Sur la moyennisation dans les systèmes à plusieurs fréquences

Mustapha Lakrib

SUR LA MOYENNISATION DANS LES SYSTEMES A PLUSIEURS FREQUENCES

Mustapha Lakrib

Laboratoire de Mathématiques
Université Djillali Liabès
B.P. 89, Sidi Bel Abbès 22000, Algérie
Courriel : m.lakrib@univ-sba.dz

Résumé

Le comportement des solutions d'un système de la forme $\dot{x} = \varepsilon X(x, \phi)$, $\dot{\phi} = \Omega(x) + \mathcal{O}(\varepsilon)$, peut être étudié au moyen de la méthode de moyennisation. Cela consiste à remplacer X par $\overline{X}$, sa moyenne spatiale, et considerer plutôt le système $\dot{y} = \varepsilon\overline{X}(y)$. Pour la plupart des conditions initiales, l'écart entre x et y reste petit. Pour les autres, la résonance entre $\Omega_1(x), \dots, \Omega_m(x)$ est significative et $x - y$ peut devenir important. Plutôt que d'introduire un changement de variables proche de l'identité (approche classique), nous exploitons, à travers l'étude locale de la variable lente, la proximité des moyennes temporelle et spatiale de X pour montrer que $x - y$ reste petit tant que x évolue dans le domaine $\sqrt{\varepsilon}$-non résonant. La terminologie dans la formulation et les preuves des résultats est celle de l'Analyse Non Standard.

Abstract

The behaviour of solutions of differential equations of the form $\dot{x} = \varepsilon X(x, \phi)$, $\dot{\phi} = \Omega(x) + \mathcal{O}(\varepsilon)$, may be studied using the method of averaging. This consists in replacing X by $\overline{X}$, its spatial average, and considering instead the equation $\dot{y} = \varepsilon\overline{X}(y)$. For most initial conditions $x - y$ remains small, but for others, resonance between $\Omega_1(x), \dots, \Omega_m(x)$ is significant and $x - y$ can become large. Rather than to consider a near identity change of variables (which is the classical approach), we exploit through the local study of the slow variable, the proximity of the temporal and spatial averages of X. We show then that $x - y$ remains small as long as x evolves into the $\sqrt{\varepsilon}$-nonresonant domain. The results are formulated and proved within Nonstandard Analysis.

2000 Mathematics Subject Classification. 34C29, 34E10, 03H05.
Key words. Regular perturbations, averaging, resonance, nonstandard analysis.

1 Introduction

Dans ce travail, nous considérons un système d'équations différentielles ordinaires de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, \phi) \\ \dot{\phi} = \Omega(x) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\dot{(\cdot)} = d/d\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\phi \in \mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m/2\pi\mathbb{Z}^m$ le tore de dimension m, et $\varepsilon > 0$ un petit paramètre réel. La régularité du second membre de (1.1) sera précisée plus loin. Le système (1.1) est composé d'une variable lente à n composantes $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et d'une variable rapide à m composantes $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)$. La méthode de moyennisation consiste à remplacer ce système par celui (plus simple) obtenu en moyennisant la fonction X par rapport aux variables de phase, c.-à.d. le système

$$\dot{y} = \varepsilon \overline{X}(y) \tag{1.2}$$

où la fonction moyenne $\overline{X}$ est définie par

$$\overline{X}(y) = \frac{\int_{\mathbb{T}^m} X(y, \phi) d\phi}{\int_{\mathbb{T}^m} d\phi} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} X(y, \phi) d\phi_1 \cdots d\phi_m.$$

Pourvu que les trajectoires du système (1.1) soient uniformement réparties sur la surface du tore $\mathbb{T}^m$, il est raisonnable de remplacer X par sa moyenne sur $\mathbb{T}^m$ et espérer approximer les composantes lentes des solutions du système (1.1) par les solutions du système (1.2). Cependant, si les fréquences sont résonantes, c'est-à-dire $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ sont rationnellement dépendantes, la répartition du mouvement n'est plus uniforme (le mouvement non perturbé est partout dense dans un tore de dimension inférieure) et le mouvement moyennisé n'est plus nécessairement proche du mouvement réel. Pour les systèmes génériques, les fréquences sont non résonantes pour presque toutes les valeurs de x. Il est donc raisonnable d'espérer que, pour la plupart des conditions initiales, le système moyennisé (1.2) décrit correctement l'évolution de la variable lente du système (1.1). Pour $m = 2$, Arnold [2] et Neishtadt [11] montrent que c'est effectivement le cas, le premier en supposant que la variation du rapport des fréquences le long des trajectoires du système (1.1) est strictement monotone ; le second impose une condition qui force les trajectoires du système moyennisé à ne visiter les résonances qu'au plus une fois, de manière transversale et à vitesse finie. Des résultats généraux ($m \geq 3$) sont établis par Anosov [1] et Kasuga [9] sous l'hypothèse d'indépendance des fréquences au sens que le rang de la dérivée des fréquences, par rapport à la variable lente x, soit égale au nombre des composantes de la variable rapide ϕ. Une estimation de la mesure de l'ensemble des conditions initiales qui doivent être exclues dans ce cas (mais aussi dans le cas où $m = 2$) a été obtenue par Neishtadt [12] (voir [11] pour $m = 2$).

Le principe de démonstration des résultats de moyennisation (voir [3, 4, 10]) consiste à introduire une nouvelle variable lente $z = x + \varepsilon u(x, \phi)$, proche de la variable d'origine, dont l'évolution est décrite par un système proche du système moyennisé

$$\frac{dz}{d\tau} = \varepsilon \overline{X}(z) + \text{ termes d'ordre plus élevé en } \varepsilon.$$

Le résultat recherché suivra alors de l'approximation de x par z d'une part et de celle de z par y d'autre part, sur un intervalle de temps d'ordre $1/\varepsilon$.

Il est à noter que la fonction u doit satisfaire l'équation

$$\Omega(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial \phi} = -\tilde{X}(x, \phi) \tag{1.3}$$

où $\tilde{X}$ désigne la partie oscillante de X. Si u_k et X_k, $k \in \mathbb{Z}^m$, sont les coefficients de Fourier de u et X, respectivement, l'équation (1.3) s'écrit aussi :

$$i(k, \Omega(x))u_k(x) = -X_k(x), \quad k \in \mathbb{Z}^m.$$

Dans ces équations apparaissent les petits dénominateurs $(k, \Omega(x))$ dont il faut tenir compte. D'où :

i) Comme la décroissance des coefficients de Fourier de X (X étant supposée suffisamment régulière) est rapide, il est raisonable de tronquer les séries de Fourier à l'ordre $N = N(\varepsilon)$ et remplacer dans l'équation (1.3) la fonction $\tilde{X}$ par $\tilde{X}_N$, la somme partielle d'ordre N de la série de Fourier $\tilde{X}$, ne tenant ainsi pas compte des résonances qui peuvent se produire entre des harmoniques d'ordres très élevés.

ii) On considère l'équation ainsi obtenue sur le domaine non résonant, c'est-à-dire l'ensemble des x tels que les dénominateurs $(k, \Omega(x))$ ne soient pas trop petits, puis on examine séparément les traversées de zones résonantes. Pour la plupart des conditions initiales, les zones résonantes sont traversées assez rapidement de sorte que $x(\tau)$ et $y(\tau)$ restent proches. Les trajectoires capturées par les résonances ou errant le long des surfaces résonantes, en passant de l'une à l'autre, correspondent aux autres conditions initiales qui forment l'ensemble de mesure petite pour lequel la méthode de moyennisation est mise en défaut.

Dans l'étude ci-après, moyennant les méthodes non standard [6, 7, 8, 13], nous nous proposons d'apporter une justification autre que celle décrite plus haut (considerée comme classique) de la méthode de moyennisation, en dehors des zones de résonance.

Le travail est organisé de la manière suivante : à la section 2 on rappelle les notions de moyennes temporelle et spatiale, puis on donne une condition nécessaire et suffisante pour que celles-ci soient infiniment proches pour les fonctions qui nous intéressent. A la section 3, on définit la notion de domaine $\sqrt{\varepsilon}$-non résonant sur lequel on montre l'approximation de la composante lente de la solution du système (1.1) par la solution du système moyennisé (1.2). L'approche n'est plus basée sur un changement de variables proche de l'identité. A travers l'étude locale de la variable lente, la démonstration, basée sur la méthode de stroboscopie [5, 14, 15], exploite le fait que dans un tel domaine, les moyennes temporelles le long du flot associé au système non perturbé ($\varepsilon = 0$) et les moyennes spatiales sont infiniment proches.

2 Moyennes temporelle et spatiale

Soit $\Omega = (\Omega_1, ..., \Omega_m) \in \mathbb{R}^m$, Ω fixé, et soit le système d'équations différentielles ordinaires défini sur le tore $\mathbb{T}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$, par

$$\dot{\phi} = \Omega. \tag{2.1}$$

Au système (2.1) est associé le flot $\{h^\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ défini par $h^\tau(\phi) = \phi + \Omega.\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathbb{T}^m$.

Soit $X : \mathbb{T}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction intégrable.

Définition 2.1. *On appelle moyenne temporelle de la fonction X le long du flot $\{h^\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}}$, la fonction X^* définie par :*

$$\forall \phi \in \mathbb{T}^m, \quad X^*(\phi) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(h^\tau(\phi))d\tau = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(\phi + \Omega.\tau)d\tau.$$

Abus de language : Sans risque de confusion, nous conviendrons d'appeler moyenne temporelle de la fonction X la quantité

$$X^*(\phi, T) = \frac{1}{T}\int_0^T X(h^\tau(\phi))d\tau = \frac{1}{T}\int_0^T X(\phi + \Omega.\tau)d\tau, \quad \phi \in \mathbb{T}^m,\ T \in \mathbb{R}_+^*.$$

Définition 2.2. *On appelle moyenne spatiale de la fonction X sur le tore $\mathbb{T}^m$, le vecteur scalaire $\overline{X}$ défini par*

$$\overline{X} = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{T}^m} X(\phi)d\phi.$$

Si on suppose que la fonction X admet un developpement en série de Fourier, elle peut s'écrire sous la forme : $X(\phi) = \overline{X} + \tilde{X}(\phi)$, $\phi \in \mathbb{T}^m$, où $\overline{X}$ est la moyenne spatiale de X et $\tilde{X}$ sa partie oscillante. Nous avons

$$\tilde{X}(\phi) = \sum_{k\neq 0} X_k e^{i(k,\phi)} \tag{2.2}$$

où $k \in \mathbb{Z}^m$ et les X_k sont les coefficients de Fourier de X.

Nous allons dans un premier temps examiner l'approximation des moyennes temporelle et spatiale des éléments de la base $\{e^{i(k,\phi)}\}_{k\in\mathbb{Z}^m}$ (le long du flot $\{h^\tau\}_\tau$), puis moyennant (2.2) nous traiterons le cas de la fonction X.

Le résultat du lemme qui suit est une caractérisation de l'approximation (au sens d'infiniment proche) des moyennes temporelle et spatiale des monômes trigonométriques homogènes $e^{i(k,\phi)}$, $k \in \mathbb{Z}^m$, $k \neq 0$.

Lemme 2.1. *Soit $p(\phi) = e^{i(k,\phi)}$, $k \in \mathbb{Z}^m$, $k \neq 0$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

P_1 : $\forall^{\lim} l \in \mathbb{R} :\ |(k, \Omega)| \geq l\sqrt{\varepsilon}$

P_2 : $\exists T_0 \in \mathbb{R}, T_0 \simeq +\infty, \sqrt{\varepsilon}T_0 \simeq 0 : \forall T \in \mathbb{R}, \forall \phi \in \mathbb{T}^m\ (T \geq T_0 \implies p^*(\phi, T) \simeq 0 (= \overline{p}))$

Démonstration.

(i) *Condition nécessaire.* Le vecteur $k = (k_1, \dots, k_j, \dots k_m)$ étant non nul, il existe au moins un indice j tel que $k_j \neq 0$. Comme

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k_1\phi_1+\cdots+k_j\phi_j+\cdots+k_m\phi_m)}d\phi_j = \left.\frac{e^{i(k_1\phi_1+\cdots+k_j\phi_j+\cdots+k_m\phi_m)}}{ik_j}\right|_0^{2\pi} = 0,$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\overline{p} &= \frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} e^{i(k_1\phi_1+\cdots+k_j\phi_j+\cdots+k_m\phi_m)}d\phi_1\cdots d\phi_j\cdots d\phi_m \\
&= \frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} \left.\frac{e^{i(k_1\phi_1+\cdots+k_j\phi_j+\cdots+k_m\phi_m)}}{ik_j}\right|_0^{2\pi} d\phi_1\cdots\widehat{d\phi_j}\cdots d\phi_m \\
&= \frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} 0.d\phi_1\cdots\widehat{d\phi_j}\cdots d\phi_m = 0.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour $\phi \in \mathbb{T}^m$ et $T \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
p^*(\phi, T) &= \frac{1}{T}\int_0^T p(\phi+\Omega.\tau)d\tau = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(k,\phi+\Omega.\tau)}d\tau \\
&= \frac{e^{i(k,\phi)}}{Ti(k,\Omega)}\left[e^{i(k,\Omega)\tau}\right]_0^T = \frac{e^{i(k,\phi)}}{Ti(k,\Omega)}\left[e^{i(k,\Omega)T}-1\right].
\end{aligned} \tag{2.3}$$

D'où $|p^*(\phi, T)| \leq \dfrac{2}{T|(k,\Omega)|}$. Or, par hypothèse, nous avons : $\forall^{\lim}\ l \in \mathbb{R} :\ |(k,\Omega)| \geq l\sqrt{\varepsilon}$. Par permanence (principe de Cauchy [6, 7, 13]) cette propriété reste vraie jusqu'à un certain $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \simeq +\infty$ et $\sqrt{\varepsilon}\nu \simeq 0$. Ainsi

$$\exists \nu \in \mathbb{R}, \nu \simeq +\infty, \sqrt{\varepsilon}\nu \simeq 0 : |(k,\Omega)| \geq \nu\sqrt{\varepsilon}.$$

Posons $T_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\nu}}$. Alors, $T_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\nu}}\sqrt{\nu} \simeq +\infty$, $\sqrt{\varepsilon}T_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\nu}} \simeq 0$, et pour $T \geq T_0$, nous avons

$$|p^*(\phi,T)| \leq \frac{2}{T|(k,\Omega)|} \leq \frac{2}{T_0|(k,\Omega)|} \leq \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\nu}}\sqrt{\varepsilon}\nu} = \frac{2}{\sqrt{\nu}} \simeq 0,$$

ce qui termine la preuve de la nécessité de P_2 pour P_1.

(ii) *Condition suffisante.* Nous allons montrer que la contraposée correspondante est vraie. On suppose donc l'existence d'un réel limité l tel que $|(k,\Omega)| \leq l\sqrt{\varepsilon}$. On peut même supposer que $|(k,\Omega)| = l\sqrt{\varepsilon}$, et pour simplifier nous allons supposer de plus que $(k,\Omega) \geq 0$. Soit $T_0 \in \mathbb{R}$ tel que $T_0 \simeq +\infty$ et $\sqrt{\varepsilon}T_0 \simeq 0$. Deux cas sont possibles :

1. $l = 0$. — Pour $T \geq T_0$ et $\phi \in \mathbb{T}^m$, nous avons

$$p^*(\phi,T) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(k,\phi+\Omega.\tau)}d\tau = \frac{e^{i(k,\phi)}}{T}\int_0^T e^{i(k,\Omega)\tau}d\tau = e^{i(k,\phi)},$$

car $e^{i(k,\Omega)\tau} = e^0 = 1$, pour tout $\tau \in [0,T]$. En particulier, pour $T = T_0$ et $\phi = 0$, nous obtenons $p^*(0,T_0) = 1 \not\simeq 0 (= \overline{p})$, qui est le résultat escompté.

2. $l \neq 0$. — Pour $T \geq T_0$ et $\phi \in \mathbb{T}^m$, nous avons

$$p^*(\phi, T) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(k,\phi+\Omega.\tau)}d\tau = e^{i(k,\phi)}\frac{1}{T}\int_0^T e^{i(k,\Omega)\tau}d\tau = e^{i(k,\phi)}\frac{e^{i(k,\Omega)T}-1}{i(k,\Omega)T}.$$

Comme l est limité et $\sqrt{\varepsilon}T_0 \simeq 0$, alors $(k,\Omega)T_0 = l\sqrt{\varepsilon}T_0 \simeq 0$ et $\dfrac{e^{i(k,\Omega)T_0}-1}{i(k,\Omega)T_0} \simeq 1$. D'où $p^*(\phi, T_0) \simeq e^{i(k,\phi)}$. Il suffit alors de prendre $\phi = 0$ pour avoir $p^*(0, T_0) \simeq e^{i(k,0)} = 1 \not\simeq 0 (= \overline{p})$. Ceci termine la preuve du lemme 2.1.

□

Remarque 2.1. *Le lemme 2.1 apporte une estimation du temps requis pour que les moyennes temporelle et spatiale de* $e^{i(k,\phi)}$ *(le long du flot* $\{h^\tau\}_\tau$*) soient proches à* χ *près, puisque de (2.3) on obtient*

$$|p^*(\phi, T)| \leq \frac{2}{T|(k,\Omega)|},$$

ce qui donne

$$T_0 = \frac{2}{\chi|(k,\Omega)|}.$$

Ce temps est inversement proportionnel à la distance $|(k,\Omega)|$ *de la résonance de numéro* k*. D'où, si on entoure la résonance par une zone résonante de "largeur"* δ *définie par* $|(k,\Omega)| \leq \delta$*, en dehors de cette zone les moyennes temporelle et spatiale de la fonction* $e^{i(k,\phi)}$ *deviennent proches à* χ *près après un temps* $T_0 = 2/\delta\chi$*. (Dans notre cas* $\delta = \sqrt{\varepsilon}\nu$*,* $\chi = 2/\sqrt{\nu}$ *et* $T_0 = 1/\sqrt{\varepsilon\nu}$*).*

Reprenons la fonction $X : \mathbb{T}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Pour chaque $\phi \in \mathbb{T}^m$, $X(\phi) = \overline{X} + \tilde{X}(\phi)$ où $\overline{X}$ est la moyenne spatiale de X et $\tilde{X}$ est sa partie oscillante. Moyennant le résultat du lemme 2.1, nous nous proposons dans ce qui suit de montrer que, pour $\phi \in \mathbb{T}^m$ et $T \geq T_0$, où T_0 est un réel à déterminer, nous avons

$$\tilde{X}^*(\phi, T) = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{X}(\phi + \Omega.\tau)d\tau \simeq 0;$$

ce qui a pour conséquence

$$X^*(\phi, T) = \overline{X} + \tilde{X}^*(\phi, T) \simeq \overline{X},$$

c.-à.d. les moyennes temporelle et spatiale de X sont infiniment proches.

Pour se faire, décomposons $\tilde{X}$ de sorte que $\tilde{X}(\phi) = \tilde{X}_N(\phi) + R_N(\phi)$ où

$$\tilde{X}_N(\phi) = \sum_{1\leq|k|\leq N} X_k e^{i(k,\phi)} \quad \text{et} \quad R_N(\phi) = \sum_{|k|>N} X_k e^{i(k,\phi)}.$$

Ici $k \in \mathbb{Z}^m$, X_k sont les coefficients de Fourier de X et N est un entier positif que l'on déterminera. On choisit en fait N de sorte que R_N (et delà R_N^*) soit petit, puis on montre que $\tilde{X}_N^*$ est petit aussi, et donc $\tilde{X}^*$ sera de même.

Soient $\phi \in \mathbb{T}^m$ et $T \in \mathbb{R}$. Nous avons,

$$\begin{aligned} \tilde{X}_N^*(\phi, T) &= \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{X}_N(\phi + \Omega.\tau)d\tau = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{1\le|k|\le N} X_k e^{i(k,\phi+\Omega.\tau)}d\tau \\ &= \sum_{1\le|k|\le N} X_k \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(k,\phi+\Omega.\tau)}d\tau. \end{aligned}$$

Si on suppose que X est analytique, les X_k sont alors à décroissance exponentielle de sorte que

$$\|X_k\| \le c_1 exp(-c_2|k|).$$

Supposons par ailleurs que l'hypothèse suivante soit réalisée

$$\forall^{\lim} l \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}^m, k \neq 0 : \ |(k,\Omega)| \ge l\sqrt{\varepsilon}.$$

Le principe de Cauchy (voir [6, 7, 13]) permet alors d'affirmer l'existence de $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \simeq +\infty$ et $\sqrt{\varepsilon}\nu \simeq 0$ tel qu'on ait

$$\forall k \in \mathbb{Z}^m, k \neq 0 : \ |(k,\Omega)| \ge \nu\sqrt{\varepsilon}.$$

Alors, pour $T \ge T_0 = 1/\sqrt{\varepsilon\nu}$, nous avons (voir i) de la preuve du lemme 2.1)

$$\|\tilde{X}_N^*(\phi,T)\| \le 2\sum_{1\le|k|\le N} \frac{\|X_k\|}{T|(k,\Omega)|} \le 2\sum_{1\le|k|\le N} \frac{c_1 e^{-c_2|k|}}{\sqrt{\nu}} \le 2c_1 \sum_{1\le|k|\le N} \frac{1}{\sqrt{\nu}}.$$

Comme le nombre de $k \in \mathbb{Z}^m$ tel que $|k| \le N$ n'excède pas $2^m N^m$, alors

$$\|\tilde{X}_N^*(\phi,T)\| \le 2^{m+1} c_1 \frac{N^m}{\sqrt{\nu}}.$$

De l'analycité de X, on déduit que pour $\mu \in]0, 1/2[$, la norme de R_N est majorée par μ pourvu que $N \ge N(\mu) = [c\log(1/\mu)]$ (voir [10], Appendice 1). Donc, pour $\mu = 1/\sqrt{\nu}$ et $N = [c\log\sqrt{\nu}]$, nous avons

$$\|\tilde{X}_N^*(\phi,T)\| \le 2^{m+1}\frac{(c\log\sqrt{\nu})^m}{\sqrt{\nu}} \simeq 0.$$

Delà

$$\|\tilde{X}^*(\phi,T)\| \le \|\tilde{X}_N^*(\phi,T)\| + \|R_N^*(\phi,T)\| \le 2^{m+1}\frac{(c\log\sqrt{\nu})^m}{\sqrt{\nu}} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \simeq 0,$$

puisque

$$\|R_N^*(\phi,T)\| \le \frac{1}{T}\int_0^T \|R_N(\phi+\Omega.\tau))\|d\tau \le \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{\sqrt{\nu}}d\tau = \frac{1}{\sqrt{\nu}}.$$

A ce stade du raisonnement, en utilisant la linéarité de l'intégration, une argumentation analogue à celle du ii) de la preuve du lemme 2.1 permet de déduire le résultat suivant :

Lemme 2.2. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

P_1 : $\forall^{\lim} l \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z}^m, k \neq 0 :\ |(k, \Omega)| \geq l\sqrt{\varepsilon}$

P_2 : $\exists T_0 \in \mathbb{R}, T_0 \simeq +\infty, \sqrt{\varepsilon}T_0 \simeq 0 : \forall T \in \mathbb{R}, \forall \phi \in \mathbb{T}^m\ (T \geq T_0 \implies X^*(\phi, T) \simeq \overline{X})$

Remarque 2.2. *C'est dans un souci de simplification (des calculs) que nous avons supposé X analytique. Ce qui précède reste vrai pour X de classe $\mathcal{C}^{2m+1}$ puisque dans ce cas aussi la suite des coefficients de Fourier de X est décroissante (bien que la décroissance ne soit pas exponentielle) de sorte que pour $\mu > 0$, la norme de R_N soit majorée par μ dès lors que $N = N(\mu) = [1/\mu^{2m}]$ (voir [10], Appendice 1).*

3 Moyennisation et $\sqrt{\varepsilon}$-non résonance

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{dx}{d\tau} & = & \varepsilon X(x, \phi) \\ \dfrac{d\phi}{d\tau} & = & \Omega(x) + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{array}\right. \tag{3.1}$$

où $x \in K$ un compact standard de $\mathbb{R}^n$ et $\phi \in \mathbb{T}^m$. On suppose que

i) Les fonctions X et Ω sont standard de classe $\mathcal{C}^1$.

ii) La fonction X est analytique en ϕ.

Remarque 3.1. *L'hypothèse ii) peut être affaiblie en supposant X de classe C^{2m+1} (voir remarque 2.2).*

Puisque nous nous intéressons au comportement des solutions du système (3.1) et du système moyennisé qui lui est associé pour des intervalles du temps τ d'ordre $1/\varepsilon$, il est plus commode d'introduire un changement dans l'échelle du temps en posant $t = \varepsilon\tau$ (temps lent). Ainsi, par rapport au nouveau temps, le système (3.1) s'écrit (en gardant la même notation pour le système obtenu)

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{dx}{dt} & = & X(x, \phi) \\ \dfrac{d\phi}{dt} & = & \dfrac{\Omega(x)}{\varepsilon} + \mathcal{O}(1). \end{array}\right. \tag{3.2}$$

Soit $(x(t), \phi(t))$ sa solution de condition initiale $(x(0), \phi(0))$.

Soit, à présent, $\overline{X}$ la moyenne sur une période (par rapport à la variable angulaire ϕ) de X, définie par

$$\forall y \in K, \quad \overline{X}(y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} X(y, \phi) d\phi.$$

Notons par $y(t)$ la solution, issue de y(0), du système moyennisé

$$\frac{dy}{dt} = \overline{X}(y). \tag{3.3}$$

La solution $y(t)$ est définie au moins pour tout t limité dans $\mathbb{R}$. Soit $L > 0$ et limité dans $\mathbb{R}$ tel que $y([0, L])$ soit non infiniment proche de la frontière de K.

3.1 Domaine $\sqrt{\varepsilon}$-non résonant

Définition 3.1. *On appelle domaine $\sqrt{\varepsilon}$-non résonant l'ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ défini par*

$$\mathcal{D} = \{x \in K \ / \ \forall^{\lim} l \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{Z}^m, k \neq 0 : \ |(k, \Omega(x))| \geq l\sqrt{\varepsilon}\}.$$

Proposition 3.1. *Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors*

$$x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists T_0 \in \mathbb{R}, T_0 \simeq +\infty, \sqrt{\varepsilon} T_0 \simeq 0 : \forall T \in \mathbb{R}, \forall \phi \in \mathbb{T}^m, \\ \\ \qquad T \geq T_0 \implies X^*(x; \phi, T) \simeq \overline{X}(x) \end{cases}$$

où

$$X^*(x; \phi, T) = \frac{1}{T} \int_0^T X(x, \phi + \Omega(x).\tau) d\tau.$$

Démonstration. Cette proposition est une conséquence du lemme 2.2. □

3.2 Résultat principal

Le théorème qui va suivre permet l'approximation (au sens d'infiniment proche) de la composante lente $x(t)$ de la solution $(x(t), \phi(t))$ de (3.2) par la solution $y(t)$ de (3.3) tant que l'évolution de $x(t)$ se fait dans le domaine $\sqrt{\varepsilon}$-non résonant.

Théorème 3.1. *En plus des hypothèses i) et ii), on suppose que les conditions initiales de $x(t)$ et $y(t)$ sont standard, avec $x(0) = y(0) \in \mathcal{D}$. Alors*

$$\forall t \in [0, L], \quad x(t) \simeq y(t), \quad \textit{tant que } x(t) \textit{ reste dans } \mathcal{D}.$$

Remarque 3.2. *Afin de démontrer le résultat du théorème 3.1, nous allons utiliser la méthode de stroboscopie [7, 14, 15]. Le principe de cette dernière est de "regarder" une fonction non standard, oscillant autour d'une valeur moyenne, en des instants infiniment proches, à des endroits privilégiés pour ne retenir que la variation moyenne de cette fonction.*

3.2.1 Méthode de stroboscopie [7, 14, 15]

Soit K un compact standard de $\mathbb{R}^n$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\overline{X} : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction standard continue et $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction telle que $0 \in I$ et $x(0)$ est standard. On suppose que

i) Il existe $\mu > 0$ tel qu'à chaque fois que $(t_0, x(t_0)) \in I \times \mathbb{R}^n$ est limité, il existe $t'_0 \in \mathbb{R}$ avec $t'_0 - t_0 > \mu$, tel que la fonction x vérifie la propriété stroboscopique

$$t'_0 \simeq t_0, \quad x(s) \simeq x(t_0) \ \forall s \in [t_0, t'_0] \text{ et } \frac{x(t'_0) - x(t_0)}{t'_0 - t_0} \simeq \overline{X}(x(t_0)).$$

Les temps t_0 et t'_0 s'appellent instants successifs d'observation de la stroboscopie.

ii) Le problème à valeur initiale

$$\frac{dy}{dt} = \overline{X}(y), \qquad y(0) = x(0)$$

possède une solution unique. Soit $y(t)$ cette solution.

Théorème 3.2 (Lemme de stroboscopie ([7] p.148, [14] p.11, [15] p.97)). *On suppose que les hypothèses i) et ii) sont réalisées. Soit $J = [0, \omega)$, $0 < \omega \leq +\infty$, le demi-intervalle positif maximal d'existence de y, et soit L un réel positif et limité, $L < \omega$, tel que $y([0, L])$ soit non infiniment proche de la frontière de K. Alors, la fonction $x(t)$ est définie au moins sur l'intervalle $[0, L]$ et vérifie $x(t) \simeq y(t)$, pour tout $t \in [0, L]$.*

3.2.2 Démonstration du théorème 3.1

Nous allons montrer que la composante $x(t)$ de la solution $(x(t), \phi(t))$ du système (3.2) vérifie les hypothèses du théorème 3.2. Ainsi, nous supposons connu un instant d'observation de la méthode de stroboscopie. Soit t_0 cet instant. Nous allons déterminer l'instant suivant d'observation t'_0. Posons $x_0 = x(t_0)$ et $\phi_0 = \phi(t_0)$. De l'hypothèse $x_0 \in \mathcal{D}$, nous avons

$$\begin{cases} \exists T_0 \in \mathbb{R}, T_0 \simeq +\infty, \sqrt{\varepsilon} T_0 \simeq 0 : \forall T \in \mathbb{R}, \forall \phi \in \mathbb{T}^m, \\ \qquad T \geq T_0 \implies X^*(x_0; \phi, T) \simeq \overline{X}(x_0). \end{cases} \tag{3.4}$$

Sous le changement de variables

$$T = \frac{t - t_0}{\varepsilon} \ ; \ \mathbf{y}(T) = \frac{x(t_0 + \varepsilon T) - x_0}{\varepsilon} \ ; \ avec\ \varphi(T) = \phi(t_0 + \varepsilon T) - \phi_0$$

le système (3.2) devient

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dT} = X(x_0 + \varepsilon \mathbf{y}(T), \phi_0 + \varphi(T)) \quad ; \quad \mathbf{y}(0) = 0 \\ \dfrac{d\varphi}{dT} = \Omega(x_0 + \varepsilon \mathbf{y}(T)) + \varepsilon \mathcal{O}(1) \quad ; \quad \varphi(0) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Considérons le système déduit de (3.5) pour $\varepsilon = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{\mathbf{y}}}{dT} = X(x_0, \phi_0 + \overline{\varphi}(T)) \quad ; \quad \overline{\mathbf{y}}(0) = 0 \\ \dfrac{d\overline{\varphi}}{dT} = \Omega(x_0) \quad ; \quad \overline{\varphi}(0) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

On vérifie alors que :

Lemme 3.1. *Si* $(\mathbf{y}(T), \varphi(T))$ *et* $(\overline{\mathbf{y}}(T), \overline{\varphi}(T))$ *sont les solutions respectives de* (3.5) *et* (3.6), *alors, pour tout* $T \in \mathbb{R}$, $0 < T \leq T_0$, *où* T_0 *est défini par* (3.4), *nous avons*

$$\begin{cases} \varphi(T) & \simeq & \overline{\varphi}(T) & = & \Omega(x_0).T \\ \dfrac{\mathbf{y}(T)}{T} & \simeq & \dfrac{\overline{\mathbf{y}}(T)}{T} & = & \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T X(x_0, \phi_0 + \Omega(x_0).\tau)d\tau. \end{cases} \tag{3.7}$$

La seconde approximation de (3.7) permet alors de définir le second instant d'observation de la stroboscopie. En effet, il suffit de poser $t_0' = t_0 + \varepsilon.T_0$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \frac{x(t_0') - x(t_0)}{t_0' - t_0} &= \frac{\varepsilon.\mathbf{y}(T_0)}{\varepsilon.T_0} = \frac{\mathbf{y}(T_0)}{T_0} \simeq \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} X(x_0, \phi_0 + \Omega(x_0).\tau)d\tau \\ &= X^*(x_0; \phi_0, T_0) \simeq \overline{X}(x_0). \end{aligned}$$

Puisque $t_0' - t_0 = \varepsilon T_0 > \varepsilon$ et que $x(t) - x(t_0) = \varepsilon\mathbf{y}(T) \simeq 0$ pour tout $t \in [t_0, t_0']$, nous avons ainsi montré l'existence d'un $\mu > 0$ ($\mu = \varepsilon$) tel qu'à chaque fois que $(t_0, x(t_0))$ est limité, il existe $t_0' \in \mathbb{R}$ avec $t_0' - t_0 > \mu$, tel que la composante lente x de la solution du système (3.2) vérifie la propriété stroboscopique. Du théorème 3.2 découle alors le résultat du théorème 3.1.

3.2.3 Démonstration du Lemme 3.1

Soit $T \in \mathbb{R}$ avec $0 < T \leq T_0$. Nous allons montrer respectivement la première puis la seconde approximation de (3.7).

• Considérons $\|\varphi(T) - \overline{\varphi}(T)\|$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|\varphi(T) - \overline{\varphi}(T)\| &\leq \int_0^T \left\| \frac{d\varphi}{dT}(s) - \frac{d\overline{\varphi}}{dT}(s) \right\| ds \\ &\leq \int_0^T \|\Omega(x_0 + \varepsilon\mathbf{y}(s)) + \varepsilon\mathcal{O}(1) - \Omega(x_0)\| ds \\ &\leq \int_0^T \|\Omega(x_0 + \varepsilon\mathbf{y}(s)) - \Omega(x_0)\| ds + \varepsilon\int_0^T \|\mathcal{O}(1)\| ds \\ &\leq L_1\int_0^T \|\varepsilon\mathbf{y}(s)\| ds + \varepsilon\int_0^T \|\mathcal{O}(1)\| ds, \end{aligned}$$

où $L_1 = \sup_{x \in K} \left\| \dfrac{d\Omega}{dx}(x) \right\|$. Or, pour $T \in \mathbb{R}$, $0 \leq T \leq T_0$, nous avons

$$\|\varepsilon\mathbf{y}(T)\| = \|x(t_0 + \varepsilon T) - x(t_0)\| \leq \varepsilon T L_0, \tag{3.8}$$

où $L_0 = \sup_{K \times \mathbb{R}^m} \|X(x, \phi)\|$. D'où

$$\begin{aligned} \|\varphi(T) - \overline{\varphi}(T)\| &\leq L_1 L_0 \varepsilon \int_0^T s ds + \varepsilon T L_2 \leq \varepsilon L_1 L_0 \frac{T^2}{2} + \varepsilon T L_2 \\ &\leq L_1 L_0 \frac{(\sqrt{\varepsilon}T_0)^2}{2} + \sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}T_0)L_2 \simeq 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

où L_2 est tel que $\sup\limits_{K\times\mathbb{R}^m} \|\mathcal{O}(1)\| \leq L_2$. Les L_i étant tous des nombres réels positifs et limités.

Ainsi, nous avons bien $\|\varphi(T) - \overline{\varphi}(T)\| \simeq 0$, c.-à.d. $\varphi(T) \simeq \overline{\varphi}(T) = \Omega(x_0)\cdot T$.

• Pour $\left\|\dfrac{\mathbf{y}(T)}{T} - \dfrac{\overline{\mathbf{y}}(T)}{T}\right\|$, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\mathbf{y}(T)}{T} - \frac{\overline{\mathbf{y}}(T)}{T}\right\| &\leq \frac{1}{T}\int_0^T \left\|\frac{d\mathbf{y}(s)}{dT} - \frac{d\overline{\mathbf{y}}(s)}{dT}\right\| ds \\
&\leq \frac{1}{T}\int_0^T \|X(x_0+\varepsilon\mathbf{y}(s), \phi_0+\varphi(s)) - X(x_0, \phi_0+\overline{\varphi}(s)\| ds \\
&\leq L_3\frac{1}{T}\int_0^T \|\varepsilon\mathbf{y}(s)\| ds + L_4\frac{1}{T}\int_0^T \|\varphi(s)-\overline{\varphi}(s)\| ds \\
&\leq L_3L_0\varepsilon\frac{T}{2} + L_4\frac{1}{T}\int_0^T (L_0L_1\varepsilon\frac{s^2}{2} + \varepsilon s L_2) ds \qquad \text{(voir (3.8) et (3.9))} \\
&\leq L_3L_0\varepsilon\frac{T}{2} + L_4L_0L_1\varepsilon\frac{T^2}{6} + L_4L_2\varepsilon\frac{T}{2} \\
&\leq L_3L_0\sqrt{\varepsilon}\frac{\sqrt{\varepsilon}T_0}{2} + L_4L_0L_1\frac{(\sqrt{\varepsilon}T_0)^2}{6} + L_4L_2\sqrt{\varepsilon}\frac{\sqrt{\varepsilon}T_0}{2} \simeq 0
\end{aligned}$$

où $L_3 = \sup\limits_{K\times\mathbb{R}^m} \left\|\dfrac{\partial X}{\partial x}(x,\phi)\right\|$ et $L_4 = \sup\limits_{K\times\mathbb{R}^m} \left\|\dfrac{\partial X}{\partial \phi}(x,\phi)\right\|$, avec les L_i des réels positifs et limités.

Ainsi

$$\left\|\frac{\mathbf{y}(T)}{T} - \frac{\overline{\mathbf{y}}(T)}{T}\right\| \simeq 0 \quad \text{et donc} \quad \frac{\mathbf{y}(T)}{T} \simeq \frac{\overline{\mathbf{y}}(T)}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T X(x_0, \phi_0 + \Omega(x_0).\tau)d\tau.$$

Ceci achève la preuve du lemme 3.1.

Remerciements

L'auteur est reconnaissant au Professeur Tewfik Sari de l'Université de Haute Alsace à Mulhouse, France, pour ses remarques et suggestions qui lui ont été très utiles.

Références

[1] D. V. Anosov, *Averaging in systems of ordinary differential equations with rapidly oscillating solutions*, Izv. Akad. Nauk. SSR Ser. Math. 24 (1960), 721-742.

[2] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Nauka, Moscow, 1974 (Traduc. Fr. *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou, 1976.

[3] V. I. Arnold, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Mir, Moscou, 1980.

[4] V. I. Arnold, *Dynamical Systems III*, Encycl. Math. Sciences. Vol. 3, Springer Verlag, Berlin, 1988.

[5] J. L. Callot et T. Sari, *Stroboscopie infinitésimale et moyennisation dans les systèmes d'équations différentielles à solutions rapidement oscillantes*, in Landau I. D., éditeur, Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse des systèmes et le traitement du signal, tome 3, Editions du CNRS (1983), 345-353.

[6] F. Diener and M. Diener (Eds.), *Nonstandard Analysis in Practice*, Univesitext, Springer Verlag, Berlin, 1995.

[7] F. Diener et G. Reeb, *Analyse Non Standard*. Hermann, 1989.

[8] M. Diener, *Une initiation aux outils non standard fondamentaux* in *Analyse non standard et représentation du réel, Oran-Les Andalouses, 8-12 septembre 1984*, (M. Diener et C. Lobry, Eds), 11-71, OPU (Alger), CNRS (Paris), 1985.

[9] T. Kasuga, *On the adiabatic theorem for Hamiltonian systems of differential equations in classical mechanics I, II, III*, Proc. Japan, Acad. 37 (1961), 366-371, 372-376, 377-382.

[10] P. Lochak and C. Meunier, *Multiphase averaging for classical systems*, Appl. Math. Sciences. 72, Springer Verlag, Berlin, 1988.

[11] A. I. Neishtadt, *Passage through resonance in a two-frequency problem*, Dokl. Akad. 221, (1975), 301-304 (Engl. Transl. Sov. Phys. Dokl. 20, (1975), 189-191).

[12] A. I. Neishtadt, *On averaging in systems with several frequencies II*, Dokl. Akad. 226, (1976), 1295-1298 (Engl. Transl. Sov. Phys. Dokl. 21, (1976), 80-82).

[13] E. Nelson, *Internal Set Theory : a new approach to nonstandard analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), No. 6, 1165-1198.

[14] T. Sari, *Moyennisation dans les systèmes différentiels à solutions rapidement oscillantes.* Thèse de Doctorat en Mathématiques, Université de Mulhouse, (1983).

[15] T. Sari, *Stroboscopy and averaging*, in *Colloque Trajectorien à la mémoire de G. Reeb et J. L. Callot, Strasbourg-Obernai, 12-16 juin 1995*, (A. Fruchard et A. Troech, Eds), 95-124. Prépublication de l'IRMA, Strasbourg, 1995.