Représentations linéaires des graphes finis

Lucas Vienne

Représentations linéaires des graphes finis

Lucas Vienne

Departement de mathématiques. Université d'Angers. France

Résumé

Let X be a non-empty finite set and α a symmetric bilinear form on a real finite dimensional vector space E. We say that a set $\mathcal{G} = \{U_i \mid i \in X\}$ of linear lines in E is an isometric sheaf, if there exist generators u_i of the lines U_i, and real constants ω and c such that

$$\forall i, j \in X,\ \ \alpha(u_i, u_i) = \omega, \text{ and if } \ i \neq j \ \text{ then } \ \alpha(u_i, u_j) = \varepsilon_{i,j}.c, \ \text{ with } \ \varepsilon_{i,j} \in \{-1, +1\}$$

Let Γ be the graph whose set of vertices is X, two of them, say i and j, being linked when $\varepsilon_{i,j} = -1$. In this article we explore the relationship between $\mathcal{G}$ and Γ ; we describe all sheaves associated with a given graph Γ and construct the group of isometries stabilizing one of those as an extension group of $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. We finally illustrate our construction with some examples.

Key words: groupe, graphe, automorphisme, transitif

1 Introduction

Un entier $n \geq 1$ étant choisi, on pose $X = \{1, \ldots, n\}$ et on définit un graphe (Γ, X) par l'ensemble Γ de ses arètes qui sont des paires $\{x, y\}$ de points distincts pris dans l'ensemble X de ses sommets. On notera parfois plus simplement Γ le graphe (Γ, X). Sa matrice $\mathcal{E}$ est donnée par son (i, j)-ème coefficient $\varepsilon_{i,j}$ qui vaut -1 si i et j sont liés (noté $i \sim j$) et 1 dans le cas contraire.
Donnons nous un espace quadratique (E, α) c'est-à-dire un espace vectoriel réel E de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique α.

Définition 1 (Représentation d'un graphe)
Soient ω et c deux constantes réelles et (E, α) un espace quadratique. Une application u de X dans (E, α) notée $u : i \to u_i$ est une représentation du graphe (Γ, X) de paramètres (ω, c) si

Email address: lucas.vienne@univ-angers.fr (Lucas Vienne).

(1) $\forall i, j \in X,\ \ \alpha(u_i, u_i) = \omega\ \ et\ \ si\ \ i \neq j,\ \ \alpha(u_i, u_j) = \varepsilon_{i,j}.c.$

La matrice $S(u)$ de coefficient général $\alpha(u_i, u_j)$ $(i, j \in X)$ est dite matrice de la représentation u. On appellera respectivement rang et degré de u le rang de $S(u)$ et la dimension de E.

On associe à chaque représentation $u : X \to E$ d'un graphe (Γ, X) la gerbe des droites U_i engendrées par les u_i $(i \in X)$:

Définition 2 (Gerbe isométrique)
Un ensemble $\mathcal{G} = \{U_i \mid i \in X\}$ de droites vectorielles indexé par X est une gerbe isométrique, ou une α-gerbe dans l'espace quadratique (E, α), s'il existe une représentation u d'un graphe (Γ, X) dans l'espace (E, α) telle que pour tout indice $i \in X$, $U_i = \langle u_i \rangle$. On note alors $\mathcal{G}(u)$ la gerbe $\mathcal{G}$ que l'on dit associée à la représentation u de Γ.

Dans cet article on décrit toutes les gerbes associées à un graphe Γ donné. On montre aussi que le groupe $H(\Gamma)$ des automorphismes d'un graphe (Γ, X) possède une image naturelle $H(u)$ dans le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(u))$ de chaque gerbe $\mathcal{G}(u) = \{\langle u_1 \rangle, \ldots, \langle u_n \rangle\}$ qui lui est associée. Le théorème 2 prouve qu'en général le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(u))$ est beaucoup plus gros que $H(u)$ et que sa structure ne dépend pas de la représentation u, sauf lorsque les paramètres ω et c de u ont le même module ($|\omega| = |c|$). Pour finir, quelques exemples illustrent l'extension du groupe $H(u)$ au groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(u))$; si Γ est un carré, le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(u))$ s'identifie au groupe d'isométries d'un cube tandis que si Γ est un pentagone, le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(u))$ s'identifie au groupe d'isométries d'un dodécaèdre.
Un deuxième article, en préparation, classe les graphes conduisant à un groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(u))$ opérant doublement transitivement sur la gerbe $\mathcal{G}(u)$.

1.1 Détermination des représentations d'un graphe (Γ, X)

Terminologie. Une forme bilinéaire symétrique α étant donnée sur un espace vectoriel réel E, on appelle *matrice de Gram* d'un n-uplet de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice $\mathrm{Gram}_\alpha(u_1, \ldots, u_n)$ dont le coefficient de position (i, j) est $\alpha(u_i, u_j)$. Le résultat suivant est obtenu par des arguments élémentaires :

Proposition 1
Soit $S = (S_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique de rang r dans $M_n(\mathbb{R})$ et $E = \mathbb{R}^r$.
1. *Il existe une forme bilinéaire symétrique α sur E et des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ dans E tels que* $\quad S = \mathrm{Gram}_\alpha(u_1, \ldots, u_n)$
2. *Si S est aussi la matrice de Gram d'un autre système de vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de E pour une forme bilinéaire β, il existe une isométrie $f : (E, \alpha) \to (E, \beta)$ telle que pour tout indice i dans $X = \{1, \ldots, n\}$,* $\quad f(u_i) = v_i$

1.1.1 Notion d'isomorphisme. Opérations sur les représentations

Définition 3
Deux représentations $u : X \to (U,\alpha)$ et $v : X \to (V,\beta)$ d'un graphe (Γ, X) dans des espaces quadratiques (U,α) et (V,β) sont dites isomorphes s'il existe une isométrie f de (U,α) sur (V,β) telle que $f \circ u = v$.

Représentation triviale, représentation nulle
Soit $u : X \to (E,\alpha)$ une représentation d'un graphe (Γ, X) de paramètres (ω, c). Dire que les vecteurs u_i $(i \in X)$ sont deux à deux orthogonaux équivaut à dire que le paramètre c est nul. Dans ce cas nous dirons que la représentation u est *triviale*. Si maintenant la forme bilinéaire α est nulle, les deux paramètres ω et c de u sont nuls, et nous dirons que la représentation u est *nulle*.

Somme
Soient $u : X \to (U,\alpha)$ et $v : X \to (V,\beta)$ deux représentations d'un graphe (Γ, X) associées aux paramètres (ω_u, c_u) et (ω_v, c_v), et $U \oplus V$ la somme directe orthogonale de U et V. L'application $w : X \to U \oplus V$ donnée par $w_i = u_i + v_i$ pour tout $i \in X$ est une représentation de (Γ, X) dans l'espace $U \oplus V$ de matrice $S(w) = S(u) + S(v)$ et de paramètres $\omega_w = \omega_u + \omega_v$ et $c_w = c_u + c_v$. On dit que w est la *somme* de u et v, et on la note $w = u + v$.

Remarque. L'addition des représentations d'un graphe Γ est associative, à isomorphisme près : si u, v et w sont trois représentations de Γ alors
$$(u + v) + w \simeq u + (v + w).$$

Représentation réduite
Soit $u : X \to (E,\alpha)$ une représentation de rang r d'un graphe (Γ, X), V un supplémentaire dans E de l'espace $U = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$, $N = U \cap U^\perp$ et R un supplémentaire de N dans U qui est donc de dimension r. Notant p et q les projections sur R et $N \oplus V$ associées à la décomposition $E = R \oplus (N \oplus V)$, on vérifie simplement que
$*$ $p \circ u : X \to R$ est une représentation de Γ de matrice $S(p \circ u) = S(u)$ et de rang $r = \dim R$.
$*$ $q \circ u : X \to N \oplus V$ est une représentation nulle.
$*$ $u = p \circ u + q \circ u$ est donc u est la somme d'une représentation de degré r et d'une représentation nulle. De plus, pour toute autre décomposition de U en somme $R' \oplus N$ les représentations de Γ sur R et R' sont visiblement isomorphes. Résumons :

Proposition 2 (Représentation réduite)
Une représentation $u : X \to (E,\alpha)$ est dite **réduite** *si son degré $d = \dim E$ est égal au rang r de sa matrice $S(u)$. Toute représentation u d'un graphe (Γ, X) est la somme d'une représentation nulle et d'une représentation réduite, uniquement déterminée à isomorphisme près.*

1.1.2 *Classification*

Soit (Γ, X) un graphe et $u : X \to (E, \alpha)$ une représentation réduite de Γ. Sa matrice $S(u)$ ne dépendant que des paramètres ω et c (d'après (1)), on la note aussi $S(u) = S(\omega, c)$. Donnons nous inversement un couple de réels (ω, c) et la matrice $S(\omega, c)$ qui lui est associée. La proposition 1 nous montre qu'à isomorphisme près, il existe une unique représentation réduite $u : X \to (E, \alpha)$ dont la matrice est $S(u) = S(\omega, c)$. Ainsi,

Théorème 1
Soit (Γ, X) *un graphe.*
1. *L'application qui associe à toute représentation* $u : X \to E$ *de* Γ *le couple* (ω, c) *de ses paramètres dans* $\mathbb{R}^2$ *est surjective. Deux représentations réduites de* Γ *sont isomorphes si et seulement si elles ont les mêmes paramètres.*
2. *Le degré d'une représentation réduite de matrice* $S(1, c)$ *est le rang de cette matrice, c'est-à-dire* $n - \mu(c)$ *où* $n = |X|$ *et* $\mu(c)$ *est la multiplicité de* c *comme racine du polynôme* $\chi(x) = \det(S(1, x)$.

1.2 *Automorphismes d'un graphe et des gerbes associées*

Notations usuelles. À toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_X$ associons sa matrice P_σ qui est de type $n \times n$ et dont le (j, i)-ème terme vaut $P_{\sigma,j,i} = \delta_{j,\sigma(i)}$ (où δ est la fonction de Kronecker usuelle). Pour toute matrice M de type $n \times n$ posons ${}^\sigma M = P_\sigma.M.P_\sigma^{-1}$, et notons enfin $\mathrm{stab}(M)$ le stabilisateur de M dans $\mathcal{S}_X$, c'est-à-dire l'ensemble des permutations $\sigma \in \mathcal{S}_X$ telles que ${}^\sigma M = M$.

1.2.1 *Automorphismes d'un graphe* (Γ, X)

Soit $\mathcal{E}$ la matrice d'un graphe Γ et $H(\Gamma)$ le groupe de ses *automorphismes*, c'est-à-dire le sous-groupe du groupe $\mathcal{S}_X$ des permutations de $X = \{1, \ldots, n\}$ qui préservent l'ensemble Γ de ses arètes. On vérifie que pour σ dans $\mathcal{S}_X$, la matrice ${}^\sigma\mathcal{E}$ est la matrice du graphe $\sigma(\Gamma)$, donc le stabilisateur dans $\mathcal{S}_X$ du graphe Γ est aussi le stabilisateur de sa matrice $\mathcal{E}$:

$$H(\Gamma) = \mathrm{stab}(\mathcal{E}), \text{ ou encore : } \forall \sigma \in \mathcal{S}_X,\ {}^\sigma\mathcal{E} = \mathcal{E} \Longleftrightarrow \sigma(\Gamma) = \Gamma.$$

1.2.2 *Automorphismes d'une gerbe*

Soit $u : X \to (E, \alpha)$ une représentation réduite non triviale d'un graphe (Γ, X) où, pour éviter des discussions sans grand intérêt, on suppose que $|X| \geq 3$.
On appelle *automorphisme* de la gerbe $\mathcal{G}(u) = \{\langle u_1 \rangle \ldots, \langle u_n \rangle\}$ associée à la représentation u toute isométrie φ de (E, α) qui induit une permutation de l'ensemble $\mathcal{G}(u)$ par $\varphi(\langle u_i \rangle) = \langle \varphi(u_i) \rangle$ (pour tout $i \in X$). On note $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(u))$ le groupe de ces automorphismes.

Un exemple. Choisissons une permutation σ dans le groupe $H = H(\Gamma)$ des automorphismes du graphe (Γ, X). Les matrices $\mathcal{E}$ et ${}^{\sigma}\mathcal{E}$ étant égales, les systèmes de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)})$ ont même matrice de Gram et même rang, $r = \dim E$. Il existe donc, d'après la proposition 1, une isométrie f_σ de (E, α) vérifiant, pour tout $i \in X$, $f_\sigma(u_i) = u_{\sigma(i)}$. Par suite f_σ est un automorphisme de la gerbe $\mathcal{G}(u)$, et on vérifie simplement que l'application $f : H \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}(u))$ qui associe f_σ à chaque $\sigma \in H$ est un homomorphisme de groupes.

Une généralisation. Étudions les automorphismes φ de la gerbe $\mathcal{G}(u)$ tels que, pour une permutation convenablement choisie $\sigma \in \mathcal{S}_X$, on ait

$$\forall i \in X, \quad \langle \varphi(u_i) \rangle = \langle u_{\sigma(i)} \rangle. \tag{3}$$

Il existe, dans ce cas, un système de scalaires $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ tels que

$$\forall i \in X, \quad \varphi(u_i) = \nu_i . u_{\sigma(i)}. \tag{4}$$

Montrons qu'alors les ν_i, pour $i \in X$, sont tous dans l'ensemble $\{-1, 1\}$. D'après la proposition 1, φ est une isométrie, donc un automorphisme de la gerbe $\mathcal{G}(u)$, si et seulement si les matrices de Gram des systèmes de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(\nu_1 . u_{\sigma(1)}, \ldots, \nu_n . u_{\sigma(n)})$ sont égales, autrement dit si pour $i \neq j$,

$$\alpha(u_i, u_j) = \alpha(f(u_i), f(u_j)) = \alpha(\nu_i . u_{\sigma(i)}, \nu_j . u_{\sigma(j)}) = \nu_i . \nu_j . \varepsilon_{\sigma(i),\sigma(j)} . c = \varepsilon_{i,j} . c,$$

soit encore puisque, la représentation u étant non triviale, c est non nul :

$$\forall i, j \in X, \quad \nu_i . \nu_j . \varepsilon_{\sigma(i),\sigma(j)} = \varepsilon_{i,j}. \tag{5}$$

Mais comme $|X| \geq 3$, pour trois indices i, j, k distincts dans X, il vient $1 = |\nu_i . \nu_j| = |\nu_i . \nu_k| = |\nu_j . \nu_k|$, d'où l'on tire $1 = |\nu_i| = |\nu_j| = |\nu_k|$, donc le n-uplet $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ est à valeurs dans $\{-1, 1\}$. La condition (5) nous suggère la

Définition 4
Deux matrices M et N de même type $n \times n$ sont dites associées s'il existe une suite $\nu_1, \ldots, \nu_n$ de coefficients, tous pris dans $\{-1, 1\}$ tels que

$$\forall i, j, \ 1 \leq i, j \leq n, \qquad M_{i,j} = \nu_i . \nu_j N_{i,j}$$

On peut alors résumer la discussion qui précède par la

Proposition 3
Un automorphisme φ de la gerbe $\mathcal{G}(u)$ est associé à une permutation σ dans $\mathcal{S}_X$ par la relation (3) si et seulement si les matrices $\mathcal{E}$ et ${}^{\sigma}\mathcal{E}$ sont associées. Il existe, dans ce cas, un unique n-uplet $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ de coefficients tous pris dans $\{-1, 1\}$ tels que

$$\forall i \in X, \quad \varphi(u_i) = \nu_i . u_{\sigma(i)}.$$

L'isométrie φ est dite associée au couple (σ, ν) et notée $\varphi = f_{\sigma,\nu}$.

On munit maintenant l'ensemble G des couples $(\sigma, \nu) \in \mathcal{S}_X \times \{-1, 1\}^n$ satisfaisant à la condition (5) d'une structure de groupe pour laquelle l'application $f : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}(u))$ donnée par $f(\sigma, \nu) = f_{\sigma,\nu}$ est un morphisme de groupes. Choisissant deux éléments (σ, ν) et (σ', ν') dans G, les isométries $f_{\sigma,\nu}$ et $f_{\sigma',\nu'}$ de (E, α) qui leurs sont associées vérifient

$$f_{\sigma,\nu} \circ f_{\sigma',\nu'} = f_{\sigma'',\nu''} \text{ avec } \sigma'' = \sigma \circ \sigma' \text{ et pour tout } i \in X,\ \nu''_i = \nu_{\sigma'(i)}.\nu'_i.$$

Ceci nous conduit à noter $\nu^{\sigma'}$ le n-uplet donné par

$$\forall i \in X, \quad \nu_i^{\sigma'} = \nu_{\sigma'(i)},$$

et à définir sur G la loi $*$ en posant, pour (σ, ν) et (σ', ν') dans G

$$(\sigma, \nu) * (\sigma', \nu') = (\sigma \circ \sigma', \nu^{\sigma'}.\nu'). \tag{6}$$

On vérifie alors simplement la

Proposition 4
L'ensemble G des couples $(\sigma, \nu) \in \mathcal{S}_X \times \{-1, 1\}^n$ satisfaisant à la condition (5) est mumi d'une structure de groupe par la relation (6), pour laquelle l'application $f : (\sigma, \nu) \to f_{\sigma,\nu}$ devient un morphisme de G dans le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(u))$. On note $G(u)$ l'image de G dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(u))$ par ce morphisme

Nous pouvons maintenant compléter la description du groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(u))$:

Théorème 2
Soit u une représentation réduite et non triviale d'un graphe (Γ, X) dans un espace quadratique (E, α). On suppose de plus $|X| \geq 3$.
1. *Lorsque les droites $\langle u_i \rangle$ de la gerbe $\mathcal{G}(u) = \{\langle u_1 \rangle \ldots, \langle u_n \rangle\}$ sont deux à deux distinctes, le morphisme $f : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}(u))$ est un isomorphisme et on a*
$$G \simeq G(u) = \mathrm{Aut}(\mathcal{G}(u)).$$
2. *Lorsque les modules des paramètres ω et c de u sont distincts ($|\omega| \neq |c|$), les droites de la gerbe $\mathcal{G}(u)$ sont deux à deux distinctes.*

Démonstration
1. Par définition, tout automorphisme φ de la gerbe $\mathcal{G}(u) = \{\langle u_1 \rangle \ldots, \langle u_n \rangle\}$ induit une permutation de l'ensemble $\mathcal{G}(u)$. Lorsque les n droites $\langle u_1 \rangle \ldots, \langle u_n \rangle$ sont deux à deux distinctes il existe donc une permutation σ de X telle que pour tout indice i, $\varphi(\langle u_i \rangle) = \langle u_{\sigma(i)} \rangle$, ce qui n'est rien d'autre que la relation (3) ci-dessus. La proposition 3 nous montre qu'alors il existe un élément (σ, ν) dans G tel que $\varphi = f_{\sigma,\nu}$, et ceci prouve la surjectivité du morphisme f.
Un élément (σ, ν) du groupe G est dans le noyau du morphisme f si et seulement si pour tout indice $i \in X$, $f_{\sigma,\nu}(u_i) = \nu_i.u_{\sigma(i)} = u_i$. Mais les n droites $\langle u_i \rangle$ étant distinctes ces égalités impliquent $\sigma(i) = i$ et $\nu_i = 1$ pour tout indice i dans X. D'où l'injectivité.
2. On montre maintenant, par contraposition, que si ($|\omega| \neq |c|$), les droites $\langle u_1 \rangle \ldots, \langle u_n \rangle$ sont deux à deux distinctes. Si, pour deux indices i et j distincts, on a $\langle u_i \rangle = \langle u_j \rangle$, il existe un nombre ε non nul tel que $u_j = \varepsilon u_i$ et donc

$$\alpha(u_i, u_j) = \varepsilon.\alpha(u_i, u_i) = \varepsilon.\omega = \varepsilon_{i,j}.c, \text{ où } \varepsilon_{i,j} = \pm 1,$$

et
$$\alpha(u_i, u_j) = \varepsilon^{-1}.\alpha(u_j, u_j) = \varepsilon^{-1}.\omega.$$

Mais la représentation u étant non triviale, on a $c \neq 0$, donc $\omega \neq 0$, d'où l'on déduit que $\varepsilon = \varepsilon^{-1}$ puis $|\varepsilon| = |\varepsilon_{i,j}| = 1$ et enfin $|\omega| = |c|$. □

Étude du cas particulier $|\omega| = |c|$

On suppose encore que la représentation $u : X \to (E, \alpha)$ est réduite, que $|\omega| = |c|$ et que $|X| \geq 3$.
Remarquons tout d'abord qu'on ne modifie pas le groupe des automorphismes d'une gerbe $\mathcal{G}(u)$ associée à une représentation $u : X \to (E, \alpha)$ en multipliant u par un scalaire non nul ou en remplaçant α par $-\alpha$. L'étude du groupe d'automorphismes de la gerbe $\mathcal{G}(u)$ se ramène donc toujours au cas où $\omega = 1$, ce qu'on suppose dans la suite. Quitte à réordonner les éléments de X, on peut écrire $\mathcal{G}(u) = \{\langle u_1\rangle \ldots, \langle u_m\rangle\}$ où $m \leq n$ et les droites $\langle u_i\rangle$ sont deux à deux distinctes pour $1 \leq i \leq m$. Notons $Y = \{1, \ldots, m\}$ et (Γ_Y, Y) la restriction du graphe (Γ, X) à Y, c'est-à-dire le graphe dont l'ensemble des sommets est Y et dont les arêtes sont celles de (Γ, X) qui sont contenues dans Y.
Le théorème suivant ramène l'étude de la représentation $u : X \to (E, \alpha)$ et du groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(u))$ à celle de sa restriction v à Y, qui relève du théorème 2 :

Théorème 3
Soit $v : Y \to (E, \alpha)$ la restriction au graphe (Γ_Y, Y) de la représentation $u : X \to (E, \alpha)$. Alors,
1. *on a* $\mathcal{G}(u) = \{\langle u_1\rangle \ldots, \langle u_n\rangle\} = \{\langle u_1\rangle \ldots, \langle u_m\rangle\} = \mathcal{G}(v)$
2. *les groupes* $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(u))$ *et* $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(v))$ *sont égaux.*
3. *la représentation $v : Y \to (E, \alpha)$ du graphe Γ_Y est réduite et non triviale.*

Démonstration .
Les points 1 et 2 sont immédiats.
3. L'égalité $\mathcal{G}(u) = \mathcal{G}(v)$ prouve que les matrices $\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n)$ et $\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_m)$ ont le même rang r, aussi égal à la dimension de E, donc $v : Y \to (E, \alpha)$ est une représentation réduite. Elle est non triviale car u l'est. □

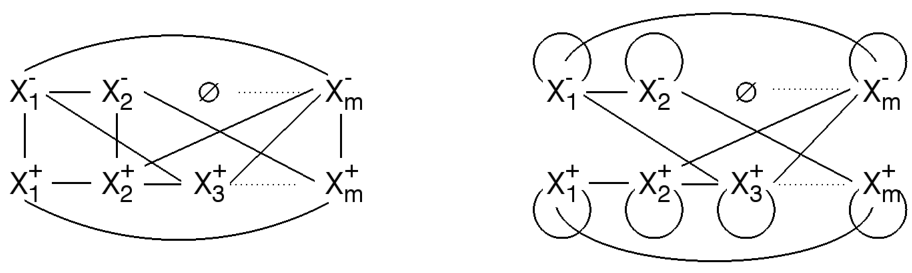
Commentaires
En fait l'inégalité stricte $|\mathcal{G}(u)| < |X|$ ne se produit que lorsque le graphe a une structure assez particulière que l'on regarde maintenant.
On introduit quelques notations. Notons "$\simeq$" la relation équivalence sur X donnée par $i \simeq k$ si $\langle u_i\rangle = \langle u_k\rangle$. Notant $Y = \{1, \ldots, m\}$, chaque point i de X est donc équivalent à un unique point j de Y que l'on note $j = \pi(i)$. Notons aussi $X_j = X_{\pi(i)}$ la classe de l'élément $i \in X$, et pour $j \in Y$, X_j^+ (resp. X_j^-) désigne l'ensemble des indices i de X_j tels que $u_i = u_j$ (resp. $u_i = -u_j$). Enfin on applique aux exposants la règle des signes usuelle, par exemple $X_j^{+-} = X_j^-$.

Proposition 5
Soit u une représentation du graphe (Γ, X) de paramètres $(1, c)$, où $c = \pm 1$.
1. *L'ensemble des arètes qui lient deux éléments A et B parmi $X_1^+, X_1^-, \ldots, X_m^+, X_m^-$ est soit vide, soit l'ensemble de toutes les arètes $\{a, b\}$ (pour $(a, b) \in A \times B$). On note $A \not\sim B$ le premier cas $A \sim B$ le second.*
2. *Pour deux indices i et j distincts dans Y on a*

$$X_i^+ \sim X_j^+ \Longleftrightarrow X_i^+ \not\sim X_j^- \Longleftrightarrow X_i^- \not\sim X_j^+ \Longleftrightarrow X_i^- \sim X_j^-$$

3. *Pour tout indice i dans Y on a ,*
   a. si $c = 1$, $\quad X_i^+ \not\sim X_i^+$, $\quad X_i^- \not\sim X_i^-$ et $X_i^+ \sim X_i^-$,
   b. si $c = -1$, $\quad X_i^+ \sim X_i^+$, $\quad X_i^- \sim X_i^-$ et $X_i^+ \not\sim X_i^-$.

Démonstration (la figure symbolique ci-dessous présente un schema possible du graphe dans les cas $c = 1$ et $c = -1$: chaque arète ou arc entre deux ensemble A et B symbolise le graphe formé de toutes les paires $\{a, b\}$ (pour $(a, b) \in A \times B$)).



cas $c = 1$ $\qquad$ cas $c = -1$

Soient A et B deux ensembles parmi $X_1^+, X_1^-, \ldots, X_m^+, X_m^-$, i, i' deux indices pris dans A et j, j' deux indices pris dans B, donc $u_{i'} = u_i$ et $u_{j'} = u_j$.
Si $A \neq B$ on a

$$\varepsilon_{i,j}.c = \alpha(u_i, u_j) = \alpha(u_{i'}, u_{j'}) = \varepsilon_{i',j'}.c,$$

donc $\{i', j'\}$ est une arète si et seulement si $\{i, j\}$ en est une. De plus si j'' est dans B^- alors $u_{j''} = -u_j$ et donc

$$\varepsilon_{i,j''}.c = \alpha(u_{j''}, u_i) = -\alpha(u_j, u_i) = -\varepsilon_{i,j}.c,$$

donc $\{i, j''\}$ est une arète si et seulement si $\{i, j\}$ n'en est pas une, ce qui prouve 1 et 2 lorsque A et B sont distincts.
Si $A = B$ et $i \neq j$ comme $u_i = u_j$, il vient $\varepsilon_{i,j}.c = \alpha(u_i, u_j) = \alpha(u_i, u_i) = 1$, donc le coefficient $\varepsilon_{i,j} = c$ ne dépend que de c, et deux points de A sont liés si $c = -1$, et non liés si $c = 1$. Ceci prouve 3 et termine la démonstration. $\square$

Conclusion
Les théorèmes 2 et 3 nous donnent une description complète du groupe des automorphismes d'une gerbe $\mathcal{G}(u)$ en fonction du graphe (Γ, X) dont elle provient. Dans les exemples élémentaires qui suivent, on montre que souvent le groupe $G(u)$ des automorphismes de la gerbe est plus gros que le groupe $H(\Gamma)$

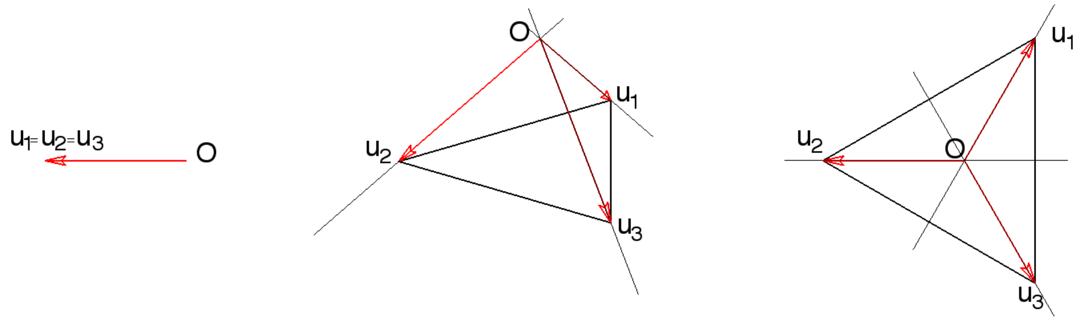
des automorphismes du graphe (Γ, X). Dans un travail en cours nous utilisons ces résultats pour déterminer toutes les gerbes isométriques $\mathcal{G}(u)$ dont le groupe d'automorphismes agit deux fois transitivement sur $\mathcal{G}(u)$.

1.3 Quelques exemples

Dans chacun des exemples qui suivent on donne :
Le graphe (Γ, X) par sa matrice $\mathcal{E} = S(1,1)$, la matrice $S(1,c)$ et son déterminant $\chi(c) = \det(S(1,c))$ dont les racines fournissent les représentations de rang $r < n$ du graphe. Si c est une racine de $\chi(c)$ de multiplicité $\mu(c)$, la matrice $S(1,c)$ est de rang $r = n - \mu(c)$, donc associée à une représentation du graphe (Γ, X) dans un espace de dimension r. On représente dans chaque cas un système de vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ qui réalisent la représentation correspondante. Pour des raisons purement graphique on a limité les exemples aux cas où la forme quadratique donnée par la matrice $S(1,c)$ est positive.

1.3.1 Triangle

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad S(1,c) = \begin{bmatrix} 1 & -c & -c \\ -c & 1 & -c \\ -c & -c & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = -(2\,c-1)\,(c+1)^2$$



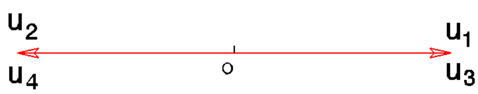
$c = -1$ $\qquad$ $-1 < c < 1/2$ $\qquad$ $c = 1/2$

Pour $c = -1$, la matrice $S(1,c)$ est de rang 1 et le triangle est représenté dans la droite $\mathbb{R}$. Les trois sommets du triangle sont envoyés sur un même point, par exemple 1. Ce type de représentation (sur un point) ne peut avoir lieu que pour les graphes complets.
Pour $c = 1/2$, la matrice $S(1,c)$ positive, est de rang 2 et le triangle est représenté dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. C'est sa représentation usuelle comme

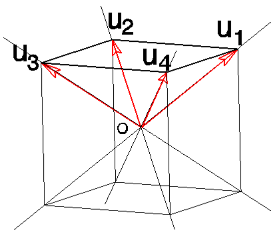
triangle équilatéral, centré à l'origine.
Pour $-1 < c < 1/2$, la matrice $S(1,c)$ est définie positive de rang 3. Le triangle est représenté par les trois vecteurs issus d'un même sommet dans un tétraèdre droit de base un triangle équilatéral. Une telle représentation est une combinaison linéaire à coefficients positifs des deux précédentes.
Lorsque $c \notin [-1, 1/2]$ la représentation est de degré trois, dans un espace quadratique donné par une forme non positive.

1.3.2 Carré

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S(1,c) = \begin{bmatrix} 1 & -c & c & -c \\ -c & 1 & -c & c \\ c & -c & 1 & -c \\ -c & c & -c & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = -\,(3\,c+1)\,(c-1)^3$$



$c = 1$



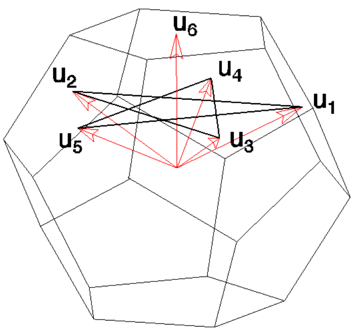
$c = -1/3$

Pour $c = -1/3$, la matrice $S(1,c)$ est positive de rang 3. Le carré est représenté par la gerbe des quatre grandes diagonales d'un cube, qui font deux à deux un angle dont le cosinus vaut $-1/3$ comme prévu. Le graphe du carré est alors "concrétisé" par l'une des faces du cube.
Sur cet exemple le théorème 2 prend tout son sens : le groupe d'automorphisme du carré est le groupe diédral D_4 alors que le groupe de la gerbe associée est le groupe du cube, d'ordre 48.
Pour $c = 1$, la matrice $S(1,c)$ est positive de rang 1. Le carré est représenté sur la droite $\mathbb{R}$. Il s'envoie donc sur $\{-1, +1\}$. Deux sommets du carré ont même image lorsqu'ils sont diagonalement opposés.
Pour $-1/3 < c < 1$, la matrice $S(1,c)$ est définie positive de rang 4. On visualise plus difficilement les gerbes associées toutefois ce sont toujours des combinaisons linéaires à coefficients positifs des deux précédentes.
Lorsque $c \notin [-1/3, 1]$ la représentation est de degré trois, dans un espace quadratique donné par une forme non positive.

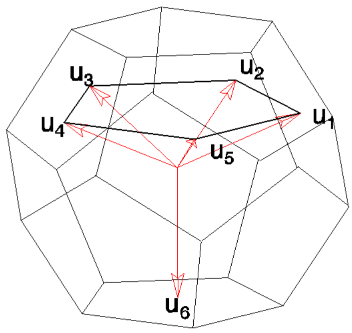
1.3.3 Pentagone

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S(1,c) = \begin{bmatrix} 1 & -c & c & c & -c \\ -c & 1 & -c & c & c \\ c & -c & 1 & -c & c \\ c & c & -c & 1 & -c \\ -c & c & c & -c & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = (-1+5\,c^2)^2$$

Pour $c = \pm\sqrt{5}/5$, la matrice $S(1,c)$ est positive de rang 3. On obtient ces représentations en considérant cinq des six droites passant par les centres des faces opposées d'un dodécaèdre. Elles forment deux à deux un angle dont le cosinus est $\pm\sqrt{5}/5$. Si $c = \sqrt{5}/5$, pour $j = i+1 \mod (5)$, les points i et j de $X = \{1,2,3,4,5\}$ sont liés, donc $(u_i|u_j) = -\sqrt{5}/5$. On obtient la représentation croisée du pentagone, tandis que pour $c = -\sqrt{5}/5$, les mêmes points i et j sont liés, donc $(u_i|u_j) = \sqrt{5}/5$ ce qui donne la représentation " convexe" du pentagone.
Le groupe d'automorphismes de la gerbe des 5 droites $U_1 = \langle u_1\rangle, \ldots, U_5 = \langle u_5\rangle$ est le stabilisateur de U_6 dans le groupe des isométries de l'icosaèdre. Il est donc isomorphe au groupe D_5.



$c = \sqrt{5}/5$



$c = -\sqrt{5}/5$

1.3.4 Hexagone pointé

J'appelle hexagone pointé le graphe formé sur six points par un pentagone et un point isolé. Ce cas est intéressant parce qu'il sera fortement généralisé par la suite.

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ S(1,c) = \begin{bmatrix} 1 & -c & c & c & -c & c \\ -c & 1 & -c & c & c & c \\ c & -c & 1 & -c & c & c \\ c & c & -c & 1 & -c & c \\ -c & c & c & -c & 1 & c \\ c & c & c & c & c & 1 \end{bmatrix},\ \mathcal{X} = -\left(-1+5\,c^2\right)^3$$

Comme on le voit le polynôme $\chi(c)$ est un multiple du précédent, ce qui n'est guère étonnant puisque le pentagone apparait comme un sous-graphe de l'hexagone pointé.

Les deux représentations, associées aux cas $c = \sqrt{5}/5$ et $c = -\sqrt{5}/5$ proviennent des représentations du pentagone auxquelles on rajoute le vecteur u_6. Mais comme le point 6 n'est lié à aucun des points $1, 2, 3, 4, 5$, l'angle (u_i, u_6) (pour $1 \leq i \leq 5$) est le complémentaire des angles (u_i, u_{i+1}) (i, entier modulo 5), autrement dit si l'angle (u_i, u_{i+1}) est aigu alors (u_i, u_6) est obtus et vice versa. Dans les deux cas le groupe H d'automorphismes du graphe est le groupe diédral D_5 tandis que le groupe d'automorphismes de la gerbe image est le groupe d'isométries du dodécaèdre, agissant deux fois transitivement sur l'ensemble $\mathcal{G}(u) = \{U_1, \ldots, U_6\}$ des six droites vectorielles.

2 Bibliographie

Livres

[1] Dembowski, P. *Finite geometries.* Springer-Verlag (1968)

[2] Norman Biggs. *Finite groups of automorphisms.* London Mathematical Society. (1970)

[3] Norman Biggs. *Algebraic Graph Theory.* Cambridge University Press, (1993)

[4] P. J. Cameron and J.H.Van Lint. *Designs, graphs,codes and their links, vol 22 of London Mathematical Society Student Texts,* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.