FILTRATIONS BROWNIENNES ET COMPLÉMENTS INDÉPENDANTS : RÉSULTATS ET PROBLÈMES OUVERTS

Christophe Leuridan, Jean Brossard

TRANSFORMATIONS BROWNIENNES ET COMPLÉMENTS INDÉPENDANTS : RÉSULTATS ET PROBLÈMES OUVERTS

Jean BROSSARD et Christophe LEURIDAN

Résumé

Dans la première partie, nous comparons la filtration naturelle d'un mouvement brownien B dans $\mathbf{R}^d$ à celle du mouvement brownien $B' = \int_0^{\cdot} HdB$ où H est un processus prévisible dans la filtration de B à valeurs dans $O_d(\mathbf{R})$. Nous montrons l'existence d'une variable aléatoire U indépendante du mouvement brownien B' et de loi uniforme sur $[0, 1]$ ou sur un ensemble fini telle que $\sigma(B) = \sigma(B') \vee \sigma(U)$ dans deux situations particulières :
- lorsque la transformation est « assujettie » à une subdivision de $\mathbf{R}_+$;
- lorsque la transformation $B \mapsto B'$ commute avec les changements d'échelle.
La variable aléatoire U code l'information perdue par la transformation $B \mapsto B'$. Nous montrons que tous les types de perte d'information peuvent se produire : le nombre de valeurs de U peut être infini ou égal à n'importe quel entier ≥ 1.

Dans la seconde partie, nous étudions une question voisine : nous nous donnons un mouvement brownien plan (X, Y) et un mouvement brownien linéaire X' dans la filtration naturelle de (X, Y). Peut-on trouver un autre mouvement brownien linéaire Y' dans la filtration naturelle de (X, Y), indépendant de X' et tel que le mouvement brownien (X', Y') ait la même filtration naturelle que (X, Y) ? Nous donnons une condition nécessaire pour que le mouvement brownien X' possède un complément brownien indépendant et nous étudions quelques exemples.

Classification mathématique : 60J65,60H20.
Mots-clés : filtrations, transformations browniennes, compléments indépendants.

1 Transformations intégrales du mouvement brownien

1.1 Introduction

Soient B un mouvement brownien dans $\mathbf{R}^d$ et $\mathcal{F}^B_\cdot$ la filtration naturelle (complétée) de B. Si H est un processus prévisible dans $\mathcal{F}^B_\cdot$ à valeurs dans $O_d(\mathbf{R})$, l'intégrale stochastique $B' = \int_0^{\cdot} HdB$ définit un nouveau mouvement brownien dans $\mathbf{R}^d$, dont la filtration naturelle est évidemment contenue dans celle de B (au sens où $\mathcal{F}^{B'}_t \subset \mathcal{F}^B_t$ pour tout t). A l'aide de la propriété de représentation prévisible, ou bien en utilisant l'indépendance de $\mathcal{F}^B_t$ et des accroissements $B'_{t+\cdot} - B'_t$, on montre facilement que la filtration naturelle de B' est *immergée* dans celle de B, au sens où toute martingale dans la filtration $\mathcal{F}^{B'}_\cdot$ est encore une martingale dans $\mathcal{F}^B_\cdot$ (voir par exemple [1], proposition 1).

L'inclusion $\mathcal{F}^{B'}_t \subset \mathcal{F}^B_t$ peut être stricte comme le montre l'exemple de la transformation de Lévy : si B un mouvement brownien dans $\mathbf{R}$ et $B' = \int_0^{\cdot} \mathrm{sgn}(B_s)dB_s$, il est bien connu que la filtration naturelle de B' est celle de $|B|$. L'information perdue par la transformation $B \mapsto \int_0^\cdot \mathrm{sgn}(B_s)dB_s$ est donc la famille des signes des excursions de B. On peut coder cette information par une suite de signes indépendants et uniformément distribués, indépendante de B', ou, en utilisant les développements dyadiques, par une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendante de B'.

Nous allons voir que l'existence d'un complément indépendant et de loi uniforme est une situation courante, moyennant quelques restrictions sur le processus prévisible H. Pour se convaincre qu'une filtration brownienne immergée dans une autre ne possède pas toujours de complément indépendant, posons $H_t = \mathrm{sgn}(B_t - B_1)$ si $t > 1$ et $B_1 > 0$ et $H_t = 1$ dans tous les autres cas. Autrement dit, on applique la transformation de Lévy aux accroissements à partir de l'instant 1 lorsque $B_1 > 0$, et on ne change rien lorsque $B_1 \leq 0$. Dans ce cas, pour $t > 1$ fixé, la loi de $(B_s)_{0 \leq s \leq t}$ connaissant $(B'_s)_{0 \leq s \leq t}$ est diffuse si $B'_1 > 0$ et est une masse de Dirac si $B'_1 \leq 0$. Il n'existe pas de complément indépendant à $\mathcal{F}^{B'}_t$ qui redonne la tribu $\mathcal{F}^B_t$.

Les deux paragraphes suivants présentent deux situations où une hypothèse supplémentaire assure l'existence d'un complément indépendant et de loi uniforme sur $[0,1]$ ou sur un ensemble fini, cet ensemble fini étant un singleton lorsque la transformation $B \mapsto B'$ ne perd pas d'information.

1.2 Transformations assujetties à une subdivision de $\mathbf{R}_+$.

Dans ce paragraphe, nous appellerons subdivision de $\mathbf{R}_+$ toute suite $(t_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ strictement croissante telle que $t_n \to 0$ quand $n \to -\infty$ et $t_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Grosso modo, nous dirons que la transformation $B \mapsto \int_0^\cdot H_s dB_s$ est assujettie à une subdivision $(t_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ lorsque le processus H restreint à un intervalle $[0, t_n]$ est une fonction de B restreint à l'intervalle $[0, t_{n-1}]$. Enonçons le résultat précis.

Théorème 1 *Soit B un mouvement brownien défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^d$. Soit $(t_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une subdivision de $\mathbf{R}_+$. Soit H un processus à valeurs dans $O_d(\mathbf{R})$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, l'application $(s,\omega) \mapsto H_s(\omega)$ de $[0,t_n] \times \Omega$ soit mesurable pour la tribu $\mathcal{B}([0,t_n]) \otimes \mathcal{F}^B_{t_{n-1}}$. Soit B' le mouvement brownien défini par $B' = \int H dB$. Alors pour tout $t > 0$, il existe une variable aléatoire U_t indépendante de $\mathcal{F}^{B'}_t$ et de loi uniforme sur $[0,1]$ ou sur un ensemble fini telle que $\mathcal{F}^B_t = \mathcal{F}^{B'}_t \vee \sigma(U_t)$.*

Démonstration. Nous montrons le résultat pour $t = +\infty$, la démonstration s'adaptant facilement au cas où $t \in \mathbf{R}^*_+$. L'idée est de se ramener à des processus à temps discret et d'appliquer les résultats sur les suites récurrentes stochastiques ou « chaînes de Markov constructives » indexées par $\mathbf{Z}$. L'hypothèse sur le processus H assure que la transformation $B \mapsto \int_0^\cdot H_s dB_s$ ne peut perdre de l'information qu'à l'instant 0, ce qui permet d'utiliser des lois du zéro-un.

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, notons X_n et V_{n+1} les portions de trajectoires définies par

$$X_n = (B_s)_{0 \leq s \leq t_n} \ \text{ et } \ V_{n+1} = (B'_s - B'_{t_n})_{t_n \leq s \leq t_{n+1}}.$$

Les filtrations naturelles des processus $(X_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, $(V_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ et $((X_n,V_n))_{n\in\mathbf{Z}}$ sont données par $\mathcal{F}^{(X,V)}_n = \mathcal{F}^X_n = \mathcal{F}^B_{t_n}$ et $\mathcal{F}^V_n = \mathcal{F}^{B'}_{t_n}$. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la variable aléatoire V_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}^{(X,V)}_n = \mathcal{F}^B_{t_n}$ et l'égalité $B_t - B_{t_n} = \int_{t_n}^t H_s^{-1} dB'_s$ pour $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ montre que la connaissance de X_n et de V_{n+1} permet de reconstituer $(H_s)_{t_n \leq s \leq t_{n+1}}$ et donc $X_{n+1} = (B_s)_{0 \leq s \leq t_{n+1}}$. Autrement dit, $(X_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une chaîne de Markov inhomogène gouvernée par une relation de récurrence de la forme $X_{n+1} = f_n(X_n, V_{n+1})$.

Comme la tribu asymptotique $\mathcal{F}^X_{-\infty} = \mathcal{F}^B_0$ est triviale, il suffit d'appliquer le théorème que nous rappelons ci-dessous (corollaire 1.2 de [4]).

Théorème 2 *Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une chaîne de Markov inhomogène gouvernée par une suite de variables $V = (V_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ et une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, autrement dit :*

X_n est une variable aléatoire à valeurs dans un espace mesurable $(E_n, \mathcal{E}_n)$;

V_{n+1} est une variable aléatoire à valeurs dans un espace mesurable $(G_{n+1}, \mathcal{G}_{n+1})$ indépendante de la suite $((X_k, V_k))_{k\leq n}$

$X_{n+1} = f_n(X_n, V_{n+1})$ où f_n est une application mesurable de $(E_n \times G_{n+1}, \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{G}_{n+1})$ dans $(E_{n+1}, \mathcal{E}_{n+1})$.

Si les espaces $(E_n, \mathcal{E}_n)$ sont lusiniens (isomorphes à un borélien d'un espace polonais) et si la tribu $\mathcal{F}^X_{-\infty}$ est triviale, alors il existe une variable aléatoire U indépendante de V et de loi uniforme sur $[0,1]$ ou sur un ensemble fini telle que $\sigma(X) = \sigma(V) \vee \sigma(U)$.

Un exemple simple en dimension 1, étudié dans [1], est celui où $H_s = \mathrm{sgn}(B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ pour $t_n < s \leq t_{n+1}$: la filtration $\mathcal{F}^{B'}$ est alors la filtration de Goswami-Rao. Autrement dit $\mathcal{F}^{B'}_t$ est engendrée par les fonctionnelles paires du mouvement brownien jusqu'à l'instant t. On perd exactement un bit d'information en passant de $\mathcal{F}^B_t$ à $\mathcal{F}^{B'}_t$.

Plus généralement, M. Malric [7, 8] utilise des transformations du même type pour construire un mouvement brownien qui engendre la filtration quotient de la filtration d'un mouvement brownien de dimension d par n'importe quel sous-groupe du groupe orthogonal. Par un choix convenable du sous-groupe, on peut donc perdre une information codée par une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$ ou sur un ensemble fini fixé.

Déterminer l'information perdue peut être difficile, même pour une transformation donnée par une formule simple en dimension 1. Par exemple, la transformation $B \mapsto B' = \int_0^\cdot \mathrm{sgn}(B_{s/2})dB_s$ est assujettie à la subdivision $(2^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ et perd au moins un bit d'information, puisque B' est une fonction paire de B. Perd-elle seulement un bit d'information ?

Cette dernière transformation appartient à l'autre classe intéressante que nous allons voir, constituée des transformations qui commutent avec les changements d'échelle.

1.3 Transformations commutant avec les changements d'échelle

Le résultat s'énonce de la façon suivante :

Théorème 3 *Soit B un mouvement brownien défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^d$. Soit B' le mouvement brownien défini par $B' = \int H dB$, où H est un processus prévisible de la forme*

$$H_t = h\Big((t^{-1/2}B_{tu})_{0\leq u\leq 1}\Big)$$

pour une certaine application h de $\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R}^d)$ dans $O_d(\mathbf{R})$ ne dépendant pas de t, alors pour tout $t > 0$, il existe une variable aléatoire U_t indépendante de $\mathcal{F}^{B'}_t$ et de loi uniforme sur $[0,1]$ ou sur un ensemble fini telle que $\mathcal{F}^B_t = \mathcal{F}^{B'}_t \vee \sigma(U_t)$.

Remarque : on peut montrer – mais ce n'est pas notre propos – que la forme de H est équivalente au fait que la transformation $B \mapsto B'$ commute avec les dilatations

$B \mapsto (\frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t})_{t \geq 0}$. Dans la démonstration, nous utiliserons simplement le fait que la loi du couple (B, B') est invariante par changement d'échelle, ce qui est encore équivalent.

Démonstration. Cette fois-ci, on ne peut pas appliquer directement les résultats sur les chaînes de Markov constructives, mais on peut adapter la démonstration du théorème 1. Pour $t > 0$, notons $(\nu_t(\omega, \cdot))_{\omega \in \Omega}$ la loi conditionnelle de $(B_s)_{0 \leq s \leq t}$ sachant $(B'_s)_{0 \leq s \leq t}$, qui est aussi la loi conditionnelle de $(B_s)_{0 \leq s \leq t}$ sachant B' et posons

$$A_t(\omega) = \nu_t(\omega, \{(B_s(\omega))_{0 \leq s \leq t}\}).$$

Si $s \leq t$, la loi $\nu_s(\omega, \cdot)$ est l'image de de $\nu_t(\omega, \cdot)$ par la projection canonique de $\mathcal{C}([0, t], \mathbf{R}^d)$ dans $\mathcal{C}([0, s], \mathbf{R}^d)$. Cela entraîne que le processus $(A_t)_{t \geq 0}$ est décroissant.

Mais par hypothèse, la loi du couple (B, B') est invariante par changement d'échelle, ce qui entraîne que la loi de A_t ne dépend pas de t. Donc presque sûrement A_t ne dépend pas de t. Les variables aléatoires A_t sont presque sûrement égales à une variable aléatoire $\mathcal{F}_0^B$-mesurable, donc presque sûrement constante. Soit a cette constante. En conditionnant par rapport à $\sigma((B'_s)_{0 \leq s \leq t})$ l'égalité presque sûre

$$\mathbf{I}_{[\nu_t(\omega, \{(B_s(\omega))_{0 \leq s \leq t}\}) = a]} = 1,$$

on obtient pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\int_{C([0,t], \mathbf{R}^d)} \mathbf{I}_{[\nu_t(\omega, \{b\}) = a]} \nu_t(\omega, db) = 1.$$

Donc $\nu_t(\omega, \cdot)$ est formée de $N = 1/a$ atomes de masse a si $a > 0$, et diffuse si $a = 0$. Dans les deux cas, la structure atomique de $\nu_t(\omega, \cdot)$ ne dépend pas de ω, ce qui permet de construire un complément indépendant U_t.

Si $a > 0$, il suffit de numéroter de façon $\sigma(B')$-mesurable les atomes de $\nu_t(\omega, \cdot)$; on définit $U_t(\omega)$ comme le numéro de l'atome $(B_s(\omega))_{0 \leq s \leq t}$.

Si $a = 0$, on choisit une application $F(\omega, \cdot)$ de $\mathcal{C}([0, t], \mathbf{R})$ dans $[0, 1]$, dépendant de façon $\sigma(B')$-mesurable de ω, qui envoie $\nu_t(\omega, \cdot)$ sur la loi uniforme sur $[0, 1]$; on pose alors $U_t(\omega) = F(\omega, (B_s(\omega))_{0 \leq s \leq t})$.

1.4 Perte d'information pour les transformations commutant avec les changements d'échelle

Voyons quelques exemples en dimension 1, montrant que tous les types de perte d'information sont possibles.

La transformation de Lévy, définie par $H_t = \mathrm{sgn}(B_t)$ perd une information infinie.

Lorsque H_t est le signe de la plus longue excursion achevée avant l'instant t, la transformation $B \mapsto B' = \int_0^{\cdot} H dB$ perd un bit d'information et le mouvement brownien B' engendre la filtration de Goswami-Rao (voir [1]).

Pour construire une transformation perdant une information à p valeurs possibles, on peut se limiter au cas où p est impair (ou même premier ≥ 3) et composer les transformations. La construction dont nous allons donner les étapes s'inspire de la construction surprenante d'une transformation brownienne d'ordre p et commutant avec les changements d'échelle donnée dans [1].

L'idée est d'inclure dans le mouvement brownien un jeu de pile ou face (c'est-à-dire une suite i.i.d. indexée par $\mathbf{Z}$ de variables aléatoires uniformes sur $\{-1,1\}$) qui soit invariant à translation temporelle près par changement d'échelle du mouvement brownien. Un exemple est fourni par les signes des *excursions longues* du mouvement brownien, c'est-à-dire des excursions plus longues que toutes les excursions antérieures.

On utilise alors une transformation *homogène* (c'est-à-dire qui commute avec les translations temporelles) du jeu de pile ou face perdant une information à p valeurs. Comme dans l'article [3], on obtient une telle transformation en observant l'effet sur les développements dyadiques de la transformation $x \mapsto px$ modulo 1. Plus précisément, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$x \equiv \sum_{n \leq -1} a_n(x) 2^n \quad \text{et} \quad px \equiv \sum_{n \leq -1} b_n(x) 2^n \text{ modulo } 1,$$

avec $a_n(x) = \mathrm{Ent}(2^{-n}x) - 2\mathrm{Ent}(2^{-n-1}x) = \mathrm{Ent}(2^{-n}x) \mod 2$ et $b_n(x) = a_n(px)$. Mais a_n et b_n sont des fonctions 2^{n+1}-périodiques et p est impair donc

$$b_n = \mathrm{Ent}(2^{-n} p \sum_{k \leq n} a_k 2^k) \mod 2 = a_n + \mathrm{Ent}(p \sum_{k \geq 1} a_{n-k} 2^{-k}) \mod 2.$$

Cette dernière formule fournit une transformation sur les suites de $\{0,1\}^{-\mathbf{N}}$, ou même de $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$, qui a les propriétés voulues. Il reste à changer $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ en $\{-1,1\}^{\mathbf{Z}}$ pour obtenir une transformation homogène du jeu de pile ou face, c'est-à-dire de la forme $(x_n)_{n\in\mathbf{Z}} \mapsto (x_n \phi\big((x_{n-k})_{k\geq 1}\big))_{n \in \mathbf{Z}}$ avec ϕ mesurable de $\{-1,1\}^\infty$ dans $\{-1,1\}$.

L'homogénéité temporelle de cette transformation du jeu de pile ou face permet de l'appliquer aux signes des excursions longues sans avoir besoin de numéroter les excursions. De plus, la transformation brownienne obtenue commute avec les changements d'échelle. Mais si on ne modifie que les signes des excursions longues en conservant telles quelles les autres excursions, le mouvement brownien obtenu ne peut pas se représenter par l'intégrale stochastique d'un processus *prévisible*.

Pour obtenir un intégrande H prévisible, introduisons la suite ordonnée $(V_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ des fins d'excursions longues du mouvement brownien B et notons ϵ_n le signe de l'excursion longue finissant à l'instant V_n. Il suffit de poser $H_t = \phi\big((\epsilon_{n-k})_{k\geq 1}\big)$ sur l'événement $[V_{n-1} < t \leq V_n]$. Cette définition ne dépend pas de la façon de numéroter les excursions, pourvu que l'ordre chronologique soit respecté. Bien qu'on ne sache pas énumérer les fins d'excursions longues par une suite strictement croissante de temps d'arrêt indexée par $\mathbf{Z}$, le processus H est prévisible. En effet, pour $\epsilon > 0$ fixé, on peut choisir la numérotation de telle sorte que $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit la suite ordonnée des fins d'excursions longues postérieures à l'instant $\epsilon > 0$, ce qui montre que la restriction de H à $[\epsilon, +\infty[$ est prévisible.

Le processus H est constant entre deux fins d'excursions longues consécutives de B, donc $\int_0^\cdot H dB = HB$. Autrement dit, les mouvements browniens B et $B' = \int_0^\cdot H dB$ ont les mêmes excursions à un signe près et ce signe ne peut varier qu'aux fins d'excursions longues. La transformation $B \mapsto B' = \int_0^\cdot H dB$ perd donc une information à p valeurs possibles, tout comme la transformation induite sur les signes des excursions longues.

Comparaison avec la construction de Attal, Burdzy, Émery et Hu

La construction d'une transformation d'ordre p par Attal, Burdzy, Émery et Hu présente une difficulté supplémentaire du fait que l'application $x \mapsto x + \frac{1}{p}$ modulo 1 vue sur les développements dyadiques fournit une transformation *inhomogène* du jeu de pile ou face, d'ordre p. L'inhomogénéité pose une difficulté supplémentaire pour inclure la transformation du jeu de pile ou face dans le mouvement brownien. Mais la période q du développement dyadique de $\frac{1}{p}$ leur permet de mener à bien la démonstration au prix d'une étape supplémentaire : la construction d'une partie de $\{V_n; n \in \mathbf{Z}\}$ invariante par changement d'échelle et numérotable cycliquement par $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ de façon optionnelle. Pour les problèmes de numérotation des records d'un processus de Poisson ponctuel tel que le processus des longueurs d'excursions, nous renvoyons le lecteur à l'article [3].

La construction de Attal, Burdzy, Émery et Hu, on le voit, est loin d'être intuitive et nous amène naturellement à poser trois questions :

1. Existe-t-il des transformations homogènes du jeu de pile ou face d'ordre p impair ?
2. Existe-t-il des transformations homogènes du jeu de pile ou face d'ordre $4, 8, \ldots$?
3. Existe-t-il des transformations intégrales du mouvement brownien linéaire, d'ordre $4, 8, \ldots$ et commutant avec les changements d'échelle ?

Une réponse positive à la question 1 permettrait de simplifier la construction de Attal, Burdzy, Émery et Hu. Une réponse positive à la question 2 entraînerait une réponse positive à la question 3.

2 Compléments browniens indépendants

2.1 Mouvements browniens complémentables et maximaux

Définition 4 *Soit (X, Y) un mouvement brownien plan et X' un mouvement brownien linéaire X' dans la filtration naturelle complétée de (X, Y), notée $\mathcal{F}_\cdot^{(X,Y)}$.*

On dit que X' est complémentable dans $\mathcal{F}_\cdot^{(X,Y)}$ s'il existe un brownien linéaire Y' dans $\mathcal{F}_\cdot^{(X,Y)}$, indépendant de X' et tel que (X', Y') engendre $\mathcal{F}_\cdot^{(X,Y)}$.

On dit que X' est maximal dans $\mathcal{F}_\cdot^{(X,Y)}$ si pour tout brownien linéaire X'' dans $\mathcal{F}_\cdot^{(X,Y)}$, l'inclusion $\mathcal{F}_\cdot^{X'} \subset \mathcal{F}_\cdot^{X''}$ entraîne l'égalité $\mathcal{F}_\cdot^{X'} = \mathcal{F}_\cdot^{X''}$.

Commençons par deux remarques immédiates :

- Deux mouvements browniens X' et Y' dans $\mathcal{F}_\cdot^{(X,Y)}$ sont indépendants si et seulement si $\langle X', Y' \rangle = 0$.

- Si deux mouvements browniens X' et X'' dans $\mathcal{F}_\cdot^{(X,Y)}$ vérifient $\mathcal{F}_\cdot^{X'} \subset \mathcal{F}_\cdot^{X''}$, alors il existe un processus H à valeurs dans $\{-1, 1\}$, prévisible dans $\mathcal{F}_\cdot^{X''}$ (et dans $\mathcal{F}_\cdot^{(X,Y)}$), tel que $X' = \int_0^\cdot H dX''$; on a donc $\langle X', Y' \rangle = \int_0^\cdot H d\langle X'', Y' \rangle$ pour tout mouvement brownien Y' dans $\mathcal{F}_\cdot^{(X,Y)}$.

De ces remarques, on déduit les résultats suivants.

Lemme 5 *Si X', X'' et Y' sont des mouvements browniens dans $\mathcal{F}_\cdot^{(X,Y)}$ et $\mathcal{F}_\cdot^{X'} \subset \mathcal{F}_\cdot^{X''}$, alors Y' est indépendant de X' si et seulement si Y' est indépendant de X''.*

Corollaire 6 *Si X' est un mouvement brownien complémentable dans $\mathcal{F}_\cdot^{(X,Y)}$, alors X' est maximal dans $\mathcal{F}_\cdot^{(X,Y)}$.*

Démonstration. Supposons que X' possède un complément brownien indépendant Y'

dans $\mathcal{F}_\cdot^{(X,Y)}$. Montrons que X' est maximal dans $\mathcal{F}_\cdot^{(X,Y)}$. Soit X'' un mouvement brownien dans la filtration naturelle de (X,Y) vérifiant $\mathcal{F}_\cdot^{X'} \subset \mathcal{F}_\cdot^{X''}$. Pour tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$\mathcal{F}_t^{(X,Y)} = \mathcal{F}_t^{(X',Y')} \subset \mathcal{F}_t^{(X'',Y')} \subset \mathcal{F}_t^{(X,Y)}$$

donc $\mathcal{F}_t^{(X',Y')} = \mathcal{F}_t^{(X'',Y')}$. Par indépendance de X'' et de Y' (lemme 5), on a donc pour tout $A \in \mathcal{F}_t^{X''}$,

$$P[A|\mathcal{F}_t^{X'}] = P[A|\mathcal{F}_t^{(X',Y')}] = P[A|\mathcal{F}_t^{(X'',Y')}] = \mathbf{I}_A,$$

d'où $A \in \mathcal{F}_t^{X'}$, ce qui montre l'inclusion réciproque $\mathcal{F}_\cdot^{X''} \subset \mathcal{F}_\cdot^{X'}$.

Exemple. Le corollaire 6 montre que le mouvement brownien $X' = \int_0^\cdot \mathrm{sgn}(X_s)dX_s$ n'est pas complémentable dans $\mathcal{F}_\cdot^{(X,Y)}$ puisque sa filtration naturelle est strictement incluse dans celle de X. Remarquons cependant qu'il serait complémentable si l'on acceptait des compléments non indépendants. En effet, les mouvements browniens X' et $(X+Y)/\sqrt{2}$ engendrent la filtration naturelle de (X,Y) puisque la connaissance de $\langle X', X+Y\rangle = \int_0^\cdot \mathrm{sgn}(X_s)ds$ permet de reconstituer le signe de X, tandis que la connaissance de X' détermine la valeur absolue de X.

Question ouverte. La réciproque du corollaire 6 est-elle vraie ?

Savoir si un mouvement brownien est maximal, complémentable ou non est une question délicate, à moins de savoir exhiber soit un mouvement brownien dont la filtration est strictement plus grosse, soit un complément brownien indépendant. L'exemple qui suit montre qu'il faut se méfier des intuitions simplistes.

Exemple. Les mouvements browniens $X' = \int_0^\cdot \mathrm{sgn}(Y_s)dX_s$ et $Y' = \int_0^\cdot \mathrm{sgn}(X_s)dY_s$ sont indépendants et complémentables (donc maximaux), mais ils n'engendrent pas la filtration naturelle de (X,Y). En effet, l'égalité $X = \int_0^\cdot \mathrm{sgn}(Y_s)dX'_s$ permet de voir que Y est un complément brownien indépendant de X'. De même, X est un complément brownien indépendant de Y'. Cependant, la filtration naturelle de (X',Y') est strictement incluse dans celle (X,Y) car (X',Y') est inchangé lorsqu'on change (X,Y) en $(-X,-Y)$.

Question ouverte. Dans l'exemple ci-dessus, la filtration $\mathcal{F}^{(X',Y')}$ est-elle égale à la filtration $\mathcal{F}^{(X,Y)}$ quotientée par $\{-1,1\}$?

Nous renvoyons le lecteur à [7, 8] pour la définition des filtrations quotients.

2.2 Mouvements browniens associés à la décomposition polaire d'un mouvement brownien complexe

Soit $Z = X + iY$ un mouvement brownien complexe issu de 0. Notons $S = X^2 + Y^2$ et $R = \sqrt{S}$ le module de Z. Presque sûrement, le mouvement brownien Z ne repasse pas en 0, ce qui permet de poser $U_s = \frac{Z_s}{R_s}$ pour $s > 0$ et de définir un nouveau mouvement brownien complexe Z' par

$$Z'_t = \int_0^t \frac{R_s}{Z_s} dZ_s = \int_0^t \overline{U_s} dZ_s.$$

Les parties réelle et imaginaire de Z' sont les mouvements browniens donnés par

$$X'_t = \int_0^t \frac{X_s dX_s + Y_s dY_s}{R_s} \quad \text{et} \quad Y'_t = \int_0^t \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{R_s}.$$

Ces mouvements browniens sont indépendants et gouvernent respectivement la partie radiale et la partie angulaire de Z. En effet, une application de la formule d'Itô montre que les processus S et U satisfont les équations différentielles stochastiques

$$dS_t = 2\sqrt{S_t}dX'_t + 2dt \quad \text{et} \quad dU_t = \frac{iU_t}{R_t}dY'_t - \frac{U_t}{2R_t^2}dt.$$

L'étude de ces équations permet de déterminer les filtrations naturelles de plusieurs processus. Ces résultats classiques, que nous rappelons dans la proposition ci-dessous, se trouvent déjà dans la proposition 3.1 et le théorème 3.4 de [10]. Le point 2 figure également dans le théorème V.2.11 de [9].

Proposition 7 *(Comparaison de plusieurs filtrations)*

1. *La filtration naturelle de U est aussi celle de $Z = X + iY$.*
2. *La filtration naturelle de X' est aussi celle de R.*
3. *La filtration naturelle de (X', Y') est la filtration de (X, Y) quotientée par $SO_2(\mathbf{R})$. Plus précisément pour tout $t > 0$, $\mathcal{F}_t^{(X',Y')} = \sigma((\frac{Z_s}{U_t})_{0\leq s\leq t})$*
4. *La filtration naturelle de (X', Y') est strictement incluse dans celle de (X, Y). Plus précisément, pour tout $t > 0$, la variable U_t est indépendante de (X', Y') et de loi uniforme sur le cercle unité.*

Démonstration. Montrons les différents points.

1. La filtration naturelle contient celle de $\langle U, U\rangle = \int_0^\cdot \frac{ds}{R_s^2}$, donc celle de R et par conséquent celle de $Z = RU$. L'inclusion réciproque est évidente.
2. Les solutions de l'équation de Bessel vérifiée par S sont fortes, donc $\mathcal{F}^R = \mathcal{F}^S \subset \mathcal{F}^{X'}$. L'inclusion réciproque découle de l'égalité $X' = \int_0^\cdot \frac{dS_t - 2dt}{2\sqrt{S_t}}$.
3. Notons $\mathcal{G}_t = \sigma((\frac{Z_s}{U_t})_{0\leq s\leq t})$. L'inclusion $\mathcal{F}_t^{(X',Y')} \subset \mathcal{G}_t$ vient du fait que Z' est une fonction de Z invariante par rotation. L'inclusion réciproque vient de l'inclusion $\mathcal{F}^R \subset \mathcal{F}^{X'}$ et de l'égalité $U_t = U_s \exp(i\int_s^t \frac{dY'_r}{R_r})$ pour $t > s > 0$.
4. Soit v un complexe de module 1. On vérifie facilement que changer Z en vZ change U_t en vU_t mais ne modifie pas Z'. Comme la loi de Z est invariante par rotation, cela entraîne que la variable U_t est indépendante de Z' et de loi uniforme sur le cercle unité.

Comme la filtration naturelle de (X', Y') est strictement incluse dans celle de (X, Y), il est naturel de se demander si les mouvements browniens X' et Y' sont complémentables. Nous connaissons la réponse pour X' mais pas pour Y'.

Théorème 8 *Le mouvement brownien $X' = \int_0^\cdot \frac{X_s dX_s + Y_s dY_s}{R_s}$ est complémentable (donc maximal) dans $\mathcal{F}^{(X,Y)}$.*

La construction d'un complément brownien indépendant que nous allons présenter s'inspire de la construction de Emery et Schachermayer dans [6] montrant que la filtration d'un mouvement brownien circulaire indexé par $\mathbf{R}$ est brownienne après changement de temps $s = e^t$.

Démonstration. Soit $(t_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une subdivision de $\mathbf{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, notons Δ_n la médiatrice du segment $[|Z_{t_n}|, Z_{t_n}]$ et Σ_n la symétrie orthogonale par rapport à Δ_n, autrement dit $\Sigma_n(z) = U_{t_n}\overline{z}$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. Introduisons le temps d'arrêt

$$T_n = \inf\{t \in [t_n, t_{n+1}[\; : Z_t \in \Delta_n\},$$

avec la convention $T_n = t_{n+1}$ si Z_t ne rencontre pas Δ_n entre les instants t_n et t_{n+1}.

Pour $t > 0$, notons $H_t = -1$ sur $[t_n \leq t < T_n]$ et $H_t = 1$ sur $[T_n \leq t < t_{n+1}]$. Le processus H, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, est prévisible dans $\mathcal{F}^{(X,Y)}$, ce qui permet de définir un nouveau mouvement brownien dans la filtration $\mathcal{F}^{(X,Y)}$ par $Y'' = \int_0^\cdot H dY'$. Comme $\langle X', Y''\rangle = 0$, Y'' est indépendant de X'. Nous allons montrer que Y'' est un complément brownien indépendant de X'.

Pour cela, introduisons le mouvement brownien par morceaux $\tilde{Z}$ défini par $\tilde{Z}_t = \Sigma_n(Z_t)$ sur $[t_n \leq t < T_n]$ et $\tilde{Z}_t = Z_t$ sur $[T_n \leq t < t_{n+1}]$. La décomposition polaire de $\tilde{Z}$ s'écrit $\tilde{Z} = R\tilde{U}$, avec $\tilde{U}_t = \frac{U_{t_n}}{U_t} = U_{t_n}\overline{U_t}$ sur $[t_n \leq t < T_n]$ et $\tilde{U}_t = U_t$ sur $[T_n \leq t < t_{n+1}]$. On vérifie facilement que pour $t \in [t_n, t_{n+1}[$,

$$\tilde{U}_t = \exp(i \int_{t_n}^t \frac{dY''_s}{R_s}).$$

Mais d'après la proposition 7, la filtration naturelle de R est aussi celle de X'. Par conséquent, les processus $\tilde{U}$ et $\tilde{Z}$ sont adaptés à la filtration naturelle du couple (X', Y''). On en déduit que pour $t \in [t_n, t_{n+1}[$,

$$\sigma((Z_s)_{t_n\leq s\leq t}) = \sigma(Z_{t_n}) \vee \sigma((\tilde{Z}_s)_{t_n\leq s\leq t}) \subset \sigma(Z_{t_n}) \vee \mathcal{F}_t^{(X',Y'')},$$

et une récurrence immédiate montre que cette inclusion reste vraie pour tout $t \geq t_n$.

Pour $n \in \mathbf{Z}$, notons A_n l'événement « le mouvement brownien Z fait au moins deux tours autour de 0 entre les instants t_n et t_{n+1} » et $\tilde{A}_n$ l'événement « le processus $\tilde{Z}$ fait au moins un tour autour de 0 entre les instants t_n et t_{n+1} ». L'événement $\tilde{A}_n$ contient A_n. Mais pour un bon choix de la subdivision $(t_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, l'événement A_n est réalisé presque sûrement pour une infinité de $n \leq 0$. Le point-clé consiste alors à remarquer que $Z_{t_n} = \tilde{Z}_{t_n-}$ sur l'événement $\tilde{A}_{n-1}$, qui appartient à $\mathcal{F}_{t_n}^{\tilde{Z}}$. Pour $t > 0$ fixé, Z_t est donc une fonction de $((X'_s, Y''_s))_{0\leq s\leq t}$ sur l'événement presque sûr $\limsup \tilde{A}_n$, ce qui montre que $\mathcal{F}_t^Z \subset \mathcal{F}_t^{(X',Y'')}$. L'inclusion réciproque est évidente.

2.3 Mouvements browniens associés au carré d'un mouvement brownien complexe

Dans ce paragraphe, on modifie la définition du mouvement brownien Z' en posant

$$Z'_t = \int_0^t \frac{Z_s}{R_s} dZ_s = \int_0^t U_s dZ_s.$$

Les parties réelle et imaginaire de Z' sont les mouvements browniens donnés par

$$X'_t = \int_0^t \frac{X_s dX_s - Y_s dY_s}{R_s} \quad \text{et} \quad Y'_t = \int_0^t \frac{X_s dY_s + Y_s dX_s}{R_s}.$$

Notons $M = Z^2$. Alors $|M_t| = R_t^2$ et $dM_t = 2Z_t dZ_t = 2R_t dZ'_t$ donc M est solution de l'équation différentielle stochastique

$$dM_t = 2\sqrt{|M_t|} dZ'_t.$$

Cette équation est identique à celle qui définit un carré de Bessel de dimension 0 à la différence près que M et Z' sont complexes. Pour les équations différentielles stochastiques dans $\mathbf{R}^2$ à coefficients höldériens, les théorèmes d'unicité ne s'appliquent pas.

D'ailleurs M et le processus identiquement nul sont deux solutions issues de 0 pour cette équation. Plusieurs questions se posent donc naturellement sur les solutions qui quittent 0 immédiatement :

1. Y a-t-il des solutions fortes ?
2. Y a-t-il unicité trajectorielle ?
3. La solution M est-elle forte ?

Signalons que ce type de question est nouveau à notre connaissance et n'apparaît pas dans l'ouvrage récent [5] spécialisé sur les équations différentielles stochastiques singulières, dont le chapitre 1 fait pourtant le point sur les liens entre existence de solutions fortes, existence de solutions faibles, unicité trajectorielle, unicité en loi.

Une réponse positive aux questions 1 et 2 entraînerait une réponse positive à la question 3. Une autre façon de reformuler la question 3 est de demander si la transformation brownienne $Z \mapsto Z'$ perd seulement un bit d'information (elle en perd au moins un puisque Z' est une fonction paire de Z). Remarquons que cette transformation commute avec les changements d'échelle, donc le théorème 3 s'applique.

La question de savoir si les mouvements browniens X' et Y' sont complémentables ou non, maximaux ou non, semble encore plus délicate. On peut toutefois noter que les réponses sont les mêmes pour les deux browniens. En effet, si l'on change Z en $\exp(i\pi/4)Z$, on change $Z' = X + iY$ en $iZ' = -Y + iX$.

2.4 Addendum : une généralisation du théorème 8 par Michel Émery

Bien que notre but ne soit pas de rechercher la plus grande généralité possible, il nous semble intéressant de donner la démonstration suggérée par Michel Émery, qui permet d'étendre le théorème 8 à toute dimension.

Dans ce qui suit, on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire, $|\cdot|$ la norme euclidienne et $(e_1, \ldots, e_m)$ la base canonique de $\mathbf{R}^m$. On suppose que $m \geq 3$.

Théorème 9 *Soit Z un mouvement brownien dans $\mathbf{R}^m$, issu de 0. Le mouvement brownien $\beta = \int_0^\cdot \frac{\langle Z_s, dZ_s \rangle}{|Z_s|}$ est complémentable (donc maximal) dans $\mathcal{F}^Z$.*

Démonstration. On commence par démontrer le fait suivant : pour tout $t > 0$, la probabilité pour que Z coupe tous les hyperplans vectoriels entre les instants ϵ et t tend vers 1 quand $\epsilon \to 0$. Ce lemme et le lemme de Borel-Cantelli permettent de construire une subdivision $(t_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de $\mathbf{R}_+$ telle que presque sûrement, pour tout n assez proche de $-\infty$, le mouvement brownien Z coupe tous les hyperplans vectoriels entre les instants t_n et t_{n+1}.

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, notons H_n l'hyperplan médiateur du segment $[|Z_{t_n}|e_1, Z_{t_n}]$ et Σ_n la réflexion par rapport à H_n. Introduisons le temps d'arrêt

$$T_n = \inf\{t \in [t_n, t_{n+1}[\, : Z_t \in H_n\},$$

avec la convention $T_n = t_{n+1}$ si Z_t ne rencontre pas H_n entre les instants t_n et t_{n+1}. Pour $t > 0$, notons $\tilde{Z}_t = \Sigma_n(Z_t)$ sur $[t_n \leq t < T_n]$ et $\tilde{Z}_t = Z_t$ sur $[T_n \leq t < t_{n+1}]$.

En remarquant que $Z_{t_n} = \tilde{Z}_{t_n-}$ pour tout n assez proche de $-\infty$, on démontre que la filtration de Z est aussi celle du mouvement brownien par morceaux $\tilde{Z}$, qui est encore celle du mouvement brownien $\widehat{Z}$ obtenu en « recollant les morceaux », défini par

$$\widehat{Z}_t = \sum_{k=-\infty}^{n-1} (\tilde{Z}_{t_{k+1}} - \tilde{Z}_{t_k}) + \tilde{Z}_t - \tilde{Z}_{t_n} \text{ pour } t_n \leq t < t_{n+1}.$$

Prenons sur $\mathbf{R}^m \setminus \mathbf{R}_+ e_m$ un champ Q de matrices orthogonales, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et tel que pour tout $z \in \mathbf{R}^m \setminus \mathbf{R}_+ e_m$, la dernière ligne de $Q(z)$ soit la transposée de $\frac{z}{|z|}$. On peut prendre par exemple la matrice de la réflexion par rapport à l'hyperplan médiateur du segment $[|z|e_m, z]$. Comme $m \geq 3$, le mouvement brownien $\tilde{Z}$ évite presque sûrement la demi-droite $\mathbf{R}_+ e_m$. On peut définir un nouveau mouvement brownien B en posant $B = \int_0^\cdot Q(\tilde{Z}) d\widehat{Z}$. La dernière composante de B est le mouvement brownien β. En effet, sur chaque intervalle $[t_n, t_{n+1}[$, on peut écrire

$$dB_t^{(m)} = \langle \frac{\tilde{Z}_t}{|\tilde{Z}_t|}, d\tilde{Z}_t \rangle = \langle \frac{Z_t}{|Z_t|}, dZ_t \rangle$$

puisque Σ_n est une isométrie.

Pour montrer que $(B^{(1)}, \ldots, B^{(m-1)})$ est un complément indépendant de $B^{(m)} = \beta$, il reste à vérifier que B engendre la filtration de Z. Cela se voit en remarquant que β engendre la filtration de $|Z|$ (le carré de Bessel $|Z|^2$ est une solution forte de l'équation différentielle stochastique $dX_t = 2\sqrt{|X_t|}d\beta_t + mdt$) et que sur chaque intervalle $[t_n, t_{n+1}[$, $\tilde{Z}$ est solution de l'équation différentielle stochastique $d\tilde{Z}_t = Q(\tilde{Z})^{-1} dB_t$, avec condition initiale $\tilde{Z}_{t_n} = |Z_{t_n}| e_d$ déterminée par β. Les solutions de ces équations sont fortes car Q est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^m \setminus \mathbf{R}_+ e_m$ et car $\tilde{Z}$ évite la demi-droite $\mathbf{R}_+ e_m$.

Références

[1] Attal S., Burdzy K., Emery M., Hu Y., *Sur quelques filtrations et transformations browniennes*, Séminaire de Probabilités XXIX, Lecture Notes in Mathematics **1613**, Springer (1995), 56–68.

[2] Brossard J., Leuridan C., *Numérotations des records d'un processus de Poisson ponctuel*, Annals of Probability, **27** - 3 (1999), 1304–1323.

[3] Brossard J., Leuridan C., *Perte d'information dans les transformations du jeu de pile ou face*, Annals of Probability 34-4, (2006), 1550–1588.

[4] Brossard J., Leuridan C., *Chaînes de Markov constructives indexées par* **Z**, Annals of Probability $**-*$, (2006 ou 2007), $*** - ***$.

[5] Cherny, A.S., Engelbert, H.J., *Singular stochastic differential equations*, Lecture Notes in Mathematics **1858**, Springer (2005).

[6] Emery M., Schachermayer W., *A remark on Tsirelson's differential equation*, Séminaire de Probabilités XXXIII, Lecture Notes in Mathematics **1709**, Springer (1999), 291–303.

[7] Malric M., *Filtrations quotients de la filtration brownienne*, Séminaire de Probabilités XXXV, Lecture Notes in Mathematics **1755**, Springer (2001), 260–264.

[8] Malric M., *Correction au volume XXXVI*, Séminaire de Probabilités XXXVI, Lecture Notes in Mathematics **1801**, Springer (2002), 492.

[9] Revuz D., Yor M., *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer (1991).

[10] Stroock D.W., Yor M., *Some remarkable martingales*, Séminaire de Probabilités XV, Lecture Notes in Mathematics **850**, Springer (1980), 590–603.

Jean BROSSARD et Christophe LEURIDAN
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
Christophe.Leuridan@ujf-grenoble.fr