



Lois d'échelle et transitions fractal – non fractal en géographie

Maxime Forriez, Philippe Martin, Laurent Nottale

► **To cite this version:**

Maxime Forriez, Philippe Martin, Laurent Nottale. Lois d'échelle et transitions fractal – non fractal en géographie. 2009. hal-00419906v1

HAL Id: hal-00419906

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00419906v1>

Preprint submitted on 18 May 2010 (v1), last revised 18 May 2010 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Formalisation de trois lois d'échelle permettant de quantifier des structures spatiales ponctuelles, linéaires ou surfaciques : exemples de transitions fractal – non fractal en géographie

Formalization of three laws of scale to quantify spatial patterns of point, line or surface: examples of fractal – no fractal transitions geography

Soumis le 28/05/2009 à *L'Espace géographique*

Accepté le 21/09/2009

Version non corrigée

Maxime Forriez*, Philippe Martin* et Laurent Nottale**

* Université d'Avignon et des Pays du Vaucluse – UMR 6012 ESPACE

** Observatoire de Paris-Meudon

Résumé. Le concept de transition fractal – non fractal fut inventé par l'astrophysicien L. Nottale (1993). Il est basé sur le constat que le monde est globalement scalairement organisé. Celle-ci se manifeste localement sur des gammes scalaires assez courtes. Cela implique nécessairement l'existence de passages d'états non fractals (indépendance d'échelle) à des états fractals (dépendance). Cette transition exprime donc la condition de possibilité de la fractalité. Nous établirons trois des lois possibles de transition fractal – non fractal qui seront ajustées à des cas tirés de la géographie (urbaine, physique) dans l'optique de montrer le caractère central, pour toute la géographie, de ces structurations scalaires.

Abstract. The concept of fractal – no fractal transition was coined by astrophysicist L. Nottale (1993). It is based on the fact that the world is generally organized scalars. This is found locally on relatively short ranges scalars. This necessarily implies the existence of passages of characterization no fractal (scale independence) to characterization fractals (dependence). This transition therefore expresses the condition of possibility of the fractal. We will establish three laws possible fractal – no fractal transition to be adjusted to cases drawn from geography (urban, physical) in order to demonstrate the centrality to any geography, these structures scalars.

Mots-clés. Commune, fractal, France, loi d'échelle, relativité d'échelle

Keywords. District, fractal, France, scale law, scale relativity

La transition fractal – non fractal, quasiment inconnue en géographie, est un concept issu de la théorie de la relativité d'échelle de Laurent Nottale (1993). Cet article a pour objectif de montrer l'importance de cette notion pour la compréhension de phénomènes fractals en géographie, tant humaine que physique (Korvin, 1992 ; Lam, De Cola, 1993 ; Dauphiné, 1995 ; Dauphiné, 2003). En effet, nous la retrouvons régulièrement dans tous les calculs de mesure de dimension fractale ; aucun « filtre » ne pouvant la supprimer (Lesne, 2004 ; Laguës, Lesne, 2003 ; Bourguin, Lesne, 2006). Sa simple existence montre qu'un objet géographique peut être fractal et/ou non fractal sans aucune contradiction, mais sur des portions de gammes d'échelles différentes, continues et contiguës.

Avant de poursuivre sur sa manifestation perçue empiriquement, sur sa traduction dans des graphiques bilogarithmiques et enfin sur sa description formelle dans le cadre de la

relativité d'échelle, il est nécessaire de rappeler ce qu'est une fractale. Très généralement, une fractale est une organisation multi-échelle (Mandelbrot, 1967 ; Mandelbrot, 1975 ; Mandelbrot, 1977 ; Mandelbrot, 1982 ; Xie, 1993 ; Russ, 1994 ; Dubois, 1995 ; Mandelbrot, 1997). En effet, dès que l'on effectue un zoom sur une fractale, « automatiquement » une nouvelle organisation scalaire apparaît. Il s'agit donc d'une organisation en cascade. Ainsi, pour qu'un objet soit appelé fractal, il est nécessaire d'avoir au moins deux niveaux de structuration ; l'irrégularité comme idée générique ne suffit pas pour définir une fractale. En première approximation, grâce à la théorie de la relativité d'échelle, on peut également préciser qu'il s'agit d'une organisation spatiale et/ou temporelle non différentiable (Nottale, 1993 ; Nottale, 2002). En d'autres termes par un point de l'ensemble considéré (point dans un espace en deux ou trois dimensions ; points d'une ligne, d'une surface, d'un volume), il est possible de faire passer plus d'une tangente : celle-ci peut être différente avant ou après le point, et/ou dépendre explicitement de l'échelle. Par ailleurs, une fractale peut posséder différents niveaux d'organisation, c'est-à-dire sur une large gamme d'échelles. Les portions successives de cette gamme où les rapports scalaires peuvent être constants ou variables. Cette organisation scalaire peut alors se traduire dans l'espace tangible, dans l'espace géographique, parfois morphologiquement comme une organisation hiérarchique d'entités de taille variable délimitées par des scansions et des césures en littératures (Nottale, 2001), mais des discontinuités et des limites en géographie (Forriez, 2005 ; Forriez, 2007).

Une des mesures les plus courantes d'un objet fractal est sa dimension. Pour un objet fractal, on appelle dimension fractale la limite mathématique de la variation du logarithme d'une variable (longueur, surface, volume, temps, *etc.*) par rapport au logarithme de sa résolution. Cette dimension peut être entière (dans certaines fractales comme la courbe de Peano), réelle (cas le plus courant), complexe (cas des fractales log-périodiques), voire infinie quand la dimension fractale n'existe pas et qu'il s'agit d'une fonction dépendant d'autres paramètres.

Dans cet article, la méthode de comptage par des boîtes carrées (Barnsley, 1988) a été retenue comme méthode de mesure pour mettre en évidence la transition fractal – non fractal, parce que c'est la plus simple à programmer, qu'elle possède un effet de bord connu (donc limité) et enfin, que c'est au final la plus efficace.

1. Le concept de transition fractal – non fractal

Ce concept est issu de la théorie de la relativité d'échelle (Nottale, 1993 ; Nottale, 1997 ; Nottale, 1998 ; Nottale, 2009). Toutefois, il est bon de rappeler que la théorie de la relativité d'échelle ne se limite pas à cette notion qui est déjà, elle, largement suffisante pour éclaircir et dépasser certaines limites de l'approche fractale appliquée aux objets géographiques. Cela étant, la transition fractal – non fractal est loin d'être un concept simple et évident.

1.1. La théorie de la relativité : construction

Issue de la physique, cette théorie se construit autour de trois principes premiers qui ont été généralisés par Laurent Nottale (1993 ; 1998 ; Nottale *et alii*, 2000) : le principe de relativité, le principe de covariance et le principe d'équivalence.

Le principe de relativité est un principe philosophique formulé par Albert Einstein. Il s'énonce de la manière suivante : « les lois fondamentales de la nature doivent être valides quel que soit le système de coordonnées choisi ». Il faut rappeler que l'idée de relativité au sens einsteinien du terme ne doit en aucun cas être confondue avec le sens qu'a donné à ce mot le courant postmoderniste (Lyautard, 1979).

Le principe de covariance est la mise en œuvre mathématique du principe de relativité. La forme des équations doit être invariante sous les différents changements de système de coordonnées. Il est important de souligner qu'il s'agit bien dans ce cas de la forme des équations différentielles, et non de leurs solutions.

Le principe d'équivalence précise les conditions de relativité de tel ou tel « objet » d'étude. Par exemple, dans le cadre de la relativité générale du mouvement, il y a équivalence locale entre un champ de gravitation et un repère uniformément accéléré.

Dès lors, il est possible de dresser un tableau de comparaison entre la relativité du mouvement et la relativité d'échelle (Tableau 1). Dans les deux cas, il existe deux sortes de variables associées aux systèmes de coordonnées : les variables qui caractérisent l'état du système de coordonnées et les variables qui définissent le système de coordonnées. Toutefois, entre la relativité du mouvement et la relativité d'échelle, il existe une analogie assez forte. Il faut tout de suite préciser que dans de nombreux cas les solutions sont extrêmement différentes. Il ne s'agit donc là que d'une analogie méthodologique. Ainsi, la résolution peut-elle être rapprochée d'une vitesse ; l'accélération, d'une sorte « d'accélération d'échelle » ; l'espace, de la longueur le long d'une fractale et le temps, de la dimension fractale variable.

Relativité	Variables définissant le système de coordonnées	Variables caractérisant l'état du système de coordonnées
Mouvement	Espace	Vitesse
	Temps	Accélération
Échelle	Logarithme de la longueur sur une fractale	Résolution
	Dimension fractale variable (djinn)	« Accélération d'échelle »

Tableau 1. Tableau de comparaison entre la relativité du mouvement et la relativité d'échelle.

1.2. La théorie de la relativité : méthode

Dans cet article, on étudiera seulement les effets des changements d'état d'échelle (de résolution) du système de coordonnées (sachant que, dans la théorie de la relativité plus complète, ceux-ci sont à articuler avec les changements de position, d'orientation et de mouvement). Dans ce cadre, l'objectif de la relativité d'échelle est de trouver les lois régissant les transformations de l'espace des échelles (où les variables qui caractérisent l'échelle sont les résolutions spatio-temporelles). Pour illustrer le propos, la variable utilisée (dont on cherche la dépendance en fonction de la résolution) sera la longueur d'un objet fractal. Il en découle que l'espace de travail est une sorte d'espace des phases défini par le logarithme de la résolution (espace des échelles) et le logarithme de la longueur (espace des positions ordinaires, mais mesuré en logarithmique, car c'est ici sa dépendance d'échelle qui est considérée). Un objet fractal est certes non différentiable, mais cette non-différentiabilité peut toutefois être décrite par l'introduction d'un espace des échelles qui, lui, reste différentiable.

La construction d'un tel espace s'opère en deux temps. Tout d'abord, il faut construire un opérateur différentiel de dilatation par la méthode dite de Gell-Mann-Lévy (Nottale, 2002). On pose d'abord une transformation d'échelle infinitésimale entre ε' et ε :

$$\varepsilon' \rightarrow \varepsilon(1 + d\rho)$$

Ensuite, on applique une transformation sur une longueur L dépendant de la résolution :

$$L(\varepsilon') = L(\varepsilon(1 + d\rho)) = L(\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \ln \varepsilon} L(\varepsilon) d\rho + \dots$$

Par ce petit développement, on constate que l'on ne travaille pas directement avec la résolution, mais avec son logarithme.

Fort de cet outil, il reste à trouver les lois d'échelle possibles. Pour cela, un simple développement limité de Taylor permet d'obtenir autant de lois que l'on veut en ne faisant dépendre la solution que de la longueur.

$$\frac{\partial L}{\partial \ln \varepsilon} = \beta(L) = a + bL + cL^2 + \dots$$

1.3. Les lois de transformation d'échelle

Mathématiquement, la relativité d'échelle montre que la possibilité de lois d'échelle est infinie (Nottale, 1993). En revanche, physiquement, elle montre également qu'elles sont limitées à quelques cas : la loi sans transition, la loi avec une transition (Nottale, 1993) et la loi avec deux transitions (Auffray, Nottale, 2008). Chacune de ces lois correspond à une complexification du développement limité de Taylor précédent.

La première loi, la loi sans transition, correspond à l'invariance d'échelle connue par tous les fractalistes. Avant de poursuivre, il est fondamental de rappeler que l'association des termes « fractale », « invariance d'échelle » et « autosimilarité » doit être effectuée avec prudence. En effet, toute fractale autosimilaire est invariante d'échelle, mais toute fractale invariante d'échelle n'est pas autosimilaire. Ainsi, ce sont bien trois concepts interdépendants qu'il ne faut surtout pas placer au même niveau. L'autosimilarité, par exemple, n'existe, strictement, quasiment pas dans les fractales naturelles. Les formes que l'on observe ne sont pas identiques lorsque l'on change d'échelle comme dans le cas de la courbe de Helge Van Koch. Généralement, elles ne sont que statistiquement semblables. Par contre, beaucoup de fractales observées notamment en géographie sont invariantes d'échelle, mais la simple observation de ces objets permet rarement de prétendre qu'ils soient autosimilaires. Par ailleurs, l'invariance d'échelle n'est qu'un cas particulier de lois beaucoup plus générales : les lois dépendantes d'échelle. En relativité d'échelle, l'invariance d'échelle va être traduite par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial \ln \varepsilon} = bL \Leftrightarrow L(\varepsilon) = L_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{D-D_T}$$

où L_0 est une longueur initiale ; ε_0 est une échelle de référence initiale à cette échelle ; D_T est la dimension topologique de l'objet mesuré (égale à 1 dans le cas considéré de la longueur d'une courbe) ; $D = D_T - b$ est la dimension fractale.

Cette loi ne se rencontre, strictement, que pour des objets mathématiques idéaux qui n'auraient aucune limite inférieure ni supérieure dans leur déploiement en échelle. Dans les fractales réelles, il doit vraisemblablement exister, au minimum, une transition fractal – non fractal.

La loi avec une transition fractal – non fractal (Nottale, 1993) s'obtient par diverses méthodes. Il s'agit d'une brisure « spontanée » de l'invariance d'échelle. Au-delà ou en deçà d'une échelle ou d'une gamme courte d'échelles, la géométrie de l'entité considérée n'est plus celle de Benoît Mandelbrot, mais celle d'Euclide ! L'équation différentielle permettant d'obtenir un tel objet fractal s'écrit :

$$\frac{\partial L}{\partial \ln \varepsilon} = a + bL \Leftrightarrow L(\varepsilon) = L_0 \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{D-D_T} \right]$$

Dans ce cas, la longueur L_0 est une véritable longueur caractéristique à partir de laquelle l'objet mesuré n'est pas fractal, puis à une certaine échelle ε_0 l'objet change de nature et devient fractal (Figure 1). On nomme une telle échelle, échelle de coupure. Entre les deux lois, ε_0 change de nature : dans le cas invariant d'échelle, ε_0 n'est pas absolu alors que dans le cas fractal – non fractal, il s'agit réellement de l'échelle à partir de laquelle la fractalité apparaît ou disparaît. Toutefois, il est fondamental de noter que la partie fractale existe dans la partie non fractale, mais elle ne « s'exprime » pas ; de même, la partie non fractale existe dans la partie fractale, mais elle n'est pas apparente d'où les pointillés sur la Figure 1.

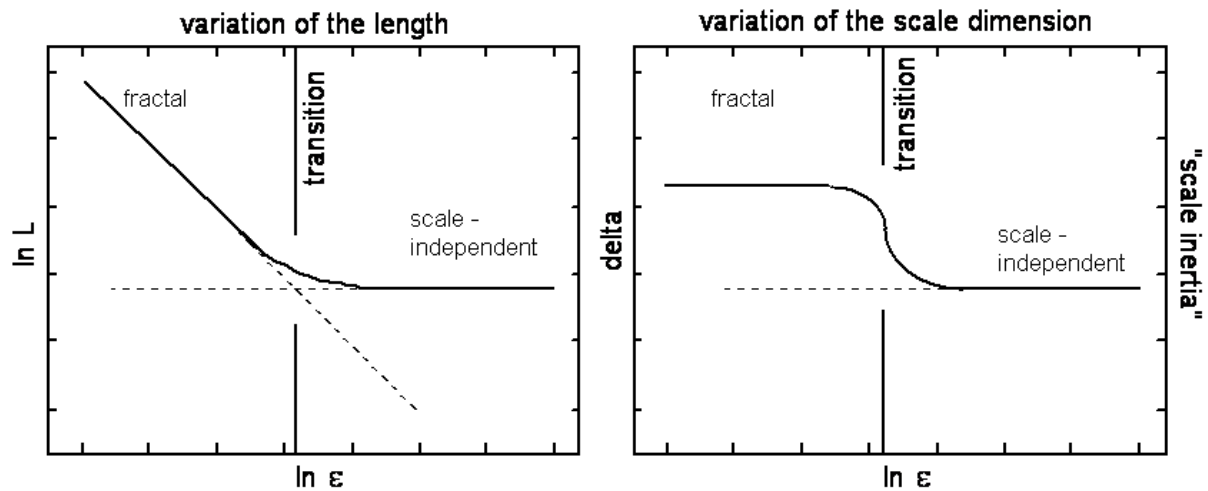


Figure 1. Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective ($\delta = D - 1$) dans le cas de lois « d'inertie d'échelle » (Nottale, 1993).

Enfin, on peut définir une loi avec deux transitions fractal – non fractal qui s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial \ln \varepsilon} = a + bL + cL^2 \Leftrightarrow L(\varepsilon) = L_0 \frac{\left[1 + \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{D-D_r} \right]}{\left[1 + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right)^{D-D_r} \right]}.$$

Cette loi est essentielle, voire fondamentale, car c'est elle que l'on retrouve généralement dans le calcul d'une dimension fractale de boîte standard (Lesne, 2004).

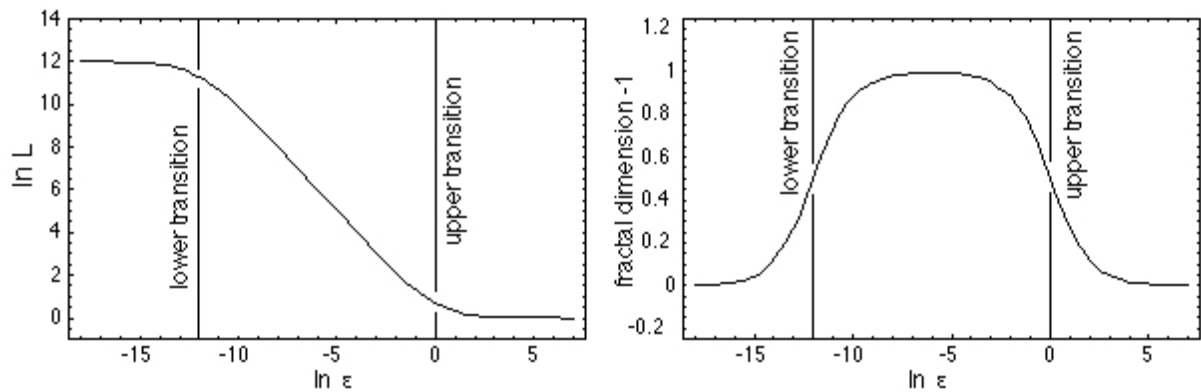


Figure 2. Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective ($\delta = D - 1$) dans le cas de lois avec deux transitions (Auffray, Nottale, 2008).

La transition fractale formalise donc des gammes scalaires spécifiques qui permettent de définir des échelles de coupure « lieu (x) » du changement de géométrie. En réalité, il existe deux types d'échelles de coupure : les échelles de coupure virtuelles qui sont les plus courantes, et qui sont généralement des artefacts de calcul, et les échelles de coupure réelles qui matérialisent un changement radical dans l'organisation scalaire. L'un des problèmes est qu'il n'existe pas réellement de méthode pour les différencier.

Comme cela a été indiqué ci-dessus, la relativité d'échelle ne peut être limitée au seul concept de transition fractal – non fractal. Il existe déjà d'autres possibilités : la dimension fractale variable *via* une force d'échelle, la dimension fractale divergente, la covariance d'échelle, *etc.*, auxquelles s'ajoutent des corrections que l'on peut apporter à ces trois lois comme la correction log-périodique ou l'utilisation de la multifractalité. Il est cependant probable que d'autres lois d'échelle sont à découvrir.

2. L'utilisation de ce concept pour les objets géographiques

La transition fractal – non fractal est très générale. C'est sur elle que l'on peut faire reposer l'explication fondamentale de la finitude perçue du monde. À un tout autre niveau, plusieurs exemples de mesures opérées sur des objets géographiques montrent l'existence de cette ou ces transitions. On peut toutefois distinguer trois cas, mais il faut rappeler que l'objectif principal de ces mesures est de mettre en évidence ces transitions dans différentes situations. Celles-ci seront évoquées que pour montrer l'intérêt d'une telle modélisation en géographie. Nous réservons la possibilité de faire ailleurs des développements thématiques.

2.1. Le cas du nuage de points

La répartition des chefs-lieux de communes dans le Nord de la France peut être considérée comme un nuage de point (Figure 3) ; dans ce cas la dimension topologique $D_T = 0$ et la variable dont on étudie la dépendance n'est plus une longueur, mais un nombre (Forriez, Martin, 2008 ; Martin, Forriez, 2008). Le nuage ainsi constitué montre une répartition assez régulière avec, très localement, des zones de plus faible densité et des alignements qu'il faut peut-être rapprocher du système de drainage, c'est-à-dire des vallées et des vallons. La question est alors de savoir sur quelles bases scalaires est constituée cette distribution spatiale. Pour cela, on a calculé la dimension fractale par comptage de boîtes carrées (Figure 4). Chacun peut alors constater qu'il s'agit d'un modèle avec deux transitions fractales – non fractales. La première se manifeste aux grandes échelles. Elle correspond au

fait que les carrés en fonction de leur taille, à ces grandes échelles, ne contiennent plus qu'un point par carré. Ainsi quoi que l'on fasse la valeur obtenue sera toujours égale au nombre total de chefs-lieux, soit 2 963. En effet, cette échelle de coupure correspond à un seuil au-delà duquel l'information du nuage de point en termes de résolution est minimale. En deçà de carrés de 1,5 km, il n'y a pas d'information. Ce résultat correspond effectivement à la valeur du cercle (un kilomètre de diamètre) tracé sur le S.I.G. initial pour représenter chaque chef-lieu. Ensuite, avec une transition très lente – ce qui laisse penser que l'échelle de coupure est « réelle » – on atteint une gamme d'échelles où se manifeste une quasi-invariance d'échelle où la dimension fractale s'établit à environ $1,6903 \pm 0,0042$. Au-delà, une seconde échelle de coupure semble se manifester. Elle correspond sans doute à une échelle de coupure virtuelle puisque son existence est justifiée par la taille de l'information : au-delà d'un certain carré, on va toujours compter le même nombre de carrés contenant de l'information quelle que soit la taille du carré.

En conséquence, sans occuper tous les points possibles de l'espace topologique, le nuage du regroupement principal des habitations sur un territoire communal s'avère particulièrement dense, ce qui définit un rapport au territoire spécifique d'un vieux pays agricole relativement densément peuplé. D'une certaine façon, c'est l'organisation spatiale et scalaire antérieure à la révolution industrielle du charbon et de l'acier que l'on étudie ici et il n'est absolument pas illogique qu'un établissement humain fondé sur l'utilisation d'une énergie solaire très diffuse tende à couvrir l'ensemble de l'espace géographique disponible d'autant que la productivité agraire était alors relativement faible. C'est donc la mémoire du vieux fond rural français de plaines et de bas plateaux qui refait ici surface. Deux siècles d'urbanisations historiquement exceptionnelles ne l'ont donc pas effacé !

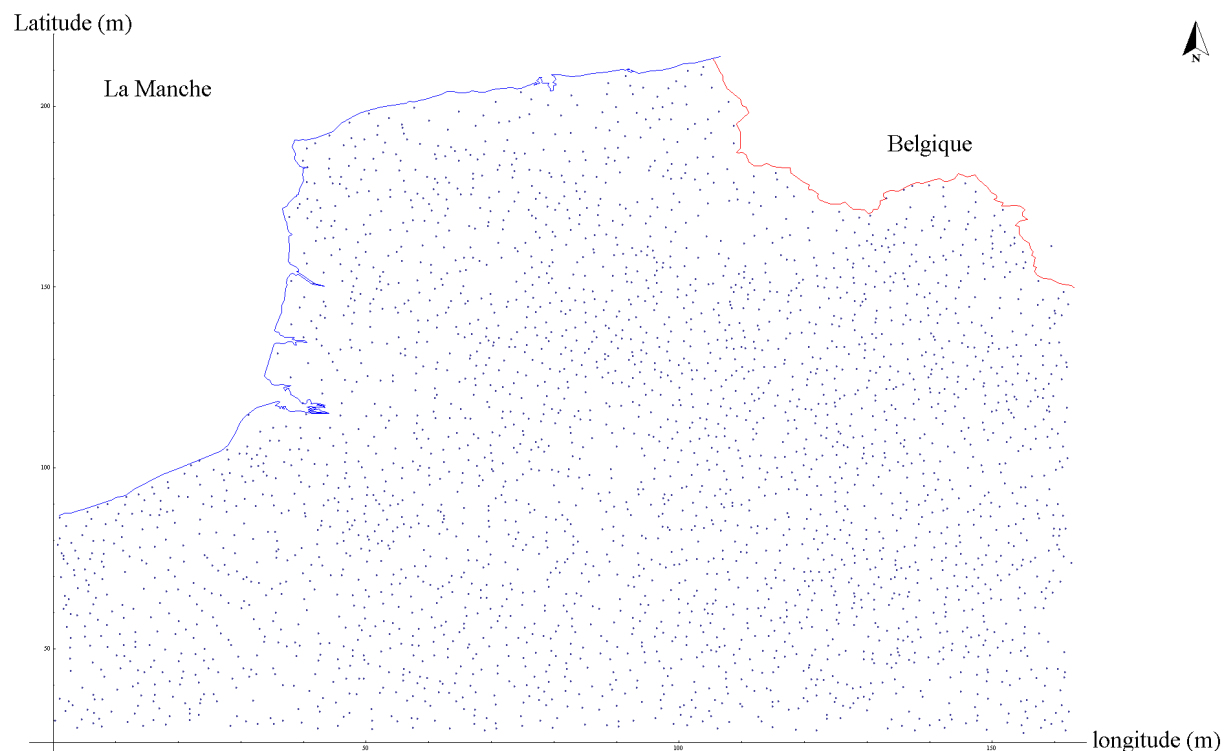


Figure 3. Répartition des regroupements d'habitations sur les territoires communaux dans le Nord de la France.

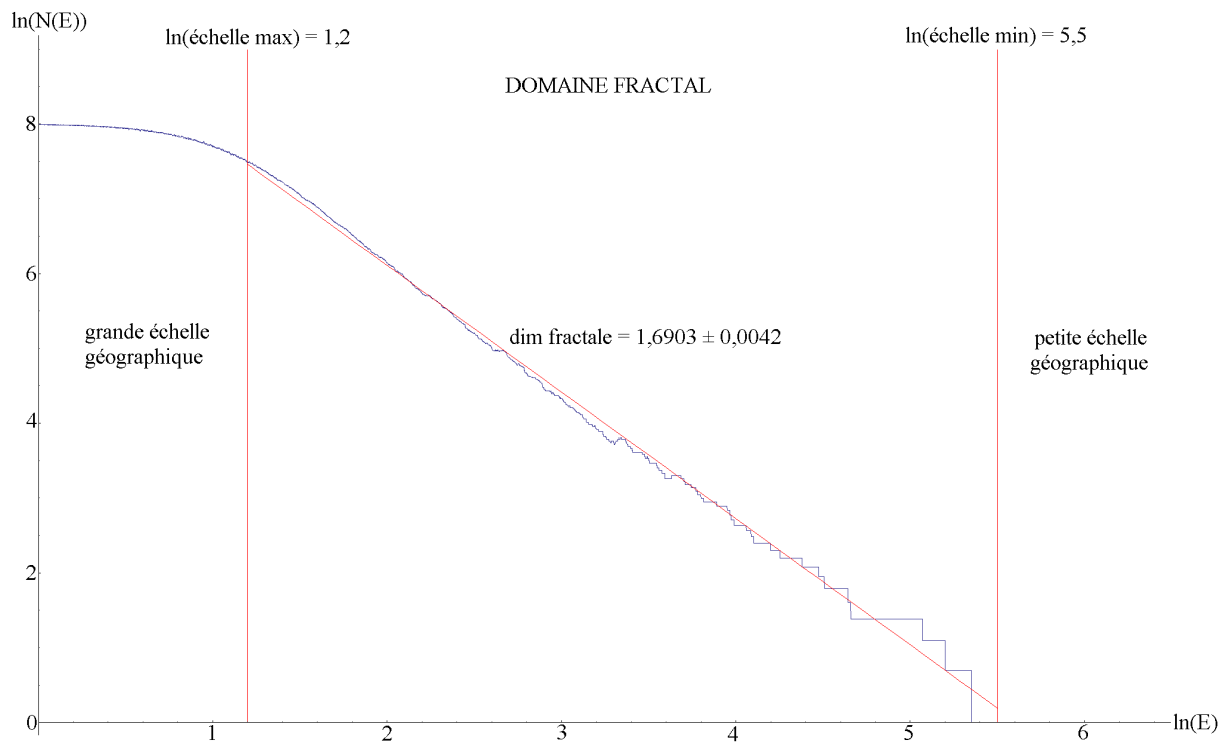


Figure 4. Dimension fractale obtenue par comptage de boîtes carrées sur le nuage de points matérialisant les regroupements d’habitations sur les territoires communaux du Nord de la France.

En toute rigueur, il faudrait choisir un seuil, puisque la transition fractal – non fractal est progressive, qui par exemple peut être défini par rapport à un taux de variation (Figure 9). Par ailleurs, si on observe en détail la courbe tracée sur le graphique bilogarithmique, il apparaît très clairement un mouvement convexo-concave, la concavité étant tout juste initiée à partir d’un point d’inflexion que l’on peut empiriquement situer en $\ln(\varepsilon) = 1,2$. Ceci permet de postuler l’existence probable d’une seconde échelle de coupure vers $\ln(\varepsilon) = 5,5$. Par ailleurs, la valeur de la pente est remarquable en cela qu’elle est, pour ce nuage de points, supérieure à la valeur de la dimension d’une courbe ou d’une droite euclidienne. Dans un tel cas, la limite supérieure possible étant 2 comme le montre la courbe de Peano. Tous les points lieux de cet espace seraient alors occupés.

À partir de là, il n’y a aucune raison de se limiter à des calculs dans un espace à deux dimensions. En fonction des données dont on dispose, et afin de traiter un nuage de points distribués dans un espace à trois dimensions, on a choisi de prendre en compte les entrées de cavités (généralement des avens) du plateau d’Albion que draine la Fontaine-de-Vaucluse (Gaubert, Le Falher, 1990 ; Gaubert, Le Falher, 1995). Le tome 1 (Gaubert, Le Falher, 1990) concerne un ensemble de neuf communes (de Ferrassières au nord à Gignac au sud) qui s’étend de l’ouest du Pays de Sault et de la commune de Saint-Saturnin-lès-Apt. Le tome 2 (Gaubert, Le Falher, 1995) couvre quinze communes de la partie ouest du massif soit environ de Fontaine-de-Vaucluse au sud-ouest au pays de Sault au nord-est, le Ventoux *stricto sensu* et ses contreforts devraient être inventoriés ainsi que la montagne de Lure, dans un ultime tome (carte *in* Gaubert, Le Falher, 1995, p. 148-149).

Il faut insister sur le fait que l’effectif de ces entrées renvoie à un état de l’art spéléologique au moment où a été publié l’inventaire. Autrement dit, leur nombre est appelé à croître. En d’autres termes, si la carte des agglomérations communales peut être considérée comme ne devant pas changer, du moins pas sur un temps historiquement court (siècle), il n’en est pas de même pour l’effectif des cavités en zone karstique. Ceci conduit à relativiser

les valeurs numériques obtenues dans ce karst même s'il est plus que probable que l'organisation scalaire d'ensemble soit stable. Il serait d'ailleurs intéressant, en prenant l'information disponible à différentes dates, de voir comment évoluent les valeurs numériques. Cela étant, il faut aussi rappeler que si ces entrées reconnues sont liées à l'activité spéléologique, leur position est, elle, à mettre en rapport avec des dynamiques exo et endo karstiques au premier rang desquelles il faut noter les processus locaux d'aplanissement en fond de poljé, de glyptogénèse plus classique en surface et de cavernement. Sans oublier bien sûr toutes les dynamiques géologiques qui contrôlent très largement l'énergie du système (hauteur de chute) et la qualité de l'encaissant (calcaire, dolomie, *etc.*) ni les éléments de la dynamique externe (hauteur de pluies, *etc.*). Pour résumer, l'existence de chaque point est liée à l'histoire spéléologique du secteur, alors que la position de chaque entrée est liée à l'histoire géologique du massif et au fonctionnement de l'ensemble (Martin, 1996 ; Martin, 1997). La formalisation de la répartition spatiale des entrées de cavités sur le plateau d'Albion (Figure 5) permet de calculer une dimension fractale par comptage de boîtes cubiques (Figure 6). La loi trouvée est une loi avec une transition fractal – non fractal.

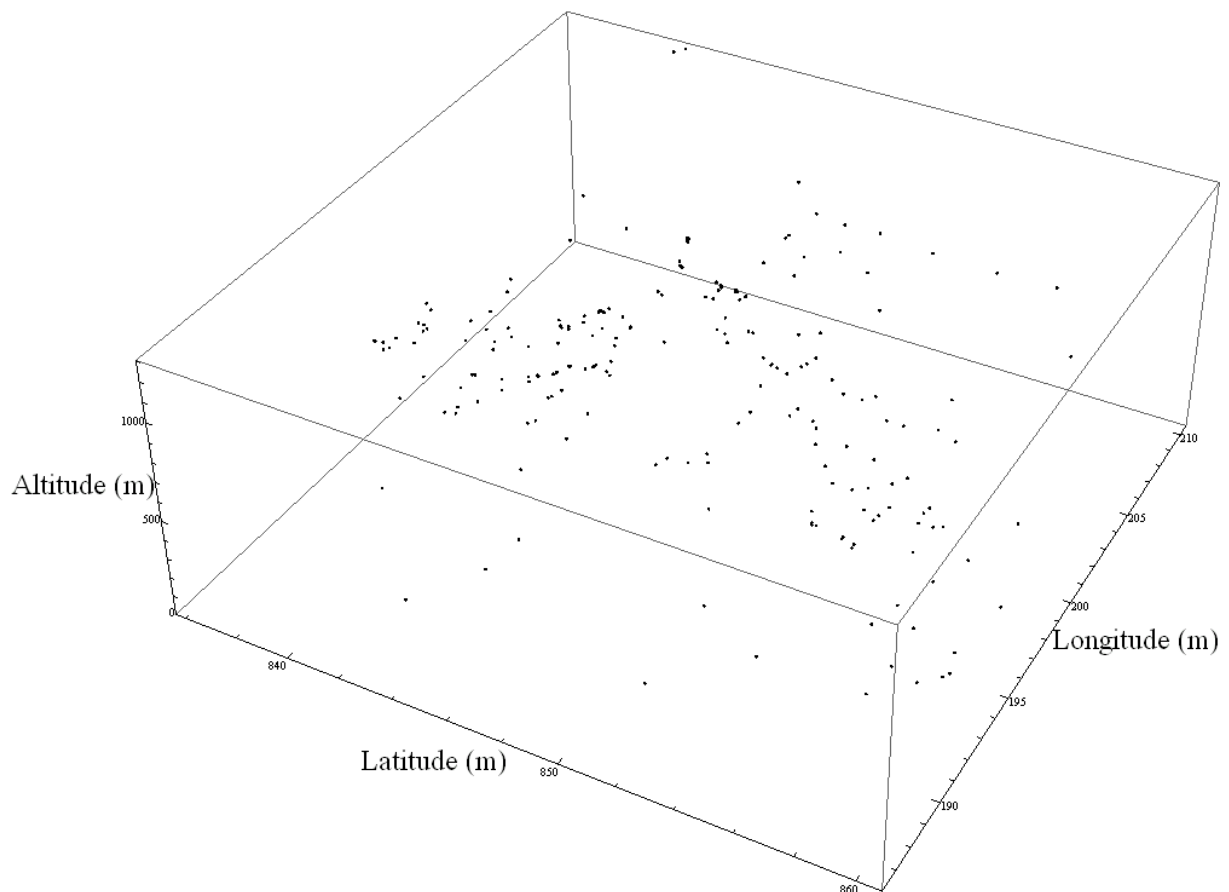


Figure 5. Répartition des entrées de cavités sur le plateau d'Albion (Vaucluse).

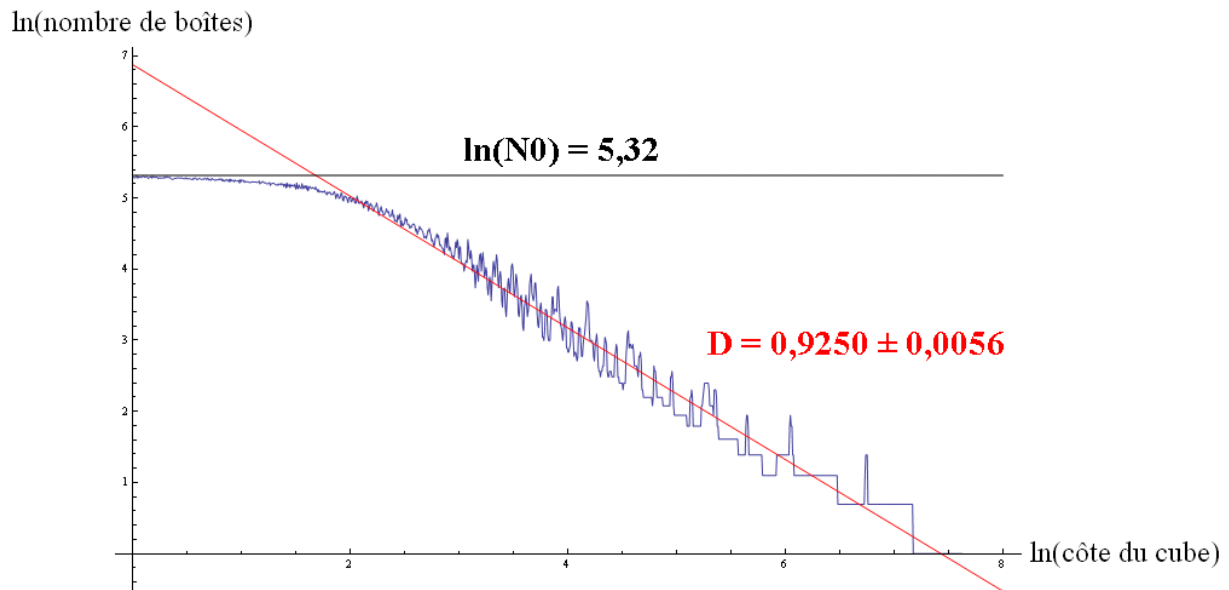


Figure 6. Dimension fractale par comptage de boîtes cubiques de la répartition des entrées de cavités sur le plateau d'Albion.

Sur la Figure 6, trois éléments remarquables sont à souligner :

- (1) la valeur limite du nombre de boîtes (environ 200) ;
- (2) le taux de la transition non fractal – fractal ce qui permet qu'elle s'effectue sur une gamme d'échelles courte ;
- (3) la valeur de la pente du modèle puissance ajustable $0,9250 \pm 0,0056$, ainsi que la valeur de $\ln(\varepsilon)$ pour un nombre de boîtes égal à 1.

Cette dernière valeur, ici voisine de $\ln(\varepsilon) = 7$, est évidemment à rapporter à la taille du plateau, donc à la taille de l'entité géographique : karst qui n'a pas été ici pris dans toute son ampleur. Cela étant l'extension d'un karst n'est évidemment pas infini et il y aura toujours une limite donc du nombre maximal de boîtes, sauf à intégrer progressivement ce qui est autre sur ses marges.

La valeur de l'exposant, qui correspond à une dimension fractale en situation d'invariance d'échelle sur une gamme scalaire donnée, est, elle, comme attendu, inférieure à 1. Reste à savoir si cette valeur a pu changer en fonction des découvertes. Une suppression aléatoire d'entrées pourrait peut-être répondre à cette question en l'absence de données historiques.

La transition que l'on a dite courte permet de définir le nombre de boîtes maximal au-delà duquel leur effectif ne change pas. Ainsi, ce n'est qu'à ce niveau scalaire là que la question de la densité prend un sens.

2.2. Le cas avec un élément réticulaire

Le réseau hydrographique amont et pérenne des Gardons tel que le définit l'I.G.N. dans la base de données Carthage (Figure 7) peut servir de base au calcul d'une dimension fractale par comptage de boîtes carrées (Figure 8 et Figure 9) dans un espace topologique à deux dimensions (Rodríguez-Iturbe, Rinaldo, 1997 ; Turcotte, 1997). Il est ici fait abstraction des hauteurs. Il s'agit donc d'étudier une projection. La Figure 8 usuelle, en particulier en géographie, montre bien deux domaines l'un correspondant aux plus grandes échelles ($0 < \ln(\varepsilon) < \ln(4,5)$) et l'autre correspondant aux plus petites ($\ln(4,5) < \ln(\varepsilon) < \ln(9)$) avec un angle net au voisinage de $\ln(\varepsilon) = 4,5$ l'ajustement d'un modèle puissance sur les grandes échelles livre un exposant très proche de 1 qui correspond donc à la dimension générale pour

les parties du réseau déployées à ces échelles. Au-delà du point d'inflexion qui est une échelle de coupure, la pente change et atteint $1,648 \pm 0,008$ soit une valeur très proche de celle du nuage des regroupements d'habitations sur un territoire communal. D'une certaine manière, on pourrait comparer ces deux « présences » relatives et noter que l'une (les entrées des cavités) est presque une équirépartition alors que l'autre (talwegs et crêtes) renvoie à une différenciation spatiale plus forte alors même que les deux dimensions fractales sont semblables (Martin, 1999). Ceci permet encore de souligner la spécificité de cette approche scalaire par rapport à une approche spatiale classique que formalise l'analyse spatiale en géographie. On soulignera avec force que la transition non fractale – fractale s'effectue ici sur une très petite gamme d'échelles contrairement aux cas précédents. La question est donc d'une part de savoir pourquoi et d'autre part d'établir si c'est une coupure réelle ou virtuelle, car liée aux données.

Il faut noter que la gamme scalaire non fractale est longue et qu'il n'apparaît pas de courbure. En d'autres termes en deçà du seuil correspondant à la coupure les sous-parties du réseau hydrographique se présentent comme des segments de droite, et cela, en tous lieux du réseau en fonction de l'information dont on dispose. Ces segments de talweg ne peuvent donc pas être expliqués par la pente (lorsque celle-ci est forte, le cheminement est rectiligne) dans la mesure où elle est certes forte en amont, mais pas en aval. Par ailleurs, d'un point de vue dynamique, on sait bien que le changement entre un écoulement aréolaire, en nappe et un écoulement linéaire en rigole qui produit la glyptogenèse, donc l'affirmation des talwegs, se fait à des échelles bien plus grandes donc de façon bien plus locale et en fonction d'un réseau de drainage bien plus développé que le réseau pérenne. C'est le réseau fonctionnant exceptionnellement qui dépend lui de l'intensité des précipitations et de l'état de saturation des sols et/ou des formations superficielles qu'il faudrait pouvoir étudier, ce qui n'est guère possible. C'est vraisemblablement alors qu'apparaîtrait le passage entre les morphologies aréolaires et linéaires.

À partir de là, et dans l'attente de travaux sur le réseau temporaire et avec des données à bien plus grande échelle, il semble préférable de considérer cette échelle de coupure comme étant virtuelle et liée aux conditions techniques de la cartographie tout en imaginant assez bien que les outils utilisés : le *rotring* un temps, la table traçante aujourd'hui, font émerger brusquement une échelle au-dessous de laquelle l'information sur l'irrégularité de l'objet réseau est perdue. Cette remarque explique peut-être les nombreuses analyses où apparaissent deux segments ainsi reliés. Ajoutons pour finir que la très faible fluctuation des dimensions fractales sur cette gamme scalaire comme le montre la Figure 9 semble très curieuse. Cette figure permettant de préciser l'ampleur un peu plus grande de la petite gamme scalaire de transition.

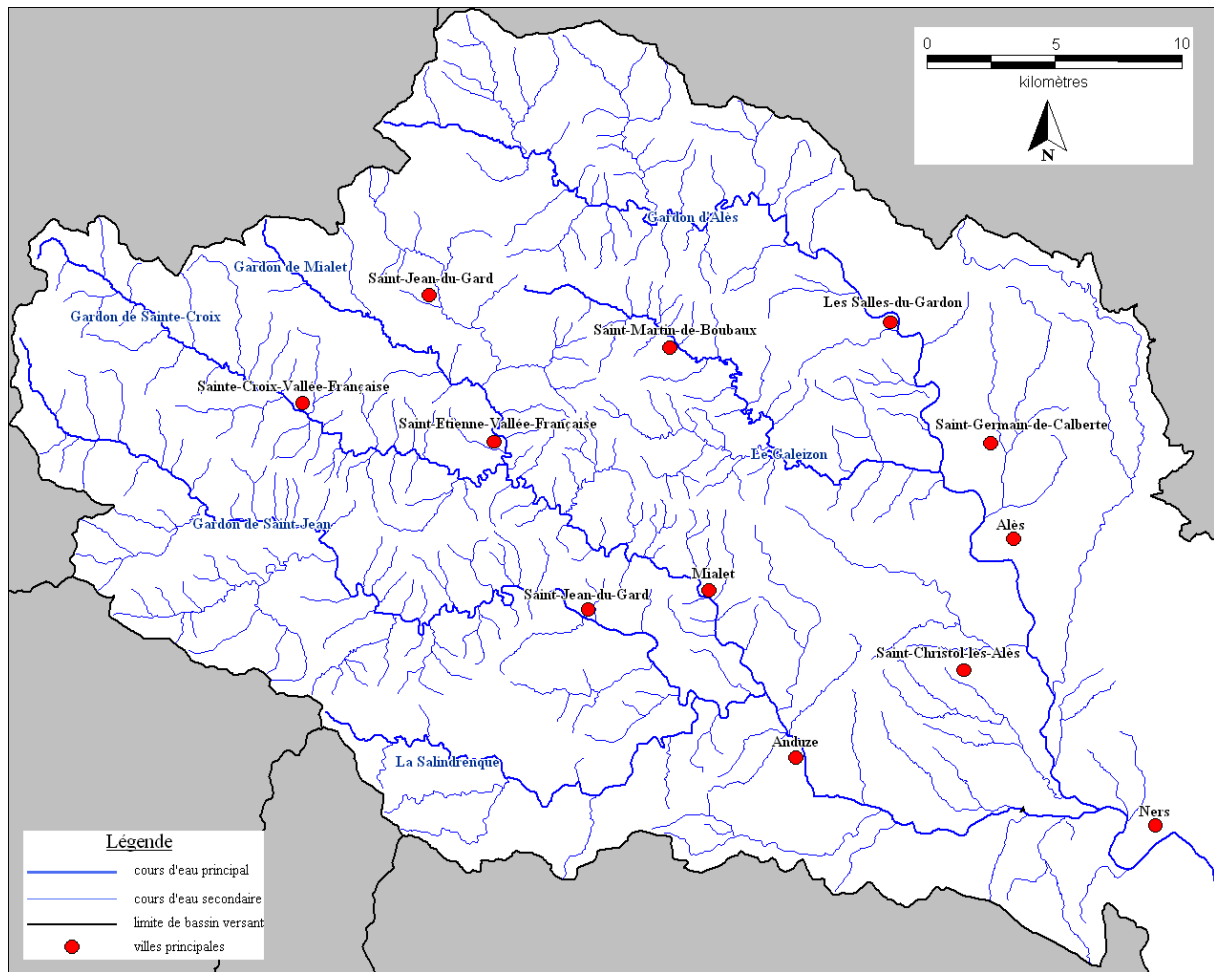


Figure 7. Le réseau hydrographique pérenne des Gardons en amont du Pont de Ners (Gard).

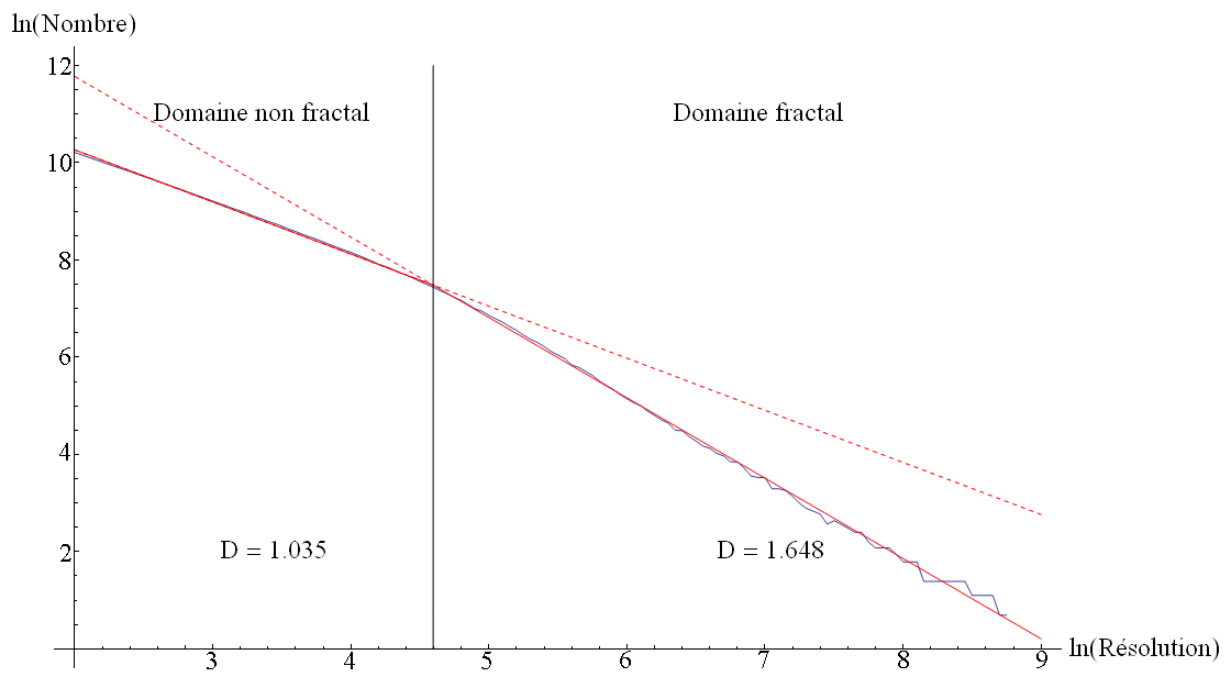


Figure 8. Dimension fractale par comptage de boîtes carrées du réseau arborescent pérenne des Gardons en amont du Pont de Ners (Gard)

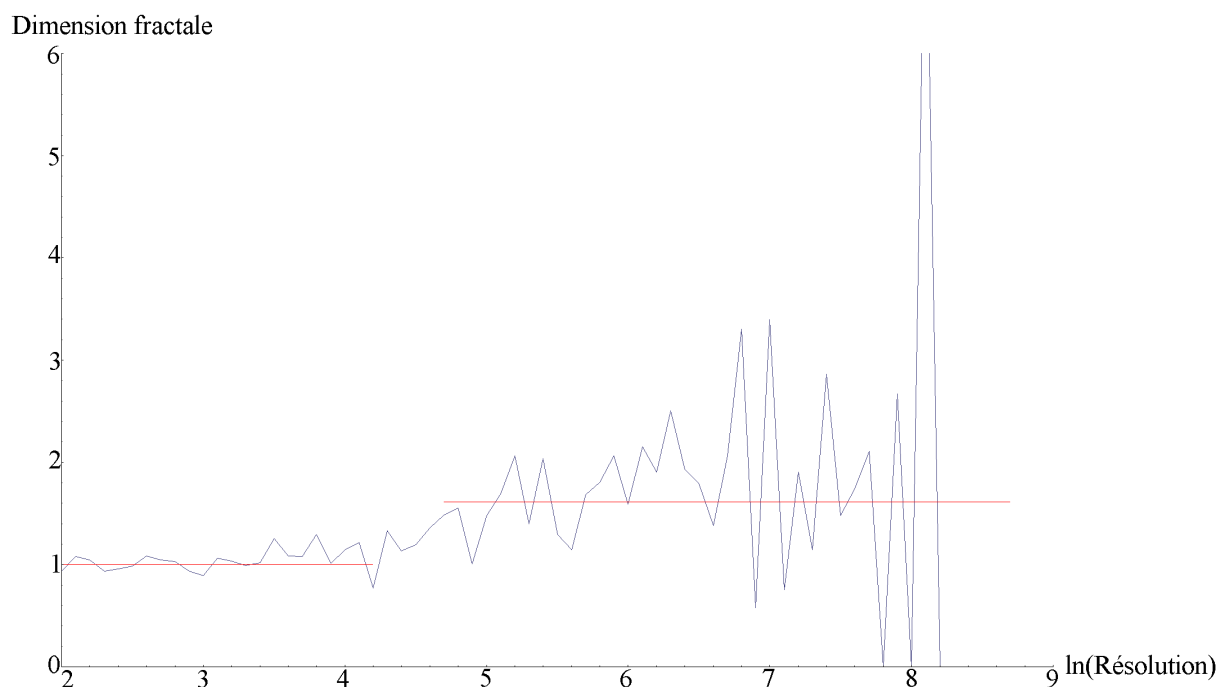


Figure 9. Variations locales de la dimension fractale par comptage de boîtes carrées du réseau des Gardons.

2.3. Le cas d'une organisation aréolaire

La Figure 10 représentant la ville d'Avignon, a été « capturée » en mars 2008 sur des images en ligne du site Mappy proposées à différentes échelles afin de se situer dans un ensemble urbain. La résolution est très fine puisqu'un pixel équivaut à un mètre. Dans ce cas, la ville est définie comme étant le négatif surfacique du réseau intra-urbain, et non du bâti comme l'ont proposé Michael Batty et Paul Longley (1994) ainsi que Pierre Frankhauser (1994 ; 1997), ce qui explique l'image peu conventionnelle présentée ci-dessous. L'objectif est ici de voir comment se structurent scalairement des surfaces anthropiques à différentes échelles. Un calcul de dimension fractale par comptage de boîtes carrées a été réalisé sur ce qui apparaît en blanc (Figure 11).

Bien que les transitions ne soient pas présentes sur le graphique pour des raisons techniques – le temps de calcul étant multiplié par deux –, il s'agit bien d'une loi avec deux transitions, les points extrêmes se répétant à l'infini (boîtes ayant atteint le niveau du pixel, boîtes couvrant toute la surface). Les échelles de coupure sont : un mètre aux grandes échelles, soit 24 154 952 pixels, et trois kilomètres (soit 1 « gros pixel » de 3 000 mètres de côté) aux petites échelles. À l'instar du nuage de points des chefs-lieux de communes, la transition aux petites échelles est virtuelle ; par contre, dans ce cas la transition aux grandes échelles est elle aussi virtuelle, car, au-delà de la surface très grossière obtenue, il existe d'autres structures qui pourraient être présentées sur la carte à cette résolution (le bâti par exemple).

Sur la gamme d'échelles investiguée du mètre à trois kilomètres et sur ces données qui sont particulièrement généralisantes puisque le bâti ainsi défini fait abstraction de très nombreux objets urbains comme les cours ou les jardins, la ville apparaît globalement comme invariante d'échelle, ce qui n'est pas le cas même localement sur des hexagones de taille

modeste (400 m de centre à centre) limités au bâti *stricto sensu* comme l'a montré Safouk Al Khalifef (2008). Bien évidemment, en deçà d'une certaine échelle, on sort d'une problématique urbaine pour entrer dans celle des architectes, mais encore faut-il que les données portent cette information. À l'autre extrémité de la gamme d'échelles, la transition semble apparaître la transition attendue entre ce qui relève du domaine urbain et ce qui ressort de l'espace rural, mais cela serait à vérifier sur une base territoriale plus large. Les données mériteraient à ce niveau d'être complétées d'autant que la ville d'Avignon ici considérée est une ville administrative donc limitée par le Rhône, alors que le Grand-Avignon franchit cette frontière qui fut longtemps politique et qui reste psychologique.

Cet exemple montre donc, et c'est tout son intérêt, que la qualité des données certes appréciées au niveau de l'échelle la plus grande, mais aussi et surtout envisagée en fonction de l'attribut que l'on souhaite analyser, est fondamentale. Le plan Mappy est très bien pour trouver une localisation, mais en aucun cas il ne permet d'étudier la structuration spatiale d'un attribut très spécifique comme le bâti urbain. Cela étant, il permet d'apporter un éclairage certain et soulever différentes questions.

Ceci pose donc la question fondamentale de la conceptualisation des attributs dont la structure spatiale et scalaire doit être étudiée. Les trois cas précédant n'étaient, de ce point de vue, guère ambigus. Une bouche d'aven ou une entrée de grotte, c'est un point d'un territoire ; un réseau de drainage, c'est un ensemble de sommets et d'arcs, *etc.* Néanmoins, qu'est-ce qu'une ville ? Qu'est-ce que le bâti d'une ville ? On voit immédiatement que les réponses sont multiples et qu'elles ouvrent sur une généralisation qui ne permettra de faire ressortir que la « porteuse » de l'organisation scalaire, à savoir l'invariance d'échelle.

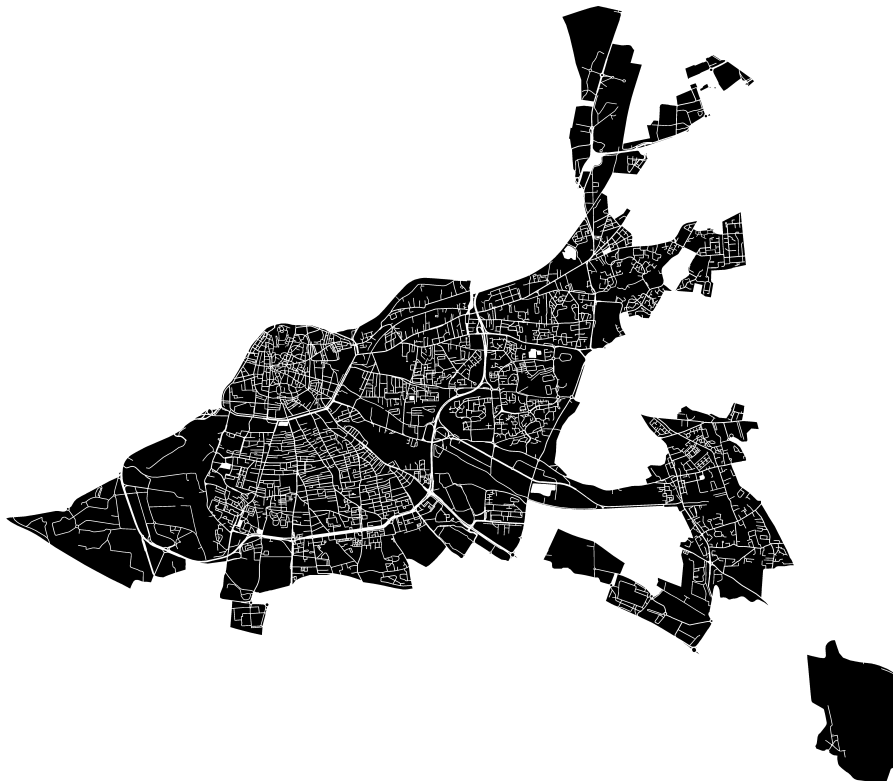


Figure 10. Représentation de la ville d'Avignon

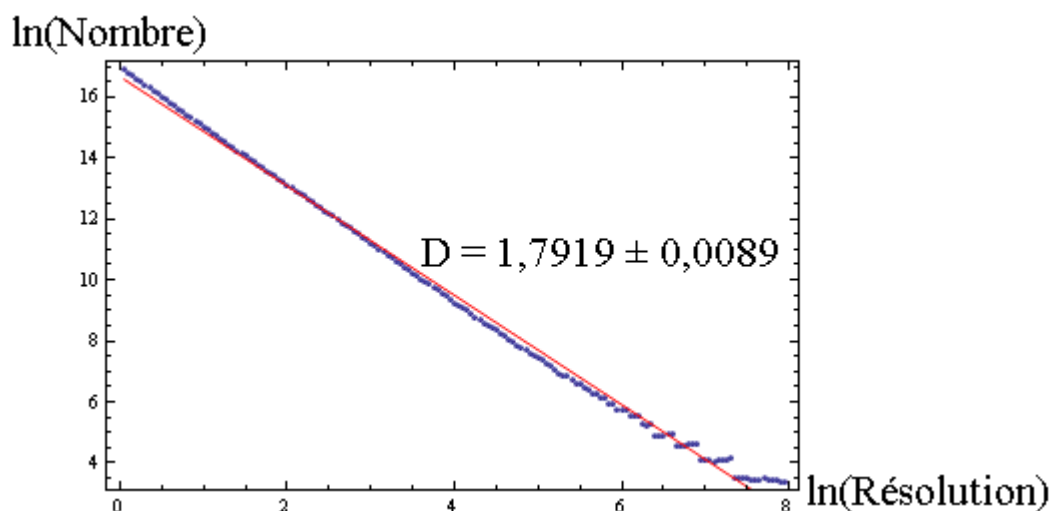


Figure 11. Calcul de la dimension fractale par comptage de boîtes carrées (ville d'Avignon).

3. Les conséquences en géographie de l'existence d'une telle transition

En conclusion, il apparaît donc que l'on dispose d'un cadre formel issu de la relativité d'échelle qui se décline en quelques lois remarquables. Si la situation d'invariance d'échelle apparaît facilement sur des gammes d'échelles plus ou moins importantes sur les exemples traités retrouvant en cela bien des travaux antérieurs, il n'en est pas de même pour la transition fractal – non fractal. Très clairement, il apparaît deux types de problèmes. Le premier est lié à la quantité d'information disponible qui peut conduire à faire apparaître des transitions bien réelles ou des artefacts. Il faudra à l'avenir préciser ce point et être capable de dire si l'on est dans l'un ou dans l'autre cas. La seconde difficulté est peut être plus délicate et subtile en ce sens qu'elle renvoie à la notion d'attribut en un lieu, lui-même dépendant de la problématique que l'on pose qui doit être suffisamment précise et performante pour dégager un attribut incontestable comme peut l'être une altitude pour un relief. Reste que l'ajustement empirique de certaines lois théoriques sur de nombreux exemples devrait faire émerger des valeurs numériques pour les différents paramètres auxquels il faudra donner un sens géographique et il en sera de même pour les modèles eux-mêmes (sans, avec une ou avec deux transitions).

Les fractales sont donc fondamentales en géographie, car elles montrent qu'une mesure aussi précise soit-elle n'est jamais absolue ; elle dépend de l'échelle. C'est le grand « impensé » de la géographie. Cette dépendance peut être négligeable si l'on est dans les échelles non fractales, c'est-à-dire des gammes de niveaux pour lesquels l'information ne varie pas entre les échelles. La valeur est, par exemple, toujours 1, 2, 3, 4, *etc.* Toutefois, cette situation est généralement l'exception. En conséquence, « l'entrée » ou la « sortie » en fractalité d'une organisation scalaire fractale est essentielle à penser. Aussi, localiser les échelles de coupure doit être une préoccupation essentielle. La fractalité enseigne même que, plus une mesure est précise, plus elle risque de diverger très rapidement ! Alors que, en règle générale, c'est l'effet contraire qui est recherché. Autrement dit, plus la résolution est élevée, plus la gamme d'échelles non fractale sera courte.

Lorsqu'une transition fractal – non fractal apparaît, l'objet possédera un domaine où sa longueur, sa surface ou son volume, en fonction de la ou les dimensions calculées, ne seront plus être constants, car celles-ci dépendront de la résolution mise en œuvre. Ceci montre bien que toute analyse spatiale sur une configuration fractale est scalairement dépendante et qu'il faut donc explicitement entrer ces questions de résolutions dans les considérations

développées. La dépendance d'échelle est donc un phénomène trop central dans l'analyse d'un espace géographique hétérogène pour que la géographie s'en détourne.

La transition fractal – non fractal est donc fondamentale pour comprendre l'organisation scalaire de l'hétérogénéité spatiale. Ce concept de transition fractal – non fractal permet au final de déplacer le problème de la fractalité d'un simple calcul de la dimension fractale (qui demeure fondamental) à une distinction entre échelle de coupure réelle et échelle de coupure virtuelle.

Bibliographie

Al Khalifeh S. (2008). *L'Apport de la télédétection dans l'observation de l'étalement urbain. L'exemple de l'agglomération d'Avignon – France*. Avignon : Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse, thèse de doctorat de géographie, 417 p.

Auffray C., Nottale L. (2008). « Scale relativity theory and integrative systems biology. 1. Founding principles and scale laws », *Progress in biophysics and molecular biology*, n°97, p. 79-114. http://www.luth.obspm.fr/_luthier/nottale/arPBM08AN.pdf

Barnsley M. (1988). *Fractals everywhere*. Londres : Academic Press, XIII-533 p.

Batty M., Longley P. (1994). *Fractal cities. A geometry of form and function*. Londres : Academic press, XXII-394 p.

Bourgine P., Lesne A. (s.d.) (2006). *Morphogenèse. L'origine des formes*. Paris : Belin, coll. « Échelles », 352 p.

Dauphiné A. (1995). *Chaos, fractales et dynamiques en géographie*, Paris : Reclus, 136 p.

Dauphiné A. (2003). *Les théories de la complexité chez les géographes*, Paris : Economica, coll. « Anthropos », 248 p.

Dubois J. (1995). *La dynamique non linéaire en physique du globe*. Paris : Masson, 265 p.

Forriez M. (2005). *La motte de Boves permet-elle de mener une réflexion épistémologique commune en archéologie, en géographie et en histoire ?*, Arras : Université d'Artois, Mémoire de master 1 d'histoire et de géographie, 156 p.

Forriez M. (2007). *Construction d'un espace géographique fractal. Pour une géographie mathématique et recherche d'une théorie de la forme*, Avignon : Université d'Avignon, Mémoire de Master 2 de géographie, 202 p.

Forriez M., Martin, P. (2008). « De l'utilité de la théorie de la relativité d'échelle de Laurent Nottale. Partie 2. Application d'un modèle scalaire spatio-temporel », in *Géopoint 2006*, Avignon : Groupe Dupont et UMR Espace 6012 du CNRS éditeurs, 305-312 p.

Frankhauser P. (1994). *La fractalité des structures urbaines*. Paris : Économica édition, coll. « Anthropos », 291 p.

Frankhauser P. (1997). « L'approche fractale. Un nouvel outil de réflexion dans l'analyse spatiale des agglomérations urbaines », *Population*, vol. 52, n°4, p. 1005-1040.

Gaubert G., Le Falher B. (1990). *Hydrologie et spéléologie des territoires alimentant en eau la fontaine de Vaucluse*, tome 1, *Les cavernes d'Albion*, Saint-Christol-d'Albion : Association de Recherches et d'Études Hydrologiques du Plateau d'Albion, 230 p. et 2 plans hors-texte.

Gaubert G., Le Falher, B. (1995). *Hydrologie et spéléologie des territoires alimentant en eau la fontaine de Vaucluse*, tome 2, *Les arcanes du Vaucluse*, Saint-Christol-d'Albion : Association de Recherches et d'Études Hydrologiques du Plateau d'Albion, 338 p.

Korvin G. (1992). *Fractal models in the earth sciences*. Amsterdam : Elsevier science publisher B.V., 396 p.

Laguës M., Lesne A. (2003). *Invariances d'échelle. Des changements d'état à la turbulence*. Paris : Belin, 352 p.

Lam S., De Cola L. (1993). *Fractal in geography*. Englewood Cliffs, New Jersey : PTR Prentice-Hall editor, 308 p.

Lesne A. (2004). « Fractales : les limites du réel », *Tangente. L'aventure mathématique. Les Fractales. Art, nature et modélisation*, HS n°18, Paris : Pole, p. 102-108.

Lyautard J.-F. (1979). *La condition postmoderne*, Paris : Éditions de Minuit, 110 p.

Mandelbrot B. (1967). « How long is the coast of Britain ? Statistical self – similarity and fractional dimension », in *Classics on fractals*, edited by G. E. Edgar, 1993, Reading, Massachusetts, USA : Addison – Wesley publishing company, p. 351-358.

Mandelbrot B. (1975). *Les objets fractals*, Paris : Flammarion, 208 p.

Mandelbrot B. (1977). *The fractal geometry of nature*, New York : W. H. Freeman and Compagny, 460 p.

Mandelbrot B. (1982). *The fractal geometry of nature*, San Francisco : W.H. Freeman, 468 p.

Mandelbrot B. (1997). *Fractales, hasard et finances (1959-1997)*, Paris : Flammarion, 246 p.

Martin, P. (1996). « De l'organisation des formes superficielles et souterraines du massif karstique de la Sainte Baume (B. du Rh, Var ; Fr.) ». *Ukpic* n°8, Univ. de Fribourg, Suisse : M. Monbaron et S. Fierz éditeurs, p. 45-64.

Martin P. (1997). « Structures hiérarchiques dans le karst de la Sainte Baume (B. du Rh, Var ; France) ». 12e Congrès de spéléologie, *Symposium 7*, Vol. 1, Union internationale de spéléologie et Société suisse de spéléologie éditeurs, p. 129-132.

Martin P. (1999). « Modélisation des structures spatiales du karst. Acte du colloque Karst 1999, Grands Causses – Vercors », in *Études de géographie physique, Travaux 1999*. Supplément au n°XXVIII, CAGEP – URA 903 du CNRS, Université de Provence, p. 135-140.

Martin P., Forriez M. (2008). « De l'utilité de la théorie de la relativité d'échelle de Laurent Nottale. Partie 1. Recherche d'un modèle scalaire spatio-temporel », in *Géopoint 2006*, Avignon : Groupe Dupont et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, 297-303 p.

Nottale L. (1993). *Fractal space-time and microphysics. Towards a theory of scale relativity*, Singapour : World Scientific, 348 p.

Nottale L. (1997). « Scale relativity », in Dubrulle, B., Graner, F., Sornette, D., *Scale invariance and beyond*, EDP Sciences / Springer, p. 249.

Nottale L. (1998). *La relativité dans tous ses états. Au-delà de l'espace-temps*, Paris : Hachette, coll. « Sciences », 320 p. [réédité en 2000, coll. « Pluriel »].

Nottale L., Chaline J., Grou P. (2000). *Les arbres de l'évolution. Univers, vie, société*, Paris : Hachette, coll. « Sciences », 380 p.

Nottale L. (2001). « Relativité d'échelle et morphogenèse », *Revue de Synthèse*, t. 122, 4^e S., n°1, p. 93-116

Nottale L. (2002). « Relativité d'échelle, non différentiabilité et espace-temps fractal », in Abry, P., Gonçalves, P., Levy Vehel, J., *Traité IC2. Traitement du signal et de l'image. Lois d'échelle, fractales et ondelettes*, vol. 2, chap. 7, Paris : Hermès-Lavoisier, p. 233-265.

Nottale L. (2009). « Fractals in the quantum theory of space-time », in *Encyclopedia of complexity and systems science*, Springer.

Rodríguez-Iturbe I., Rinaldo A. (1997). *Fractal river basins. Chance and self-organisation*, Cambridge : Cambridge University Press editor, XIV-547 p.

Russ J. (1994). *Fractal surfaces*. Plenum press, New York : 309 p.

Turcotte D. (1997). *Fractals and chaos in geology and geophysics*. Cambridge : Cambridge University Press editor, second édition, 398 p.

Xie H. (1993). *Fractals in rock mechanics*. Rotterdam : Éditions Balkema, Geomechanics research series, n°1, 453 p.