Rythmes et algorithmes

François Patte

Rythmes et algorithmes
Le génie mathématique indien

François Patte
Laboratoire MAP5 (UMR CNRS 8145), Université Paris Descartes

En expliquant une règle de calcul combinatoire donnée par Bhāskara, le commentateur Gaṅgādhara présente en exemple une suite de nombres, et un moyen mnémotechnique, versifié, pour se souvenir des premiers nombres de la suite et du processus de construction de celle-ci.

Voici cette suite :

1, 2, 3, 6, 10, 19, 33, 60, 106, 191, 340, 610, ...

Et voici le poème mnémotechnique :

> Les combinaisons jusqu'à six demi-brèves se mémorisent par : un *(lakṣmī)*, deux, trois (feu), six (membres), dix (directions), dix-neuf ; les deux derniers additionnés et aussi les deux [séparés] par un intervalle, on aura aussi le dénombrement avec la somme des uns et des autres [1].

Une suite de nombres parle rarement d'elle-même ; quant au poème, il est plutôt obscur et, sans clef, ne permet pas de comprendre cette suite.

La solution de l'énigme se trouve dans un traité de musique du XIV^e siècle dû à Śārṅgadeva : le *Saṃgītaratnākara* (l'océan de la musique).

Le chapitre cinq de cette œuvre est consacré à l'étude du rythme ; on y trouve le moyen d'énumérer exhaustivement, et de manière ordonnée, tous

[1] *Lakṣmīdvivahnyaṅgadigekakonaviṃśatyabhijñā drutaṣaṭkabandhaḥ* | *antyau yutau dvāv atha sāntarau dvau tattadyuteḥ syāt purato 'pi saṃkhyā* ‖ Ce poème utilise le système des *bhūtasaṃkhyā* (nombres qui sont des choses) pour désigner certains nombres : *lakṣmī* semble désigner le nombre « un », *vahni*, feu, est le nombre « trois », car il faut trois feux dans le sacrifice à Agni, le Veda a six auxiliaires (membres, *aṅga*), il y a dix directions dans l'espace *(diś)*.

les modèles rythmiques d'une durée déterminée utilisant quatre figures de notes. Une fois l'énumération faite, on donne le moyen de compter le nombre de variantes rythmiques obtenues et celui de retrouver un modèle connaissant sa place dans l'énumération ou, inversement, de calculer le rang d'un modèle donné.

Le *Saṃgītaratnākara* utilise quatre figures de notes dont les rapports de durée sont : 1, 2, 4 et 6 :

– *druta*, demi-brève[2], noté : **o**[3]. C'est la plus petite durée, elle sert aussi d'unité pour donner la longueur des mesures musicales : on dira une mesure de quatre, cinq, sept *druta*. Dans le rapport des durées utilisées ici, on peut la représenter par une croche ♪
– *laghu*, brève[4], notée : **I**. D'une durée de deux *druta*, elle correspond à la noire ♩
– *guru*, longue[5], notée : **S**. Elle vaut deux *laghu*, soit quatre *druta* et correspond à une blanche 𝅗𝅥
– *pluta*, protractée, notée **S̀**, elle a une durée de trois *laghu*, c'est-à-dire six *druta*, et correspond donc à une blanche pointée 𝅗𝅥.

Prastāra

Prastāra signifie « étendu ». C'est par ce nom que les traités de prosodie et de musique désignent le tableau dont chaque ligne représente les variations rythmiques qui peuvent être construites pour une durée donnée. Il désigne aussi l'algorithme qui permet de construire ce tableau.

Dans le cas des rythmes musicaux, un *prastāra* pour quatre *druta* présentera toutes les variations rythmiques d'une durée de quatre demi-brèves, par exemple : **o o o o** (♪♪♪♪), **I I** (♩ ♩) ou **o I o** (♪♩ ♪), etc.

Pour faire cette construction de manière exhaustive, Śārṅgadeva propose l'algorithme suivant :

> *Après avoir posé une plus petite au-dessous de la première plus grande, le reste est comme au-dessus. S'il y a un manque au début, on écrira, si cela est possible, de plus grandes sur la gauche — en cas d'impossibilité des petites —, pour compléter le rythme ; cette prescription, dont le terme est [un rythme*

[2] *litt.* rapide
[3] Dans cet article, les notations employées pour les figures de notes imitent les notations utilisées dans les manuscrits sanskrits.
[4] *litt.* légère.
[5] *litt.* lourde.

> *composé] entièrement de demi-brèves, doit être exécutée à plusieurs reprises. Cette permutation existe quand il y a brèves, longues ou protractées, isolées ou composées, mais pas quand il y a une demi-brève isolée*[6].

Le *prastāra* se construira de haut en bas et la règle explique comment construire une ligne au-dessous d'une autre.

« Plus petite... », « plus grande... », le texte paraît peu clair. C'est un mode d'expression, largement développé par les mathématiciens indiens, qui permet la construction de règles itératives pour résoudre des problèmes ou, comme c'est le cas ici, pour décrire un algorithme. Le recours aux commentaires est presque indispensable et celui de Kallinātha *(Kalānidhi)* permet de bien comprendre la procédure décrite ; voici son explication pour la première phrase :

> « Après avoir écrit au début un quelconque rythme de son choix, [on posera au-dessous] de la première plus grande parmi ses composants... Ici, par le mot « plus grand » on entend brève, longue ou protractée. En voici le sens : quand la première plus grande est une brève alors une demi-brève, qui est plus petite par rapport à celle-là, doit être écrite au-dessous. Mais quand la première plus grande est une longue, alors une brève, qui est plus petite par rapport à celle-là, doit être écrite au-dessous. Quand, encore, la première plus grande est une protractée, une longue, qui est plus petite par rapport à celle-là, doit être écrite au-dessous. Ainsi, ce qui est invariablement grand est la protractée, invariablement petit, la demi-brève, mais un état de plus grand et plus petit doit être considéré par rapport à une brève ou une longue. »

Ce commentaire apporte les précisions qui manquaient : si désigner une figure de note par les termes « grand » ou « petit », alors qu'on a le choix entre quatre valeurs possibles, paraît vague, ordonner strictement les valeurs supprime les ambiguïtés. Ainsi, l'algorithme de construction du *prastāra* prescrit de poser au-dessous d'une figure de note, la figure de note de valeur immédiatement inférieure et, grâce à sa généralité, la règle, telle qu'elle est formulée, peut être utilisée quelles que soient les valeurs rencontrées sur une ligne.

Le sens de lecture n'est pas précisé dès le début, mais il apparaît clairement dans la suite que celle-ci doit avoir lieu de gauche à droite et « la première (plus grande) » est à comprendre comme la première à partir de la gauche. Kallinātha le précise en expliquant ce qu'il faut entendre par *le reste est comme au-dessus* :

[6] *Nyasyālpam ādyān mahato 'dhastāc cheṣaṃ yathopari | prāg ūne vāmasaṃsthāṃs tu saṃbhave mahato likhet | alpān asaṃbhave tālapūrtyai bhūyo 'py ayaṃ vidhiḥ || sarvadrutāvadhiḥ kāryaḥ prastāro 'yaṃ laghau gurau | plute vyaste samaste ca na tu vyaste drute 'sti saḥ ||*

> « Après avoir posé une plus petite au-dessous du premier plus grand composant d'un rythme musical de plusieurs membres, le reste doit être écrit en le plaçant à droite ; on écrira au-dessous, exactement tel que [c'est écrit] sur la ligne du dessus. »

Le fait de placer « à droite » se déduit logiquement de la règle qui indique que s'il faut compléter le rythme — et il le faudra, puisqu'on a diminué une figure de note —, cette complétion s'effectuera sur la gauche : *S'il y a un manque au début, on écrira, si cela est possible, de plus grandes sur la gauche — en cas d'impossibilité des petites — pour compléter le rythme.*

Voici le commentaire de Kallinātha expliquant la manière de compléter :

> « S'il y a au début une partie du mètre musical qui manque, pour compléter le mètre en question, on écrira, quand cela est possible, *des plus grandes*, c'est-à-dire des protractées, des longues ou des brèves ; quand cela est impossible, *des petites*, c'est-à-dire des demi-brèves, placées sur la partie gauche par rapport à ce qui est écrit, à proximité des composants déjà écrits ; telle est la signification. »

Ici encore une précision est apportée pour interpréter les mots « grands » et « petits » : on sait déjà, par l'explication précédente, ce qu'il faut entendre par « grand », mais Kallinātha nous indique cette fois l'ordre dans lequel il faut choisir les figures de notes pour effectuer la complétion : on essaiera d'abord de mettre une protractée, sinon une longue, sinon une brève et si tout cela est impossible une demi-brève. On complète donc le mètre musical en écrivant de droite à gauche les plus grandes figures de notes possible.

Voici sur un exemple le fonctionnement de cet algorithme. Nous écrirons la construction des quatre premières lignes du *prastāra* pour sept *druta*. Les rythmes soulignés sont les rythmes qui apparaîtront dans le *prastāra* ; les nombres entre parenthèses donnent la valeur, en demi-brèves, de la ligne ; un cycle est achevé quand cette valeur est égale à sept.

On commence par mettre une demi-brève et une protractée (1+6) :	$\underline{\mathbf{o}\ \grave{\mathbf{S}}}$	(7)
La « première plus grande » est la protractée ; on écrit donc au-dessous, une « plus petite », soit une longue :	$\mathbf{S}$	(4)
Il n'y a pas de « reste au-dessus », donc rien à écrire sur la droite. Il manque trois demi-brèves « pour compléter le rythme », on écrit donc la valeur de trois demi-brèves, sur la gauche, en commençant par la plus grande valeur possible, soit une brève, et on ajoute, encore sur la gauche, une demi-brève. Fin d'un premier cycle :	$\underline{\mathbf{o\ I\ S}}$	(7)

On recommence. « La première plus grande » est la brève, on écrit donc une demi-brève au-dessous :	**o**	(1)
Il y a, cette fois-ci, « un reste au-dessus », la longue, que l'on recopie sur la droite :	**o S**	(5)
Il manque la valeur de deux demi-brèves, on peut donc écrire une brève sur la gauche pour compléter. Fin d'un deuxième cycle.	**I o S**	(7)
La « première plus grande » est la brève, on écrit donc une demi-brève au-dessous :	**o**	(1)
On recopie le « reste du dessus » sur la droite :	**o o S**	(6)
Il manque une demi-brève que l'on écrit sur la gauche :	**o o o S**	(7)

Construction du *prastāra*

On poursuit le processus jusqu'à obtenir une ligne qui ne contient que des demi-brèves : *Cette prescription, dont le terme est [un rythme composé] entièrement de demi-brèves, doit être exécutée à plusieurs reprises*. On trouvera page 13 les *prastāra* des mesures de une à sept demi-brèves.

Une première propriété de cet algorithme est de donner exhaustivement la construction de toutes les combinaisons possibles des quatre figures de notes entrant dans la composition d'une mesure musicale de longueur donnée ; en effet, la construction d'une ligne à partir de la précédente se fait en recopiant celle-ci avec un changement a minima d'une seule figure de note : on choisit la valeur immédiatement inférieure. Nous verrons plus loin que l'ordre d'exécution de l'algorithme — on recopie à droite, on complète sur la gauche —, permet d'ordonner les lignes du *prastāra*.

Saṃkhyā

Dénombrement. Śārṅgadeva donne une règle pour compter le nombre des combinaisons obtenues, en fonction du nombre de demi-brèves que comporte le rythme musical pour lequel on a construit le *prastāra*. Voici cette règle :

> *Ayant posé dans l'ordre les nombres un et deux, le dernier est [autant que possible] ajouté aux deuxième, quatrième et sixième nombres qui précèdent — en l'absence du quatrième et du sixième, aux troisième et cinquième nombres — ; on écrira cette somme régulièrement au début. Une suite de nombres pla-*

cés ensemble vers la droite est ainsi construite et celle-ci est complète avec les nombres qui comptent les demi-brèves se trouvant dans un mètre choisi[7].

Le recours au commentaire de Kallinātha permet de mieux comprendre comment établir la suite des nombres qui, comme les *prastāra*, se construit de manière itérative :

> « Après avoir posé le nombre un en premier, on posera, immédiatement après, le nombre deux, à droite en se déplaçant sur une ligne horizontale. On ajoutera, quand cela est possible, le dernier nombre avec le deuxième, le quatrième et le sixième nombre qui se tiennent à gauche par rapport au dernier. Au début, le nombre deux fait office de dernier ; dans ce cas, parce qu'il n'existe que le deuxième parmi les précédents, après avoir fait sa somme avec le nombre un, on écrira le nombre trois sur la droite. Ensuite, après avoir fait la somme de ce [trois] devenu dernier, avec le nombre deux, deuxième parmi les précédents, et — à cause de la phrase : « en l'absence du quatrième et du sixième, ajouté [autant que possible] régulièrement au troisième et cinquième nombres » —, en l'absence de ce quatrième et en substitution de celui-ci, avec le nombre un qui est le troisième ; on écrira le nombre six à la suite du nombre trois. Après avoir ajouté ce [six], devenu le dernier, au nombre trois, qui est le deuxième, et au nombre un qui est le quatrième, on écrira le nombre dix à la suite du nombre six. Puis, après avoir ajouté ce [dix], dernier, avec le nombre six et le nombre deux, qui sont le deuxième et le quatrième parmi les précédents, et aussi avec le nombre un qui est le cinquième, en substitution du sixième qui manque, on écrira le nombre dix-neuf à la suite du nombre dix. Ensuite, après avoir ajouté ce [dix-neuf], dernier, aux nombres dix, trois et un qui sont les deuxième, quatrième et sixième précédents, on écrira le nombre trente-trois. De cette manière, une suite de nombres, placés ensemble sur la droite est construite. »

Nous avons là, la construction d'une suite récurrente : on calcule les termes, les uns après les autres, en combinant — dans ce cas en additionnant — des nombres précédemment calculés. Pour obtenir un nouvel élément (le rang n) de cette suite, il faut additionner le dernier nombre obtenu (rang $n-1$) avec l'avant-dernier (rang $n-2$), le quatrième à partir du dernier (rang $n-4$) et le sixième, toujours à partir du dernier (rang $n-6$). Il faut donc disposer de six nombres avant de pouvoir commencer à construire cette suite de manière itérative, c'est le sens des exceptions formulées dans la règle : si le quatrième n'existe pas encore, on lui substitue le troisième et si le sixième n'existe pas, on le remplace par le cinquième. Comme les deux premiers

[7] *Ekadvyaṅkau kramān nyasya yuñjītāntyaṃ purātanaiḥ | dvitīyaturyaṣaṣṭhāṅkair abhave turyaṣaṣṭhayoḥ ‖ tṛtīyapañcamāṅkābhyāṃ kramāt taṃ yogam agrataḥ | likhed dakṣiṇasaṃsthaivam aṅkaśreṇī vidhīyate ‖ sā cāṅkair iṣṭatālasthadrutasaṃkhyaiḥ samāpyate ‖*

termes de la suite, 1 et 2, nous sont donnés, ces exceptions ne concernent que les rangs trois à six ; au delà, la règle générale s'applique, que l'on note aujourd'hui de la manière suivante :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-4} + u_{n-6}$$

où u_n est le n-ième terme de la suite.

Les nombres de cette suite comptent le nombre de combinaisons possibles des quatre figures de notes dans un rythme musical de longueur fixe ; chaque nombre correspond à un rythme et son rang compte le nombre de demi-brèves mesurant la longueur du rythme, ainsi que nous le dit Śārṅgadeva :

> *Les variétés de rythmes sont comptées par les nombres placés ici, augmentés régulièrement à chaque demi-brève, c'est-à-dire : une demi-brève, une brève, une more et demie, une longue, deux mores et demie, une protractée, trois mores et demie*[8] *.*

La construction de cette suite est illustrée dans le tableau suivant. Les termes de la suite sont sur la diagonale du tableau ; on reconnaît la suite de nombres citée au début de cet article.

Les colonnes sont numérotées par le rang des termes de la suite, donc par le nombre de demi-brèves mesurant la longueur d'un rythme musical : il y a dix variations pour un rythme d'une longueur de cinq demi-brèves. Les lignes montrent le calcul de chaque terme de la suite ; par exemple, le terme de rang six, 19, est obtenu en faisant la somme des termes de rang un, deux, quatre et cinq.

Rang :	1		2		3		4		5		6		7		8
	$\boxed{1}$														
	1		$\boxed{2}$												
	1	+	2	=	$\boxed{3}$										
	1	+	2	+	3	=	$\boxed{6}$								
	1			+	3	+	6	=	$\boxed{10}$						
	1	+	2			+	6	+	10	=	$\boxed{19}$				
	1			+	3			+	10	+	19	=	$\boxed{33}$		
			2			+	6			+	19	+	33	=	$\boxed{60}$

[8] *Druto laghuḥ sārdhamātro guruḥ sārdhadvimātrikaḥ* | *plutaḥ sārdhatrimātraś cety ekaikadrutavardhitaiḥ* | *tālabhedāḥ kramād aṅkaiḥ saṃkhyāyante sthitair iha* ||

Le poème mnémotechnique trouve maintenant son explication, à la lumière de la règle donnée par Śārṅgadeva : « Les combinaisons jusqu'à six demi-brèves se mémorisent par : un, deux, trois, six, dix, dix-neuf » ; les six premiers termes de la suite nous sont donnés. « Les deux derniers additionnés et aussi les deux [séparés] par un intervalle, on aura aussi le dénombrement avec la somme des uns et des autres ». Cette partie nous permet de construire les termes suivants en additionnant le dernier terme calculé avec l'avant-dernier et deux autres termes précédents, mais en sautant un terme intermédiaire à chaque fois, c'est-à-dire les quatrième et sixième termes à partir du dernier.

Explications

La construction de la suite

Le problème posé est un intéressant, et difficile, problème de combinatoire et la solution donnée à ce problème par Śārṅgadeva est très séduisante par sa simplicité : tout repose sur la construction du *prastāra*.

Le problème, vu sous l'angle musical, consiste à trouver toutes les variations rythmiques possibles dans un temps fixé, en utilisant quatre figures de notes, ayant entre elles les rapports de durée : un, deux, quatre et six.

On peut donner une formulation mathématique de ce problème : trouver toutes les manières possibles d'écrire un nombre entier comme la somme des nombres un, deux, quatre et six. Par exemple : $7 = 1 + 6 = 2 + 2 + 2 + 1 = 4 + 2 + 1$, etc. C'est un problème complexe de théorie des nombres qui a été développé et étudié par Srinivas Ramanujan et G. H. Hardy au début du XX^e^ siècle ; on l'appelle la partition des entiers. C'est aussi, de nos jours, un problème de programmation informatique qui se pose pour les automates qui rendent la monnaie : comment rendre au mieux une certaine somme d'argent en fonction des pièces disponibles dans la machine.

Le point de vue musical ajoute une contrainte supplémentaire : l'ordre est signifiant. En effet, pour un mathématicien, $7 = 4 + 2 + 1 = 1 + 4 + 2 = 2+4+1 = \cdots$ indifféremment. Pour un musicien, les rythmes : **S I o** (𝅗𝅥 ♩ ♪) ou **o S I** (♪ 𝅗𝅥 ♩) ou **I S o** (♩ 𝅗𝅥 ♪) sont différents bien que de même durée. Cette contrainte n'apparaîtra pas dans le calcul car, du fait de la méthode itérative utilisée, une fois correctement établis les six premiers termes de la suite, le principe de récursivité va répercuter les résultats de cette contrainte à tous les termes de la suite.

Pour comprendre la construction de la suite, il faut se reporter au tableau page 13, donnant les *prastāra* construits pour des mesures de une à sept demi-brèves. En lisant chaque tableau de bas en haut et de droite à gauche, on constate que la dernière colonne comporte, à partir du bas, des lignes finissant par une demi-brève, valeur 1, puis viennent des lignes finissant par une brève, valeur 2, puis des lignes finissant par une longue, valeur 4, enfin des lignes finissant par une protractée, valeur 6. L'algorithme de construction des *prastāra* donne, non seulement une construction exhaustive, mais ordonne aussi les lignes de cette construction en les regroupant par finale identique. Nous verrons plus loin une description de cet ordre.

Si l'on adopte le point de vue mathématique pour lire les *prastāra*, on pourrait remplacer chaque figure de note par sa valeur ; on écrirait alors : $2, 1, 4$, à la place de **I o S**, et on lirait : « la ligne $2, 1, 4$ est une partition de l'entier 7 », c'est-à-dire $7 = 2 + 1 + 4$. Si on décrit, par exemple, le *prastāra* pour sept demi-brèves, en adoptant ce point de vue on dira alors : de bas en haut, viennent d'abord les partitions de l'entier 7 dont la somme se termine par 1 et il y en a autant que de partitions de l'entier $7 - 1 = 6$. En effet, une partition quelconque de 7 se terminant par 1, s'écrit : $7 = x + \cdots + 1$, pour les avoir toutes, il suffit de connaître toutes les partitions de $7 - 1 = x + \cdots$

Puis, viennent les partitions de l'entier 7 se terminant par 2 et, suivant le même raisonnement que pour celles se terminant par 1, il y en a autant que les partitions de l'entier $7 - 2 = 5$; puis les partitions de 7 finissant par 4, qui sont aussi nombreuses que celles de l'entier $7 - 4 = 3$; enfin, les partitions se terminant par 6, qui sont autant que celles de $7 - 6 = 1$. En fin de compte, le nombre de partitions de l'entier 7 est égal à la somme des nombres de partitions des entiers 6, 5, 3 et 1, soit : $u_7 = u_6 + u_5 + u_3 + u_1$. Ou, généralement, le nombre u_n de partitions de l'entier n est égal à :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-4} + u_{n-6}$$

C'est-à-dire la formule de récurrence donnée par Śārṅgadeva.

Le tableau page 14 est une illustration de la construction de la suite, vue sous l'angle mathématique : pour le *prastāra* de sept demi-brèves, on a noté, de bas en haut, à l'aide d'une double flèche verticale l'ensemble des lignes se terminant par une demi-brève, valeur 1, puis celles se terminant par une brève, valeur 2, etc. et on a mis en valeur, par couleurs identiques, les *prastāra* précédents qui entrent dans sa composition, quand on « oublie » la dernière colonne, soit les *prastāra* de six, cinq, trois et une demi-brèves.

La propriété des *prastāra* que nous avons utilisée pour montrer comment dénombrer les combinaisons de figures de notes n'a pas échappé à Śārṅgadeva, qui écrit en conclusion de cette section :

> *À partir [des termes] de la somme des nombres dont on obtient le dernier nombre, on compte avec ceux-ci, successivement à partir de la fin, les variétés qui finissent par une demi-brève, une brève, une longue et une protractée ; tels sont les dénombrements enseignés par le musicien* [9].

Ordre sur les *prastāra*

Nous avons remarqué, pour expliquer la construction de la suite, que la dernière colonne des *prastāra* était rangée, de bas en haut, par ordre croissant des valeurs des figures de notes. En fait, tout *prastāra* est ordonné, par sa construction même, de bas en haut et de droite à gauche, selon l'ordre lexicographique.

C'est l'ordre de classement des mots dans un dictionnaire, il permet de comparer les mots lettre par lettre en utilisant un ordre « naturel » défini sur l'ensemble des lettres : l'ordre alphabétique. On peut le définir de la manière suivante pour l'alphabet latin : un mot $\mathcal{M}_1$ — une séquence de lettres — est placé après un mot $\mathcal{M}_2$ si :

– il y a une lettre dans $\mathcal{M}_2$ postérieure à celle qui occupe la même position dans $\mathcal{M}_1$
– les lettres avant cette position sont identiques dans $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$
– les lettres qui suivent cette position n'interviennent pas dans le classement

On a, par exemple, le classement suivant : alpha, alphabet, alphabétique, alphabétiquement, alphabétisation, alphabétisme...

Dans le cas présent, l'« alphabet » a quatre lettres, classées dans l'ordre : **o**, **I**, **S**, $\grave{\mathbf{S}}$ et on peut constater, en lisant de droite à gauche et de bas en haut, le *prastāra* pour sept demi-brèves (page 13) que les lignes se classent bien selon l'ordre lexicographique :

$$\mathbf{ooooooo} \prec \mathbf{Iooooo} \prec \cdots \prec \mathbf{oooooI} \prec \cdots \prec \mathbf{oooS} \prec \cdots \prec \mathbf{o}\grave{\mathbf{S}}$$

C'est là une propriété qui résulte de l'ingénieux algorithme de construction du *prastāra* et qui a son application par la suite dans la procédure appelée « *naṣṭa* » (disparu). Cette opération consiste à reconstituer une ligne effacée dans le *prastāra*, à l'aide de la connaissance de son seul rang parmi les lignes. L'ordre lexicographique joue alors un rôle essentiel, car c'est un

[9] *Yadaṅkayogād antyo 'ṅko labdhas tair antataḥ kramāt | bhedā drutāntalaghvantagurvantāś ca plutāntakāḥ | saṃkhyāyanta iti proktāḥ saṃkhyā niḥśaṅkasūriṇā* ||

ordre « total » : quels que soient les mots, on peut toujours les classer sans ambiguïté. Nous ne développerons pas plus avant cette procédure complexe dans cet article.

Génie mathématique

Cet algorithme est une bonne illustration des méthodes employées par les mathématiciens indiens pour résoudre des problèmes, souvent complexes, dont la solution est donnée sous forme itérative. Ce traité de musique, le *Saṃgītaratnākara*, en présente plusieurs exemples dont l'ingéniosité est réjouissante pour qui est sensible à une certaine esthétique mathématique. Les techniques sous-jacentes sont parfois sophistiquées comme l'usage d'une double suite récurrente permettant de compter le nombre de figures de notes — par exemple le nombre de demi-brèves — utilisées dans un *prastāra*. Nous donnerons cette construction comme un exemple supplémentaire de l'esprit d'analyse et d'abstraction dont font preuve les *paṇḍits* indiens.

Si l'on observe le *prastāra* pour sept demi-brèves (page 14), nous avons vu qu'il était construit comme l'« empilement » des *prastāra* pour six, cinq, trois et une demi-brèves, bordé sur la droite par une dernière colonne, ordonnée de bas en haut par ordre croissant des valeurs des figures de notes qu'elle contient.

De plus, pour chaque ensemble de valeurs de cette dernière colonne, les figures de notes sont en nombre égal au nombre de lignes du *prastāra* en regard duquel elles se trouvent : il y a, dans la dernière colonne, autant de demi-brèves que de lignes dans le *prastāra* pour six demi-brèves, autant de brèves que de lignes dans le *prastāra* pour cinq demi-brèves, etc. Si donc, on veut connaître le nombre de demi-brèves utilisées dans le septième *prastāra*, il suffit d'additionner le nombre de demi-brèves utilisées dans les *prastāra* pour six, cinq, trois et une demi-brèves et d'ajouter le nombre de demi-brèves contenues dans la dernière colonne, c'est-à-dire le nombre de lignes du *prastāra* pour six demi-brèves.

Si l'on note v_7 ce nombre de demi-brèves, il est donc égal à :

$$v_7 = v_1 + v_3 + v_5 + v_6 + u_6$$

où le dernier terme, u_6, est le sixième terme de la suite « *saṃkhyā* » que nous avons étudiée plus haut. Śārṅgadeva nous donne une règle, toujours de manière itérative, permettant de construire une nouvelle suite, parallèlement à la suite *saṃkhyā*, qui comptera, d'une manière générale, le nombre de demi-brèves d'un *prastāra* arbitraire [10]. Il fait également remarquer que cette même suite permet de compter le nombre de brèves, longues et protractées en « décalant » les rangs : si le dernier nombre calculé compte les demi-brèves, l'avant-dernier compte les brèves, le quatrième précédent, les longues et le sixième précédent, les protractées.

Le *Saṃgītarātnakara* nous montre bien d'autres constructions faisant appel à un bagage mathématique important, non seulement dans le chapitre consacré au rythme, mais aussi, par exemple, dans le chapitre sur la gamme où apparaissent des tableaux *(khaṇḍameru)* calculant les combinaisons des modulations dans les systèmes de tonalité. Cela laisse entrevoir un usage des mathématiques qui s'éloigne de sa perception habituelle comme discipline au service des simples calculs de transactions, ou comme outil subordonné à l'astronomie, pour en faire un moyen de modélisation et d'exploration théorique pour d'autres disciplines — dans notre cas, la musique — sans doute bien avant le XIV[e] siècle.

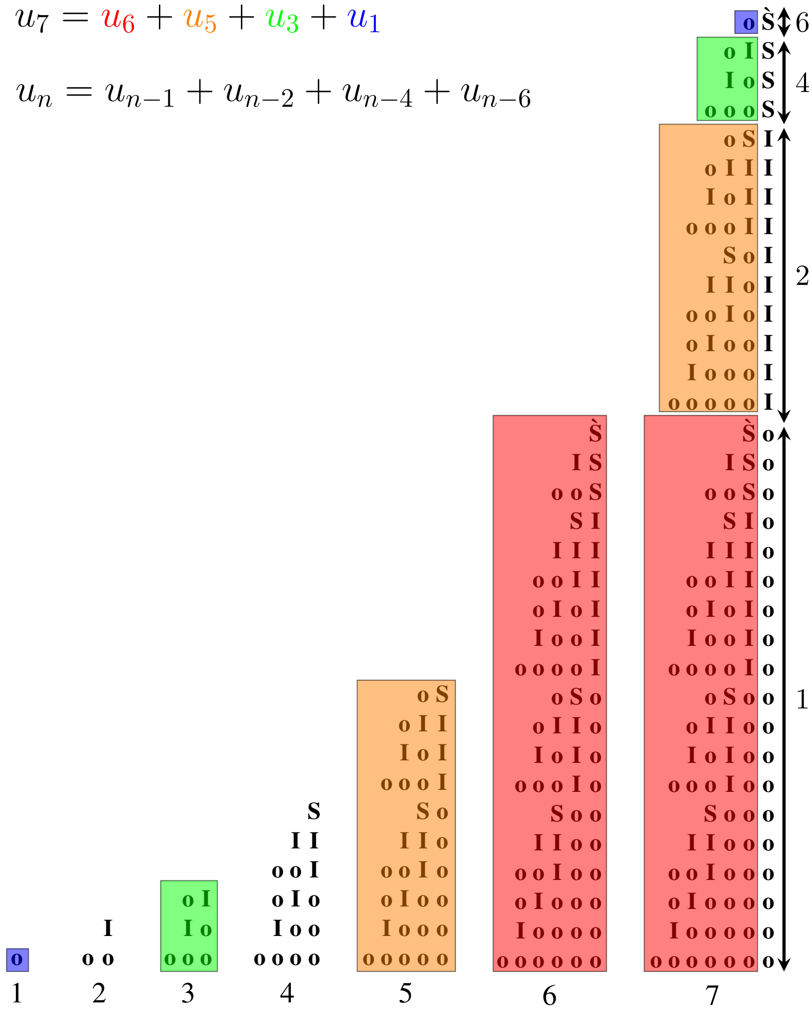
[10]Transposée dans nos notations mathématiques contemporaines, la construction de Śārṅgadeva est la suivante : on a deux suites récurrentes parallèles : u_n est la suite *« saṃkhyā »* que nous avons étudiée, et v_n compte le nombre de demi-brèves entrant dans la composition du n-ième *prastāra* : $\left\{ \begin{array}{lcl} u_n & = & u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-4} + u_{n-6} \\ v_n & = & u_{n-1} + v_{n-1} + v_{n-2} + v_{n-4} + v_{n-6} \end{array} \right.$

						o S̀
						o I S
						I o S
						o o o S
						o S I
						o I I I
						I o I I
						o o o I I
						S o I
						I I o I
						o o I o I
						o I o o I
						I o o o I
						o o o o o I
					S̀	S̀ o
					I S	I S o
					o o S	o o S o
					S I	S I o
					I I I	I I I o
					o o I I	o o I I o
					o I o I	o I o I o
					I o o I	I o o I o
					o o o o I	o o o o I o
				o S	o S o	o S o o
				o I I	o I I o	o I I o o
				I o I	I o I o	I o I o o
				o o o I	o o o I o	o o o I o o
			S	S o	S o o	S o o o
			I I	I I o	I I o o	I I o o o
			o o I	o o I o	o o I o o	o o I o o o
		o I	o I o	o I o o	o I o o o	o I o o o o
	I	I o	I o o	I o o o	I o o o o	I o o o o o
o	o o	o o o	o o o o	o o o o o	o o o o o o	o o o o o o o
1	2	3	4	5	6	7

Les *prastāra* pour une à sept *druta*

$$u_7 = {\color{red}u_6} + {\color{orange}u_5} + {\color{green}u_3} + {\color{blue}u_1}$$

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-4} + u_{n-6}$$



Construction de la suite *saṃkhyā*

Références

Textes sanskrits

KEDĀRABHAṬṬA
1890 *Vṛttaratnākara*. Bombay : The Nirṇaya-Sâgara Press.
Avec le commentaire de Nârayâṇabhatta.

NIJENHUIS, Emmie Te, éditeur
1992 *Saṃgītaśiromaṇi : a medieval handbook of Indian music*. Leiden : E.J. Brill.

PIṄGALA
1908 *The Chhanda Shâstra*. Bombay : The Nirnaya-Sāgara Press.
Avec le commentaire *Mṛtasanjivanī* de Halāyudha Bhaṭṭa. Édité par Paṇdita Kedāranātha and Wāsudava Laxmaṇ Shāstrī Paṇashīkar.

ŚĀRṄGADEVA
1896 *Saṃgītaratnākara*. Punyākhyapattana : Ānandāśramamudraṇālaya (Ānandāśramasaṃskṛtagranthāvaliḥ).
Avec le commentaire *Kalānidhi* de Kallinātha.

1951 *Saṅgītaratnākara* (Édité par SASTRI, Pandit S. Subrahmanya). Adyar : The Adyar Library (The Adyar Library Series – N° 78).
Avec les commentaires *Kalānidhi* de Kallinātha et *Sudhākara* de Siṁhabhūpāla.

Textes mathématiques

BÓNA, Miklós
2002 *A Walk Through Combinatorics*. Singapore : World Scientific Publisher Co. Pte. Ltd.

HARDY, Godfrey Harold
1999 *Ramanujan : twelve lectures on subjects suggested by his life and work*. USA : American Mathematical Society.
Première édition, Cambridge, 1940.

KULKARNI, Amba
2008 « Recursion and Combinatorial Mathematics in Chandashāstra », *http ://arxiv.org/abs/math/0703658*.

LEHMER, D. H.
1970 « Permutations with strongly restricted displacements », dans *Combinatorial Theory and its Applications*. volume II, Proc. Colloq., Balatonfured, 1969. Amsterdam : North Holland, p. 755–770.

WILF, Herbert S.
2006 *generatingfunctionology*. Wellesley : A.K. Peters, Ltd.

ZOGHBIU, Antoine et STOJMENOVIĆ, Ivan
1998 « Fast Algorithms For Generating Integer Partitions », *International Journal of Computer Mathematics*, 70, p. 319–332.