

Structures hiérarchiques en géographie : des modèles linéaires aux modèles non linéaires (lois de puissance et corrections log-périodiques)

FORRIEZ M.¹, MARTIN Ph.²

Texte corrigé et soumis le 30/06/2008 aux *Rencontres ThéoQuant 2007*

1 : Université d'Avignon, case 17, 74 rue L. Pasteur, 84029 Avignon cedex (maxime.forriez@wanadoo.fr) ; 2 : Université d'Avignon, UMR ESPACE 6012 du CNRS, case 17, 74 rue L. Pasteur, 84029 Avignon cedex (phmartin@club-internet.fr).

Résumé.

La loi de puissance (et spécialement la loi rang-taille) est utilisée dans de nombreuses modélisations empiriques en géographie. Souvent, on peut observer une oscillation des points expérimentaux sur les graphiques bi logarithmiques. Jusqu'alors ces oscillations étaient interprétées comme des artefacts. Grâce à des développements mathématiques récents, on peut modéliser ces fluctuations par une loi fractale log-périodique comme nous allons le montrer.

Mots clés. Géographie, invariance d'échelle, covariance d'échelle, dépendance d'échelle, loi fractale log-périodique.

Abstract.

The power laws, and specially the rank size laws, are everywhere in many empiric models in geography. But, we can see often oscillations in this experimental curve. Until then, these oscillations had interpreted as artefacts. Actually, thanks to mathematic laws we can model theses fluctuations with a fractal log-periodic law. We are going to demonstrate in this paper.

Keywords. Geography, scale invariance, scale covariance, scale dependence, fractal log-periodic law.

1. Introduction

Nous utilisons, en géographie, depuis près d'un siècle une « loi » dite : rang-taille attribuée à Georges Kingsley Zipf (1932 ; 1935 ; 1941 ; 1949) dans sa version discrète, et à Vilfredo Pareto (1896) dans sa forme continue (Pumain, 2006a). Cette relation empirique montre que si l'on reporte une variable V , par exemple la population urbaine en fonction du logarithme de l'inverse du rang r_n , la distribution s'ajuste à une loi de puissance de la forme :

$$V_n = V_0 \left(\frac{1}{r_n} \right)^\delta \quad (1).$$

Plus tard, cette loi empirique a été théorisée comme une « loi fractale » par Benoît Mandelbrot (1975), et l'exposant de « Zipf » est devenu une dimension fractale. Nous avons donc là une loi d'échelle. Ce qu'apportent les travaux de B. Mandelbrot, outre l'introduction de cette relation empirique dans le corpus théorique de la géométrie fractale sur lequel nous aurons à revenir, c'est un éclairage sur la logique profonde de cette structure d'ordre dont l'ubiquité est avérée. « Quelque chose est l'inverse de quelque chose d'autre » note ce mathématicien (1997, p.193) qui ne fait que rappeler une figure classique : ce qui est petit se trouve en grand nombre et ce qui est grand est en petit nombre. Le classement réalisé sur la distribution expérimentale ne fait bien sûr que mettre en évidence les modalités de variation des différences inscrites dans la série statistique, modalités qui seront rapprochées de celles manifestées par la variation du rang.

En fait la distribution expérimentale est comparée à une distribution théorique dont le seul intérêt réside dans sa structure interne. Celle-ci est souvent exprimée par le rang mais aussi par des rétro fréquences. Les calculs montrent que l'exposant δ est souvent proche de 1 comme en témoignent différents travaux expérimentaux ou théoriques (Schroeder, 1991, Bak, 1999). Il faut rappeler aussi que les objets mesurés pour constituer la distribution peuvent être des objets définis par leur caractère spatial comme la surface couverte par une ville et/ou par leurs caractéristiques fonctionnelles comme par exemple le nombre de personnes habitant une agglomération.

Il en est de même pour des objets relevant de la géographie physique tant pour les types d'objets spatiaux (surface des bassins versants) qu'a-spatiaux (débit moyens de bassins versants). L'exemple le plus connu étant peut-être celui de la magnitude des tremblements de terre.

Dans cette perspective la question est donc de savoir si le modèle puissance pour ne pas l'appeler loi est seulement une bonne solution de description, une bonne solution pour résumer l'information (ou une partie de l'information) contenue dans la distribution - auquel cas c'est un outil à ranger au même rang que les régressions ou les analyses factorielles - ou si c'est la manifestation de relations, de tensions, intrinsèquement liées au fonctionnement et aux contraintes structurelles qui transcendent le fonctionnement de la nature et de la sphère anthropique ? **Ce problème est un questionnement ancien comme le souligne Denise Pumain (2006a) : « Que dans tous les pays du monde et à toutes les époques, il y ait une hiérarchie urbaine telle que le nombre des villes suit une progression géométrique inverse de leur taille, constitue une caractéristique remarquable, invariante par rapport aux systèmes politiques, économiques et culturels ».** Dans cette seconde hypothèse qui est aussi la nôtre il est logique de chercher à faire entrer ce modèle puissance et ses avatars dans un cadre théorique. **Avec la première hypothèse cela n'a guère de sens.**

Il est peut-être ici utile de rappeler les modèles isométriques et allométriques de croissance qui mettent en œuvre une dynamique portée par un flux de matière, d'énergie, d'information dans un cadre qui est celui d'une compétition, d'une concurrence rendue inévitable en partie par le caractère limité des ressources et/ou la finitude de l'espace tangible. Ceci peut être décliné pour le réseau urbain caractérisé soit par la taille surfacique des organismes, soit par le niveau de sa population. Il n'est dès lors pas étonnant d'obtenir une relation puissance entre cette surface et la taille de la population (Le Bras, 2000, p.112). La modification de la hiérarchie urbaine

correspondant en fait à une variation soit unitaire, soit locale - en termes d'échelles -, du taux de croissance urbaine (Guérin – Pace, 1993).

Cela étant le modèle puissance, même s'il révèle une dimension **d'une grande généralité**, reste un archétype, une solution théorique qui est globalement réalisée mais qui est aussi insuffisante en raison d'une part d'une fréquente disposition en arc de cercle (courbure) qui apparaît dans les graphiques bi logarithmiques et en raison d'autre part d'oscillations, de fluctuations de ces mêmes distributions de points tant dans le cas linéaire (modèle puissance stricte ou modèle fractal linéaire (Laherrère, 1996)) que dans celui où se manifeste une courbure (modèle fractal parabolique (Laherrère, 1996 ; Laherrère et Sornette, 1998)) (Fig.1).

Il apparaît donc quatre situations possibles (Fig.1) : le Modèle Fractal Linéaire (MFL), le Modèle Fractal parabolique (MFP), le Modèle Fractal Log Périodique et le Modèle Fractal Log Périodique avec une puissance à deux paramètres. Le problème est ainsi nettement plus complexe et serait grandement précisé s'il pouvait être intégré dans un soubassement théorique formel. Cela est aujourd'hui possible avec la théorie de la relativité d'échelle de Laurent Nottale (1993, 1998). Avec cet outil il est non seulement possible de généraliser davantage ces lois rang-taille, mais aussi de proposer des méthodes déductives qui permettront d'obtenir de meilleurs ajustements numériques, donc d'accroître leurs dimensions explicative et prospective.

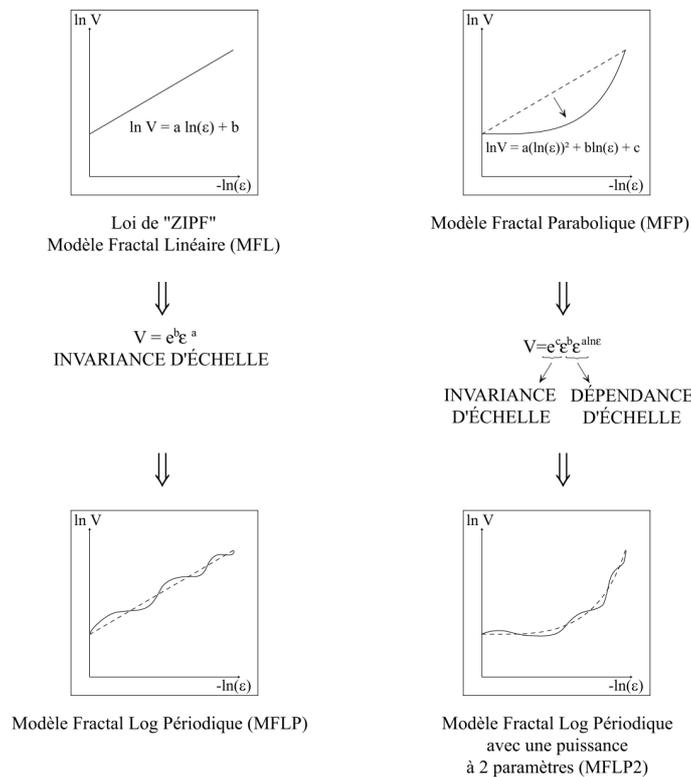


Fig. 1 Schéma des différents types de loi de puissance.

Cet article, par rapport à l'imposante littérature détaillant les subtilités des lois rang-taille (Pumain, 2006b), vise juste à proposer un développement théorique, basé sur les apports de Laurent Nottale (<http://luth.obsppm.fr/~luthier/nottale/>) que nous pensons utile à faire connaître aux géographes. Il s'agira de présenter un début d'analyse mathématique des lois rang-taille, ainsi qu'une approche purement conceptuelle de certains éléments de la théorie de la relativité d'échelle de Laurent Nottale (1993 ; 1998).

Pour des détails sur cette construction nous renvoyons les lecteurs aux travaux de son auteur. Cela étant il nous faut quand même tout d'abord rappeler les trois principes premiers sur lesquels repose cette théorie. C'est d'abord, le principe de relativité. Il s'énonce de la manière suivante :

« les lois de la nature doivent être valides quel que soit le système de coordonnées choisi » (Einstein, *in* Nottale, 1998). C'est ensuite, le principe de covariance. Il met en œuvre le principe de relativité. **Ce principe porte sur les équations qui nous servent à décrire ces lois.** Ici, « les équations doivent conserver la même forme mathématique (la plus simple possible) ». C'est enfin, le principe d'équivalence. Il assure la liaison entre le principe de relativité et celui de covariance pour un « objet » donné. Dans cette théorie l'approche fractale et l'instrumentalisation des équations différentielles d'échelle permettent de retrouver le formalisme des lois de puissance comme étant la solution d'équations différentielles.

2. La position du problème

Les lois rang-taille ont été utilisées par Vilfredo Pareto (1896) en économie (Mandelbrot, 1997) et, successivement (Armatte, 1995), en géographie par Georges Kingsley Zipf (1949) et par Robert Gibrat (1931). Elles ont un usage semblable à celui des lois statistiques log-normales.

L'idée d'utiliser ces lois, en géographie, était en rapport avec entre autres choses la théorie des lieux centraux de Walter Christaller (1933) ou d'August Lösch (1940), théorie qui n'est pas très satisfaisante dans beaucoup de cas expérimentaux et cela même si elle a pu donner lieu à des développements de nature fractale (Arlinghaus, 1985, Arlinghaus & Arlinghaus, 1989, Lam, De Cola, 1993, François, Frankhauser & Pumain, 1995). Quoi qu'il en soit, pour que les lois rang-tailles aient un sens, il faut d'une part postuler l'existence d'un réseau urbain, c'est-à-dire de quelque chose qui lie ensemble les agglomérations et dont rend compte le niveau de la population urbaine, et d'autre part postuler que ce réseau est hiérarchisé selon un ordre décroissant.

2.1. Les lois fractales invariantes d'échelle

Le premier apport théorique complémentaire a été l'intégration de la loi rang-taille dans la théorie empirique de Benoît Mandelbrot (1975) connue sous le nom de géométrie fractale. En effet, l'équation (1) comprend un exposant δ qui sera désormais identifié à une dimension fractale. Cette équation est également identifiée au cas d'invariance d'échelle et d'autosimilarité, soit celui d'une variation constante dans l'ordre des échelles.

Aujourd'hui, nous proposons d'identifier cette loi aux lois d'échelle développées par Laurent Nottale qui offrent une compréhension plus aboutie des structures fractales découvertes par Benoît Mandelbrot. Dans cette théorie, la loi précédente

$$V = V_0 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^D \quad (2)$$

devient la solution d'une équation différentielle d'échelle du premier ordre de la forme :

$$\frac{dV(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} = -DV(\varepsilon) \quad (3).$$

La solution de l'équation (3) est de la forme :

$$V(\varepsilon) = V_0 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^D \quad (4).$$

On peut par conséquent rapprocher l'équation (1) de l'équation (4). Il suffit de poser :

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \varepsilon = r_n \\ \delta = D \end{cases}$$

λ correspond à la constante d'intégration qui sera identifiée à ce que l'on appelle l'échelle de coupure c'est-à-dire à la résolution à partir de laquelle un phénomène devient fractal ou, au

contraire, non fractal. Dans le cas des lois rang-taille, elle sera égale à 1. Cependant, le simple fait d'avoir identifié $\lambda = 1$ nous autorise à prendre n'importe quelle valeur pour λ . En effet, le fait de modifier cette constante n'aura pour conséquence que de translater la courbe vers la gauche ou vers la droite. ε est une résolution. δ correspond à la dimension fractale et V_0 à la valeur initiale de la série.

2.2. L'exemple d'une loi : rang vs population urbaine

Nous allons maintenant présenter la relation classique entre le rang et la population urbaine, classée en ordre décroissant qui est l'exemple classique des lois rang-taille en géographie. **Par analogie, nous considérerons le rang comme une résolution.** On la trace généralement sur un graphique bi logarithmique. Par commodité mathématique, nous utiliserons le logarithme népérien. Cet espace bi logarithmique sera appelé **par extension** espace des échelles **qui correspond à un nom pratique donné par Laurent Nottale (1993, 1998).** L'équation (4) devient :

$$\ln V = \ln V_0 + D \ln \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \quad (5).$$

Autrement dit, il s'agit sur un graphique bi logarithmique d'une droite dans laquelle la pente correspond à la dimension fractale D (Fig. 3). Il faut remarquer que la dimension fractale correspond, elle, à la dérivée de $\ln V$ par rapport au $\ln \varepsilon$:

$$\frac{d \ln V}{d \ln \varepsilon} = -D \quad (6).$$

Nous proposons, pour tester cette loi, d'étudier la base de données de l'ONU qui recense les 435 premières villes ou conurbations de rang mondial disponibles sur le web (<http://www.populationdata.net/palmaresvilles.php>). **Nous avons utilisé les données de cette base telles qu'elles. Evidemment, le découpage administratif fourni des agglomérations peut parfois être vigoureusement discuté (Pumain, 1982 ; Moriconi-Ebrard, 1993, Pumain & Moriconi-Ebrard, 1997).** Toutefois, ces données sont ici uniquement utilisées pour illustrer une méthode analyse, et non dans le but d'expliquer le réseau urbain mondial, même si comme l'écrit Denise Pumain (2006a, p. 238), « [les lois rang-taille, entres autres] sont caractéristiques de l'organisation des villes en réseaux, en systèmes, à un niveau macro-géographique, à l'échelle d'une grande région, d'un Etat ou d'un continent, voire du Monde. »

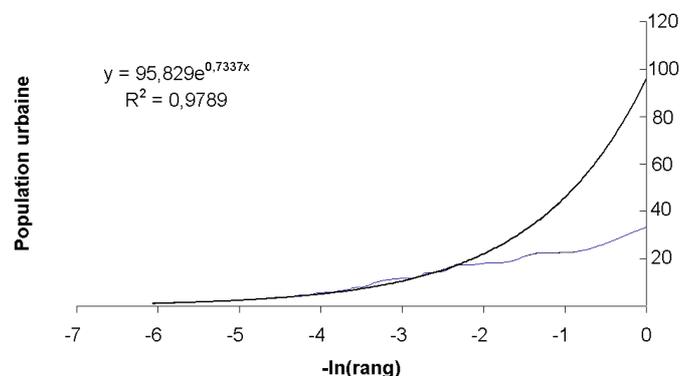


Fig. 2 Ajustement linéaire entre le $-\ln(\text{Rang})$ et Population.

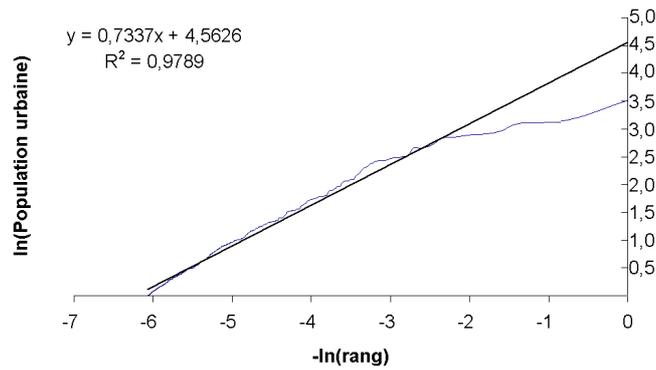


Fig. 3 Ajustement puissance entre le $-\ln(\text{Rang})$ et la $\ln(\text{Population})$.

On constate que l'ajustement statistique n'est pas satisfaisant. D'ailleurs, il est probable qu'aucune série ne correspond parfaitement à une loi puissance pure. En effet, sur la figure 2, on voit très bien qu'à partir de la valeur -2 , l'ajustement diverge complètement par rapport aux données analysées. Pour y remédier, il suffit d'ajuster un polynôme du second degré dans l'espace des échelles (Laherrère, 1996) (Fig. 4).

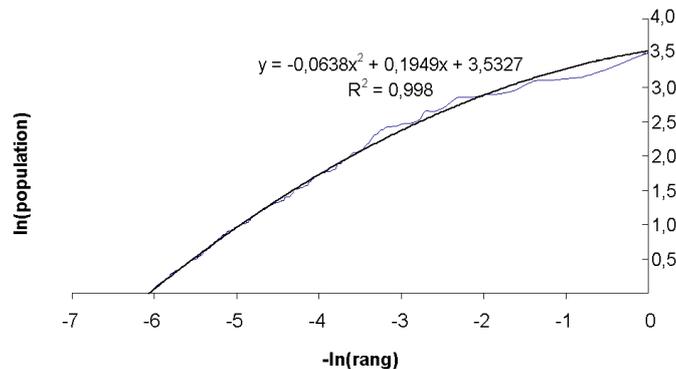


Fig. 4 Ajustement d'un polynôme du second degré entre le $-\ln(\text{Rang})$ et le $\ln(\text{Population})$.

Est-ce une curiosité ? Une anomalie ? Est-ce la preuve que l'approche fractale est inadaptée pour une étude géographique ? Vraisemblablement pas ! Nous allons montrer, en étendant le concept d'invariance d'échelle à celui de dépendance d'échelle, comment il est possible de faire fond sur la géométrie fractale pour mieux décrire cette structure d'ordre qui transparait dans le réseau urbain mondial sommairement rendu par le niveau des populations des agglomérations.

2.3. La dépendance d'échelle

L'invariance d'échelle n'est qu'un cas très particulier de l'expression de la fractalité d'une distribution. Le cas le plus général est celui de la dépendance d'échelle, **dans laquelle l'invariance d'échelle n'est qu'un cas particulier (cas le plus simple)**. Pour ce, il nous faut compliquer, un tout petit peu, l'équation différentielle d'échelle (3). En effet, on obtient la dépendance d'échelle en posant l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\frac{dV(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} = b + (D - D_r)V(\varepsilon) \quad (7).$$

Le simple fait d'avoir ajouté une constante b dans l'équation différentielle (3) permet de changer la nature de la fractalité : on passe d'une invariance d'échelle à une dépendance d'échelle. L'équation (7) se résout en :

$$V(\varepsilon) = V_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^{D-D_T} \right] \quad (8).$$

où D_T correspond à la dimension topologique et V_0 correspond à la valeur initiale.

3. La loi rang-taille parabolique

Nous avons pu ajuster dans l'espace des échelles une parabole (fig. 3), ce qui correspond à une équation de la forme :

$$\ln V = a \left(\ln \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \right)^2 + b \ln \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) + c \quad (9)$$

ce qui se transforme en :

$$V = e^c \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^{a \ln \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) + b}$$

$c = V_0'$ et on appellera la constante $e^c = C$

$$V = C \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^{a \ln \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) + b} \quad (10).$$

Dans l'équation (10), nous constatons que l'exposant est devenu variable. En effet, si on reprend, en vertu du principe de covariance, la définition de la dimension fractale de l'équation (6), à savoir la dérivée de $\ln V$ par rapport à $\ln \varepsilon$, on obtient donc :

$$D(\ln \varepsilon) = \frac{d \ln V}{d \ln \varepsilon} = 2a \ln \varepsilon + b \quad (11)$$

$2a \ln \varepsilon + b$ qui correspond à la définition de la dimension fractale de L. Nottale est devenue variable.

On notera en outre que $2a \ln \varepsilon + b$ correspondrait *grosso modo* à la variable $z = a \cdot \ln(x-x_0) + b$ de la loi de Gibrat.

Nous allons maintenant essayer de trouver l'origine de la loi parabolique. Nous savons que d'après l'équation (2) :

$$\frac{d \ln V}{d \ln \varepsilon} = D \quad (12)$$

or ici $D = D(\ln \varepsilon) = 2a \ln \varepsilon + b$. Nous introduisons cette donnée dans l'équation (12) ce qui nous donne :

$$\frac{dV}{d \ln \varepsilon} = 2aV \ln \varepsilon + bV \quad (13)$$

ce qui s'intègre en séparant les variables.

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} dV &= (2a \ln \varepsilon + b) d \ln \varepsilon \\ \Leftrightarrow \ln V &= a(\ln \varepsilon)^2 + b \ln \varepsilon + c \\ \Leftrightarrow V &= C \varepsilon^{a \ln \varepsilon + b} \quad (14). \end{aligned}$$

Ce résultat, illustré par la figure 5, est remarquable à plus d'un titre. Il permet de résoudre un problème posé par Jean Laherrère dans son Compte rendu à l'Académie des Sciences (1996), mais aussi de définir un attracteur qui montre une stabilité exceptionnelle dans l'espace des échelles, de la structure observée sur la figure 4.

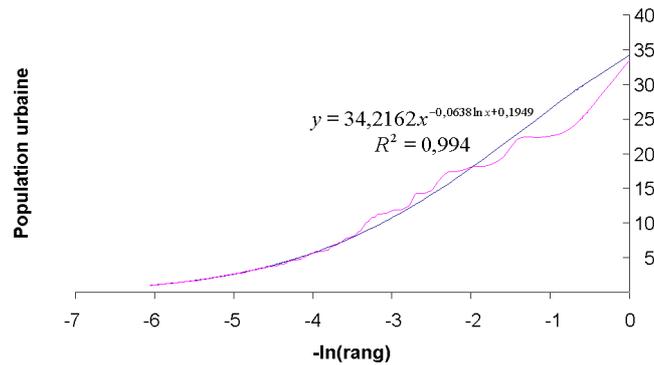


Fig. 5. L'ajustement par une double loi puissance de la série $-\ln(\text{Rang})$ vs Population.

Cependant, l'interprétation reste délicate. En effet, comme toutes les lois d'échelle, l'équation différentielle d'échelle parabolique est dans sa forme absolue. Autrement dit, les populations urbaines peuvent croître, la forme de la relation restera inchangée. Il est donc logique que l'ajustement parabolique soit toujours plus proche de la structure analysée. Toutefois on peut obtenir un meilleur ajustement avec un modèle non linéaire intégrant une correction log-périodique de la loi de puissance.

Il est également possible de calculer un taux d'accroissement expérimental de la population d'un rang sur l'autre ($P_{r_1} \rightarrow P_{r_2}$) ou d'un rang P_{r_1} à un rang P_{r_x} .

$$\text{Soit } T_A = \frac{P_{r_n} - P_{r_{n+1}}}{P_{r_{n+1}}} \times 100$$

Ce taux peut ensuite être porté en fonction de l'inverse du rang. Ce graphique montre des oscillations nettes qui sont organisées hiérarchiquement. Celle qui concerne les rangs les plus faibles est ample, la suivante l'est moins, la troisième l'est encore moins et se décompose en « sous oscillations » selon un principe d'échelle, etc. (cf. Fig.6).

De cette distribution il est ensuite possible, afin de mieux percevoir ces oscillations en échelle, de retirer un taux d'accroissement théorique calculé à partir de la fonction : $y = 34,2162x^{-0,0638\ln x+0,1949}$, puis de porter ce taux théorique (t_A) en fonction du taux empirique (T_A). Le résultat est donné dans la figure 6. On observe alors nettement une fluctuation log-périodique qui peut être modélisée.

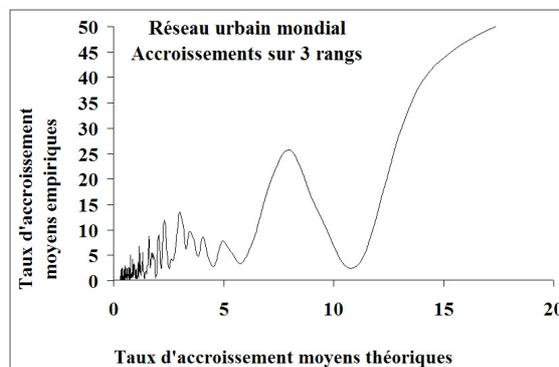


Fig. 6. Relation entre le taux d'accroissement théorique et le taux d'accroissement empirique dans le réseau urbain mondial ($P_{r_n} \rightarrow P_{r_{n+3}}$).

On notera que l'oscillation entre 0 et 5 présente bien une structuration du phénomène selon deux échelles : l'une déployée sur la totalité de l'intervalle, l'autre, à une autre échelle, emboîtée dans la première et qui est donc plus détaillée. L'accroissement au-delà de la porteuse est donc beaucoup plus complexe qu'on ne le pense généralement. A l'inverse la répartition sur un graphique bi logarithmique des points autour de l'ajustement principal (porteuse) n'est pas un artéfact et doit être étudié comme tel si non on ne voit pas pourquoi ces points ne seraient pas distribués aléatoirement.

4. La correction log-périodique des lois de puissance

Cette correction a été utilisée, par Didier Sornette (2000), en science de la terre et en économie. Cela étant, les physiciens la connaissent depuis de nombreuses décennies. Elle était alors principalement utilisée pour des phénomènes physiques tels que la température. L'apport de Didier Sornette a été de l'appliquer au temps.

4.1. La correction log-périodique et l'invariance d'échelle

Didier Sornette a essayé de modéliser l'oscillation observée en utilisant une dimension fractale complexe. Rappelons qu'un nombre complexe est un nombre z tel que $z = a + ib$, où a est appelé la partie réelle et ib la partie imaginaire avec $i^2 = -1$. Ainsi arrive-t-on à modéliser cette oscillation en utilisant la forme trigonométrique des nombres complexes.

En effet,

$$V = V_0 \varepsilon^{a+ib} = V_0 \varepsilon^a \varepsilon^{ib} = V_0 \varepsilon^a e^{ib \ln \varepsilon} = V_0 \varepsilon^a [\cos(b \ln \varepsilon) + i \sin(b \ln \varepsilon)]$$

La partie réelle est

$$\text{Re}(\varepsilon) = V_0 \varepsilon^a \cos(b \ln \varepsilon) \quad (15).$$

Elle correspond à une fluctuation log-périodique. Il faut remarquer qu'il est très courant dans des sciences, comme la physique, d'utiliser les nombres complexes pour ensuite revenir aux nombres réels, ce qui, d'un point de vue analytique, est correct puisque les nombres complexes sont une « extension » des nombres réels. Cette partie réelle correspondant à une fluctuation log-périodique de l'invariance d'échelle.

4.2. La correction log-périodique et la dépendance d'échelle

Si l'on revient à la théorie de la relativité d'échelle, il faut trouver une équation différentielle d'échelle donnant cette fluctuation log-périodique. La démonstration est plus compliquée que celle de l'invariance d'échelle, mais elle aura pour effet de satisfaire au principe de covariance : la dépendance d'échelle log-périodique aura la même forme mathématique, mais plus sophistiquée, que la dépendance d'échelle puissance (Nottale, 1997).

Avant de poursuivre le raisonnement, il faut opérer un changement de variable et poser :

$$\varepsilon = \left| \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_c} \right|, \text{ où } \frac{1}{r_c} \text{ correspond à ce que l'on appelle la valeur critique de manière générale, et dans}$$

le cas des lois rang-taille, on appellera cette valeur le rang critique.

Pour obtenir une telle fluctuation, il faut reprendre l'équation (3) :

$$\frac{dV(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} - DV(\varepsilon) = 0 \quad (16).$$

On exige que l'équation (16) ne soit plus égale à zéro :

$$\frac{dV(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} - DV(\varepsilon) = \chi(\varepsilon) \quad (17).$$

Cependant, en vertu du principe de covariance, on exige que $\chi(\varepsilon)$ corresponde à une équation différentielle de la même forme que l'équation (16).

On obtient donc :

$$\frac{d\chi(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} - D' \chi(\varepsilon) = 0 \quad (18)$$

où $D' = D + i\omega$.

Toutefois, D' correspond à une dimension fractale complexe. Pour trouver $V(\varepsilon)$, il faut dériver par le logarithme de la résolution l'équation (17), ce qui donne :

$$\frac{d^2V(\varepsilon)}{(d \ln \varepsilon)^2} - D \frac{dV(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} = \frac{d\chi(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} \quad (19).$$

Dans l'équation (19), on remplace $\frac{d\chi(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon}$ par sa valeur $D' \chi(\varepsilon)$, ce qui correspond, finalement à une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2V(\varepsilon)}{(d \ln \varepsilon)^2} - (D + D') \frac{dV(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} + (DD')V(\varepsilon) = 0 \quad (20).$$

L'équation (20) correspond à un modèle d'équation différentielle connu dont la solution est :

$$V(\varepsilon) = V_0 \varepsilon^D (1 + b \varepsilon^\delta) \quad (21)$$

où $\delta = i\omega$.

En posant l'équation (21) sous sa forme trigonométrique, on obtient :

$$V(\varepsilon) = V_0 \varepsilon^D (1 + b \cos(\omega \ln \varepsilon)) + i(V_0 b \varepsilon^D \sin(\omega \ln \varepsilon)) \quad (22).$$

Dans l'équation (22), on exige, tout comme dans le paragraphe précédent, que la partie imaginaire soit négligeable, et on obtient la correction log-périodique dépendante d'échelle :

$$V(\varepsilon) = V_0 \varepsilon^D (1 + b \cos(\omega \ln \varepsilon)) \quad (23).$$

Autrement dit, le simple fait d'avoir un « plus un » supplémentaire par rapport à la formule de Didier Sornette (équation 15) suffit à la transformer en une relation dépendante d'échelle et obtenir une équation plus pratique.

4.3. La loi rang-taille parabolique et la correction log-périodique

Nous nous sommes longtemps questionnés face à nos données pour savoir si la meilleure solution était une correction log-périodique invariante d'échelle ou dépendante d'échelle.

Le plus simple a été de les tester toutes les deux. A l'issue des calculs, il s'est avéré que nous avons à faire à une dépendance d'échelle log-périodique. Contrairement à la théorie, nous n'allons pas ajouter une valeur critique car, ici, ce n'est pas nécessaire puisque l'inverse du rang ordonné de façon décroissante tend vers zéro. Nous allons donc multiplier l'équation (10) par une correction log-périodique, ce qui donne :

$$V = C \varepsilon^{a \ln \varepsilon + b} (1 + \beta \cos(\omega \ln \varepsilon)) \quad (24)$$

dans notre cas, $\beta = 0,1$ et $\omega = 4$, en première approximation.

Dans ce cas, la dimension fractale sera égale à :

$$D' = \frac{d \ln V}{d \ln \varepsilon} = (2a \ln \varepsilon + b) + 4i \quad (25).$$

Il faut remarquer que la partie réelle est une fonction. Il n'y a donc aucune raison d'interdire la mise en fonction de la partie imaginaire de D' ce qui permettrait d'obtenir un meilleur

ajustement. En plus, c'est peut-être par la partie imaginaire que l'on pourrait introduire l'espace géographique dans les lois rang-taille. Elle correspond peut-être à la dimension fractale du nuage de points des villes étudiées. Les données n'étant pas à notre disposition pour vérifier cette hypothèse, la question reste ouverte.

Comme les lois de puissance, cette correction log-périodique demeure profondément analytique. Il faut essayer maintenant d'identifier les variables la paramétrant. A quoi correspondent β et ω ? Cela reste à établir. Autrement dit, sans relation annexe, il est extrêmement difficile de paramétrer la courbe. Pourtant, de nombreux phénomènes en géographie présentent clairement, de manière intuitive, des oscillations log-périodiques, mais il est extrêmement difficile de les paramétrer. Toutefois, la figure 7 montre bien qu'un ajustement log-périodique est beaucoup plus pertinent pour la loi rang vs population urbaine, même si le coefficient de détermination est un peu plus faible.

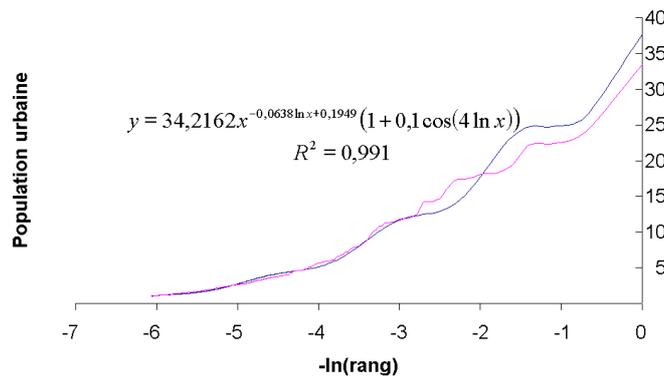


Fig. 7 L'ajustement parabolique corrigé par une loi log-périodique.

Cela étant il est aussi possible d'aborder ces structures d'ordre en discrétisant les lois correspondantes.

5. La discrétisation des lois log-périodiques

Il est clair que les oscillations décrites dans la figure 6 se retrouvent dans celui proposé par Chaline et Marchand en 2002 (Fig.8). Sur la base de cette homologie de formes, mais pas seulement, L. Nottale a réussi à théoriser cette relation log-périodique sous la forme d'une chaîne de Markov puisqu'on y observe qu'un événement au temps T_n dépend uniquement de celui au temps T_{n+1} et de celui au temps T_{n-1} . En conséquence de quoi, on peut écrire les équations envisagées ci-dessous à partir de ces trois valeurs, il est possible d'envisager les oscillations discutées pour ces types de modèles sous une forme discrète.

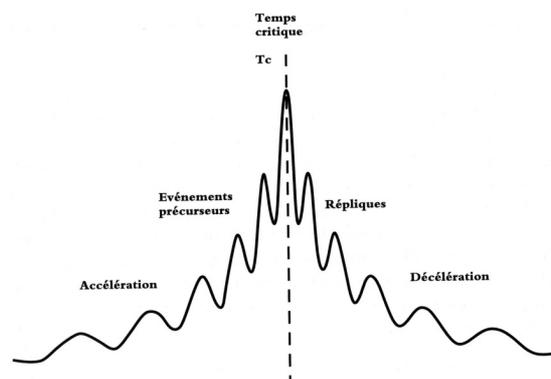


Figure 8 : exemple schématique des deux apparences d'une loi log-périodique (in Chaline J. et Marchand D., 2002 d'après D. Sornette, 1998, complété)

Ainsi la discrétisation des lois log-périodiques a été utilisée, entre autres, par Laurent Nottale (et al., 2000) sous la forme d'une relation de récurrence :

$$V_{n+1} = V_C + \frac{V_n - V_C}{g} \quad (15).$$

5.1. La théorie

Cette approche est intéressante dans la mesure où V_C et g sont des paramètres assez simples à estimer. V_C est ce que l'on appelle la valeur critique. Il s'agit d'une valeur vers laquelle converge ou diverge la série. Il n'y a pas vraiment de condition sur V_C , si ce n'est que cette valeur doit être choisie à l'extérieur de la série des données. g est, par contre, un rapport d'échelle constant qui permet de lier toutes les données. On peut estimer g et V_C de la manière suivante :

$$g = \frac{V_{n+2} - V_{n+1}}{V_{n+1} - V_n} \quad (16) ;$$

$$V_C = \frac{gV_{n+1} - V_n}{g - 1} \quad (17).$$

Il faut noter qu'il existe de nombreuses autres formules équivalentes à (16) et (17).

Pour l'instant, cette méthode n'a été appliquée qu'à des séries chronologiques. La valeur critique sera ici un temps critique (qui est l'équivalent d'un rang). Toutefois, on pourrait imaginer appliquer cette méthode à un ordre spatial, ce qui est bien sûr plus compliqué. En effet, le temps n'a qu'une dimension tandis que l'espace géographique en a au minimum deux.

Nous allons présenter rapidement deux exemples de lois fractales log-périodiques discrètes.

5.2. L'exemple de la série chronologique du château de Boves

n	Boves date réelle	Date prévue
1	920	920
2	960	959
3	1025	1028
4	1140	1150
5	1360	1366
Bifurcation		
6	1604	1600
7	1945	1944

Fig.9 Tableau récapitulatif de la série chronologique de Boves.

La figure 9 résume l'application réalisée pour la série chronologique archéo-historique de la motte de Boves (Forriez, 2005, Forriez, Martin, à paraître). Il montre deux régimes : un régime de création et un régime de destruction. On passe de l'un à l'autre grâce à une bifurcation temporelle.

Des travaux sont en cours pour relier cette analyse temporelle à une analyse spatiale, mais cette mise en relation demande des développements mathématiques beaucoup plus lourds que ceux développés dans cet article.

5.3. L'exemple de découverte et d'exploration de nouvelle(s) cavité(s) de plus de 1000 mètres

La figure 10 présente une autre application temporelle. On y retrouve également deux régimes : l'un correspondant à la période de fermeture des pays sous domination soviétique où l'exploration spéléologique était très limitée et les territoires inaccessibles aux occidentaux et l'autre à leur ouverture qui a permis d'accroître fortement les espaces explorables.

n	Date effective d'exploration de nouvelles cavités > 1000 m	Date prévue d'exploration de nouvelles cavités > 1000 m
1	1956	1956
2	1966	1971
3	1978	1980
4	1981	1985
5	1988	1987
6	1993	1989
Bifurcation		
7	1997	1997
8	1998	2001
9	1999	2003
10	2001	2004
11	2003	2005
12	2006	2006

Fig. 10 Tableau récapitulatif de la série chronologique du résultat de la découverte et de l'exploration de nouvelle(s) cavité(s) supérieure(s) à 1000 m de profondeur.

On notera que le modèle intègre parfaitement la date de la chute du mur de Berlin qui ouvre de fait les espaces ex-communistes mais que dans la réalité il faudra 4 ans pour que cela se traduise dans les statistiques spéléologiques. Quand on sait que cela se fait sur des « camps » d'été qui se prévoient donc d'année en année et que le premier d'une série sur une zone est généralement plus tourné vers une estimation des potentiels et vers la faisabilité technique, juridique, *etc.* de la chose, il n'est pas étonnant de trouver un tel décalage. Celui-ci s'est progressivement comblé pour disparaître en 2006.

6. Conclusion

On est passé d'un modèle fractal linéaire (droite, parabole) à un modèle non linéaire (puissance corrigée par une loi log-périodique) pour expliquer la taille de la population des villes en fonction de leur rang décroissant. Cela signifie d'abord que la distribution n'est pas auto-similaire, comme on peut trop le lire. Toutefois, cela ne signifie pas qu'elle ne soit pas fractale, au contraire. Autrement dit, la relativité d'échelle permet, non seulement, de clarifier la notion mathématique de « fractale » mais aussi son utilisation. **A long terme, il n'est pas impossible d'envisager un modèle prédictif à partir des lois rang - taille.**

7. Bibliographie

7.1. Article de revue

- ARLINGHAUS, S.L., 1985, Fractal take a central place, *Geographiska Annaler*, 67B, p. 83-88.
- ARLINGHAUS S.L., ARLINGHAUS, W.C., 1989, The fractal theory of central place geometry : a diophantine analysis of fractal generators for arbitrary Löshian numbers, *Geographical Analysis*, 21, 2.
- ARMATTE M., 1995, Robert Gibrat et la loi de l'effet proportionnel. *Mathématiques et sciences humaines*, n°129, p.5-35.
- FRANÇOIS, N., FRANKHAUSER, P., PUMAIN, D., 1995, Ville densité et fractalité, *Les Annales de la Recherche Urbaine*, 67,55-64.
- LAHERRÈRE J., 1996, Distributions de type " fractal parabolique " dans la nature. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t.322, série IIa, p.535-541.
- LAHERRÈRE, J., SORNETTE, D., 1998, Stretched exponential distributions in nature and economy: « Fat tails » with characteristic scales, *European physical journals*, B2, p. 525-538. [<http://xxx.land.gov/abs/cond-mat/98011293>]
- PUMAIN, D., MORICONI-EBRARD, F., 1997, City size distributions and metropolisation, *Geojournal*, 43, p. 307-314.

7.2. Livre

- BAK P., 1999, *Quand la nature s'organise. Avalanches, tremblements de terre et autres cataclysmes*. Flammarion éditeur, Paris, 283 p.
- CHRISTALLER, W., 1933, *Die zentralen orte in Süddeutschland : eine ökonomisch-geographische untersuchung über die gesetz massigkeit der verbreitung und entwicklung der siedlungen mit städtischen funktionen*, Jean, Fischer Verlag.
- GIBRAT, R., 1931, *Les inégalités économiques*, Paris, Sirey.
- GUERIN – PACE F., 1993, *Deux siècles de croissance urbaine. La population des villes françaises de 1831 à 1990*. Editions Anthropos, coll.: Villes, Paris, 205 p.
- LAM S., De COLA L., 1993, *Fractal in geography*. PTR Prentice-Hall editor, Englewood Cliffs, New Jersey. 308 p.
- LE BRAS, H., 2000, *Essai de géométrie sociale*. Editions Odile Jacob, Paris, 300 p.
- LÖSCH, A., 1940, *Die räumliche ordnung der wirtschaft*, Iena, Fischer.
- MANDELBROT B., 1975, *Les objets fractals*, 1^{ère} édition, Flammarion éditeur, Paris, et 1984, 2^{ème} éd., Flammarion 203 p. et 1995, 4^{ème} éd., Flammarion, coll.: Champ n°301, 208 p.
- MANDELBROT B., 1997, *Fractale, hasard et finance*, Flammarion éditeur, Paris, Coll. Champs, 246 p.
- MORICONI-EBRARD, F., 1993, *L'urbanisation dans le monde depuis 1950*, Paris, Anthropos, 372 p.
- NOTTALE, L., 1993, *Fractal space-time et microphysics. Towards a theory of scale relativity*, World scientific, Singapour, XIV, 338 p.
- NOTTALE, L., 1997, *Scale invariance and beyond*, EDP sciences Springer, p. 249
- NOTTALE, L., 1998, *La relativité dans tous ses états*. Hachette éditeur, Paris, 319 p.
- NOTTALE, L., CHALINE J., GROU P., 2000, *Les arbres de l'évolution*. Hachette, Paris, 379 p.
- PARETO, V., 1896, *Cours d'économie politique*. In PARETO Œuvres complètes. Réimpression Droz, Genève, 1965.
- PUMAIN, D., 1982, *La dynamique des villes*, Paris, Economica, 232 p.
- PUMAIN, D., 2006a, *Système de villes et niveaux d'organisation*, in Paul Bourguine, Annick Lesne, *Morphogenèse. L'origine des formes*, Paris, Belin, Coll. Echelles, p. 236-263.

- PUMAIN, D. (s.d.), 2006b, *Hierarchy in natural and social sciences*, Dordrecht, Springer, X-244 p. [Methodos series volume 3], 243 p.
- SCHROEDER M., 1991, *Fractals, Chaos, Power Laws: Minute from an infinite paradis*, Feeman editor, New York, 429 p.
- SORNETTE D., 2000, *Critical phenomena in natural sciences. Chaos, fractals, selforganization and disorder : concepts and tools*. Springer éditeur, 434 p.
- ZIPF, G. K., 1932, *Selective studies and the principle of relative frequency in language*.
- ZIPF, G. K., 1935, *Psycho-biology of languages*, Houghton-Mifflin.
- ZIPF, G. K., 1941, *National unity and disunity. The nation as a bio-social organism*, Bloomington Indiana, Principia Press.
- ZIPF, G. K., 1949, *Human behavior and the principle of least effort*, Addison-Wesley.

7.3. Acte de colloque

- FORRIEZ M. et MARTIN Ph., 2006, De l'utilité de la théorie de la relativité d'échelles de L. Nottale en géographie. Recherche d'un modèle scalaire spatio-temporel. *Géopoint 2006 : Demain la géographie*, Avignon, Groupe Dupont et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, Brouillon Dupont, p.63-64.

7.4. Thèse ou rapport de recherche

- FORRIEZ M., 2005, *La motte de Boves permet-elle de mener une réflexion épistémologique commune en archéologie, en géographie et en histoire ?*, Arras, Mémoire de master 1, 156 p.