Justification du modèle et caractère bien posé des équations primitives quasi-hydrostatiques

Carine Lucas, Madalina Petcu, Antoine Rousseau

Justification du modèle et caractère bien posé des équations primitives quasi-hydrostatiques

Carine Lucas [a] Madalina Petcu [b] Antoine Rousseau [c]

[a] *Laboratoire de Mathématiques et Applications, Physique Mathématique d'Orléans (MAPMO, UMR 6628)*
Fédération Denis Poisson (FDP-FR2964), CNRS - Université d'Orléans
B.P. 6759 45067 Orléans Cedex 2, FRANCE

[b] *Laboratoire de Mathématiques et Applications*
Téléport 2 - BP 30179, Boulevard Marie et Pierre Curie
86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex, FRANCE

[c] *INRIA*
Laboratoire Jean Kuntzmann
51 rue des mathématiques, B.P. 53, Grenoble Cedex 9, FRANCE

Reçu le 23 avril 2009 ; accepté après révision le +++++

Présenté par

Résumé

Ce travail a pour but de présenter et d'étudier les équations primitives quasi-hydrostatiques (QHPE). Ce modèle, qui dérive des équations complètes de la mécanique des fluides géophysiques dans la limite d'un faible rapport d'aspect, est plus complet que le modèle hydrostatique classique, car il s'abstrait de l'approximation dite traditionnelle qui consiste à négliger une partie de la force de Coriolis. Nous justifions dans cet article la dérivation des QHPE avant de montrer leur caractère bien posé. *Pour citer cet article : C. Lucas, M. Petcu, A. Rousseau, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ? ? ? (2009).*

Abstract

Derivation and Well-Posedness of the Quasi-Hydrostatic Primitive Equations. This paper aims at introducing and studying the well-posedness of the quasi-hydrostatic primitive equations (QHPE). This model, that derives from the full non-hydrostatic model for geophysical fluid dynamics in the zero-limit of the aspect ratio, is more realistic than the classical hydrostatic model, since the traditionnal approximation that consists in neglecting a part of the Coriolis force is relaxed. After justifying the derivation of the QHPE model, we give some well-posedness arguments. *To cite this article: C. Lucas, M. Petcu, A. Rousseau, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ??? (2009).*

Email addresses: carine.lucas@univ-orleans.fr (Carine Lucas), madalina.petcu@math.univ-poitiers.fr (Madalina Petcu), antoine.rousseau@inria.fr (Antoine Rousseau).

Abridged English version

The two objectives of the present work are to provide a physical justification (thanks to a scale analysis), together with a rigorous mathematical analysis of a new global circulation model. Because of their numerical drawbacks (stability and computational cost), the full non-hydrostatic equations of ocean dynamics (NH, (6)), that only takes the Boussinesq approximation into account, have been replaced by simplified models for large scale simulations ([9,10]).

Roughly speaking, one can show that there exists a hierarchy between terms that are considered/neglected in the simplifications that lead to the Hydrostatic Primitive Equations (HPE, (9)). Namely, considering for example the vertical momentum equation, the small hypothesis on the aspect ratio (the depth of the ocean is much smaller than its length) leads to:

$$\frac{Dw}{Dt} \ll f^* u \ll \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\rho}{\rho^0}\, g. \tag{1}$$

The HPE model only retains the hydrostatic balance (right part of (1)), and is thus characterized by the so-called hydrostatic approximation:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\rho}{\rho^0}\, g. \tag{2}$$

Equation (2) is actually a combination of two approximations (see Equation (1)), including the traditionnal approximation on the Coriolis force,

$$\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \Omega\big(-\sin(\theta)v + \cos(\theta)w, \sin(\theta)u, -\cos(\theta)u\big) \approx \Omega\big(-\sin(\theta)v, \sin(\theta)u, 0\big).$$

In the sequel, we consider a model that preserves more terms in the fundamental equations; Equation (2) is changed into the so-called quasi-hydrostatic equation, in which the complete Coriolis force is conserved, contrarily to the HPE model:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - fv + f^* w + \frac{\partial \phi}{\partial x} - \mu_{\underline{\mathbf{v}}}\Delta_h u - \nu_{\underline{\mathbf{v}}}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F_u, \tag{3a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} - \mu_{\underline{\mathbf{v}}}\Delta_h v - \nu_{\underline{\mathbf{v}}}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = F_v, \tag{3b}$$

$$-f^* u + \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\rho}{\rho^0}\, g, \tag{3c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{3d}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} - \mu_T\Delta_h T - \nu_T\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = F_T. \tag{3e}$$

Here (u, v, w) is the 3D velocity of the fluid, T its temperature, $\rho = \rho^0(1 - \alpha(T - T^0))$ its density, and ϕ the renormalized pressure, $\phi = p/\rho^0$. The real numbers $f = 2\Omega\sin(\theta)$ and $f^* = 2\Omega\cos(\theta)$ are the Coriolis parameters, and g is the gravitational constant. Finally, $(\mu_{\underline{\mathbf{v}}}, \mu_T)$ and $(\nu_{\underline{\mathbf{v}}}, \nu_T)$ are the horizontal and vertical viscosities, and the right-hand-sides F_u, F_v and F_T are the forcing terms. This model is physically more precise than the HPE model (see physical discussions, as well as numerical simulations in [4,3,13,7]), and we claim that it does not raise any additional mathematical difficulty, at least as far as the existence of weak solutions is concerned:

Theorem 0.1 *Let $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \times (-h, 0)$ be a cylinder of $\mathbb{R}^3$. The spaces H and V, together with the boundary conditions, are those detailled in Theorem 3.1. We are given $t_1 > 0$, $U_0 = (u_0, v_0, T_0)$ in H and $F = (F_u, F_v, F_T)$ in $L^2(0, t_1; H)$. Then there exists*

$$U = (u, v, T) \in L^\infty(0, t_1; H) \cap L^2(0, t_1; V), \tag{4}$$

which is solution of (3) *with the following initial conditions:*

$$U(x, y, z, t = 0) = U_0(x, y, z). \tag{5}$$

Remark 1 We recall that the functions w and ϕ are diagnostic variables, meaning they are computed as functions of the prognostic variables $(u, v, T) = U$, thanks to Equations (3c) and (3d) (see [11] for more details).

1. Introduction

Les deux objectifs du présent article sont l'obtention par analyse d'échelle, puis l'analyse mathématique d'un nouveau modèle de circulation océanique à grande échelle. Les contraintes de coût de calcul ne permettant pas l'implémentation du modèle complet des équations non-hydrostatiques (NH, (6)) dans les modèles numériques de simulation générale, la communauté a d'abord utilisé des modèles très simplifiés (équations quasi-géostrophique ou de Saint-Venant), avant que les progrès en modélisation ([12,2,5,6]) et les performances accrues des ordinateurs ne permettent de considérer le modèle des équations primitives hydrostatiques (HPE, (9)) : voir [9,10].
Ce travail présente de nouvelles équations primitives, dites quasi-hydrostatiques (QHPE, (3)), pour lesquelles l'approximation traditionnelle sur la force de Coriolis (8) est relaxée. Elles sont donc physiquement plus précises que les HPE ([4,3,13,7]), mais ne présentent pas de difficulté mathématique supplémentaire. Dans la partie qui suit, nous justifions par une analyse d'échelle l'obtention du modèle QHPE, avant de prouver son caractère bien posé dans la dernière partie.

2. Les équations quasi-hydrostatiques

Nous commençons tout naturellement par les équations complètes [1] (non-hydrostatiques) de la mécanique des fluides océaniques :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{\boldsymbol{u}}.\nabla)u - fv + f^* w + \frac{\partial \phi}{\partial x} - \mu_{\underline{\mathbf{v}}} \Delta_h u - \nu_{\underline{\mathbf{v}}} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F_u, \tag{6a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{\boldsymbol{u}}.\nabla)v + fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} - \mu_{\underline{\mathbf{v}}} \Delta_h v - \nu_{\underline{\mathbf{v}}} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = F_v, \tag{6b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{\boldsymbol{u}}.\nabla)w - f^* u + \frac{\partial \phi}{\partial z} - \mu_{\underline{\mathbf{v}}} \Delta_h w - \nu_{\underline{\mathbf{v}}} \partial_z^2 w = -\frac{\rho}{\rho^0} g + F_w, \tag{6c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{6d}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{\boldsymbol{u}}.\nabla)T - \mu_T \Delta_h T - \nu_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = F_T. \tag{6e}$$

Ici $\vec{\boldsymbol{u}} = (u, v, w)$, T et $\rho = \rho^0(1 - \alpha(T - T^0))$ sont respectivement la vitesse tridimensionnelle, la température et la densité du fluide, et ϕ la pression renormalisée, $\phi = p/\rho^0$. Les constantes f et f^* sont définies par $f = 2\Omega \sin(\theta)$ et $f^* = 2\Omega \cos(\theta)$. Le vecteur $\vec{\Omega} = \Omega\big(\cos(\theta), \sin(\theta), 0\big)$ représente le vecteur rotation de la Terre à la latitude θ, g est la constante de gravité universelle, et ρ^0 désigne la densité

1. Ces équations sont issus des principes fondamentaux de la dynamique (conservation des moments, de la masse, de l'énergie), et reposent sur l'approximation de Boussinesq, qui est indiscutablement valable dans l'océan. Cette hypothèse stipule que la densité peut être considérée comme constante dans toutes les équations, sauf dans le terme de gravité $-\rho\, g$.

moyenne du fluide. Enfin, $(\mu_{\underline{\mathbf{v}}}, \mu_T)$ et $(\nu_{\underline{\mathbf{v}}}, \nu_T)$ sont les viscosités horizontales et verticales et les seconds membres F_u, F_v, F_w et F_T représentent les forces extérieures.
Le rapport des dimensions horizontale et verticale de l'océan permet de justifier les deux approximations suivantes :
Définition 2.1 (Approximation quasi-hydrostatique) *Cette approximation consiste à simplifier l'équation de conservation du mouvement vertical* (6c)*. On néglige en effet le terme d'accélération verticale :*

$$\frac{Dw}{Dt} := \frac{\partial w}{\partial t} + \big(\vec{\boldsymbol{u}}.\nabla\big)w = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \approx 0. \tag{7}$$

Définition 2.2 (Approximation traditionnelle) *L'approximation traditionnelle consiste à négliger les couplages entre composantes horizontale et verticale dans la force de Coriolis :*

$$\vec{\Omega} \times \vec{\boldsymbol{u}} = \Omega\big(-\sin(\theta)v + \cos(\theta)w, \sin(\theta)u, -\cos(\theta)u\big) \approx \Omega\big(-\sin(\theta)v, \sin(\theta)u, 0\big). \tag{8}$$

Revenons maintenant aux équations proprement dites, plus particulièrement à l'équation (6c). Lorsque l'on décompose les différents termes en fonction des grandeurs caractéristiques comme dans [1, page 42], on obtient trois ordres distincts : l'ordre principal (et habituel, équilibre poids-pression), le second ordre (qui fait en particulier intervenir la partie de la force de Coriolis négligée dans l'approximation traditionnelle) et des termes qui sont à un ordre encore supérieur (ceux qui disparaissent lorsque l'on utilise l'approximation quasi-hydrostatique). Nous voyons donc que les différentes hypothèses mentionnées ci-dessus (7)-(8) nous permettent d'écrire une hiérarchie de modèles à des ordres différents.
Ainsi, l'approximation quasi-hydrostatique (7), conjuguée à l'approximation traditionnelle (8), fournit le modèle des équations primitives hydrostatiques, pour lesquelles on conserve les équations (6b) et (6d)-(6e), alors que les équations de conservation de mouvement (6a) et (6c) deviennent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - fv + \frac{\partial \phi}{\partial x} - \mu_{\underline{\mathbf{v}}}\Delta_h v - \nu_{\underline{\mathbf{v}}}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = F_u, \tag{9a}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\rho}{\rho^0}\, g. \tag{9b}$$

Intéressons-nous maintenant aux équations (6), et plus particulièrement aux termes de diffusion. Les modèles actuels ont tendance à considérer des viscosités turbulentes de plus en plus petites, dans la mesure où la taille des maillages diminue avec l'augmentation de la puissance de calcul disponible. Ainsi, en reprenant l'étude d'échelles de [1, page 42], des termes comme f^*w dans l'équation (6a) ne deviennent plus négligeables devant les termes de viscosité. Nous obtons donc pour le maintien des termes f^*w et $-f^*u$ dans (6a) et (6c), contrairement à ce qui correspond à l'approximation traditionnelle. En revanche, l'accélération verticale Dw/Dt étant encore plus petite (voir [1] et discussion ci-dessus), nous conservons l'approximation quasi-hydrostatique (7), ce qui donne pour (6c) :

$$-f^*u + \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\rho}{\rho^0}\, g. \tag{10}$$

Cette équation complétée par (6a)-(6b) et (6d)-(6e), constitue un modèle *intermédiaire*, le modèle des équations primitives quasi-hydrostatiques (3), que nous nous proposons d'étudier mathématiquement.

3. Caractère bien posé du modèle quasi-hydrostatique

Nous considérons ici les équations primitives quasi-hydrostatiques (3) dans un domaine cylindrique $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \times (-h, 0)$. Les conditions aux limites que nous considérons sont les suivantes :
– au fond de l'océan $(z = 0)$: $\nu_{\underline{\mathbf{v}}}\, \partial\underline{\mathbf{v}}/\partial z + \alpha_{\underline{\mathbf{v}}}(\underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{v}}^0) = \tau_{\underline{\mathbf{v}}}$, $w = 0$, $\nu_T\, \partial T/\partial z + \alpha_T(T - T^0) = 0$,

– à la surface de l'océan ($z=-h$) : $\underline{\mathbf{v}}=0$, $w=0$, $\partial T/\partial n=0$,
où $\underline{\mathbf{v}}^{\mathbf{0}}, T^0$ correspondent à des valeurs moyennes de la vitesse horizontale et de la température, $\alpha_{\underline{\mathbf{v}}}$ est connu, $\nu_{\underline{\mathbf{v}}}, \nu_T$ sont les coefficients de viscosité et $\tau_{\underline{\mathbf{v}}}$ est le cisaillement dû au vent.
Ainsi, la définition naturelle des espaces fonctionnels est :

$$H=\Big\{(u,v,T)\in(L^2(\mathcal{M}))^3 \mid \int_{-h}^{0}(u_x+v_y)\,dz=0, n_H\cdot\int_{-H}^{0}(u,v)\,dz=0 \text{ sur } \partial\mathcal{M}'\Big\},$$

$$V=\Big\{(u,v,T)\in(H^1(\mathcal{M}))^3 \mid \int_{-h}^{0}(u_x+v_y)\,dz=0, (u,v)=0 \text{ à } z=-h \text{ et sur } \partial\mathcal{M}'\times(-h,0)\Big\}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.1 *Soient $t_1>0$, $U_0=(u_0,v_0,T_0)$ dans H et $F=(F_u,F_v,F_T)$ dans $L^2(0,t_1;H)$. Alors il existe*

$$U=(u,v,T)\in L^\infty(0,t_1;H)\cap L^2(0,t_1;V), \tag{11}$$

solution de (3) *avec les conditions initiales suivantes :*

$$U(x,y,z,t=0)=U_0(x,y,z). \tag{12}$$

Remarque 1 Le lecteur aura noté que le théorème ne fait pas figurer les fonctions w et ϕ, pourtant inconnues du problème. En effet, comme il est classique dans le cadre des équations primitives, ces variables dites diagnostiques sont calculées en fonction de U qui rassemble les variables prognostiques. Ainsi, en notant $\phi_S=\phi(z=0)$ la pression de surface renormalisée, on a :

$$\phi(x,y,z,t)=\phi(U(x,y,z,t))=-\int_0^z\left(f^*\,u+\frac{\rho}{\rho^0}\,g\right)dz'+\phi_S(x,y,t),$$

$$w(x,y,z,t)=w(U(x,y,z,t))=\int_z^0(u_x+v_y)dz'.$$

Preuve Afin de prouver l'existence de solutions faibles pour les équations, nous procédons par différences finies en temps, estimations *a priori* et passage à la limite comme dans [12]. On reprend les notations de [11] en particulier pour les formes bilinéaires a et a_1, et on note $\overline{a_1}$ la forme bilinéaire modifiée qui permet de prendre en compte les nouveaux termes de (3) :

$$\overline{a_1}(U,\widetilde{U})=a_1(U,\widetilde{U})+f^*\int_{\mathcal{M}}w(U)\,\tilde{u}\,d\mathcal{M}+f^*\int_{\mathcal{M}}\int_z^0 u\,dz'(\tilde{u}_x+\tilde{v}_y)d\mathcal{M}.$$

Il s'agit de montrer que la forme bilinéaire a est toujours coercive en remplaçant a_1 par $\overline{a_1}$. Soit donc $U\in V$, on a :

$$\begin{aligned}\overline{a_1}(U,U)-a_1(U,U)&=f^*\int_{\mathcal{M}}w(U)\,u\,d\mathcal{M}+f^*\int_{\mathcal{M}}\int_z^0 u\,dz'(u_x+v_y)d\mathcal{M}\\&=f^*\int_{\mathcal{M}}\int_z^0(u_x+v_y)dz'\,u\,d\mathcal{M}+f^*\int_{\mathcal{M}}\int_z^0 u\,dz'(u_x+v_y)d\mathcal{M}\\&=f^*\int_{\mathcal{M}'}\int_{-h}^0\int_z^0(u_x+v_y)dz'\,u\,dz\,d\mathcal{M}'+f^*\int_{\mathcal{M}'}\int_{-h}^0\int_z^0 u\,dz'(u_x+v_y)dz\,d\mathcal{M}'.\end{aligned}$$

En intégrant par partie et en utilisant les conditions aux limites sur la vitesse verticale $w=0$ à $z=-h$ et $z=0$, on obtient alors que

$$\overline{a_1}(U,U)=a_1(U,U).$$

Ainsi, la coercivité de la forme bilinéaire a est assurée, et la preuve de l'existence de solutions faibles s'effectue exactement comme dans [11, Theorem 2.2]. $\square$

4. Conclusion

Nous avons justifié l'utilisation d'un nouveau modèle se situant entre le modèle hydrostatique traditionnel et le modèle non-hydrostatique complet : on parle alors d'équations primitives **quasi**-hydrostatiques. Ces équations relaxent l'approximation traditionnelle sur la force de Coriolis, et sont donc plus conformes à la réalité d'un point de vue physique. Nous avons montré ici que les résultats mathématiques relatifs aux équations primitives hydrostatiques pouvaient être étendus à ce nouveau modèle.
Contrairement au résultat sur les solutions faibles pour les équations primitives hydrostatiques, le théorème 3.1 nécessite que le domaine considéré soit cylindrique. Nous laissons la relaxation de cette hypothèse à des travaux ultérieurs, de même que l'existence de solutions fortes, que l'on espère obtenir (toujours sous l'hypothèse de domaine cylindrique) en s'inspirant des travaux récents de [6,2,5].

Remerciements

Les auteurs remercient Didier Bresch, qui a été à l'origine des discussions ayant mené à ces travaux.

Références

[1] B. Cushman-Roisin. *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics.* Prentice-Hall, 1994.

[2] C. Cao and E.S. Titi. Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics. *Ann. of Math.*, 165(2) : 245–267, 2007.

[3] T. Gerkema, J.T.F. Zimmerman, L.R.M. Maas, and H. van Haren. Geophysical and astrophysical fluid dynamics beyond the traditional approximation. *Rev. Geophys.*, 46 :1–33, 2008.

[4] L. Perelman J. Marshall, C. Hill and A. Adcroft. Hydrostatic, quasi-hydrostatic, and nonhydrostatic ocean modeling. *J. Geophys. Research*, 102 :5733–5752, 1997.

[5] G. M. Kobelkov. Existence of a solution "in the large" for ocean dynamics equations. *J. Math. Fluid Mech.*, 9(4) :588–610, 2007.

[6] I. Kukavica and M. Ziane. On the regularity of the primitive equations of the ocean. *Nonlinearity*, 20(12) :2739–2753, 2007.

[7] C. Lucas and A. Rousseau. New developments and cosine effect in the viscous shallow water and quasi-hydrostatic equations. *SIAM Multiscale Model. Simul.*, 7(2) :796–813, 2008.

[8] C. Lucas. Cosine effect on shallow water equations and mathematical properties. *Quartely Appl. Math.*, posted on March 20, 2009, PII S0033-569X-09-01113-0 (to appear in print).

[9] G. Madec. *NEMO reference manual, ocean dynamics component : NEMO-OPA*, volume 27. Note du Pole de modélisation, Institut Pierre-Simon Laplace (IPSL), 2008.

[10] G. Madec, P. Delecluse, M. Imbard, and C. Lévy. *OPA 8.1. Ocean General Circulation Model Reference Manual.* Institut Pierre Simon Laplace, 1998.

[11] M. Petcu, R. Temam, and M. Ziane. Mathematical problems for the primitive equations with viscosity. In P. G. Ciarlet, editor, *Handbook of Numerical Analysis. Special Issue on Some Mathematical Problems in Geophysical Fluid Dynamics*, Handb. Numer. Anal. Elsevier, New York, 2008.

[12] R. Temam and M. Ziane. Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics. In S. Friedlander and D. Serre, editors, *Handbook of mathematical fluid dynamics.* North-Holland, 2004.

[13] A. A. White and R. A. Bromley. Dynamically consistent, quasi-hydrostatic equations for global models with a complete representation of the coriolis force. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 121 :399–418, 1995.