 entraîne que $x_\omega \in \text{Min}(g_\omega)$. Par conséquent $\delta_{g_\omega}(x_\omega) = v(g_\omega)$. D'après la proposition 2.21, on a $\delta_{g_\omega}(x_\omega) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} \delta_{g_k}(x_k)$, donc $v(g_\omega) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_k}v(g_k)$.

Supposons maintenant que X est un espace symétrique. Comme X_ω est un immeuble affine complet (théorème 2.20), on sait que g_ω fixe un point ou translate une géodésique (théorème 2.14). On voit facilement que $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} \ell(g_k) \leq \ell(g_\omega)$. Par conséquent, si g_ω fixe un point, on a $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} \ell(g_k) = \ell(g_\omega) = 0$, donc, comme $\|v(g_k)\| = \ell(g_k)$ pour tout k , on a $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_k}v(g_k) = 0$, ce qui conclut. On peut donc supposer dorénavant que g_ω translate non trivialement une géodésique r_ω de X_ω . Quitte à conjuguer chaque g_k , on peut supposer pour simplifier que la suite $*_k$ est constante égale à x_0 . Soit r une géodésique de X telle que $r(0) = x_0$, de même type que r_ω . Alors il existe une suite (h_k) dans G telle que $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_k}d(x_0, h_k x_0) < +\infty$ et $h_\omega = [h_k]$ envoie $[r] : t \mapsto [r(\lambda_k t)]$ sur r_ω (proposition 2.22). Quitte à conjuguer chaque g_k par h_k , on peut donc supposer que $r_\omega = [r]$. Notons $\xi^+ = r(+\infty)$, $\xi^- = r(-\infty)$.

Lemme 4.5 (Contraction des ombres) *Pour tous D, t, ε dans $]0, +\infty[$, on a*

$$g_k(O_{\xi^-}(r(0), D)) \subset O_{\xi^-}(r(t), \varepsilon) \text{ pour } \omega\text{-presque tout } k.$$

Démonstration On raisonne par l'absurde. Sinon, il existe $D, t, \varepsilon > 0$ et une suite z_k dans $\partial_\infty X$ avec $z_k \in O_{\xi^-}(r(0), D)$ et $g_k z_k \notin O_{\xi^-}(r(t), \varepsilon)$ ω -presque partout. Soit σ_k une géodésique de ξ^- à z_k telle que $d(r(0), \sigma_k(0)) \leq D$. Alors les géodésiques r_ω et $\sigma_\omega = [\sigma_k]$ de X_ω sont confondues sur $]-\infty, 0]$, car elles sont asymptotes en $-\infty$ et $d_\omega(r_\omega(0), \sigma_\omega(0)) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} d(r(0), \sigma_k(0)) = 0$.

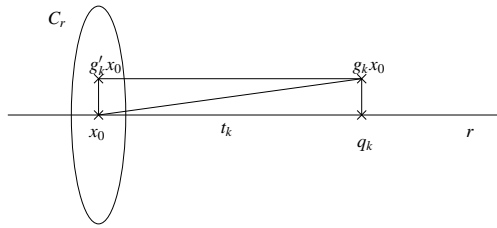


On a donc $\angle_{*_\omega}(r_\omega(+\infty), g_\omega \sigma_\omega(+\infty)) = 0$. Donc, comme le passage au cône asymptotique augmente les angles (proposition 2.18), on a $\angle_{r(t)}(\xi^+, g_k z_k) \rightarrow_\omega 0$ (car $[r(t)] = *_\omega$). Par conséquent $\angle_{r(t)}(\xi^-, g_k z_k) \rightarrow_\omega \pi$, et donc $d(r(t), F_{\xi^-, g_k z_k}) \rightarrow_\omega 0$ par la proposition 2.12. Or par hypothèse $d(r(t), F_{\xi^-, g_k z_k}) \geq \varepsilon$ pour ω -presque tout k , contradiction. \square

Fin de la preuve de la proposition 4.4. Soit $D > 0$. L'ombre $O_{\xi^-}(r(0), D)$ est un voisinage de ξ^+ dans son orbite $G\xi^+$. Comme $G\xi^+$ est une variété, elle contient donc une boule topologique euclidienne B contenant ξ^+ dans son intérieur. Comme les ombres $O_{\xi^-}(r(t), \varepsilon)$, $t, \varepsilon > 0$, forment une base de voisinages de ξ^+ dans $G\xi^+$ (proposition 2.13), il existe $t > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $O_{\xi^-}(r(t), \varepsilon) \subset B$. D'après le lemme 4.5, on a alors, pour ω -presque tout k , que $g_k(B) = B$ donc que g_k admet un point fixe ξ_k^+ dans $O_{\xi^-}(r(t), \varepsilon)$ par le théorème de Brouwer (car g_k est continue sur B).

Comme $\xi_\omega^+ = [\xi_k^+]$ est un point de $\partial_\infty X_\omega$ opposé à $[\xi^-] = r_\omega(-\infty)$ et fixé par g_ω , qui translate r_ω , il est nécessairement égal à $r_\omega(+\infty) = [\xi^+]$ (proposition 2.3). On peut donc supposer, quitte à conjuguer chaque g_k , que $\xi_k^+ = \xi^+$, c'est-à-dire que g_k fixe ξ^+ pour ω -presque tout k . On peut aussi supposer (en échangeant les rôles de ξ^+ et ξ^-) que g_k fixe ξ^- pour ω -presque tout k .

Pour ω -presque tout k , on a alors que g_k préserve le faisceau $F_{\xi^-, \xi^+} = F_r = C_r \times r$ et g_k agit dessus comme (g'_k, t_k) (voir section 2.1). Soit $p_k = g_k x_0$ et q_k sa projection sur r . Alors $q_k = t_k x_0$. Par la proposition 2.18, on a que $q_\omega = [q_k]$ est la projection de



$g_\omega *_\omega$ sur r_ω . Or $g_\omega *_\omega \in r_\omega$, donc on a $q_\omega = g_\omega *_\omega$. Par conséquent $\frac{1}{\lambda_k} d(x_0, g'_k x_0) \rightarrow_\omega$

0, et donc $\lim_{\omega} \frac{1}{\lambda_k} \ell(g'_k) = 0$. On en déduit que $\lim_{\omega} \frac{1}{\lambda_k} \delta(x_0, t_k x_0) = \delta(*_{\omega}, g_{\omega} *_{\omega}) = v(g_{\omega})$.

Soit $\overline{\mathcal{C}}_F$ une chambre de Weyl fermée de $F = F_r$ et $\overline{\mathcal{C}}_C$ la chambre de Weyl fermée de $C = C_r$ telle que $\overline{\mathcal{C}}_F = \overline{\mathcal{C}}_C \times \mathbb{R}$. Notons $v_F : \text{Aut}(F) \rightarrow \overline{\mathcal{C}}_F$ et $v_C : \text{Aut}(C) \rightarrow \overline{\mathcal{C}}_C$ les fonctions vecteur de translation. D'après (12) et (13), on a $v_F(g_k) = v_C(g'_k) + t_k$ et $v(g_k) = \Theta(v_F(g_k))$. Or on vient de voir que $\lim_{\omega} \frac{1}{\lambda_k} v_C(g'_k) = 0$ et que $\lim_{\omega} \Theta(\frac{1}{\lambda_k} t_k) = v(g_{\omega})$, donc, Θ étant continue, on a $\frac{1}{\lambda_k} v(g_k) \rightarrow_{\omega} v(g_{\omega})$. \square

Remarque 4.6 On a en fait démontré de plus les propriétés suivantes. On suppose que $\ell(g_{\omega}) > 0$. Soit r_{ω} un axe de g_{ω} et ξ_{ω}^{-} et ξ_{ω}^{+} ses extrémités. On note (pour k suffisamment grand) $\xi_{g_k}^{+}$ et $\xi_{g_k}^{-}$ les points fixes attractif et répulsif de g_k dans $\partial_{\infty} X$ (cf. remarque 2.5), et ξ_k^{+} (resp. ξ_k^{-}) l'unique point de type $v(g_{\omega})$ (resp. $v(g_{\omega})^{\text{opp}}$) dans l'adhérence de la facette ouverte de $\partial_{\infty} X$ contenant $\xi_{g_k}^{+}$ (resp. $\xi_{g_k}^{-}$). On a :

1. $\xi_{\omega}^{+} = [\xi_{g_k}^{+}]$ et $\xi_{\omega}^{-} = [\xi_{g_k}^{-}]$.
2. Il existe une suite ω -bornée de géodésiques r_k de ξ_k^{-} à ξ_k^{+} telle que $r_{\omega} = [r_k]$. En particulier $g_k r_k$ est parallèle à r_k et $\frac{1}{\lambda_k} d(r_k, g_k r_k) \rightarrow_{\omega} 0$.

En particulier, si $v(g_{\omega})$ est régulier alors $[\text{Min}(g_k)] = \text{Min}(g_{\omega})$.

5 Compactification

Soit Γ un groupe infini de type fini, discret. Soit \mathbb{K} un corps local (notons que \mathbb{K} est ou bien \mathbb{R} ou \mathbb{C} , ou bien ultramétrique). On suppose que G est un groupe réductif sur \mathbb{K} et que X est l'espace associé, c'est à dire qu'on reprend les hypothèses et notations de la section 2.2.2. On note x_0 un point-base de X .

5.1 Espaces de représentations et quotient

On considère l'ensemble, noté R ou $R(\Gamma, G)$ des représentations de Γ dans G , muni de la topologie de la convergence simple. Si S est une partie génératrice finie de Γ , l'espace R s'identifie à un sous-ensemble fermé de G^S par l'application $\rho \mapsto (\rho(s))_{s \in S}$. L'espace R est métrisable, à base dénombrable, localement compact. Le groupe G agit continûment sur R par conjugaison.

L'espace topologique quotient usuel R/G n'étant en général pas séparé, on le remplace par son plus gros quotient séparé $\mathcal{R} = R // G$, qui peut être décrit, comme nous allons le voir, soit comme le quotient de R par une relation d'équivalence naturelle \sim , soit plus explicitement comme une rétraction sur un sous-espace naturel R_{cr}/G de R/G (la *semisimplification*).

Représentations complètement réductibles. On dit que $\rho \in R$ est *complètement réductible* (cr) si, pour tout $\alpha \in \partial_{\infty} X$ fixé par ρ , il existe $\beta \in \partial_{\infty} X$, opposé à α , également fixé par ρ . Cette notion, introduite par J.P. Serre [Serre] pour les actions sur des immeubles sphériques et les groupes algébriques réductifs, est peu restrictive. On

renvoie à [Par5] pour une étude géométrique et d'autres caractérisations naturelles. Du point de vue algébrique cela revient à dire que pour tout sous-groupe parabolique P de G contenant $\rho(\Gamma)$, il existe un sous-groupe de Levi de P contenant $\rho(\Gamma)$ [Serre, 3.2.1]. Les représentations Zariski-denses sont cr. Dans le cas où $G = \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$, une représentation est cr si et seulement si l'action linéaire sur \mathbb{K}^n associée est semi-simple.

Si la caractéristique du corps \mathbb{K} est nulle, alors ρ est cr si et seulement si la composante neutre de l'adhérence de Zariski de $\rho(\Gamma)$ est un groupe réductif [Serre, Proposition 4.2]. Cela équivaut par [Ric] à demander que l'orbite $\underline{G} \cdot \rho$ soit Zariski-fermée dans la variété algébrique $\mathbf{R}(\Gamma, \underline{G})$, ou encore par [Bre] que l'orbite $G \cdot \rho$ soit fermée dans $\mathbf{R}(\Gamma, G)$.

Plus gros quotient séparé. On note l'espace \mathbf{R}_{cr} le sous-espace de \mathbf{R} formé des représentations cr, qui est stable sous G . On note $\mathbf{R}_{\mathrm{cr}}/G$ l'espace quotient, muni de la topologie quotient (dont on rappelle qu'elle coïncide avec la topologie induite par l'inclusion dans l'espace topologique quotient \mathbf{R}/G , voir la proposition 10 de [Bou, III, § 2]). Cet espace est à base dénombrable car \mathbf{R} l'est.

Le résultat suivant, qui montre que $\mathbf{R}_{\mathrm{cr}}/G$ est le plus gros quotient séparé de \mathbf{R} sous G , est bien connu pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il résulte de [Ric], [Luna] et [RiSI]. Pour \mathbb{K} de caractéristique 0 il résulte de [Bre]. On en trouvera une démonstration directe, qui couvre aussi le cas de la caractéristique non nulle, dans [Par5], auquel on renvoie pour plus de détails.

Théorème 5.1 1. *L'espace $\mathbf{R}_{\mathrm{cr}}/G$ est séparé et localement compact.*

2. *Toute orbite de G dans \mathbf{R} contient dans son adhérence une unique orbite cr $\pi(\rho)$ (semisimplification).*
3. *La propriété $\overline{G \cdot \rho} \cap \overline{G \cdot \rho'} \neq \emptyset$ définit une relation d'équivalence $\rho \sim \rho'$ sur \mathbf{R} . La projection G -invariante $\pi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_{\mathrm{cr}}/G$ est continue, et induit un homéomorphisme h de l'espace quotient $\mathbf{R} // G := \mathbf{R} / \sim$ sur $\mathbf{R}_{\mathrm{cr}}/G$, tel que $\pi = h \circ p$, où $p : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} // G$ est la projection canonique. En particulier, $\mathbf{R} // G$ (resp. $\mathbf{R}_{\mathrm{cr}}/G$) est le plus gros quotient séparé de \mathbf{R} sous G (toute application continue G -invariante f de \mathbf{R} vers un espace séparé factorise à travers p).*

On notera au passage que la topologie quotient issue de la semisimplification π (utilisée dans la littérature) coïncide avec la topologie quotient usuelle de $\mathbf{R}_{\mathrm{cr}}/G$. On identifiera dorénavant $\mathbf{R} // G$ et $\mathbf{R}_{\mathrm{cr}}/G$ (et les projections p et π) via h . On notera cet espace $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ ou \mathcal{X} . On notera $[\rho]$ la classe de $\rho \in \mathbf{R}$ pour \sim . Remarquons que l'image dans \mathcal{X} d'un fermé G -stable F de \mathbf{R} est un fermé (car F est stable par la semisimplification π).

Lien avec le quotient algébro-géométrique. En caractéristique nulle, il est également classique de travailler avec le *quotient algébro-géométrique* $\mathbf{R} // \underline{G}$, qui est défini comme l'image canonique de \mathbf{R} dans le quotient algébro-géométrique $\mathbf{R}(\Gamma, \underline{G}) // \underline{G}$ de la variété algébrique affine $\mathbf{R}(\Gamma, \underline{G})$ sous l'action de \underline{G} .

L'espace $\mathcal{X} = \mathbf{R} // G$ considéré dans cet article est un peu "plus gros" que $\mathbf{R} // \underline{G}$, dans le sens suivant. On peut identifier $\mathbf{R}(\Gamma, \underline{G}) // \underline{G}$ à l'espace des \underline{G} -orbites Zariski-fermées dans $\mathbf{R}(\Gamma, \underline{G})$, et \mathcal{X} à l'espace des G -orbites fermées dans \mathbf{R} . La projection

canonique $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} // \underline{G}$ factorise en l'application naturelle $P : G \cdot \rho \mapsto \underline{G} \cdot \rho$ de \mathcal{X} dans $\mathbb{R} // \underline{G}$. Cette application (continue et surjective) est fermée et à fibres finies (voir [Luna], [RiSI] pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et plus généralement [Bre, 5.17] en caractéristique nulle).

Action de $\text{Out}(\Gamma)$ Le groupe $\text{Aut}(\Gamma)$ des automorphismes de Γ agit à droite, par précomposition sur l'espace \mathbb{R} . Cette action est continue et commute avec l'action de G , donc induit une action de $\text{Aut}(\Gamma)$ sur \mathcal{X} . Le sous-groupe $\text{Int}(\Gamma)$ des automorphismes intérieurs de Γ agit trivialement sur \mathcal{X} . On obtient donc une action (par homéomorphismes) du groupe $\text{Out}(\Gamma) = \text{Aut}(\Gamma)/\text{Int}(\Gamma)$ sur \mathcal{X} .

On va maintenant construire une compactification de \mathcal{X} , reposant sur la notion de vecteur de translation développée en section 4.

5.2 Spectre marqué des vecteurs de translation

On fixe un plat maximal \mathbb{A} de X , de groupe de Weyl vectoriel \overline{W} , et une chambre de Weyl fermée $\overline{\mathcal{C}}$ de \mathbb{A} . Le groupe G agit sur X par automorphismes, donc le vecteur de translation $v : G \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ est bien défini (voir section 4).

Remarque (Remplacement par les longueurs) Dans tout ce qui suit, on peut remplacer $v : G \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ par la longueur de translation $\ell = \|v\| : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ dans X (cf. section 2.1). Les compactifications obtenues sont alors moins fines.

On appellera *spectre marqué des vecteurs de translation* d'une représentation $\rho : \Gamma \rightarrow G$ la fonction $v \circ \rho : \Gamma \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$. L'espace $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ est muni de la topologie produit, qui est métrisable de type dénombrable (mais pas localement compacte). Le groupe $\text{Aut}(\Gamma)$ agit naturellement sur $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$. L'application $V : \rho \mapsto v \circ \rho$ de \mathbb{R} dans $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ est $\text{Aut}(\Gamma)$ -équivariante, invariante sous l'action par conjugaison de G , et continue (car v l'est, proposition 4.2). Elle passe donc au quotient en une application continue $\text{Aut}(\Gamma)$ -équivariante

$$\mathcal{V} : \begin{array}{l} \mathcal{X} \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}^\Gamma \\ [\rho] \longmapsto v \circ \rho \end{array} .$$

5.3 Le théorème de compactification

Soit $\mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ le projectif de $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$, c'est-à-dire l'espace topologique quotient $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma - \{0\}$ par la relation d'équivalence $u \simeq w$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $u = tw$. Cet espace est séparé, à base dénombrable (mais pas localement compact). On note $[w]$ la classe dans $\mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ de $w \in \overline{\mathcal{C}}^\Gamma - \{0\}$, et $\mathbb{P} : \overline{\mathcal{C}}^\Gamma - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ la projection canonique, qui est continue et ouverte. L'action de $\text{Aut}(\Gamma)$ sur $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ passe au quotient en une action (par homéomorphismes) sur $\mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$.

Théorème 5.2 1. *Le sous-ensemble $\mathcal{X}_0 = \mathcal{V}^{-1}(0)$ est un compact.*

2. L'application continue

$$\mathbb{P}\mathcal{V} = \mathbb{P} \circ \mathcal{V} : \mathcal{X} - \mathcal{X}_0 \longrightarrow \mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma.$$

est “d'image relativement compacte à l'infini”, i.e. il existe un compact \mathcal{K} de \mathcal{X} , contenant \mathcal{X}_0 , tel que $\mathbb{P}\mathcal{V}(\mathcal{X} - \mathcal{K})$ est relativement compact.

En particulier, elle induit une compactification (métrisable) $\widetilde{\mathcal{X}}$ de \mathcal{X} , dont le bord $\partial_\infty \widetilde{\mathcal{X}} = \widetilde{\mathcal{X}} - \mathcal{X}$ s'identifie à une partie de $\mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$, et caractérisée par la propriété suivante : une suite $[\rho_k]_k$ dans \mathcal{X} converge dans $\widetilde{\mathcal{X}}$ vers $[w]$ dans $\partial_\infty \widetilde{\mathcal{X}} \subset \mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ si et seulement si $[\rho_k]_k$ sort de tout compact de \mathcal{X} et $[v \circ \rho_k] \rightarrow [w]$ dans $\mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$.

3. L'action naturelle de $\text{Out}(\Gamma)$ sur \mathcal{X} se prolonge continûment au compactifié $\widetilde{\mathcal{X}}$, avec $[\varphi].[w] = [w \circ \varphi^{-1}]$ pour tous $\varphi \in \text{Aut}(\Gamma)$ et $w \in \overline{\mathcal{C}}^\Gamma$.
4. Si $[w] \in \partial_\infty \widetilde{\mathcal{X}}$, alors $[w] = [v \circ \rho]$ avec ρ une action de Γ sur un immeuble affine Δ de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$, sans point fixe global. On peut de plus supposer que cette action provient d'une représentation non bornée $\rho : \Gamma \longrightarrow \underline{G}(\mathbb{K}_\omega)$, avec \mathbb{K}_ω un corps valué ultramétrique et Δ un sous-immeuble de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\text{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$.

Remarques 1. La compactification obtenue ne dépend pas du choix du compact \mathcal{K} . Le corps \mathbb{K}_ω est complet mais sa valuation n'est pas a priori discrète (et l'immeuble impliqué n'est pas simplicial).

2. (Un critère de rigidité) En particulier, s'il n'existe pas d'action de Γ sans point fixe global sur un immeuble affine de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$, ou s'il n'existe pas de représentation ρ non bornée de Γ dans $\underline{G}(\mathbb{K}_\omega)$ avec \mathbb{K}_ω corps valué ultramétrique, alors l'espace \mathcal{X} est compact.

3. (Injectivité du spectre) L'application \mathcal{V} n'est a priori pas injective sur \mathcal{X} tout entier, ne serait-ce que parce que toutes les représentations à valeurs dans un sous-groupe compact K de G ont le même spectre (nul). On renvoie à [DaKi] pour des résultats sur l'injectivité (qui n'est pas utilisée ici) du spectre des longueurs \mathcal{L} (donc de \mathcal{V}) et de son projectifié $\mathbb{P}\mathcal{L}$ (donc de $\mathbb{P}\mathcal{V}$) pour les représentations Zariski-denses dans G semisimple, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Avant de démontrer ce théorème (en section 5.6), on commence par expliquer dans un cadre purement topologique la construction de la compactification associée à une application définie hors d'un compact, continue, d'image relativement compacte à l'infini.

5.4 Préliminaires topologiques sur la notion de compactification

Dans cette section \mathcal{E} désigne un espace topologique quelconque.

Définition 5.3 Une *compactification* de \mathcal{E} est une paire $(g, \widetilde{\mathcal{E}})$, où $\widetilde{\mathcal{E}}$ est un espace topologique compact et $g : \mathcal{E} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}}$ un homéomorphisme sur son image, avec $g(\mathcal{E})$ ouvert et dense dans $\widetilde{\mathcal{E}}$. Le complémentaire de $g(\mathcal{E})$ dans $\widetilde{\mathcal{E}}$ est appelé le *bord* (à l'infini) de \mathcal{E} et noté $\partial_\infty \widetilde{\mathcal{E}}$.

Remarque Pour que \mathcal{E} admette une compactification (métrisable), il est nécessaire qu'il soit localement compact (à base dénombrable), en particulier séparé.

On suppose désormais que \mathcal{E} est localement compact, non compact. On pose $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \cup \{\infty\}$, muni de la topologie étendant celle de \mathcal{E} où les complémentaires des compacts de \mathcal{E} forment une base de voisinages de ∞ . Alors $(\text{id}, \tilde{\mathcal{E}})$ est une compactification de \mathcal{E} , appelée *compactification d'Alexandroff* de \mathcal{E} . Si \mathcal{E} est métrisable, dénombrable à l'infini, ou, de manière équivalente, si \mathcal{E} est à base dénombrable, alors $\tilde{\mathcal{E}}$ est métrisable.

Soit C un espace topologique séparé et $f : \mathcal{E} \rightarrow C$ continue. On dira que $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow C$ continue est un *prolongement de f à $\tilde{\mathcal{E}}$* si $\tilde{f} \circ g = f$. Le prolongement est unique s'il existe. On dit qu'une compactification (g_1, \mathcal{E}_1) de \mathcal{E} est *plus fine* qu'une compactification (g_2, \mathcal{E}_2) de \mathcal{E} si g_2 possède un (unique) prolongement continu h à \mathcal{E}_1 (qu'on appellera le *morphisme canonique*). On a alors $h(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_2$ et $h(\partial_\infty \mathcal{E}_1) = \partial_\infty \mathcal{E}_2$. Les compactifications \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont *isomorphes* (i.e. \mathcal{E}_1 est plus fine que \mathcal{E}_2 et \mathcal{E}_2 est plus fine que \mathcal{E}_1) si et seulement si h est un homéomorphisme. La compactification d'Alexandroff est la compactification la moins fine.

Compactifier hors d'un compact. Soit \mathcal{K} un compact de \mathcal{E} et \mathcal{F} le complémentaire de \mathcal{K} dans \mathcal{E} . Soit $(h, \tilde{\mathcal{F}})$ une compactification de \mathcal{F} . Soit $\tilde{\mathcal{E}}$ l'espace topologique obtenu en recollant \mathcal{K} et $\tilde{\mathcal{F}}$ sur le fermé $\partial \mathcal{K}$ au moyen de $h|_{\partial \mathcal{K}}$, et g l'application de \mathcal{E} dans $\tilde{\mathcal{E}}$, égale à id sur \mathcal{K} et à h sur \mathcal{F} . On voit facilement que $(g, \tilde{\mathcal{E}})$ est une compactification de \mathcal{E} , dite *induite* par $(h, \tilde{\mathcal{F}})$, dont le bord $\partial_\infty \tilde{\mathcal{E}}$ s'identifie à celui de $\tilde{\mathcal{F}}$. Si $(h, \tilde{\mathcal{F}})$ provient (par restriction) d'une compactification $(g, \tilde{\mathcal{E}})$ de \mathcal{E} , alors la compactification de \mathcal{E} induite par $(h, \tilde{\mathcal{F}})$ est isomorphe à la compactification de départ $(g, \tilde{\mathcal{E}})$.

Compactification induite par une application continue (voir aussi [MoSh]). Soit C un espace topologique séparé et $f : \mathcal{E} \rightarrow C$ continue d'image relativement compacte. Soit $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de \mathcal{E} . Soit $g : \mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}} \times C$ l'application continue $x \mapsto (x, f(x))$, et $\tilde{\mathcal{E}}$ l'adhérence de $g(\mathcal{E})$, qui est compacte, et de la forme $\tilde{\mathcal{E}} = g(\mathcal{E}) \cup (\{\infty\} \times B)$ avec $B \subset C$. Alors $(g, \tilde{\mathcal{E}})$ est une compactification de \mathcal{E} , dite *associée* à ou *induite par f* , dont le bord s'identifie à $B \subset C$. Soit C' un autre espace topologique séparé et $h : C \rightarrow C'$ continue. Alors $f' = h \circ f$ induit une compactification $(g', \tilde{\mathcal{E}}')$ de \mathcal{E} moins fine que $\tilde{\mathcal{E}}$.

Plus généralement, supposons que $f : \mathcal{E} \rightarrow C$ est seulement définie sur le complémentaire $\mathcal{E} - \mathcal{A}$ d'une partie relativement compacte \mathcal{A} de \mathcal{E} , continue, et d'image relativement compacte à l'infini, i.e il existe un compact \mathcal{K} de \mathcal{E} tel que $f(\mathcal{E} - \mathcal{K})$ est relativement compact dans C . Alors, d'après ce qui précède, pour tout compact \mathcal{K} de \mathcal{E} contenant \mathcal{A} dans son intérieur avec $f(\mathcal{E} - \mathcal{K})$ compact, f définit une compactification $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F} = \mathcal{E} - \mathcal{K}$, donc une compactification $\tilde{\mathcal{E}}$ de \mathcal{E} , dite *induite par f* . Cette compactification ne dépend pas du choix de \mathcal{K} (à isomorphisme près).

Si \mathcal{E} et C sont à base dénombrable, alors $\tilde{\mathcal{E}}$ est métrisable. Une suite x_k de \mathcal{E} converge dans $\tilde{\mathcal{E}}$ vers b dans $\partial \tilde{\mathcal{E}}$ identifié à $B \subset C$ si et seulement si x_k sort de tout compact de \mathcal{E} et $f(x_k) \rightarrow b$ dans C .

5.5 Fonctions de déplacement

On introduit maintenant quelques outils supplémentaires venant de la géométrie CAT(0), dont on aura besoin en section 5.6 pour démontrer le théorème de compactification.

Soit S une partie génératrice finie de Γ , et $\|\cdot\|_S$ la longueur des mots sur Γ associée. On voit $\rho : \Gamma \rightarrow G$ comme une action de Γ sur X (l'espace CAT(0) associé à G). On appelle *fonction de déplacement* de ρ (relativement à la partie génératrice S) et on note d_ρ la fonction convexe continue

$$d_\rho : X \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{\sum_{s \in S} d(x, \rho(s)x)^2}$$

On appelle *minimum de déplacement* de ρ (relativement à la partie génératrice S) et on note $\lambda(\rho)$ le nombre réel positif

$$\lambda(\rho) = \inf_{x \in X} d_\rho(x),$$

qui est un invariant de conjugaison. La fonction $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ va nous permettre de contrôler les représentations partant à l'infini dans le quotient \mathcal{X} , et de renormaliser le spectre des vecteurs \mathcal{V} .

Proposition 5.4 *Pour tout $\rho \in \mathbb{R}$, on a $\ell \circ \rho \leq \lambda(\rho) \|\cdot\|_S$ sur Γ .* □

Pour tout réel positif D , notons $\mathbf{R}_D = \{\rho \in \mathbb{R} \mid d_\rho(x_0) \leq D\}$, qui est un compact de \mathbb{R} (car l'action de G sur X est propre), et $\mathcal{X}_D = p(\mathbf{R}_D)$, qui est un compact de \mathcal{X} . On démontre facilement la propriété suivante.

Proposition 5.5 *Il existe $L > 0$ tel que, pour tout $D > 0$, si $\lambda(\rho) < D$, alors il existe $g \in G$ tel que $g \cdot \rho \in \mathbf{R}_{D+L}$. En particulier $[\rho]$ est dans le compact \mathcal{X}_{D+L} .* □

Remarque On peut en fait montrer que λ est continue sur \mathbb{R} et passe au quotient en une fonction continue propre sur \mathcal{X} , voir [Par5, Proposition 25].

5.6 La démonstration du théorème de compactification 5.2

On commence par établir une version un peu plus faible, qui décrit le comportement asymptotique d'une suite de représentations partant à l'infini dans \mathcal{X} .

Théorème 5.6 *Soit $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathbb{R} telle que $\lambda_k = \lambda(\rho_k) \rightarrow +\infty$. Alors, quitte à extraire, $\frac{1}{\lambda_k} v \circ \rho_k \rightarrow w$ dans $\overline{\mathcal{E}}^F$, avec $w = v \circ \rho$ où ρ est une action de Γ sur un immeuble affine Δ de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$, sans point fixe global. On peut de plus supposer que cette action provient d'une représentation ρ non bornée de Γ dans $\underline{G}(\mathbb{K}_\omega) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$, où \mathbb{K}_ω est un corps valué ultramétrique et que Δ est un sous-immeuble de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$, préservé par $\underline{G}(\mathbb{K}_\omega)$.*

En particulier, w n'est pas identiquement nul.

Démonstration Comme G agit cocompactement sur X , quitte à conjuguer chaque représentation ρ_k , on peut supposer qu'il existe un point x_k de X , à distance bornée par $M > 0$ de x_0 , tel que $d_{\rho_k}(x_k) \leq \lambda(\rho_k) + \frac{1}{7}$. Soit ω un ultrafiltre sur \mathbb{N} , plus fin que le filtre de Fréchet. On considère le cône asymptotique X_ω de $(X, x_0, \frac{1}{\lambda_k}d)$ suivant l'ultrafiltre ω (voir section 2.3). C'est un immeuble affine complet de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$ (cf. Thm 2.20). Pour tout γ de Γ , on a $d(x_0, \rho_k(\gamma)x_0) \leq \|\gamma\|_S d_{\rho_k}(x_0) \leq \|\gamma\|_S(\lambda(\rho_k) + \frac{1}{7} + 2M\sqrt{|\mathcal{S}|})$. donc $\frac{1}{\lambda_k}d(x_0, \rho_k(\gamma)x_0)$ est borné pour $k \in \mathbb{N}$. On peut donc considérer l'action asymptotique ρ_ω de Γ sur X_ω , qui est définie par $\rho_\omega(\gamma)[x_k] = [\rho_k(\gamma)x_k]$ pour tous γ de Γ et $[x_k]$ de X_ω . Pour tout $y_\omega = [y_k] \in X_\omega$, on a $d_{\rho_\omega}(y_\omega) = \lim_{\omega} \frac{1}{\lambda_k}d_{\rho_k}(y_k)$, donc $d_{\rho_\omega}(y_\omega) \geq 1$, avec égalité si $y_\omega = [x_k] = [x_0]$. Donc ρ_ω n'a pas de point fixe global dans X_ω .

Comme v passe continûment au cône asymptotique (proposition 4.4), pour tout γ de Γ , on a $\frac{1}{\lambda_k}v(\rho_k(\gamma)) \rightarrow_{\omega} v(\rho_\omega(\gamma))$ dans $\overline{\mathcal{C}}$. En particulier il existe une sous-suite extraite de $\frac{1}{\lambda_k}v \circ \rho_k$ convergeant vers $v \circ \rho_\omega$ dans $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$.

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on peut supposer que G est un sous-groupe fermé auto-adjoint de $SL_n(\mathbb{K})$. En particulier X est un sous-espace totalement géodésique passant par x_0 de l'espace symétrique X_n associé à $SL_n(\mathbb{K})$.

Dans le cas où \mathbb{K} est ultramétrique, on peut supposer que \underline{G} est un sous-groupe algébrique défini sur \mathbb{K} de SL_n , et d'après le théorème de plongement de Landvogt [Lan, Thm. 2.2.1], l'immeuble de Bruhat-Tits X de \underline{G} sur \mathbb{K} se plonge par une isométrie équivariante par G dans l'immeuble de Bruhat-Tits X_n de SL_n sur \mathbb{K} . On identifie X à son image dans X_n .

Le cône asymptotique X_ω de $(X, x_0, \frac{1}{\lambda_k}d)$ suivant l'ultrafiltre ω est donc un sous-immeuble du cône asymptotique $X_{n\omega}$ de $(X_n, x_0, \frac{1}{\lambda_k}d)$ suivant l'ultrafiltre ω . D'après ce qui a été fait dans la section 3 (voir le corollaire 3.18 et la remarque qui suit, et le théorème 3.21), l'action asymptotique provient en fait d'une représentation ρ_ω de Γ dans $\underline{G}(\mathbb{K}_\omega) \subset SL_n(\mathbb{K}_\omega)$, où \mathbb{K}_ω est un corps valué ultramétrique et $SL_n(\mathbb{K}_\omega)$ agit sur son immeuble de Bruhat-Tits. Comme cette action n'a pas de point fixe global dans X_ω , donc dans $X_{n\omega}$, qui est un immeuble affine complet (cf. Thm 2.20), $\rho_\omega(\Gamma)$ n'est pas borné, et le spectre des longueurs $\ell \circ \rho_\omega$ ne peut être nul [Par3, Coro. 3], donc $w = v \circ \rho_\omega$ n'est pas nul. \square

On en déduit immédiatement la propriété suivante, qui permet de contrôler le spectre des longueurs \mathcal{L} (donc également celui des vecteurs \mathcal{V}) en fonction de λ , à l'infini de \mathcal{X} .

Corollaire 5.7 *Il existe une partie finie F de Γ , un réel $c > 0$ et un réel $D_0 \geq 0$ tels qu'on a la propriété suivante.*

Pour tout $\rho \in \mathbb{R}$, si $\lambda(\rho) \geq D_0$, il existe $\gamma \in F$ tel que $\ell(\rho(\gamma)) > c\lambda(\rho)$.

Démonstration Soit F_k , $k \in \mathbb{N}^*$ une suite croissante de parties finies recouvrant Γ . Supposons par l'absurde que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ non nul, il existe $\rho_k \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda(\rho_k) \geq k$ et pour tout $\gamma \in F_k$ on a $\frac{1}{\lambda} \ell(\rho_k(\gamma)) \geq \frac{1}{k}$. Alors $\frac{1}{\lambda} \ell \circ \rho_k \rightarrow 0$ dans \mathbb{R}_+^Γ , ce qui est impossible par le théorème 5.6. \square

Remarques 1) On a donc (pour $\lambda(\rho) \geq D_0$) l'encadrement

$$c\lambda(\rho) < \max_{\gamma \in F} \ell(\rho(\gamma)) \leq c'\lambda(\rho)$$

où $c' = \max_{\gamma \in F} \|\gamma\|_S$ (cf proposition 5.4).

2) Une autre conséquence directe du corollaire 5.7, que nous n'utiliserons pas, mais qui mérite d'être signalée, est que l'application $\mathcal{V} : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ est propre : en effet, si Q est un compact de $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$, pour D supérieur à D_0 et à $\frac{1}{c} \max_{\gamma \in F, w \in Q} \|w(\gamma)\|$, on a que $\lambda < D$ sur $\mathcal{V}^{-1}(Q)$. Donc $\mathcal{V}^{-1}(Q)$ est inclus dans le compact \mathcal{X}_{D+L} (proposition 5.5).

Démonstration (Fin de la preuve du théorème 5.2) Nous pouvons maintenant montrer l'existence du compact \mathcal{K} tel que $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{K}$ et $\mathbb{P}\mathcal{V}(\mathcal{X} - \mathcal{K})$ est inclus dans un compact. Soit D_0 donné par le corollaire 5.7 et L donné par la proposition 5.5. On prend alors $\mathcal{K} = \mathcal{X}_D$ pour $D \geq D_0 + L$. Notons $\mathcal{Y} = \mathcal{X} - \mathcal{K}$ et $Y = p^{-1}(\mathcal{Y}) = R - p^{-1}(\mathcal{K})$. D'après le corollaire 5.7, comme $\rho \in Y$ implique $\lambda(\rho) \geq D - L \geq D_0$ (d'après la proposition 5.5), on a que $\frac{1}{\lambda}V(Y)$ ne rencontre pas l'ensemble $\{w \in \overline{\mathcal{C}}^\Gamma \mid \forall \gamma \in F, \|w(\gamma)\| \leq c\}$ qui est un voisinage de 0 dans $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ (en particulier \mathcal{K} contient $\mathcal{V}^{-1}(0)$). Donc l'adhérence C de $\frac{1}{\lambda}V(Y)$ dans $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ ne contient pas 0. Or $\frac{1}{\lambda}V$ est d'image relativement compacte, car incluse dans le compact $\prod_{\gamma \in F} \{u \in \overline{\mathcal{C}}; \|u\| \leq \|\gamma\|_S\}$ par la proposition 5.4. Donc C est un compact de $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma - \{0\}$, et $\mathbb{P}(C)$ est un compact de $\mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$, contenant $\mathbb{P}(\frac{1}{\lambda}V(Y)) = \mathbb{P}(V(Y)) = \mathbb{P}(\mathcal{V}(\mathcal{Y})) = \mathbb{P}\mathcal{V}(\mathcal{X} - \mathcal{K})$, ce qui conclut.

La construction (purement topologique) de la compactification de \mathcal{X} induite par $\mathbb{P}\mathcal{V}$ a été décrite en détail en section 5.4. Le reste des assertions du théorème 5.2 découle du théorème 5.6.

Pour l'action de $\text{Out}(\Gamma)$: comme l'application $\mathbb{P}\mathcal{V} : \mathcal{X} - \mathcal{V}^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ est $\text{Aut}(\Gamma)$ -équivariante, l'action de $\text{Aut}(\Gamma)$ sur \mathcal{X} se prolonge continument à $\widetilde{\mathcal{X}}$ par l'action naturelle sur $\mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$. Comme $\text{Int}(\Gamma)$ agit trivialement sur \mathcal{X} , donc sur $\widetilde{\mathcal{X}}$, l'action induit une action de $\text{Out}(\Gamma)$ sur $\widetilde{\mathcal{X}}$ par homéomorphismes. \square

6 Représentations fidèles et discrètes

Soit Γ un groupe infini de type fini, discret, et G un groupe topologique localement compact. On dit qu'une représentation de Γ dans G est *fidèle et discrète* (fd) si elle est injective et d'image discrète. On note $\text{R}_{\text{fd}}(\Gamma, G)$ ou R_{fd} l'espace des représentations fd de Γ dans G .

6.1 L'hypothèse (H)

On dira qu'un groupe abstrait Γ *vérifie l'hypothèse (H)* s'il n'admet pas de sous-groupe d'indice fini contenant un sous-groupe abélien distingué infini.

Cette hypothèse n'est pas très restrictive dans notre cadre, comme le montrent les exemples suivants.

Si Γ' est un groupe commensurable à Γ (c'est-à-dire si $\Gamma \cap \Gamma'$ est d'indice fini dans Γ et dans Γ'), alors Γ vérifie (H) si et seulement si Γ' vérifie (H).

Si Γ est un sous-groupe discret Zariski-dense (par exemple un réseau) d'un groupe de Lie linéaire semisimple H , alors Γ vérifie (H) par [GoMi, Lemma 1.2]. Plus généralement, ce qui suit montre que les groupes agissant proprement, par automorphismes, sans orbite finie au bord, sur un espace symétrique sans facteur compact et sans facteur euclidien vérifient l'hypothèse (H). C'est par exemple le cas pour les sous-groupes fortement irréductibles de $SL_n(\mathbb{R})$ (i.e. tels que tous les sous-groupes d'indice fini sont irréductibles). Les groupes divisant des convexes fournissent beaucoup d'exemples de tels sous-groupes (voir [Ben2]).

Proposition 6.1 *On suppose que X est un espace symétrique sans facteur compact. Soit Γ un groupe agissant proprement par automorphismes sur X , possédant un sous-groupe abélien A distingué infini. Alors il y a deux possibilités.*

1. A possède un élément parabolique non trivial. Alors Γ admet un point fixe global dans $\partial_\infty X$.
2. A n'a que des éléments semisimples. Alors $M = \bigcap_{a \in A} \text{Min}(a)$ est non vide, et se décompose de manière canonique en un produit $C \times \mathbb{R}^k$ (avec $k > 0$ minimal), de telle manière que tous les éléments a de A opèrent sur M comme (id, a') , où a' est une translation de \mathbb{R}^k . Le groupe Γ stabilise M et préserve $\partial_\infty \mathbb{R}^k$.

En particulier Γ a une orbite finie dans $\partial_\infty X$.

Démonstration (Preuve de la proposition) Le premier point découle de [Ebe, Corollary 4.4.5]. Supposons maintenant que A n'a que des éléments semisimples. La première assertion du deuxième point découle de [BGS, Lemma 7.1]. Comme A contient au moins un élément non elliptique (car sinon A fixe M non vide donc est fini), alors $k \neq 0$. Comme A est distingué dans Γ , le groupe Γ stabilise M et préserve la décomposition $M = C \times \mathbb{R}^k$, donc préserve $\partial_\infty \mathbb{R}^k$ non vide. Or $\partial_\infty \mathbb{R}^k$ est inclus dans un appartement de $\partial_\infty X$. Le groupe Γ a donc une orbite finie dans $\partial_\infty X$. \square

6.2 Fermeture

On suppose ici que Γ vérifie l'hypothèse (H) et que G est un groupe de Lie réel linéaire.

Théorème 6.2 (Goldman-Millson) *L'espace R_{fd} des représentations fidèles et discrètes de Γ dans G est un fermé de l'espace R des représentations de Γ dans G .*

Démonstration Si R_{fd} est non vide, alors Γ est linéaire donc il contient un sous-groupe sans torsion Γ' d'indice fini, d'après le lemme de Selberg [Alp]. Alors Γ' n'a pas de sous-groupe abélien distingué non trivial (car il vérifie (H) et n'a pas de sous-groupe fini non trivial), donc, par Goldman-Millson [GoMi, Lemma 1.1], l'espace $R_{\text{fd}}(\Gamma', G)$ est fermé.

Soit $\rho_k \in \mathbf{R}_{\text{fd}}$, $k \in \mathbb{N}$ avec $\rho_k \rightarrow \rho$ dans \mathbf{R} . La restriction de ρ à Γ' est donc fd. Comme $\ker \rho \cap \Gamma' = \{e\}$, on a que $\ker \rho$ est fini. Or $1 \in G$ n'est pas limite d'éléments d'ordre inférieur à une constante donnée. La restriction de ρ_k à $\ker \rho$ tend vers la représentation triviale, donc est constante à partir d'un certain rang. Comme ρ_k est fidèle pour tout k , on en déduit que $\ker \rho$ est trivial, autrement dit que ρ est fidèle. De plus, on voit facilement qu'un sous-groupe de G contenant un sous-groupe discret d'indice fini est discret, donc ρ est discrète. \square

6.3 Compactification

On suppose ici que Γ vérifie l'hypothèse (H), et que G est un groupe réductif réel (voir section 2.2.2) agissant sur son espace symétrique associé X .

Comme \mathbf{R}_{fd} est un fermé de \mathbf{R} (Théorème 6.2), l'espace $\mathcal{X}_{\text{fd}} = p(\mathbf{R}_{\text{fd}}) = (\mathbf{R}_{\text{fd}} \cap \mathbf{R}_{\text{cr}})/G$ est un fermé de $\mathcal{X} = \mathbf{R}_{\text{cr}}/G$.

La compactification $\widetilde{\mathcal{X}}$ de \mathcal{X} construite précédemment (Théorème 5.2) induit donc une compactification (métrisable) $\widetilde{\mathcal{X}}_{\text{fd}}$ de \mathcal{X}_{fd} (qui s'obtient en prenant simplement l'adhérence de \mathcal{X}_{fd} dans $\widetilde{\mathcal{X}}$). Elle est munie d'une action naturelle de $\text{Out}(\Gamma)$ (car \mathcal{X}_{fd} est stable sous $\text{Out}(\Gamma)$, donc son adhérence aussi).

En rang 1, cela redonne (par construction) les compactifications connues, voir [FLP], [MoSh], [Bes], [Pau1].

Si x est dans $\partial_\infty \widetilde{\mathcal{X}}_{\text{fd}} \subset \mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$, alors $x = [v \circ \rho]$, où ρ est une action sans point fixe global de Γ sur un immeuble affine de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$, sans point fixe global. Dans ce cas, F. Paulin a démontré que cette action est à stabilisateurs de germes d'appartements virtuellement résolubles [Pau3].

Remarque En fait, on peut construire la compactification de \mathcal{X}_{fd} un peu plus directement, car $\mathbb{P}\mathcal{V}$ est définie sur \mathcal{X}_{fd} tout entier, et à valeurs dans un compact de $\mathbb{P}\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$. En effet, on peut montrer que si $\rho \in \mathbf{R}_{\text{fd}}$ alors $\ell \circ \rho \neq 0$ (on peut se ramener par semisimplification à ρ cr, et cela découle alors du théorème de Burnside, voir par exemple [Bass], [Ben]). On peut aussi montrer que la fonction λ reste supérieure à $\varepsilon > 0$ sur \mathbf{R}_{fd} . On montre alors de la même manière qu'en section 5.6 que $\frac{1}{\lambda}V(\mathbf{R}_{\text{fd}})$ est d'adhérence compacte, incluse dans $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma - \{0\}$.

Remerciements. Je remercie Frédéric Paulin pour son soutien, sa disponibilité constante et ses nombreuses suggestions et corrections.

Références

- [Alp] R. Alperin, *An elementary account of Selberg's lemma*, L'Ens. Math. **33** (1987), 269-373.
- [BGS] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder, *Manifolds of nonpositive curvature*, Progress in Mathematics **61**, Birkhäuser 1985.
- [Bass] H. Bass, *Groups of integral representation type*, Pac. J. Math. **86** (1980), 15-51.
- [Ben] Y. Benoist, *Propriétés asymptotiques des groupes linéaires*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), 1-47.
- [Ben2] Y. Benoist, *A survey on divisible convex sets*, Geometry, analysis and topology of discrete groups, Adv. Lect. Math. **6**, Int. Press, Somerville, MA (2008), 1-18.
- [Bes] M. Bestvina, *Degenerations of the hyperbolic space*, Duke Math. J. **56** (1988), 143-161.

- [Bor] A. Borel, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, 126. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Bou] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, Hermann, Paris, 1971.
- [Bre] R. J. Bremigan, *Quotients for algebraic group actions over non-algebraically closed fields*, J. Reine Angew. Math. **453** (1994), 21–47.
- [BrHa] M.R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces with non-positive curvature*, Grund. math. Wiss. **319**, Springer Verlag, 1999.
- [BrTi1] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local, I. Données radicielles valuées*, Publ. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 5-252.
- [BrTi2] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée.*, Pub. Math. I.H.E.S. **60** (1984), 197–376.
- [BrTi3] F. Bruhat, J. Tits, *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local*, Bull. Soc. Math. Fr. **112** (1984), 259-301.
- [Chi] I.M. Chiswell, *Non standard analysis and the Morgan-Shalen compactification*, Quart. J. Math. Oxford **42** (1991), 257-270.
- [ChGo] S. Choi, W. M. Goldman, *Convex real projective structures on closed surfaces are closed*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 657-661.
- [DaKi] F. Dal'Bo, I. Kim, *Marked length rigidity for symmetric spaces*. Comment. Math. Helv. **77** (2002), 399-407.
- [Ebe] P. Eberlein, *Geometry of non-positively curved manifolds*, Chicago L. N. in Math., The Univ. of Chicago Press, 1996.
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poénaru (eds), *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Séminaire Orsay, Astérisque **66-67**, Soc. Math. France (1979).
- [GoIw] O. Goldman, N. Iwahori, *The space of p -adic norms*, Acta Math. **109** (1963), 137-177.
- [GoMi] W. M. Goldman, J. J. Millson, *Local rigidity of discrete groups acting on complex hyperbolic space*, Invent. Math. **88** (1987) 495-520.
- [Gro1] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Cambridge Univ. Press, 1991.
- [Gro2] M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, édité par J. Lafontaine et P. Pansu, Cedric, Fernand Nathan, 1981.
- [Hel] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.
- [Hit] N. J. Hitchin, *Lie groups and Teichmüller space*, Topology **31** (1992), 449-473.
- [JoMi] D. Johnson, J. J. Millson, *Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds*, Discrete groups in geometry and analysis (New Haven, Conn., 1984), Progr. Math. **67**, Birkhäuser, 1987, 48-106.
- [KaLe] M. Kapovich, B. Leeb, *On asymptotic cones and quasi-isometry classes of fundamental groups of 3-manifolds*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), 582-603.
- [KLe] B. Kleiner, B. Leeb, *Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces of higher rank*, Publ. Math. I.H.E.S. **86** (1997), 115-197.
- [Lab] F. Labourie, *Anosov flows, surface groups and curves in projective space*, Invent. Math. **165** (2006), 51-114.
- [Lan] E. Landvogt, *Some functorial properties of the Bruhat-Tits building.*, J. Reine Angew. Math. **518** (2000), 213-241.
- [LMR] A. Lubotzky, S. Mozes, M.S. Raghunathan, *The word and Riemannian metrics on lattices of semisimple Lie groups*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 91, (2000), 5-53.
- [Luna] D. Luna, *Sur certaines opérations différentiables des groupes de Lie*, Amer. J. Math. **97** (1975), 172–181.
- [Mar] G. Margulis, *Discrete subgroups of semi-simple groups*, Ergeb. Math. Grenz. **17**, Springer Verlag, 1991.
- [Mor] J. Morgan, *Group actions on trees and the compactification of the space of classes of $SO(n,1)$ -representations*, Topology **25**, (1986) 1-33.
- [MoSh] J. Morgan, P. Shalen, *Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures I, II, III*, Ann. Math. **122** (1985), 398-476, et **127** (1988), 403-519.
- [Mos] G.D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces* Ann. Math. Studies **78**, Princeton Univ. Press, 1973.
- [Par1] A. Parreau, *Dégénérescences de sous-groupes discrets de groupes de Lie semisimples et actions de groupes sur des immeubles affines*, thèse de doctorat, Univ. Orsay, 2000.
- [Par2] A. Parreau, *Immeubles affines : construction par les normes et étude des isométries*, Crystallographic groups and their generalizations (Kortrijk, 1999), 263-302, Contemp. Math., 262, Amer. Math. Soc., 2000.

-
- [Par3] A. Parreau, *Sous-groupes elliptiques de groupes linéaires sur un corps valué*, J. Lie Theory **13** (2003), 271–278.
- [Par4] A. Parreau, *La distance vectorielle dans les espaces symétriques et les immeubles affines*, en préparation.
- [Par5] *Espaces de représentations complètement réductibles*, J. London Math. Soc. (2011) doi : 10.1112/jlms/jdq076.
- [Pau1] F. Paulin, *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*, Invent. Math. **94** (1988), 53-80.
- [Pau2] F. Paulin, *De la géométrie et la dynamique des groupes discrets*, Mémoire d’habilitation, ENS Lyon (Juin 1995).
- [Pau3] F. Paulin, *Dégénérescence de sous-groupes discrets des groupes de Lie semi-simples*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 324 (1997), no. 11, 1217-1220.
- [Ric] R. W. Richardson, *Conjugacy classes of n -tuples in Lie algebras and algebraic groups*, Duke Math. J. **57** (1988) 1-35.
- [RiS1] R. W. Richardson, P. J. Slodowy, *Minimum vectors for real reductive algebraic groups*, J. London Math. Soc. **42** (1990), 409–429.
- [Rou] G. Rousseau, *Euclidean buildings*, Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités (A. Parreau L. Bessières and B. Rémy, eds.), Séminaires et Congrès **18**, Société mathématique de France, 2008.
- [Serre] J.-P. Serre, *Complète Reductibilité*, Séminaire Bourbaki 2003-2004, Astérisque **299**, Exp. No. 932, 195-217.
- [Tit] J. Tits, *Immeubles de type affine*, dans “Buildings and the geometry of diagrams”, Proc. CIME Como 1984, L. Rosati ed., Lect. Notes **1181**, Springer Verlag (1986), 159-190.
- [Tit2] J. Tits, *Reductive groups over local fields*, Proc. Sympos. Pure Math. of the Amer. Math. Soc. **33** (1977), 29–69.