

Algèbres et cogèbres de Gerstenhaber et cohomologie de Chevalley-Harrison

Walid Aloulou, Didier Arnal, Ridha Chatbouri

▶ **To cite this version:**

Walid Aloulou, Didier Arnal, Ridha Chatbouri. Algèbres et cogèbres de Gerstenhaber et cohomologie de Chevalley-Harrison. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2009, 133 (1), pp.1-50. hal-00294976

HAL Id: hal-00294976
https://hal.science/hal-00294976

Submitted on 11 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ALGÈBRES ET COGÈBRES DE GERSTENHABER ET COHOMOLOGIE DE CHEVALLEY-HARRISON

WALID ALOULOU, DIDIER ARNAL ET RIDHA CHATBOURI

ABSTRACT. The fundamental example of Gerstenhaber algebra is the space $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ of polyvector fields on $\mathbb{R}^d$, equipped with the wedge product and the Schouten bracket.

In this paper, we explicitely describe what is the enveloping G_∞ algebra of a Gerstenhaber algebra $\mathcal{G}$. This structure gives us a definition of the Chevalley-Harrison cohomology operator for $\mathcal{G}$.

We finally show the nontriviality of a Chevalley-Harrison cohomology group for a natural Gerstenhaber subalgebra in $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$.

Résumé. Un prototype des algèbres de Gerstenhaber est l'espace $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ des champs de tenseurs sur $\mathbb{R}^d$ muni du produit extérieur et du crochet de Schouten.

Dans cet article, on décrit explicitement la structure de la G_∞ algèbre enveloppante d'une algèbre de Gerstenhaber. Cette structure permet de définir une cohomologie de Chevalley-Harrison sur cette algèbre.

On montre que cette cohomologie à valeur dans $\mathbb{R}$ n'est pas triviale dans le cas de la sous algèbre de Gerstenhaber des tenseurs homogènes $T^{hom}_{poly}(\mathbb{R}^d)$.

1. Introduction et motivation

L'espace $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ des champs de tenseurs antisymétriques est une algèbre de Lie graduée pour le crochet de Schouten. Afin d'étudier la cohomologie de Chevalley de cette algèbre pour la représentation adjointe, on peut se resteindre comme dans [AAC1] à des cochaînes très simples: les cochaînes linéaires ou vectorielles définies sur les champs de vecteurs (respectivement les tenseurs linéaires). Dans les deux cas, la cohomologie est donnée par les mêmes cochaînes caractérisées par leur valeur sur les champs de vecteurs linéaires

$$\alpha = \sum \alpha^i(x)\partial_i, \qquad \alpha^i(x) \text{ linéaire.}$$

Mais $\mathcal{G} = T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ possède une structure plus riche: c'est une algèbre de Gerstenhaber pour le produit extérieur et le crochet de Schouten. Grâce à cette structure, on peut définir une cohomologie de Chevalley-Harrison dont les cochaînes sont les applications linéaires de

1991 *Mathematics Subject Classification.* 18G55,16W30, 16E45, 53D55.

Key words and phrases. Algèbres homotopiques, cogèbres, algèbres différentielles graduées, cohomologie.

Ce travail a été effectué dans le cadre de l'accord CMCU 06 S 1502. W. Aloulou et R. Chatbouri remercient l'Université de Bourgogne pour l'accueil dont ils ont bénéficié au cours de leurs séjours, D. Arnal remercie la Faculté des Sciences de Monastir pour l'accueil dont il a bénéficié au cours de ses séjours.

$S^+\big((\underline{\bigotimes}^+\mathcal{G}[1])[1]\big)$ dans $\mathcal{G}[1]$ (la définition de cette bicogèbre est donnée dans les sections 6 et 7). Cette dernière cohomologie est triviale (voir [GH] ou [T]).

Les champs de vecteurs ou les tenseurs linéaires ne sont que des sous algèbres de Lie de $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$. Une sous algèbre de Gerstenhaber simple (et intéressante) de $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ est formée par l'espace noté $T^{hom}_{poly}(\mathbb{R}^d)$ des tenseurs homogènes, c'est à dire des tenseurs

$$\alpha=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\alpha^{i_1\cdots i_k}(x)\partial_{i_1}\wedge\cdots\wedge\partial_{i_k},\qquad\text{avec } \alpha^{i_1\cdots i_k}(x) \text{ polynôme homogène de degré } k.$$

En particulier, cette sous algèbre est de dimension finie et elle contient toutes les structures de Poisson quadratiques. Les cocycles de Chevalley fondamentaux sur les champs de vecteurs et les tenseurs linéaires décrits dans [AAC1] et [AAC2] ne sont pas nuls sur $T^{hom}_{poly}(\mathbb{R}^d)$.

Le but de cet article est d'étudier plus en détail cette situation. Tout d'abord, nous reprenons explicitement et complètement la construction de la structure de cogèbre de Gerstenhaber et de G_∞-algèbre induites par celle d'algèbre de Gerstenhaber sur l'espace $S^+\big((\underline{\bigotimes}^+\mathcal{G}[1])[1]\big)$, ceci nous permet de préciser à chaque étape les signes apparaissant dans les prolongements des opérateurs définis sur $\mathcal{G}$. Plus précisement, une algèbre de Gerstenhaber est un espace vectoriel gradué $\mathcal{G}$ muni de deux opérations $\wedge$ et $[\ ,\ ]$ de degrés respectifs 0 et -1 et respectivement commutatif et antisymétrique gradués. Malheureusement les axiomes usuels de cette structure ne satisfont pas la règle des signes de Koszul sur $\mathcal{G}$. On procède donc à un premier décalage en considérant l'espace $\mathcal{G}[1]$. On obtient deux opérations μ_2 et $[\ ,\ ]$, dont la symétrie est l'opposée de celle de $\wedge$ et $[\ ,\ ]$ et dont les axiomes vérifient bien la règle des signes de Koszul.

On effectue, alors, le prolongement en μ et $[\ ,\ ]$ de ces deux structures sur le quotient $\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1])$ de $T(\mathcal{G}[1])$ par l'espace engendré par les images de toutes les applications battements.

Sur $\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1])$, on a un cocrochet naturel δ. Le produit μ est une codérivation de δ telle que $\mu\circ\mu=0$.

Revenant au crochet $[\ ,\ ]$, on l'étend à $\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1])$ de façon à en faire une algèbre de Lie. La construction classique consiste à considérer l'espace $S^+\big((\underline{\bigotimes}^+\mathcal{G}[1])[1]\big)$ et à le munir d'un coproduit Δ et d'une codérivation ℓ telle que $\ell\circ\ell=0$. Il reste à décaler δ et μ respectivement en κ et m pour les étendre aussi à $S^+\big((\underline{\bigotimes}^+\mathcal{G}[1])[1]\big)$. Cependant, m et ℓ sont des codérivations de Δ et κ telles que $(m+\ell)\circ(m+\ell)=0$. Cette construction est explicitement décrite dans les sections 5 et 6.

Finalement, on montre que le 3-cocycle de Chevalley fondamental C défini sur les champs de vecteurs à valeurs dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ donne sur $T^{hom}_{poly}(\mathbb{R}^d)$ une cochaîne à valeurs dans $\mathbb{R}$ notée f. Nous montrons que f est un cocycle de Chevalley-Harrison non trivial.

2. A_∞ algèbres et cohomologie de Hochschild

Soit A une algèbre associative $|\ |$-graduée, son produit $A\otimes A\longrightarrow A$, $\alpha\otimes\beta\longmapsto\alpha.\beta$ est associatif de degré 0. On considère l'espace $A[1]$ et la graduation $deg(\alpha)=|\alpha|-1$ qu'on note simplement par la lettre α. On construit un nouveau produit m_2 sur $A[1]$ défini par $m_2(\alpha\otimes\beta)=(-1)^{\alpha}\alpha.\beta$. Alors, m_2 devient un produit antiassocitif de degré 1 sur $A[1]$:

$$m_2(m_2(\alpha,\beta),\gamma)=-(-1)^{\alpha}m_2(\alpha,m_2(\beta,\gamma)).$$

On considère, maintenant, l'algèbre tensorielle de $A[1]$ sans unité: $T^+(A[1])=\bigoplus_{p\geq 1}(\bigotimes^p A[1])$.

Cette algèbre munie du coproduit de déconcaténation

$$\triangle(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_p)=\sum_{k=1}^{p-1}\big(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_k\big)\bigotimes\big(\alpha_{k+1}\otimes\cdots\otimes\alpha_p\big)$$

est une cogèbre coassociative. En effet, on a

$$\begin{aligned}(id\otimes\triangle)\circ\triangle(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_p)&=(id\otimes\triangle)\Big(\sum_{k=1}^{p-1}\big(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_k\big)\bigotimes\big(\alpha_{k+1}\otimes\cdots\otimes\alpha_p\big)\Big)\\&=\sum_{1\leq k<j\leq p-1}(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_k)\bigotimes(\alpha_{k+1}\otimes\cdots\otimes\alpha_j)\bigotimes(\alpha_{j+1}\otimes\cdots\otimes\alpha_p)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\triangle\otimes id)\circ\triangle(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_p)&=(\triangle\otimes id)\Big(\sum_{j=1}^{p-1}\big(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_j\big)\bigotimes\big(\alpha_{j+1}\otimes\cdots\otimes\alpha_p\big)\Big)\\&=\sum_{1\leq k<j\leq p-1}(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_k)\bigotimes(\alpha_{k+1}\otimes\cdots\otimes\alpha_j)\bigotimes(\alpha_{j+1}\otimes\cdots\otimes\alpha_p).\end{aligned}$$

Donc, $(id\otimes\triangle)\circ\triangle=(\triangle\otimes id)\circ\triangle$ et la cogèbre $\big(T^+(A[1]),\triangle\big)$ est alors coassociative. Cette cogèbre est colibre, ce qui permet de prolonger toute application linéaire $Q_k:\bigotimes^p A[1]\longrightarrow A[1]$ en une codérivation de façon unique. En particulier, on prolonge le produit m_2 à $\big(T^+(A[1]),\triangle\big)$ comme une codérivation m de cette cogèbre ($(m\otimes id+id\otimes m)\circ\triangle=\triangle\circ m$) en posant:

$$m(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_p)=\sum_{j=1}^{p-1}(-1)^{\sum_{i<j}\alpha_i}\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_{j-1}\otimes m_2(\alpha_j,\alpha_{j+1})\otimes\alpha_{j+2}\otimes\cdots\otimes\alpha_p.$$

La codérivation m est de degré 1 dans $T^+(A[1])$, elle vérifie $m\circ m=0$.

En effet, d'une part on a

$$\begin{aligned}(m\otimes id+id\otimes m)\circ\triangle(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_p) &= (m\otimes id+id\otimes m)\Big(\sum_{k=1}^{p-1}\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_k\bigotimes\alpha_{k+1}\otimes\cdots\otimes\alpha_p\Big)\\ &=\sum_{k=1}^{p-1}\Big(\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{\sum_{i<j}\alpha_i}\big(\alpha_1\otimes\cdots\otimes m_2(\alpha_j,\alpha_{j+1})\otimes\cdots\otimes\alpha_k\big)\bigotimes\big(\alpha_{k+1}\otimes\cdots\otimes\alpha_p\big)\\ &+\sum_{j=k+1}^{p-1}(-1)^{\sum_{i<j}\alpha_i}\big(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_k\big)\bigotimes\big(\alpha_{k+1}\otimes\cdots\otimes m_2(\alpha_j,\alpha_{j+1})\otimes\cdots\otimes\alpha_p\big)\Big)\\ &=\sum_{1\leq j<k\leq p-1}(-1)^{\sum_{i<j}\alpha_i}\big(\alpha_1\otimes\cdots\otimes m_2(\alpha_j,\alpha_{j+1})\otimes\cdots\otimes\alpha_k\big)\bigotimes\big(\alpha_{k+1}\otimes\cdots\otimes\alpha_p\big)\\ &+\sum_{1\leq k<j\leq p-1}(-1)^{\sum_{i<j}\alpha_i}\big(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_k\big)\bigotimes\big(\alpha_{k+1}\otimes\cdots\otimes m_2(\alpha_j,\alpha_{j+1})\otimes\cdots\otimes\alpha_p\big).\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\triangle\circ m(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_p) &= \triangle\Big(\sum_{j=1}^{p-1}(-1)^{\sum_{i<j}\alpha_i}\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_{j-1}\otimes m_2(\alpha_j,\alpha_{j+1})\otimes\alpha_{j+2}\otimes\cdots\otimes\alpha_p\Big)\\ &=\sum_{1\leq j<k\leq p-1}(-1)^{\sum_{i<j}\alpha_i}\big(\alpha_1\otimes\cdots\otimes m_2(\alpha_j,\alpha_{j+1})\otimes\cdots\otimes\alpha_k\big)\bigotimes\big(\alpha_{k+1}\otimes\cdots\otimes\alpha_p\big)\\ &+\sum_{1\leq k<j\leq p-1}(-1)^{\sum_{i<j}\alpha_i}\big(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_k\big)\bigotimes\big(\alpha_{k+1}\otimes\cdots\otimes m_2(\alpha_j,\alpha_{j+1})\otimes\cdots\otimes\alpha_p\big)\\ &=(m\otimes id+id\otimes m)\circ\triangle(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_p).\end{aligned}$$

m étant une codérivation de degré impair, $m\circ m=0$ est aussi une codérivation. Avec les notations précédentes, $m\circ m$ est l'unique prolongement de $(m\circ m)_3$ et puisque

$$(m\circ m)_3(\alpha_1\underline{\otimes}\alpha_2\underline{\otimes}\alpha_3)=m_2(m_2(\alpha_1\underline{\otimes}\alpha_2)\underline{\otimes}\alpha_3+(-1)^{\alpha_1}\alpha_1\underline{\otimes}m_2(\alpha_2\underline{\otimes}\alpha_3))=0.$$

Par unicité de la codérivation qui prolonge les $(m\circ m)_k$, on en déduit que $m\circ m=0$.

Définition 2.1. (A_∞ algèbre)

Une A_∞ algèbre est une cogèbre codifférentielle graduée coassociative de la forme $(T^+(A[1]),\triangle,m)$ où $\triangle$ est le coproduit de déconcaténation et m est une codérivation de $\triangle$ de degré 1 et de carré nul.

Soit $F:(T^+(A[1]),\triangle)\longrightarrow(T^+(B[1]),\triangle')$ un morphisme de cogèbres ($(F\otimes F)\circ\triangle=\triangle'\circ F$). On définit la projection F_n sur $B[1]$ parallèlement à $\bigoplus_{n\geq1}(\bigotimes^n B[1])$ de la restriction de F à $T^n(A[1])$. L'application $F_n:T^n(A[1])\longrightarrow B[1]$ est $n-$linéaire. Si on connait la

suite des $(F_n)_n$, on montre qu'on peut reconstruire F de façon unique, plus précisément:

$$F(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{0<r_1<\cdots<r_k<n} F_{r_1}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{r_1}) \otimes \cdots \otimes F_{r_k}(\alpha_{r_{k-1}+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_n)$$

Nous exposons en détail cette preuve dans la section 4 dans le cas commutatif.

Définition 2.2. (morphisme de A_∞ algèbres)

Un morphisme de A_∞ algèbres A et B est un morphisme de cogèbres coassociatives codifférentielles $F : \big(T^+(A[1]), m^A\big) \longrightarrow \big(T^+(B[1]), m^B\big)$ tel que $m^B \circ F = F \circ m^A$.

L'équation de A_∞ morphisme $m^B \circ F = F \circ m^A$ écrite sur les applications $F_n : T^n(A[1]) \longrightarrow B[1]$ définissant F prend la forme suivante: Posons $\alpha_{\{1,\ldots,n\}} = \alpha_1 \otimes \ldots \alpha_n$.
D'une part, on a

$$m^B \circ F(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = \sum_{k,0<r_1<\cdots<r_k<n} m^B\Big(F_{r_1}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{r_1}) \otimes \cdots \otimes F_{r_k}(\alpha_{r_{k-1}+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_n)\Big)$$

$$= \sum_{0<j<k} \sum_{0<r_1<\cdots<r_k<n} (-1)^{\sum_{i<r_j} \alpha_i} F_{r_1}(\alpha_{\{1,\ldots,r_1\}}) \otimes \cdots \otimes F_{r_j-1}(\alpha_{\{r_{j-2}+1,\ldots,r_{j-1}\}}) \otimes$$

$$m^B\big(F_{r_j}(\alpha_{\{r_{j-1}+1,\ldots,r_j\}}) \otimes F_{r_{j+1}}(\alpha_{\{r_j+1,\ldots,r_{j+1}\}})\big) \otimes F_{r_{j+2}}(\alpha_{\{r_{j+1}+1,\ldots,r_{j+2}\}}) \otimes \cdots \otimes F_{r_k}(\alpha_{\{r_{k-1}+1,\ldots,r_k\}}).$$

D'autre part, on a

$$F \circ m^A(\alpha_{\{1,\ldots,n\}}) = F\big(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{\alpha_{\{1,\ldots,j-1\}}} \alpha_{\{1,\ldots,j-1\}} \otimes m^A(\alpha_j \otimes \alpha_{j+1}) \otimes \alpha_{\{j+2,\ldots,n\}}\big)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{\alpha_{\{1,\ldots,j-1\}}} \sum_{k,0<r_1<\cdots<r_k<n}$$

$$F_{r_1}(\alpha_{\{1,\ldots,r_1\}}) \otimes \cdots \otimes F_{r_t}\Big(\alpha_{\{r_{t-1}+1,\ldots,j-1\}} \otimes m^A(\alpha_j \otimes \alpha_{j+1}) \otimes \alpha_{\{j+2,\ldots,r_t\}}\Big) \otimes \cdots \otimes F_{r_k}(\alpha_{\{r_{k-1}+1,\ldots,r_k\}}).$$

Il n'y a pas de F_n dans l'équation $(m^B \circ F - F \circ m^A)(\alpha_{\{1,\ldots,n\}}) = 0$, cherchons les termes où F_{n-1} apparaît: ce sont

$$\begin{aligned}
&m^B\big(F_{n-1}(\alpha_{\{1,\ldots,n-1\}}) \otimes F_1(\alpha_n)\big) + m^B\big(F_1(\alpha_1) \otimes F_{n-1}(\alpha_{\{2,\ldots,n\}})\big) \\
&- \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{\alpha_{\{1,\ldots,j-1\}}} F_{n-1}\big(\alpha_{\{1,\ldots,j-1\}} \otimes m^A(\alpha_j \otimes \alpha_{j+1}) \otimes \alpha_{\{j+2,\ldots,n\}}\big) \\
&= (-1)^{\alpha_{\{1,\ldots,n-1\}}+1} F_{n-1}(\alpha_{\{1,\ldots,n-1\}}).F_1(\alpha_n) + (-1)^{\alpha_1+1} F_1(\alpha_1).F_{n-1}(\alpha_{\{2,\ldots,n\}}) \\
&- \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{\alpha_{\{1,\ldots,j\}}+1} F_{n-1}\big(\alpha_{\{1,\ldots,j-1\}} \otimes (\alpha_j.\alpha_{j+1}) \otimes \alpha_{\{j+2,\ldots,n\}}\big) \\
&= (d_H F_{n-1})(\alpha_{\{1,\ldots,n\}})
\end{aligned}$$

On retrouve l'opérateur de cobord de Hochschild d_H.

Finalement, si V un A bimodule gradué, on note $V[p]$ l'espace gradué V tel que si v est de degré i dans V, il sera de degré $i-p$ dans $V[p]$. L'espace $B = A \oplus \sum_{p>0} V[p]$ muni du produit

$$m'\big((\alpha + \sum u_p), (\beta + \sum v_q)\big) = \big(m_2(\alpha,\beta) + \sum \alpha v_p + u_p\beta\big)$$

est une algèbre associative et l'application $f : A \longrightarrow B$, définie par $f(\alpha) = (\alpha, 0)$ est un morphisme d'algèbres.

Un morphisme de cogèbres coassociatives différentielles $F = f + C$ sera appelé une A_∞ formalité de module s'il est défini par des F_n homogènes de degré 0, de la forme $F_1 = f + C_1$, où C_1 est linéaire de $A[1]$ dans V, et pour $p > 1$, $F_p = C_p$, où les C_p sont p-linéaires de $\bigotimes^p A[1]$ dans V.

On retrouve la cohomologie de Hochschild des algèbres associatives à valeurs dans un module V.

Plus précisément, cette formalité est dite triviale s'il existe un morphisme G tel que $C = m^B \circ G + G \circ m^A$, G étant de degré -1 et $G = \sum B_p$ avec $B_p : \underline{\bigotimes}^p(A[1]) \longrightarrow V[p]$.

On retrouve ainsi la cohomologie de Hochschild des algèbres associatives, puisque

Proposition 2.3. (A_∞ formalités et cohomologie de Hochschild)

Avec les notations précédentes, F est une A_∞ formalité si et seulement si

$$d_H C_k = 0 \quad \textit{pour tout } k > 0.$$

F est triviale si et seulement si

$$C_1 = 0 \quad \textit{et} \quad C_k = d_H B_k \quad \textit{pour tout } k > 1.$$

3. L_∞ algèbres et cohomologie de Chevalley

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps $\mathbb{K}$. Soit V un $\mathfrak{g}$ module. La cohomologie de Chevalley de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans V est définie de la façon suivante:

Une n-cochaîne C est une application n-linéaire alternée de $\mathfrak{g}^n$ dans V:

$$C \in C^n(\mathfrak{g}, V) = Hom(\wedge^n \mathfrak{g}, V),$$

son cobord de Chevalley $d_C C \in C^{n+1}(\mathfrak{g}, V)$ est la cochaîne définie comme:

$$d_C C(X_0, \ldots, X_n) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j X_j C(X_0, \ldots, \hat{j}, \ldots, X_n) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} C\left([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{\imath}, \ldots, \hat{\jmath}, \ldots, X_n\right).$$

On a $d_C \circ d_C = 0$ et le n^{eme} groupe de cohomologie $H^n(\mathfrak{g}, V)$ est le quotient de l'espace $Z^n(\mathfrak{g}, V)$ des n cocycles (les cochaînes C telles que $d_C C = 0$) par l'espace $B^n(\mathfrak{g}, V)$ des n cobords (les cochaînes C telles qu'il existe $b \in C^{n-1}(\mathfrak{g}, V)$ tel que $C = d_C b$).

Afin de présenter cette cohomologie de façon plus algébrique et intrinsèque, on regarde $\mathfrak{g}$ comme une L_∞ algèbre. Cela permettra entre autres de généraliser immédiatement la cohomologie au cas des algèbres de Lie différentielles et graduées.

Rappelons d'abord la règle des signes de Koszul: si dans les axiomes d'une structure algèbrique on a une somme de quantités qui sont des compositions ou des produits d'objets $X_1, \ldots, X_n$ de degrés respectifs $x_1, \ldots, x_n$, dans divers ordres, lorsqu'on veut définir la structure graduée correspondante, on ajoute devant la quantité composée des objets dans l'ordre $X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}$ la signature de la permutation graduée $\left(\begin{smallmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_{i_1} & \cdots & x_{i_n} \end{smallmatrix}\right)$, c'est à dire le signe

$$\varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_{i_1} & \cdots & x_{i_n} \end{smallmatrix}\right)$$

ε est un morphisme et sur la transposition (x_i, x_{i+1}), on a $\varepsilon(x_i, x_{i+1}) = (-1)^{x_i x_{i+1}}$.

Par exemple les axiomes d'une algèbre de Lie sont:

$$[X,Y] = -[Y,X], \qquad [[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0.$$

Les axiomes d'une algèbre de Lie graduée seront donc:

$$\begin{aligned} [X,Y] &= -\varepsilon \left(\begin{smallmatrix} xy \\ yx \end{smallmatrix}\right) [Y,X] = (-1)^{xy}[Y,X], \\ 0 &= [[X,Y],Z] + \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} xyz \\ yzx \end{smallmatrix}\right) [[Y,Z],X] + \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} xyz \\ zxy \end{smallmatrix}\right) [[Z,X],Y] \\ &= [[X,Y],Z] + (-1)^{x(y+z)} [[Y,Z],X] + (-1)^{z(x+y)} [[Z,X],Y]. \end{aligned}$$

Pour une algèbre de Lie graduée différentielle, on ajoute la différentielle qui est une application $d : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ de degré 1 et telle que:

$$d[X,Y] = [dX,Y] + (-1)^x [X,dY].$$

La première étape de notre construction consiste en un décalage des degrés. Les signes apparaissant dans la formule de d_C pour une algèbre de Lie usuelle seront alors directement donnés par la règle de Koszul et la généralisation ℓ de d_C sera de degré 1. On munit donc les vecteurs X de $\mathfrak{g}$ du degré $degré(X) = x = -1$. On note $\mathfrak{g}[1]$ cet espace gradué. Le crochet devient une application graduée symmétrique $\ell : S^2(\mathfrak{g}[1]) \longrightarrow \mathfrak{g}[1]$ homogène de degré 1. De même l'algèbre $\bigwedge \mathfrak{g}$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à l'algèbre $S(\mathfrak{g}[1])$. Il n'y a pas d'isomorphisme d'algèbre entre ces deux espaces, il n'y a pas non plus d'isomorphisme linéaire canonique. Nous choisissons l'isomorphisme donné dans [AAC1]:

$$X_{i_1} \wedge \cdots \wedge X_{i_n} \longrightarrow (-1)^{\sum_j (n-j)x_{i_j}} X_{i_1} \centerdot \ldots \centerdot X_{i_n}.$$

Alors $\ell_2(X,Y) = (-1)^x [X,Y]$ et si $\mathfrak{g}$ est différentielle, on posera $\ell_1(X) = dX$.

On considère $S^+(\mathfrak{g}[1]) = \sum_{n>0} S^n(\mathfrak{g}[1])$ comme une cogèbre pour la comultiplication Δ déduite de la déconcaténation de $T^+(\mathfrak{g}[1])$, défini de la manière suivante:

soit $I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$ une partie de $\{1, \ldots, n\}$, on note X_I le produit $X_{i_1} \centerdot \ldots \centerdot X_{i_k}$. Δ est alors la comultiplication de degré 0 définie par:

$$\Delta(X_1 \centerdot \ldots \centerdot X_n) = \sum_{\substack{I \sqcup J = \{1, \ldots n\} \\ |I|>0, |J|>0}} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_{\{1,\ldots,n\}} \\ x_I, x_J \end{smallmatrix}\right) X_I \otimes X_J.$$

Remarquons que lorsque chaque $x_i = -1$, le signe est simplement la signature de la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1,\dots,n \\ I,J \end{smallmatrix}\right)$.

La cogèbre ainsi obtenue est une cogèbre cocommutative et coassociative : on note τ la volte graduée

$$\tau(X \otimes Y) = \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} xy \\ yx \end{smallmatrix}\right) Y \otimes X.$$

alors

$$\tau \circ \Delta = \Delta$$
$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta.$$

En effet, on a:

$$\begin{aligned}
\tau \circ \Delta(X_{\{1,\dots,n\}}) &= \tau \left(\sum_{I,J} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_{\{1,\dots,n\}} \\ x_I, x_J \end{smallmatrix}\right) X_I \otimes X_J \right) \\
&= \sum_{I,J} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_I, x_J \\ x_J, x_I \end{smallmatrix}\right) \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_{\{1,\dots,n\}} \\ x_I, x_J \end{smallmatrix}\right) X_J \otimes X_I \\
&= \sum_{I,J} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_{\{1,\dots,n\}} \\ x_J, x_I \end{smallmatrix}\right) X_J \otimes X_I = \Delta(X_{\{1,\dots,n\}})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta) \circ \Delta(X_{\{1,\dots,n\}}) &= \sum_{I,J} (id \otimes \Delta) \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_{\{1,\dots,n\}} \\ x_I, x_J \end{smallmatrix}\right) X_I \otimes X_J \\
&= \sum_{I \sqcup J = \{1\dots n\}} \sum_{K \sqcup L = J} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_{\{1,\dots,n\}} \\ x_I, x_J \end{smallmatrix}\right) \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_J \\ x_K, x_L \end{smallmatrix}\right) X_I \otimes X_K \otimes X_L \\
&= \sum_{I \sqcup K \sqcup L = \{1\dots n\}} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_{\{1,\dots,n\}} \\ x_I, x_K, x_L \end{smallmatrix}\right) X_I \otimes X_K \otimes X_L \\
&= (\Delta \otimes id) \circ \Delta(X_{\{1,\dots,n\}}).
\end{aligned}$$

Toute application linéaire $f : (\mathcal{C}, c) \longrightarrow (\mathfrak{g}[1], \Delta)$ où $(\mathcal{C}, c)$ est une cogèbre cocommutative, coassociative et nilpotente (c'est à dire que pour tout c,

$$(\Delta \otimes id^{\otimes n}) \circ (\Delta \otimes id^{\otimes n-1}) \circ \cdots \circ \Delta c = 0$$

pour n assez grand) se prolonge d'une façon unique en un morphisme de cogèbre F : $(\mathcal{C}, c) \longrightarrow (S^+(\mathfrak{g}[1]), \Delta)$.

On dira que c'est la cogèbre cocommutative et coassociative libre (sans co-unité) engendrée par $\mathfrak{g}[1]$. On peut donc prolonger de façon unique l'application $\ell_1 + \ell_2$ en une codérivation de degré 1 de notre cogèbre. Ce prolongement est donné par (voir [AMM]):

$$\begin{aligned}
\ell(X_1 \dots . X_n) = \sum_j (-1)^{\sum_{i<j} x_i} X_1 \dots . \ell_1(X_j) \dots . X_n \\
+ \sum_{i<j} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \ \dots \ x_n \\ x_i x_j x_1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots x_n \end{smallmatrix}\right) \ell_2(X_i, X_j) . X_1 \dots \hat{\imath} \dots \hat{\jmath} \dots . X_n.
\end{aligned}$$

ℓ est une codérivation veut dire que, en tenant compte de la règle des signes de Koszul dans la définition du produit tensoriel des applications,

$$(id \otimes \ell + \ell \otimes id) \circ \Delta = \Delta \circ \ell.$$

Elle est de carré nul $\ell \circ \ell = 0$ (voir [AMM], [K]).

Définition 3.1. (L_∞ algèbre)

Une L_∞ algèbre est une cogèbre différentielle de la forme $(S^+(\mathfrak{g}[1]), \Delta, \ell)$ où Δ est défini ci-dessus et ℓ est une codifférentielle de Δ est de carré nul.

Si $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], d)$ est une algèbre de Lie graduée différentielle, la L_∞ algèbre $L(\mathfrak{g}) = (S^+(\mathfrak{g}[1]), \Delta, \ell)$ telle que

$$\ell_1(X) = dX, \quad \ell_2(X.Y) = (-1)^x[X,Y], \quad \ell_k = 0, \quad k = 3, 4, \ldots$$

s'appelle la L_∞ algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$.

Un morphisme de L_∞ algèbre entre $S^+(\mathfrak{g}[1])$ et $S^+(\mathfrak{h}[1])$ est une application F entre ces espaces qui est un morphisme de cogèbres différentielles. Puisque $S^+(\mathfrak{h}[1])$ est libre, un tel morphisme est caractérisé par la donnée d'une suite d'aplications:

$$F_n : S^n(\mathfrak{g}[1]) \longrightarrow \mathfrak{h}[1],$$

homogène de degré 0. F est un morphisme de cogèbre si et seulement si, pour tout n,

$$F(X_1 . \ldots . X_n) = \sum_{j>0} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_j = \{1,\ldots,n\} \\ I_1 \ldots I_j \neq \emptyset}} \varepsilon \binom{x_1 \ldots x_n}{x_{I_1} \ldots x_{I_j}} F_{|I_1|}(X_{I_1}) . \ldots . F_{|I_j|}(X_{I_j}).$$

Enfin, F est un morphisme de cogèbres différentielles si et seulement si $\ell^{\mathfrak{h}} \circ F = F \circ \ell^{\mathfrak{g}}$. Ceci donne une équation sur les F_n, appelée équation de formalité. Si $\ell^{\mathfrak{g}}$ (resp $\ell^{\mathfrak{h}}$) est la codérivation caractérisée par les applications $\ell_p^{\mathfrak{g}} : S^p(\mathfrak{g}[1]) \longrightarrow \mathfrak{g}[1]$ (resp. $\ell_q^{\mathfrak{h}} : S^q(\mathfrak{h}[1]) \longrightarrow \mathfrak{h}[1]$) et si F est caractérisée par les applications $F_n : S^n(\mathfrak{g}[1]) \longrightarrow \mathfrak{h}[1]$, cette équation s'écrit:

$$0 = \sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_p = \{1,\ldots,n\} \\ 0 < |I_1|, \ldots, |I_p| < n}} \varepsilon \binom{x_{\{1,\ldots,n\}}}{x_{I_1} \ldots x_{I_p}} \ell_p^{\mathfrak{h}} \left(F_{|I_1|}(X_{I_1}) . \ldots . F_{|I_p|}(X_{I_p}) \right) - \sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ I \sqcup J = \{1,\ldots,n\} \\ |J| = p-1}} \varepsilon \binom{x_{\{1,\ldots,n\}}}{x_I x_J} F_p \left(\ell_{|I|}^{\mathfrak{g}}(X_I) . X_J \right).$$

Supposons maintenant que $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ soient deux algèbres de Lie graduées et $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un morphisme de degré 0 d'algèbres de Lie. Cherchons tous les morphismes de L_∞ algèbres $F : S^+(\mathfrak{g}[1]) \longrightarrow S^+(\mathfrak{h}[1])$ tels que $F_1 = \varphi$. Cela revient à chercher toutes les suites d'applications (F_n) $(F_n : S^n(\mathfrak{g}[1]) \longrightarrow \mathfrak{h}[1])$ telles que:

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{\substack{I \sqcup J = \{1,\ldots,n\} \\ 0 < |I|, |J| < n}} \frac{1}{2} \varepsilon \binom{x_{\{1,\ldots,n\}}}{x_I x_J} \ell_2^{\mathfrak{h}} \left(F_{|I|}(X_I) . F_{|J|}(X_J) \right) \\ & - \sum_{0 < i < j < n+1} \varepsilon \binom{x_{\{1,\ldots,n\}}}{x_i x_j x_1 \ldots \hat{i} \hat{j} \ldots x_n} F_{n-1} \left(\ell_2^{\mathfrak{g}}(X_i . X_j) . X_1 \ldots \hat{i} \hat{j} \ldots . X_n \right). \end{aligned} \tag{n}$$

Cette suite d'équations peut se résoudre par récurrence sur n. L'équation est vériffiée pour $n=2$ puisque φ est un morphisme. Si on a résolu les équations $(2),\dots,(n)$ qui portent sur $F_1=\varphi,F_2,\dots,F_{n-1}$, l'équation (n) devient une équation en F_n de la forme:

$$-\frac{1}{2}\sum_{\substack{I\sqcup J=\{1,\dots,n+1\}\\ 1<|I|,|J|<n}}\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}x_{\{1,\dots,n+1\}}\\ x_Ix_J\end{smallmatrix}\right)\ell_2^{\mathfrak{h}}\left(F_{|I|}(X_I).F_{|J|}(X_J)\right)$$

$$=\sum_i\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}x_1\dots x_{n+1}\\ x_ix_1\dots\hat{i}\dots x_{n+1}\end{smallmatrix}\right)\ell_2^{\mathfrak{h}}(\varphi(X_i).F_n(X_1.\dots\hat{i}\dots.X_{n+1}))-$$

$$-\sum_{i<j}\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}x_1\dots x_{n+1}\\ x_ix_jx_1\dots\hat{i}\hat{j}\dots x_{n+1}\end{smallmatrix}\right)F_n(\ell_2^{\mathfrak{g}}(X_i.X_j).X_1\dots\hat{i}\dots\hat{j}\dots.X_{n+1}).$$

On peut donc définir la L_∞ cohomologie.

Définition 3.2. (L_∞ cohomologie)

Soit $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ deux algèbres de Lie graduées et φ un homomorphisme d'algèbres de Lie de degré 0 de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$. On appelle n cochaîne sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{h}$ une application F_n de degré f_n de $S^n(\mathfrak{g}[1])$ dans $\mathfrak{h}[1]$. L'opérateur de cobord d_L associe à cette cochaîne F_n la cochaîne

$$d_LF_n(X_1.\dots.X_{n+1})=\ell^{\mathfrak{h}}\circ F_n-(-1)^{f_n}F_n\circ\ell^{\mathfrak{g}}$$

$$=\sum_i\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}x_1&\dots&x_{n+1}\\ x_ix_1\dots\hat{i}\dots x_{n+1}\end{smallmatrix}\right)\ell_2^{\mathfrak{h}}(\varphi(X_i).F_n(X_1.\dots\hat{i}\dots.X_{n+1}))-$$

$$-(-1)^{f_n}\sum_{i<j}\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}x_1&\dots&x_{n+1}\\ x_ix_jx_1\dots\hat{i}\hat{j}\dots x_{n+1}\end{smallmatrix}\right)F_n(\ell_2^{\mathfrak{g}}(X_i.X_j).X_1\dots\hat{i}\dots\hat{j}\dots.X_{n+1}).$$

Si F_n est de degré f_n, d_LF_n est de degré f_n+1, donc

$$d_L\circ d_L(F_n)=\ell^{\mathfrak{h}}\circ d_LF_n-(-1)^{f_n+1}d_LF_n\circ\ell^{\mathfrak{g}}$$

$$=\ell^{\mathfrak{h}}\circ\ell^{\mathfrak{h}}\circ F_n-(-1)^{f_n}\ell^{\mathfrak{h}}\circ F_n\circ\ell^{\mathfrak{g}}-(-1)^{f_n+1}\ell^{\mathfrak{h}}\circ F_n\circ\ell^{\mathfrak{g}}-F_n\circ\ell^{\mathfrak{g}}\circ\ell^{\mathfrak{g}}=0.$$

On retrouve en particulier la cohomologie de Chevalley usuelle. En effet soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et V un $\mathfrak{g}$ module. V permet de construire immédiatement une algèbre de Lie graduée en posant

$$\mathfrak{h}=\mathfrak{g}\oplus\sum_{p=-1}^{\infty}V[p],\quad [X+\sum_p u_p,Y+\sum_q v_q]=[X,Y]+\sum_p Xv_p-Yu_p$$

et un morphisme $\varphi:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{h}$ défini par $\varphi(X)=X$.

Un morphisme de cogèbres différentielles $F=f+C$ sera appelé une formalité de module s'il est défini par des F_n homogènes de degré 0, de la forme $F_1=\varphi+C_1$, C_1 linéaire de $\mathfrak{g}$ dans V, et pour $p>1$, $F_p=C_p$, C_p p linéaire de $\mathfrak{g}$ dans V.

De même une formalité de module F est dite triviale s'il y a un morphisme de cogèbres B défini par B_p p linéaire de $\mathfrak{g}$ dans V, de degré -1 tel que $F=\varphi+\ell^{\mathfrak{h}}\circ B+B\circ\ell^{\mathfrak{g}}$.

Proposition 3.3. (Expression de la cohomologie de Chevalley)

L'équation de formalité de module pour un morphisme $F = \varphi + C$ est

$$d_C C_n = 0 \quad \forall n > 0.$$

De plus, $F = \varphi + \ell_{\mathfrak{h}} \circ B + B \circ \ell_{\mathfrak{g}}$ si et seulement si

$$C_1 = 0 \quad et \quad C_n = d_C B_{n-1} \quad \forall n > 1.$$

Remarque 3.4.
L'espace $S^+(\mathfrak{g}[1])$ a, en plus de sa structure de cogèbre libre, une structure d'algèbre commutative graduée libre. Nous n'utiliserons pas cette structure qui peut s'interpréter comme issue de l'opérade Com qui est duale de l'opérade Lie.

4. C_∞ algèbres et cohomologie de Harrison

4.1. **Cohomologie de Harrison des algèbres commutatives.**

La mèthode de la section précédente s'applique aussi aux algèbres commutatives. Soit A une algèbre associative et commutative et V un A module vu comme un bimodule tel que $av = va$ pour tout v de V et tout a de A. La cohomologie de Harrison de A à valeurs dans V est définie de la façon suivante.

On définit d'abord les p, q battements de $n = p + q$ lettres comme les permutatiosn σ de $\{1, \dots, n\}$ telles que $\sigma(1) < \cdots < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)$. On appelle $Bat(p, q)$ l'ensemble de tous ces battements et on définit le produit battement de deux tenseurs $\alpha = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p$ et $\beta = \alpha_{p+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{p+q}$ par

$$bat_{p,q}(\alpha, \beta) = \sum_{\sigma \in Bat(p,q)} \varepsilon(\sigma^{-1}) \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(n)}.$$

Ceci représente la somme signée de tous les tenseurs $\alpha_{i_1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{i_n}$ dans lesquels les vecteurs $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ et les vecteurs $\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+q}$ apparaissent rangés dans leur ordre naturel.

Par définition, l'espace $\underline{A^{\otimes n}}$ est le quotient de $A^{\otimes n}$ par la somme de toutes les images des applications linéaires $bat_{p,n-p}$ $(0 < p < n)$ (voir [G], [L]). Une n cochaîne C est une application linéaire de $\underline{A^{\otimes n}}$ dans V. L'espace de ces cochaînes est noté $C^n(A, V)$. L'opérateur de cobord de Harrison est l'application $d_{Ha} : C^{n-1}(A, V) \longrightarrow C^n(A, V)$ définie par

$$\begin{aligned} d_{Ha} C(\underline{\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n}) =& \alpha_1 C(\underline{\alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_n}) - C(\underline{\alpha_1 \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_n}) + \\ &+ C(\underline{\alpha_1 \otimes \alpha_2 \alpha_3 \otimes \cdots \otimes \alpha_n}) + \cdots + (-1)^{n-1} C(\underline{\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{n-1} \alpha_n}) + \\ &+ (-1)^n C(\underline{\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{n-1}}) \alpha_n. \end{aligned}$$

(On a bien sûr noté $\underline{\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n}$ la classe de $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n$ dans $\underline{A^{\otimes n}}$.)

On a $d_{Ha} \circ d_{Ha} = 0$, le noyau de $d_{Ha} : C^n(A, V) \longrightarrow C^{n+1}(A, V)$ est noté $Z^n(A, V)$, c'est l'espace des n cocycles, l'image de $d_{Ha} : C^{n-1}(A, V) \longrightarrow C^n(A, V)$ est noté $B^n(A, V)$, c'est l'espace des n cobords. Le n^{eme} espace de cohomologie de Harrison de A à valeurs dans V

est le quotient $H^n(A,V)$ de $Z^n(A,V)$ par $B^n(A,V)$.

4.2. La cogèbre $(\underline{\bigotimes}^+(A[1]),\delta)$.

La construction de la section précédente a un équivalent ici. On commence comme plus haut par décaler les degrés et considérer l'espace $A[1]$. La construction suivante est valable lorsque A est graduée. Le degé de α, β dans $A[1]$ est noté a, b.

Le produit battement dans $T(A[1])$ est défini par:

$$bat_{p,q}(\alpha,\beta)=\sum_{\sigma\in Bat(p,q)}\varepsilon\begin{pmatrix}a_1 & \cdots & a_n\\ a_{\sigma^{-1}(1)} & \cdots & a_{\sigma^{-1}(n)}\end{pmatrix}\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes\alpha_{\sigma^{-1}(n)}.$$

On notera $\underline{\bigotimes}^n(A[1])$ le quotient de $A[1]^{\otimes n}$ par la somme des images des applications $bat_{p,n-p}$ $(0<p<n)$ et de façon abusive $\alpha_{[1,n]}=\alpha_1\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}\alpha_n$ la classe de $\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_n$, lorsque les α_i appartiennent à $A[1]$. Ceci ne veut pas dire que $\underline{\otimes}$ soit une multiplication associative dans $\underline{\bigotimes}^+(A[1])=\sum_{n>0}\underline{\bigotimes}^n(A[1])$.

Remarque 4.1. 1. *En fait ce dernier espace peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie libre mais nous n'utiliserons pas cette structure.*

2. *Une base de l'espace $\underline{\bigotimes}^n(A[1])$. Prenons une base $(e_i)_i$ de $A[1]$ composée d'éléments homogènes.*

   Pour chaque suite croissante $\mathbf{i}=(i_1\leq\cdots\leq i_p)$, on pose $e_{\mathbf{i}}=e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}$ et pour chaque σ de S_p, $e_{\sigma(\mathbf{i})}=e_{\sigma(i_1)}\otimes\cdots\otimes e_{\sigma(i_p)}$.

   On note $V(e_{\mathbf{i}})$ l'espace engendré par ces vecteurs dans $A[1]^{\otimes p}$ et $W(e_{\mathbf{i}})$ le sous-espace:

$$W(e_{\mathbf{i}})=Vect\Big(\sum_{\sigma}bat_{r,s}\big((e_{i_{\sigma(1)}},\ldots,e_{i_{\sigma(r)}}),(e_{i_{\sigma(r+1)}},\ldots,e_{i_{\sigma(r+s)}})\big)\Big).$$

   On choisit enfin pour chaque $e_{\mathbf{i}}$, une base d'un supplémentaire de $W(e_{\mathbf{i}})$ dans $V(e_{\mathbf{i}})$ de la forme:

$$\mathcal{B}(e_{\mathbf{i}})=\left\{e_{\sigma(\mathbf{i})},\ \sigma\in\Sigma(e_{\mathbf{i}})\right\}.$$

   Une base de $\underline{\bigotimes}^n(A[1])$ est donnée par

$$\mathcal{B}=\bigcup_{|\mathbf{i}|=n}\bigcup_{\sigma\in\Sigma(e_{\mathbf{i}})}\left\{e_{\sigma(\mathbf{i})}\right\}.$$

Rappelons maintenant les propriétés du produit battement.

Lemme 4.2. (Associativité de *bat*)

Le produit battement est associatif et commutatif gradué de degré 0: pour tout $\alpha\in A[1]^{\otimes p}$, $\beta\in A[1]^{\otimes q}$, $\gamma\in A[1]^{\otimes r}$,

$$(i)\quad bat_{p,q}(\alpha,\beta)=(-1)^{ab}bat_{q,p}(\beta,\alpha),$$
$$(ii)\quad bat_{p+q,r}(bat_{p,q}(\alpha,\beta),\gamma)=bat_{p,q+r}(\alpha,bat_{q,r}(\beta,\gamma)).$$

Preuve
(i) Soient $\alpha = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p$ et $\beta = \alpha_{p+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{p+q}$. On a

$$bat_{p,q}(\alpha,\beta) = \sum_{\sigma \in Bat(p,q)} \varepsilon \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{p+q} \\ a_{\sigma^{-1}(1)} & \cdots & a_{\sigma^{-1}(p+q)} \end{pmatrix} \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Pour chaque $\sigma \in Bat(p,q)$, on construit deux permutations τ et ρ de S_{p+q} en posant:

$$\tau(k) = \begin{cases} k+p, & \text{si } 1 \leq k \leq q \\ k-q, & \text{si } q < k \leq q+p. \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \rho = \sigma \circ \tau.$$

On vérifie que ρ appartient à $Bat(q,p)$ et que l'application $\sigma \mapsto \rho$ est une bijection de $Bat(p,q)$ sur $Bat(q,p)$.

Posons $\beta_k = \alpha_{\tau(k)}$, pour tout k $(1 \leq k \leq p+q)$, on a $\beta_{\rho^{-1}(k)} = \alpha_{\tau\circ\rho^{-1}(k)} = \alpha_{\sigma^{-1}(k)}$ et

$$\begin{aligned} \varepsilon \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_{p+q} \\ b_{\rho^{-1}(1)} & \cdots & b_{\rho^{-1}(p+q)} \end{pmatrix} &= \varepsilon \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_q & b_{q+1} & \cdots & b_{p+q} \\ b_{q+1} & \cdots & b_{p+q} & b_1 & \cdots & b_q \end{pmatrix} \varepsilon \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{p+q} \\ a_{\sigma^{-1}(1)} & \cdots & a_{\sigma^{-1}(p+q)} \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon \begin{pmatrix} a_{p+1} & \cdots & a_{p+q} & a_1 & \cdots & a_p \\ a_1 & \cdots & a_q & a_{q+1} & \cdots & a_{p+q} \end{pmatrix} \varepsilon \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{p+q} \\ a_{\sigma^{-1}(1)} & \cdots & a_{\sigma^{-1}(p+q)} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{ab} \varepsilon \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{p+q} \\ a_{\sigma^{-1}(1)} & \cdots & a_{\sigma^{-1}(p+q)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$bat_{p,q}(\alpha,\beta) = (-1)^{ab} bat_{q,p}(\beta,\alpha).$$

(ii) Disons qu'une permutation σ de S_{p+q+r} est un (p,q,r)-battement si elle vérifie

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p),\ \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q) \text{ et } \sigma(p+q+1) < \cdots < \sigma(p+q+r).$$

Notons $Bat(p,q,r)$ l'ensemble des (p,q,r)-battements.

Soient $\alpha = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p$, $\beta = \alpha_{p+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{p+q}$ et $\gamma = \alpha_{p+q+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{p+q+r}$. On définit le produit $bat_{p,q,r}(\alpha,\beta,\gamma)$ par:

$$bat_{p,q,r}(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{\rho \in Bat(p,q,r)} \varepsilon \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{p+q+r} \\ a_{\rho^{-1}(1)} & \cdots & a_{\rho^{-1}(p+q+r)} \end{pmatrix} \alpha_{\rho^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\rho^{-1}(p+q+r)}.$$

On a en fait

$$bat_{p,q,r}(\alpha,\beta,\gamma) = bat_{p+q,r}(bat_{p,q}(\alpha,\beta),\gamma) = bat_{p,q+r}(\alpha, bat_{q,r}(\beta,\gamma)).$$

Il suffit de montrer que $bat_{p,q,r}(\alpha,\beta,\gamma) = bat_{p+q,r}(bat_{p,q}(\alpha,\beta),\gamma)$, l'autre égalité se prouvant de la même façon.

Fixons $\sigma_1 \in Bat(p,q)$, on construit une permutation $(\sigma_1 \times id)$ sur $\{1,\ldots,p+q+r\}$ en posant:

$$(\sigma_1 \times id)(k) = \begin{cases} \sigma_1(k), & \text{si } 1 \leq k \leq p+q, \\ k, & \text{si } p+q+1 \leq k \leq p+q+r. \end{cases}$$

Par construction, $(\sigma_1 \times id)$ appartient à $Bat(p,q,r)$.

Soit maintenant σ_2 une permutation de $Bat(p+q,r)$, on définit la permutation ρ de S_{p+q+r} par: $\rho = \sigma_2 \circ (\sigma_1 \times id)$. On vérifie que ρ appartient à $Bat(p,q,r)$, que l'application

$\varphi : (\sigma_2, \sigma_1) \mapsto \rho = \sigma_2 \circ (\sigma_1 \times id)$ est une bijection de $Bat(p+q, r) \times Bat(p, q)$ sur $Bat(p, q, r)$ et que

$$\varepsilon \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{p+q+r} \\ a_{\rho^{-1}(1)} & \cdots & a_{\rho^{-1}(p+q+r)} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{p+q+r} \\ a_{\sigma_2^{-1}(1)} & \cdots & a_{\sigma_2^{-1}(p+q+r)} \end{pmatrix} \varepsilon \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{p+q} \\ a_{\sigma_1^{-1}(1)} & \cdots & a_{\sigma_1^{-1}(p+q)} \end{pmatrix}.$$

On a donc bien $bat_{p+q,r}(bat_{p,q}(\alpha, \beta), \gamma) = bat_{p,q,r}(\alpha, \beta, \gamma)$.

□

Maintenant on introduit un cocrochet de Lie δ sur $\underline{\bigotimes}^+(A[1])$ en posant d'abord:

$$\begin{aligned} \delta(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = &\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_j \bigotimes \alpha_{j+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_n \\ &- \varepsilon \begin{pmatrix} a_1 \ldots a_{n-j} & a_{n-j+1} \ldots a_n \\ a_{j+1} \ldots a_n & a_1 \ldots a_j \end{pmatrix} \alpha_{j+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_n \bigotimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_j. \end{aligned}$$

Cette formule permet de définir δ sur l'espace quotient $\underline{\bigotimes}^n(A[1])$. En effet, si $p+q=n$, on a, en posant $\alpha = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p$ et $\beta = \alpha_{p+1} \otimes \ldots \alpha_{p+q}$,

$$\begin{aligned} \delta(bat_{p,q}(\alpha, \beta)) = &\sum_{\substack{\sigma \in Bat(p,q) \\ 0<j<n}} \varepsilon \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ a_{\sigma^{-1}(1)} & \cdots & a_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix} \\ &\Big(\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(j)} \bigotimes \alpha_{\sigma^{-1}(j+1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(n)} \\ &- \varepsilon \begin{pmatrix} a_{I_\sigma} & a_{J_\sigma} \\ a_{J_\sigma} & a_{I_\sigma} \end{pmatrix} \alpha_{\sigma^{-1}(j+1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(n)} \bigotimes \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(j)} \Big). \end{aligned}$$

Dans cette formule, on a posé $I_\sigma = \{\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(j)\}$ et $J_\sigma = \{\sigma^{-1}(j+1), \ldots, \sigma^{-1}(n)\}$.

Posons maintenant $I_\sigma^k = I_\sigma \cap \{1, \ldots, p\}$, $I_\sigma^{j-k} = I_\sigma \cap \{p+1, \ldots, n\}$ et de même $J_\sigma^r = J_\sigma \cap \{1, \ldots, p\}$, $J_\sigma^{n-j-r} = J_\sigma \cap \{p+1, \ldots, n\}$, ($k = |I_\sigma^k|$ et $r = |J_\sigma^r|$). On peut alors écrire:

$$\delta(bat_{p,q}(\alpha, \beta)) = \sum_{\substack{0<j<n \\ I \sqcup J = \{1,\ldots,n\} \\ I, J \neq \emptyset}} \sum_{\substack{\sigma \in Bat(p,q) \\ I_\sigma = I}} \varepsilon \begin{pmatrix} a_{\{1,\ldots,n\}} \\ a_{I_\sigma} \ a_{J_\sigma} \end{pmatrix} \Big(\alpha_{I_\sigma} \bigotimes \alpha_{J_\sigma} - \varepsilon \begin{pmatrix} a_{I_\sigma} & a_{J_\sigma} \\ a_{J_\sigma} & a_{I_\sigma} \end{pmatrix} \alpha_{J_\sigma} \bigotimes \alpha_{I_\sigma} \Big).$$

- Cas 1 $I \neq \{1, \ldots, p\}$ ou $I \neq \{p+1, \ldots, n\}$.
  On vérifie qu'alors l'application $(\sigma|_{I_\sigma}, \sigma|_{J_\sigma}) \mapsto \sigma = \sigma|_{I_\sigma} \otimes \sigma|_{J_\sigma}$ est une bijection entre $Bat(k, j-k) \times Bat(r, n-j-r)$ et $\{\sigma \in Bat(p,q) / \ I_\sigma = I\}$.
  Dans ce cas, la seconde somme est un produit $\bigotimes$ de produits battements. Elle est donc nulle lorsque l'on passe au quotient.

- Cas 2 $I = \{1, \ldots, p\}$ ou $I = \{p+1, \ldots, n\}$.
  Les termes restant s'écrivent

$$\begin{aligned} \delta(bat_{p,q}(\alpha, \beta)) = &\alpha \bigotimes \beta - (-1)^{ab} \beta \bigotimes \alpha \\ &+ (-1)^{ab} (\beta \bigotimes \alpha - (-1)^{ab} \alpha \bigotimes \beta) = 0. \end{aligned}$$

On notera $\alpha_{[i,j]} = \alpha_i \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j$, δ est donc le cocrochet de $\underline{\bigotimes}^+(A[1])$ donnée par

$$\delta(\alpha_{[1,n]}) = \sum_{0<j<n} \alpha_{[1,j]} \bigotimes \alpha_{[j+1,n]} - (-1)^{a_{[1,j]}a_{[j+1,n]}} \alpha_{[j+1,n]} \bigotimes \alpha_{[1,j]}.$$

Proposition 4.3. (La structure de cogèbre)

L'espace $\underline{\bigotimes}^+(A[1])$ équippé de δ est une cogèbre de Lie, c'est à dire que δ est coantisymétrique de degré 0 et vérifie l'identité de coJacobi: si τ est la volte,

$$\tau \circ \delta = -\delta, \qquad \Big(id^{\otimes 3} + (\tau \otimes id) \circ (id \otimes \tau) + (id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes id)\Big) \circ (\delta \otimes id) \circ \delta = 0.$$

Preuve

D'une part, en notant toujours τ la volte, on a

$$\begin{aligned}\delta(\alpha) = \delta(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) &= \sum_{j=1}^{n-1} \Big(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \bigotimes \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n \\ &\qquad - \varepsilon \begin{pmatrix} a_{\{1,\dots,n\}} \\ a_{\{j+1,\dots,n\}} \; a_{\{1,\dots,j\}} \end{pmatrix} \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n \bigotimes \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \Big) \\ &= \sum_{0<j<n} \Big(\alpha_{[1,j]} \bigotimes \alpha_{[j+1,p]} - \tau\big(\alpha_{[1,j]} \bigotimes \alpha_{[j+1,p]}\big) \Big).\end{aligned}$$

Donc

$$\tau \circ \delta(\alpha) = \sum_{j=1}^{n-1} \tau\big(\alpha_{[1,j]} \bigotimes \alpha_{[j+1,p]}\big) - \alpha_{[1,j]} \bigotimes \alpha_{[j+1,p]} = -\delta(\alpha).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}(\delta \otimes id) \circ \delta(\alpha) = &\sum_{0<i<j<n} \alpha_{[1,i]} \bigotimes \alpha_{[i+1,j]} \bigotimes \alpha_{[j+1,n]} \\ &- \varepsilon \begin{pmatrix} a_{[1,i]} & a_{[i+1,j]} & a_{[j+1,n]} \\ a_{[i+1,j]} & a_{[1,i]} & a_{[j+1,n]} \end{pmatrix} \alpha_{[i+1,j]} \bigotimes \alpha_{[1,i]} \bigotimes \alpha_{[j+1,n]} \\ &- \varepsilon \begin{pmatrix} a_{[1,i]} & a_{[i+1,j]} & a_{[j+1,n]} \\ a_{[i+1,j]} & a_{[j+1,n]} & a_{[1,i]} \end{pmatrix} \alpha_{[i+1,j]} \bigotimes \alpha_{[j+1,n]} \bigotimes \alpha_{[1,i]} \\ &+ \varepsilon \begin{pmatrix} a_{[1,i]} & a_{[i+1,j]} & a_{[j+1,n]} \\ a_{[j+1,n]} & a_{[i+1,j]} & a_{[1,i]} \end{pmatrix} \alpha_{[j+1,n]} \bigotimes \alpha_{[i+1,j]} \bigotimes \alpha_{[1,i]}.\end{aligned}$$

Donc, en notant $(i)=[1,i]$, $(j)=[i+1,j]$ et $(n)=[j+1,n]$,

$$\begin{aligned}
&\Big(id^{\otimes 3}+(\tau\otimes id)\circ(id\otimes\tau)+(id\otimes\tau)\circ(\tau\otimes id)\Big)\circ(\delta\otimes id)\circ\delta(\alpha)\\
&\quad=\sum_{0<i<j<n}\alpha_{(i)}\bigotimes\alpha_{(j)}\bigotimes\alpha_{(n)}-\varepsilon\begin{pmatrix}a_{(i)}&a_{(j)}&a_{(n)}\\a_{(j)}&a_{(i)}&a_{(n)}\end{pmatrix}\alpha_{(j)}\bigotimes\alpha_{(i)}\bigotimes\alpha_{(n)}\\
&\quad-\varepsilon\begin{pmatrix}a_{(i)}&a_{(j)}&a_{(n)}\\a_{(j)}&a_{(n)}&a_{(i)}\end{pmatrix}\alpha_{(j)}\bigotimes\alpha_{(n)}\bigotimes\alpha_{(i)}+\varepsilon\begin{pmatrix}a_{(i)}&a_{(j)}&a_{(n)}\\a_{(n)}&a_{(j)}&a_{(i)}\end{pmatrix}\alpha_{(n)}\bigotimes\alpha_{(j)}\bigotimes\alpha_{(i)}\\
&\quad+\varepsilon\begin{pmatrix}a_{(i)}&a_{(j)}&a_{(n)}\\a_{(n)}&a_{(i)}&a_{(j)}\end{pmatrix}\alpha_{(n)}\bigotimes\alpha_{(i)}\bigotimes\alpha_{(j)}-\varepsilon\begin{pmatrix}a_{(i)}&a_{(j)}&a_{(n)}\\a_{(n)}&a_{(j)}&a_{(i)}\end{pmatrix}\alpha_{(n)}\bigotimes\alpha_{(j)}\bigotimes\alpha_{(i)}\\
&\quad-\alpha_{(i)}\bigotimes\alpha_{(j)}\bigotimes\alpha_{(n)}+\varepsilon\begin{pmatrix}a_{(i)}&a_{(j)}&a_{(n)}\\a_{(i)}&a_{(n)}&a_{(j)}\end{pmatrix}\alpha_{(i)}\bigotimes\alpha_{(n)}\bigotimes\alpha_{(j)}\\
&\quad+\varepsilon\begin{pmatrix}a_{(i)}&a_{(j)}&a_{(n)}\\a_{(j)}&a_{(n)}&a_{(i)}\end{pmatrix}\alpha_{(j)}\bigotimes\alpha_{(n)}\bigotimes\alpha_{(i)}-\varepsilon\begin{pmatrix}a_{(i)}&a_{(j)}&a_{(n)}\\a_{(i)}&a_{(n)}&a_{(j)}\end{pmatrix}\alpha_{(i)}\bigotimes\alpha_{(n)}\bigotimes\alpha_{(j)}\\
&\quad-\varepsilon\begin{pmatrix}a_{(i)}&a_{(j)}&a_{(n)}\\a_{(n)}&a_{(i)}&a_{(j)}\end{pmatrix}\alpha_{(n)}\bigotimes\alpha_{(i)}\bigotimes\alpha_{(j)}+\varepsilon\begin{pmatrix}a_{(i)}&a_{(j)}&a_{(n)}\\a_{(j)}&a_{(i)}&a_{(n)}\end{pmatrix}\alpha_{(j)}\bigotimes\alpha_{(i)}\bigotimes\alpha_{(n)}\\
&\quad=0.
\end{aligned}$$

4.3. **Morphismes et codérivations.**

La structure de cogèbre de Lie de $(\underline{\bigotimes}^+(A[1]),\delta)$ est libre. C'est à dire que si $(\mathcal{C},c)$ est une cogèbre de Lie nilpotente quelconque, tout $f:(\mathcal{C},c)\longrightarrow A[1]$ linéaire se prolonge en $F:(\mathcal{C},c)\longrightarrow\underline{\bigotimes}^+(A[1])$ qui est un morphisme de cogèbre. Nous montrons ici comment définir des codérivations Q et des morphismes F de cette structure à partir de leurs 'série de Taylor'.

Soit $F:\underline{\bigotimes}^+(A[1])\longrightarrow\underline{\bigotimes}^+(B[1])$ un morphisme de cogèbres de Lie. On suppose toujours F homogène de degré 0. On appelle F_n la projection sur $B[1]$ parallèlement à $\underline{\bigoplus}^{k>1}B[1]$ de la restriction de F à $\underline{\bigotimes}^n(A[1])$: F_n est une application linéaire de $\underline{\bigotimes}^n(A[1])$ dans $B[1]$.

De même soit $Q:\underline{\bigotimes}^+(A[1])\longrightarrow\underline{\bigotimes}^+(A[1])$ une codérivation de cogèbres de Lie. On suppose Q homogène de degré q. On appelle Q_n la projection sur $A[1]$ parallèlement à $\underline{\bigoplus}^{k>1}A[1]$ de la restriction de Q à $\underline{\bigotimes}^n(A[1])$: Q_n est une application linéaire de $\underline{\bigotimes}^n(A[1])$ dans $A[1]$.

Proposition 4.4. (Reconstruction de F et Q)

La suite d'applications (F_n) (resp. (Q_n)) permet de reconstruire F (resp. Q) de façon unique. On a explicitement

$$F(\alpha_{[1,n]})=\sum_{\substack{k>0,\ 0<r_1,\dots,r_k\\ r_1+\cdots+r_k=n}}F_{r_1}(\alpha_{[1,r_1]})\underline{\otimes}F_{r_2}(\alpha_{[r_1+1,r_1+r_2]})\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}F_{r_k}(\alpha_{[n-r_k+1,n]})$$

et

$$Q(\alpha_{[1,n]})=\sum_{\substack{1\leq r\leq n\\ 0\leq j\leq n-r}}(-1)^{qa_{[1,j]}}\alpha_{[1,j]}\underline{\otimes}Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]})\underline{\otimes}\alpha_{[j+r+1,n]}.$$

Plus précisément, toute suite d'applications (φ_n) peut se relever d'une seule façon en un morphisme (resp. une codérivation).

Preuve

La preuve est semblable à celle de [AMM]. Pour un morphisme, si tous les F_n sont nuls, $F(\alpha_1)$ est nul pour tout $\alpha_1 \in A[1]$, et si tous les $F(\alpha_{[1,p]})$ sont nuls quelque soit $p < n$, alors

$$\begin{aligned}\delta \circ F(\alpha_{[1,n]}) &= (F \otimes F) \circ \delta(\alpha_{[1,n]}) \\ &= \sum_{0<j<n} F(\alpha_{[1,j]}) \otimes F(\alpha_{[j+1,n]}) - (-1)^{a_{[1,j]}} F(\alpha_{[j+1,n]}) \otimes F(\alpha_{[1,j]}) = 0\end{aligned}$$

donc $F(\alpha_{[1,n]}) = F_n(\alpha_{[1,n]}) \in A[1]$ est aussi nul et par induction, F est nul. Le même argument s'applique pour une dérivation Q. Ceci prouve l'unicité.

Il reste juste à montrer que les formules de la proposition définissent bien un morphisme (resp. une codérivation).

F est bien défini.

D'abord F est bien défini, c'est à dire l'application $\overline{F}$ définie par la même formule mais sur $\alpha_{\{1,\dots,n\}} = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n$ passe bien au quotient. Il suffit pour cela de montrer que

$$\overline{F}(bat_{p,q}(\alpha_{\{1,\dots,p\}}, \alpha_{\{p+1,\dots,p+q\}})) = 0.$$

En fait, si on pose

$$\tilde{F}^k(\alpha_{\{1,\dots,n\}}) = \sum_{\substack{0<r_1,\dots,r_k \\ r_1+\cdots+r_k=n}} F_{r_1}(\alpha_{[1,r_1]}) \otimes F_{r_2}(\alpha_{[r_1+1,r_1+r_2]}) \otimes \cdots \otimes F_{r_k}(\alpha_{[n-r_k+1,n]}),$$

alors $\tilde{F}^k(bat_{p,q}(\alpha_{\{1,\dots,p\}}, \alpha_{\{p+1,\dots,p+q\}}))$ est une somme de produits battements de la forme

$$\tilde{F}^k(bat_{p,q}(\alpha_{\{1,\dots,p\}}, \alpha_{\{p+1,\dots,p+q\}})) = \sum bat_{r,s}(\tilde{F}^r(\alpha_I), \tilde{F}^s(\alpha_J)),$$

ce qui prouve que F est bien défini. Prouvons cette dernière relation.

On a

$$bat_{p,q}(\alpha_{\{1,\dots,p\}}, \alpha_{\{p+1,\dots,p+q\}}) = \sum_{\sigma \in Bat(p,q)} \varepsilon \begin{pmatrix} a_{\{1,\dots,p+q\}} \\ a_{\{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(p+q)\}} \end{pmatrix} \alpha_{\{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(p+q)\}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\tilde{F}^k(bat_{p,q}(\alpha_{\{1,\dots,p\}},&\alpha_{\{p+1,\dots,p+q\}})) = \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in Bat(p,q) \\ r_1,\dots,r_k}} \varepsilon \begin{pmatrix} a_{\{1,\dots,p+q\}} \\ a_{\{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(p+q)\}} \end{pmatrix} F_{r_1}(\alpha_{\{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(r_1)\}}) \otimes \cdots \\ &\qquad \cdots \otimes F_{r_k}(\alpha_{\{\sigma^{-1}(p+q-r_k+1),\dots,\sigma^{-1}(p+q)\}}).\end{aligned}$$

Fixons un battement $\sigma \in Bat(p,q)$. Posons $s_j = r_1 + \cdots + r_j$. S'il existe un j tel que $I_j = \{\sigma^{-1}(s_{j-1}+1), \dots, \sigma^{-1}(s_j)\}$ n'est inclus ni dans $\{1,\dots,p\}$ ni dans $\{p+1,\dots,p+q\}$, alors cet ensemble peut s'écrire $I_j = \{i_1, \dots, i_{t_j}, i_{t_j+1}, \dots, i_{r_j}\}$ avec $0 < i_1 < \cdots < i_{t_j} < p+1$

et $p < i_{t_j+1} < \cdots < i_{r_j} < p+q+1$ et bien sûr $0 < t_j < r_j$. L'ensemble $Bat_{I_j}(p,q)$ des battements $\rho \in Bat(p,q)$ tels que $\rho^{-1}(u) = \sigma^{-1}(u)$ pour tous les u de $\{1,\dots,p+q\} \setminus \{s_{j-1}+1,\dots,s_j\}$ est en bijection avec $Bat(t_j, r_j - t_j)$ puisque chaque battement μ de $Bat(t_j, r_j - t_j)$ peut se prolonger en un battement $\tilde{\mu}$ de $Bat(p,q)$ défini par $\tilde{\mu}^{-1}(u) = \sigma^{-1}(u)$ si u est dans $\{1,\dots,p+q\} \setminus \{s_{j-1}+1,\dots,s_j\}$ et $\tilde{\mu}(i_v) = i_{\mu(v)}$ pour $0 < v < r_j + 1$. Alors:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\rho \in Bat_{I_j}(p,q)} \varepsilon \begin{pmatrix} a_{\{1,\dots,p+q\}} \\ a_{\{\rho^{-1}(1),\dots,\rho^{-1}(p+q)\}} \end{pmatrix} F_{r_1}(\alpha_{\{\rho^{-1}(1),\dots,\rho^{-1}(r_1)\}}) \otimes \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots \otimes F_{r_k}(\alpha_{\{\rho^{-1}(p+q-r_k+1),\rho^{-1}(p+q)\}}) \\
&= \pm \varepsilon \begin{pmatrix} a_{\{1,\dots,p+q\}\setminus\{s_{j-1}+1,\dots,s_j\}} \\ a_{\{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(p+q)\}\setminus\{\sigma^{-1}(s_{j-1}+1),\dots,\sigma^{-1}(s_j)\}} \end{pmatrix} F_{r_1}(\alpha_{I_1}) \otimes \cdots \otimes F_{r_{j-1}}(\alpha_{I_{r_{j-1}}}) \otimes \\
&\qquad \otimes \sum_{\mu \in Bat(t_j, r_j - t_j)} \varepsilon \begin{pmatrix} a_{\{i_1,\dots,i_{r_j}\}} \\ a_{\{i_{\mu^{-1}(1)},\dots,i_{\mu^{-1}(r_j)}\}} \end{pmatrix} F_{r_j}(\alpha_{i_{\mu^{-1}(1)}}, \dots, \alpha_{i_{\mu^{-1}(r_j)}}) \otimes \\
&\qquad \otimes F_{r_{j+1}}(\alpha_{I_{r_{j+1}}}) \otimes \cdots \otimes F_{r_k}(\alpha_{I_k}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

en posant $\beta_v = \alpha_{i_v}$ et en remarquant que F_{r_j} s'annule sur

$$bat_{(t_j, r_j - t_j)}(\beta_{\{1,\dots,t_j\}}, \beta_{\{t_j+1,\dots,r_j\}}).$$

Il ne reste donc que la somme sur les battements σ tels que pour tout j, on ait soit $I_j \subset \{1,\dots,p\}$ soit $I_j \subset \{p+1,\dots,p+q\}$. Dans ce cas, les nombres $\sigma^{-1}(s_{j-1}+1),\dots,\sigma^{-1}(s_j)$ sont rangés dans leur ordre naturel, puisque σ est un battement. Notons maintenant $J_1,\dots,J_r$ les ensembles I_j tels que $I_j \subset \{1,\dots,p\}$ et $J_{s+1},\dots,J_{s+r}$ les autres. Posons $J_j = \{g_1^j < g_2^j < \cdots < g_{h_j}^j\}$. La somme sur tous les battements σ tels que $\{I_1,\dots,I_k\} = \{J_1,\dots,J_{r+s}\}$ (à l'ordre près) est isomorphe à une somme sur tous les (r,s) battements ν: étant donné un tel battement ν, on construit le (p,q) battement $\tilde{\nu}$ en posant, pour tout j, $1 \le j \le k$ et tout t, $1 \le t \le r_j$:

$$\tilde{\nu}^{-1}(s_{j-1}+t) = g_t^{\nu^{-1}(j)}.$$

Alors, si $s_j = |J_j|$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\sigma \in Bat(p,q) \\ \{I_1,\dots,I_k\} = \{J_1,\dots,J_k\}}} \varepsilon \begin{pmatrix} a_{\{1,\dots,p+q\}} \\ a_{\{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(p+q)\}} \end{pmatrix} F_{r_1}(\alpha_{\{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(r_1)\}}) \otimes \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots \otimes F_{r_k}(\alpha_{\{\sigma^{-1}(p+q-r_k+1),\sigma^{-1}(p+q)\}}) = \\
&= \sum_{\mu \in Bat(r,s)} \varepsilon \begin{pmatrix} a_{J_1} \dots a_{J_k} \\ a_{J_{\mu^{-1}(1)}} \dots a_{J_{\mu^{-1}(k)}} \end{pmatrix} F_{s_{\mu^{-1}(1)}}(\alpha_{J_{\mu^{-1}(1)}}) \otimes \cdots \otimes F_{s_{\mu^{-1}(k)}}(\alpha_{J_{\mu^{-1}(k)}}) \\
&= bat_{r,s}\left(F_{s_1}(\alpha_{J_1}) \otimes \cdots \otimes F_{s_r}(\alpha_{J_r}), F_{s_{r+1}}(\alpha_{J_{r+1}}) \otimes \cdots \otimes F_{s_{r+s}}(\alpha_{J_{r+s}})\right).
\end{aligned}$$

C'est l'égalité annoncée.

F est un morphisme.

En gardant nos notations et en ajoutant $(r_j) = [s_{j-1}+1, s_j]$, on a par définition:

$$\delta\circ F(\alpha_{[1,n]}) = \sum_{r_1,\dots,r_k}\sum_{0<j<k} F_{r_1}(\alpha_{(r_1)})\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}F_{r_j}(\alpha_{(r_j)})\bigotimes F_{r_{j+1}}(\alpha_{(r_{j+1})})\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}F_{r_k}(\alpha_{(r_k)})$$
$$-(-1)^{a_{[1,s_j]}a_{[s_j+1,n]}}F_{r_{j+1}}(\alpha_{(r_{j+1})})\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}F_{r_k}(\alpha_{(r_k)})\bigotimes F_{r_1}(\alpha_{(r_1)})\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}F_{r_j}(\alpha_{(r_j)}).$$

D'autre part,

$$(F\otimes F)\circ\delta(\alpha_{[1,n]}) = (F\otimes F)\big(\sum_{0<s<n}\alpha_{[1,s]}\bigotimes\alpha_{[s+1,n]} - (-1)^{a_{[1,s]}a_{[s+1,n]}}\alpha_{[s+1,n]}\bigotimes\alpha_{[1,s]}\big)$$
$$=\sum_{0<s<n}\ \sum_{\substack{r_1,\dots,r_j\\ r_1+\dots+r_j=s}}\ \sum_{\substack{r_{j+1},\dots,r_k\\ r_1+\dots+r_k=n}}$$
$$F_{r_1}(\alpha_{(r_1)})\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}F_{r_j}(\alpha_{(r_j)})\bigotimes F_{r_{j+1}}(\alpha_{(r_{j+1})})\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}F_{r_k}(\alpha_{(r_k)})-$$
$$-(-1)^{a_{[1,s]}a_{[s+1,n]}}F_{r_{j+1}}(\alpha_{(r_{j+1})})\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}F_{r_k}(\alpha_{(r_k)})\bigotimes F_{r_1}(\alpha_{(r_1)})\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}F_{r_j}(\alpha_{(r_j)}).$$

On vérifie aisément que chaque terme de la première expression apparaît une fois et une seule dans la seconde et réciproquement. On a donc

$$\delta\circ F = (F\otimes F)\circ\delta.$$

Q est bien défini.

Il s'agit là encore de montrer que la définition de $\tilde{Q}$:

$$\tilde{Q}(\alpha_{\{1,\dots,n\}}) = \sum_{\substack{0<r\\ 1\le j\le n-r}}(-1)^{qa_{\{1,\dots,j\}}}\alpha_{\{1,\dots,j\}}\otimes Q_r(\alpha_{\{j+1,\dots,j+r\}})\otimes\alpha_{\{j+r+1,\dots,n\}}$$

passe au quotient. On calcule donc $Q\big(bat_{p,q}(\alpha_{\{1,\dots,p\}},\alpha_{\{p+1,\dots,p+q\}})\big)$. Le même argument que ci-desssus, nous dit d'abord qu'il ne reste que

$$\sum_{\substack{0<r\\ 1\le j\le n-r}}\ \sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,p\}\\ \text{ou}\\ I\subset\{p+1,\dots,p+q\}}}\ \sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ \sigma^{-1}(\{j+1,\dots,j+r\})=I}}(-1)^{qa_{\{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(j)\}}}\varepsilon\begin{pmatrix}a_{\{1,\dots,p+q\}}\\ a_{\{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(p+q)\}}\end{pmatrix}$$
$$\alpha_{\{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(j)\}}\otimes Q_r(\alpha_I)\otimes\alpha_{\{\sigma^{-1}(j+r+1),\dots,\sigma^{-1}(p+q)\}}.$$

Ensuite, comme σ est un battement, les éléments de I sont rangés dans leur ordre naturel $I=\{t,t+1,\dots,t+r-1\}$. Supposons (par exemple) que $I\subset\{1,\dots,p\}$, alors les α d'indices dans $\{1,\dots,p\}$ et précédant ceux de I apparaissent avant le terme en Q_r. On pose donc $t=\sigma^{-1}(s_{j-1}+1)$ et:

$$\begin{cases}\beta_i=\alpha_i\ \text{ si }\ \sigma^{-1}(i)\notin I\\ \beta_t=Q_r(\alpha_I)\end{cases}$$

Il y a donc $p+q-r+1$ β, indicés par $\{1,\dots,t-1,t,t+r,\dots,p,p+1,\dots,p+q\}$. On a $b_i=a_i$ si $\sigma^{-1}(i)\notin I$ et $b_t=q+a_I$. Les battements σ considérés sont en bijection avec les

battements ρ qu'ils induisent sur les β. On a

$$(-1)^{qa_{\{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(j)\}}}\varepsilon\begin{pmatrix} a_{\{1,\dots,p+q\}} \\ a_{\{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(p+q)\}}\end{pmatrix} = \\ =(-1)^{qa_{\{1,\dots,t-1\}}}\varepsilon\begin{pmatrix} b_{\{1,\dots,t,t+r,\dots,p+q\}} \\ b_{\{\rho^{-1}(1),\dots,\rho^{-1}(t),\rho^{-1}(t+r),\dots,\rho^{-1}(p+q)\}}\end{pmatrix}.$$

Donc

$$Q\big(bat_{p,q}(\alpha_{\{1,\dots,p\}},\alpha_{\{p+1,\dots,p+q\}})\big) = \\ =\sum_{0<r}\sum_{t,\ t+r-1\leq p}(-1)^{qa_{\{1,\dots,t-1\}}}bat_{p-r+1,q}(\beta_{\{1,\dots,t,t+r,\dots,p\}},\beta_{\{p+1,\dots,p+q\}}) \\ +\sum_{p<t}(-1)^{qa_{\{p+1,\dots,t-1\}}}bat_{p,q-r+1}(\beta_{\{1,\dots,p\}},\beta_{\{p+1,\dots,t,t+r,\dots,p+q\}}).$$

Comme ci-dessus, Q est donc bien définie.

Q est une codérivation.

On a

$$\delta\circ Q(\alpha_{[1,n]}) = \delta\left(\sum_{r,j}(-1)^{qa_{[1,j]}}\alpha_{[1,j]}\underline{\otimes}Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]})\underline{\otimes}\alpha_{[j+r+1,n]}\right).$$

Donc

$$\delta\circ Q(\alpha_{[1,n]}) = \sum_{r,0<k<j}(-1)^{qa_{[1,j]}}\alpha_{[1,k]}\bigotimes\alpha_{[k+1,j]}\underline{\otimes}Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]})\underline{\otimes}\alpha_{[j+r+1,n]}- \\ -(-1)^{qa_{[1,j]}+a_{[1,k]}(a_{[k+1,n]}+q)}\alpha_{[k+1,j]}\underline{\otimes}Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]})\underline{\otimes}\alpha_{[j+r+1,n]}\bigotimes\alpha_{[1,k]}+ \\ +\sum_{r,0<j<k-r}(-1)^{qa_{[1,j]}}\alpha_{[1,j]}\underline{\otimes}Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]})\underline{\otimes}\alpha_{[j+r+1,k]}\bigotimes\alpha_{[k+1,n]}- \\ -(-1)^{qa_{[1,j]}+(a_{[1,k]}+q)a_{[k+1,n]}}\alpha_{[k+1,n]}\bigotimes\alpha_{[1,j]}\underline{\otimes}Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]})\underline{\otimes}\alpha_{[j+r+1,k]}.$$

Par ailleurs,

$$(id\otimes Q+Q\otimes id)\circ\delta(\alpha_{[1,n]}) = \\ =(id\otimes Q+Q\otimes id)\sum_{0<k<n}\alpha_{[1,k]}\bigotimes\alpha_{[k+1,n]}-(-1)^{a_{[1,k]}a_{[k+1,n]}}\alpha_{[k+1,n]}\bigotimes\alpha_{[1,k]}$$

Donc

$$\begin{aligned}(id\otimes Q + Q\otimes id)\circ\delta(\alpha_{[1,n]}) &= \\ &= \sum_{0<k<j<n-r+1} (-1)^{q(a_{[1,k]}+a_{[k+1,j]})}\alpha_{[1,k]}\bigotimes \alpha_{[k+1,j]}\underline{\otimes}Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]})\underline{\otimes}\alpha_{[j+r+1,n]} \\ &\quad - \sum_{0<j<k-r+1<n-r+1} (-1)^{q(a_{[k+1,n]}+a_{[1,j]})+a_{[1,k]}a_{[k+1,n]}}\alpha_{[k+1,n]}\bigotimes \\ &\qquad\qquad \bigotimes \alpha_{[1,j]}\underline{\otimes}Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]})\underline{\otimes}\alpha_{[j+r+1,k]} \\ &\quad + \sum_{0<j<k-r+1<n-r+1} (-1)^{qa_{[1,j]}}\alpha_{[1,j]}\underline{\otimes}Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]})\underline{\otimes}\alpha_{[j+r+1,k]}\bigotimes \alpha_{[k+1,n]} \\ &\quad - \sum_{0<k<j<n-r+1} (-1)^{qa_{[k+1,j]}+a_{[1,k]}a_{[k+1,n]}}\alpha_{[k+1,j]}\underline{\otimes}Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]})\underline{\otimes}\alpha_{[j+r+1,n]}\bigotimes \alpha_{[1,k]}.\end{aligned}$$

Q est donc une codérivation et la proposition est prouvée. □

4.4. C_∞ algèbre, morphismes de C_∞ algèbre.

Lorsque A est une algèbre commutative, $A[1]$ est muni d'un produit m_2 défini par $m_2(\alpha,\beta) = (-1)^a\alpha\beta$ qui devient de degré 1, anticommutatif et antiassociatif:

$$m_2(\beta,\alpha) = -(-1)^{ab}m_2(\alpha,\beta), \qquad m_2(m_2(\alpha,\beta),\gamma) = -(-1)^a m_2(\alpha,m_2(\beta,\gamma)).$$

Le produit m_2 étant anticommutatif est défini de $\underline{\bigotimes}^2(A[1])$ dans $A[1]$. Il se prolonge donc, grâce à la proposition précédente, en une unique codérivation m du cocrochet δ. Comme m est de degré 1, le prolongement à $\underline{\bigotimes}^n(A[1])$ est

$$m(\alpha_{[1,n]}) = \sum_{0<k<n} (-1)^{a_{[1,k-1]}}\alpha_{[1,k-1]}\underline{\otimes}m_2(\alpha_k,\alpha_{k+1})\underline{\otimes}\alpha_{[k+2,n]}.$$

Lemme 4.5. (Propriétés de m)

m est l'unique codérivation de δ qui prolonge m_2 sur $\underline{\bigotimes}^2(A[1])$. Elle vérifie $m\circ m = 0$.

Preuve

Remarquons que, m étant une codérivation de degré impair, $m\circ m$ est aussi une codérivation. Avec les notations précédentes, $(m\circ m)_k = 0$ si $k\neq 3$ et, puisque m_2 est antiassociative,

$$(m\circ m)_3(\alpha_1\underline{\otimes}\alpha_2\underline{\otimes}\alpha_3) = m_2(m_2(\alpha_1\underline{\otimes}\alpha_2)\underline{\otimes}\alpha_3 + (-1)^{a_1}\alpha_1\underline{\otimes}m_2(\alpha_2\underline{\otimes}\alpha_3)) = 0.$$

Par unicité de la codérivation qui prolonge les $(m\circ m)_k$, on en déduit que $m\circ m = 0$. □

Définition 4.6. (C_∞ algèbre)

Une C_∞ algèbre est une cogèbre différentielle de la forme $(\underline{\bigotimes}^+(A[1]),\delta,m)$ où δ est le cocrochet de Lie défini ci-dessus et m est une codérivation de δ de carré nul.

Si A est une algèbre commutative graduée, la cogèbre de Lie différentielle $C(A)=\Big(\underline{\bigotimes}^+(A[1]),\delta,m\Big)$ où $m_k=0$ pour tout $k\neq 2$ et $m_2(\alpha\underline{\otimes}\beta)=(-1)^a\alpha\wedge\beta$ s'appelle la C_∞ algèbre enveloppante de $(A,\wedge)$.

Un morphisme de C_∞ algèbres A et B est un morphisme de cogèbres de Lie $F:\underline{\bigotimes}^+(A[1])\longrightarrow\underline{\bigotimes}^+(B[1])$ tel que $m^B\circ F=F\circ m^A$.

Puisqu'une codérivation m est caractérisée par la suite des m_k, on voit qu'une C_∞ algèbre est la C_∞ algèbre enveloppante d'une algèbre commutative si et seulement si elle est telle que $m_k=0$ pour tout $k\neq 2$.

De même, un morphisme d'algèbres commutatives $f:A\longrightarrow B$ se relève d'une façon et une seule en un morphisme de leur C_∞ algèbres enveloppantes $F:\underline{\bigotimes}^+(A[1])\longrightarrow\underline{\bigotimes}^+(B[1])$ tel que $F_1=f$ et $F_k=0$ si $k>1$.

L'équation de C_∞ morphisme $m^B\circ F=F\circ m^A$ pour un morphisme F de cogèbres de Lie, écrite sur les applications $F_n:\underline{\bigotimes}^n(A[1])\longrightarrow B[1-n]$, s'appelle l'équation de C_∞ formalité.

D'une part, on a

$$\begin{aligned}m^B\circ F(\alpha_{[1,n]})&=\sum_{k,r_1+\cdots+r_k=n}m^B\big(F_{r_1}(\alpha_{[1,s_1]})\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}F_{r_k}(\alpha_{[s_{k-1}+1,s_k]})\big)\\&=\sum_{0<j<k}(-1)^{a_{[1,s_{j-1}]}}F_{r_1}(\alpha_{[1,s_1]})\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}F_{r_j-1}(\alpha_{[s_{j-2}+1,s_{j-1}]})\underline{\otimes}\\&\quad m^B\big(F_{r_j}(\alpha_{[s_{j-1}+1,s_j]})\underline{\otimes}F_{r_{j+1}}(\alpha_{[s_j+1,s_{j+1}]})\big)\underline{\otimes}F_{r_{j+2}}(\alpha_{[s_{j+1}+1,s_{j+2}]})\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}F_{r_k}(\alpha_{[s_{k-1}+1,s_k]}).\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}F\circ m^A(\alpha_{[1,n]})&=F\big(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{a_{[1,j-1]}}\alpha_{[1,j-1]}\underline{\otimes}m^A(\alpha_j\underline{\otimes}\alpha_{j+1})\underline{\otimes}\alpha_{[j+2,n]}\big)\\&=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{a_{[1,j-1]}}\sum_{k,r_1+\cdots+r_k=n-1}\\&\quad F_{r_1}(\alpha_{[1,s_1]}\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}F_{r_t}\big(\alpha_{[s_{t-1}+1,j-1]}\underline{\otimes}m^A(\alpha_j\underline{\otimes}\alpha_{j+1})\underline{\otimes}\alpha_{[j+1,s_t]}\big)\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}F_{r_k}(\alpha_{[s_{k-1}+1,s_k]}).\end{aligned}$$

En écrivant $(m^B\circ F-F\circ m^A)(\alpha_{[1,n]})$ à l'ordre $n-1$, on trouve les termes

$$
\begin{aligned}
&m^B\big(F_{n-1}(\alpha_{[1,n-1]})\underline{\otimes}F_1(\alpha_n)\big)+m^B\big(F_1(\alpha_1)\underline{\otimes}F_{n-1}(\alpha_{[2,n]})\big)\\
&-\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{a_{[1,j-1]}}F_{n-1}\big(\alpha_{[1,j-1]}\underline{\otimes}m^A(\alpha_j\underline{\otimes}\alpha_{j+1})\underline{\otimes}\alpha_{[j+2,n]}\big)\\
&=(-1)^{a_{[1,n-1]}+1}F_{n-1}(\alpha_{[1,n-1]})\wedge F_1(\alpha_n)+(-1)^{a_1+1}F_1(\alpha_1)\wedge F_{n-1}(\alpha_{[2,n]})\\
&-\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{a_{[1,j]+1}}F_{n-1}\big(\alpha_{[1,j-1]}\underline{\otimes}(\alpha_j\wedge\alpha_{j+1})\underline{\otimes}\alpha_{[j+2,n]}\big)\\
&=(d_{Ha}F_{n-1})(\alpha_{[1,n-1]})
\end{aligned}
$$

On retrouve l'opérateur de cobord de Harrison d_{Ha}.

Finalement, comme pour les algèbres de Lie, si A est une algèbre commutative et V un A module vu comme un bimodule, l'espace $B=A\oplus\sum_{p>0}V[p]$ muni du produit

$$(\alpha+\sum u_p)(\beta+\sum v_q)=(\alpha\beta+\sum\alpha v_p+u_p\beta)$$

est une algèbre commutative et l'application $f:A\longrightarrow B$, définie par $f(\alpha)=(\alpha,0)$ est un morphisme d'algèbres.

Comme pour les algèbres de Lie, un morphisme de cogèbres de Lie F tel que $F_1=f+C_1$, $F_k=C_k$ $(k>1)$ avec $C_k:\underline{\bigotimes}^k(A[1])\longrightarrow V[k]$ est un morphisme de C_∞ algèbres sera appelé une C_∞ formalité.

Cette formalité est dite triviale s'il existe un morphisme G tel que $C=m^B\circ G+G\circ m^A$, G étant de degré -1 et $G=\sum B_p$ avec $B_p:\underline{\bigotimes}^p(A[1])\longrightarrow V[p]$.

On retrouve ainsi la cohomologie de Harrison des algèbres commutatives, puisque

Proposition 4.7. (C_∞ formalités et cohomologie de Harrison)

Avec les notations précédentes, F est une C_∞ formalité si et seulement si

$$d_{Ha}C_k=0\quad \textit{pour tout } k>0.$$

F est triviale si et seulement si

$$C_1=0\quad \textit{et}\quad C_k=d_{Ha}B_k\quad \textit{pour tout } k>1.$$

5. Algèbre de Lie différentielle associée à une algèbre de Gerstenhaber

5.1. **Algèbres de Gerstenhaber.**

Le prototype des algèbres de Gerstenhaber est l'espace $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ des champs de tenseurs sur $\mathbb{R}^d$. Cet espace gradué est muni du produit extérieur $\wedge$ et du crochet $[\ ,\ ]_S$ de Schouten. Les axiomes usuels d'une algèbre de Gerstenhaber sont donc les suivants.

Une algèbre de Gerstenhaber est un espace vectoriel gradué $\mathcal{G}$ muni d'une multiplication commutative graduée et associative $\wedge : \mathcal{G}\otimes\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ de degré 0 et d'un crochet $[\ ,\ ] : \mathcal{G}\otimes\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ de degré -1 tel que $(\mathcal{G}[1], [\ ,\ ])$ soit une algèbre de Lie graduée et que, pour tout α homogène, l'application $[\alpha,\ .\ ]$ soit une dérivation graduée pour la multiplication $\wedge$. En notant $|\alpha|$ le degré d'un élément homogène α de $\mathcal{G}$, on a donc:

$$\begin{aligned}
\alpha\wedge\beta &= (-1)^{|\alpha||\beta|}\beta\wedge\alpha,\\
\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma) &= (\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma,\\
[\alpha,\beta] &= -(-1)^{(|\alpha|-1)(|\beta|-1)}[\beta,\alpha],\\
0 = (-1)^{(|\alpha|-1)(|\gamma|-1)}\big[[\alpha,\beta],\gamma\big] &+ (-1)^{(|\beta|-1)(|\alpha|-1)}\big[[\beta,\gamma],\alpha\big] + (-1)^{(|\gamma|-1)(|\beta|-1)}\big[[\gamma,\alpha],\beta\big],\\
[\alpha,\beta\wedge\gamma] &= [\alpha,\beta]\wedge\gamma + (-1)^{|\beta|(|\alpha|-1)}\beta\wedge[\alpha,\gamma]
\end{aligned}$$

et donc aussi:

$$[\alpha\wedge\beta,\gamma] = \alpha\wedge[\beta,\gamma] + (-1)^{|\beta|(|\gamma|-1)}[\alpha,\gamma]\wedge\beta.$$

Remarquons qu'il n'y a pas d'équivalent non gradué à la structure d'algèbre de Gerstenhaber. En particulier, une algèbre de Poisson graduée n'est pas une algèbre de Gerstenhaber.

La dernière identité ne vérifie malheureusement pas la règle des signes de Koszul qui s'écrirait ici:

$$\begin{aligned}
[\alpha\wedge\beta,\gamma] &= [\ ,\ ]\big(\wedge(\alpha,\beta),\gamma\big)\\
&= \varepsilon\begin{pmatrix}1 & 0 & |\alpha| & |\beta| & |\gamma|\\ 0 & |\alpha| & 1 & |\beta| & |\gamma|\end{pmatrix}\alpha\wedge[\beta,\gamma] + \varepsilon\begin{pmatrix}1 & 0 & |\alpha| & |\beta| & |\gamma|\\ 0 & 1 & |\alpha| & |\gamma| & |\beta|\end{pmatrix}[\alpha,\gamma]\wedge\beta\\
&= (-1)^{|\alpha|}\alpha\wedge[\beta,\gamma] + (-1)^{|\beta||\gamma|}[\alpha,\gamma]\wedge\beta.
\end{aligned}$$

Pour éviter ce problème, on écrit les axiomes des algèbres de Gerstenhaber dans $\mathcal{G}[1]$, après un décalage de degré.

On note comme ci-dessus $a, b, \ldots$ les degrés de $\alpha, \beta, \ldots$. Le produit $\wedge$ donne un produit μ_2 :

$$\mu_2(\alpha,\beta) = (-1)^a\alpha\wedge\beta.$$

On a vu que μ_2 est anticommutatif et antiassociatif et de degré 1. Le crochet $[\ ,\ ]$ est un crochet d'algèbre de Lie graduée sur $\mathcal{G}[1]$ (de degré 0.) De plus, l'application $[\alpha,\ .\ ]$ est une dérivation graduée pour la multiplication μ_2 qui vérifie bien la règle des signes de Koszul:

$$[\alpha,\mu_2(\beta,\gamma)] = (-1)^a\mu_2([\alpha,\beta],\gamma) + (-1)^{a(b+1)}\mu_2(\beta,[\alpha,\gamma])$$

et

$$[\mu_2(\alpha,\beta),\gamma] = \mu_2(\alpha,[\beta,\gamma]) + (-1)^{bc}\mu_2([\alpha,\gamma],\beta).$$

5.2. **La C_∞ algèbre vue comme une algèbre de Lie.**

Comme dans la section précédente, on peut construire la C_∞ algèbre naturellement associée à l'algèbre commutative $(\mathcal{G},\wedge)$. On notera cette cogèbre différentielle:

$$(\mathcal{H},\delta,\mu)=\left(\underline{\bigotimes}^{+}(\mathcal{G}[1]),\delta,\mu\right).$$

Avec, comme plus haut,

$$\delta(\alpha_{[1,n]})=\sum_{0<j<n}\Big(\alpha_{[1,j]}\bigotimes\alpha_{[j+1,n]}-\tau\big(\alpha_{[1,j]}\bigotimes\alpha_{[j+1,n]}\big)\Big),$$
$$\mu(\alpha_{[1,n]})=\sum_{0<j<n}(-1)^{a_{[1,j-1]}}\alpha_{[1,j-1]}\underline{\otimes}\mu_2(\alpha_j,\alpha_{j+1})\underline{\otimes}\alpha_{[j+2,n]}.$$

Maintenant, il faut prolonger la définition du crochet de $\mathcal{G}[1]$ à $\mathcal{H}$. On pose donc:
On prolonge d'abord l'opérateur [,] sur l'espace $\mathcal{G}^{\otimes^p}\wedge\mathcal{G}^{\otimes^q}$ en définissant le crochet de

$$\alpha=\alpha_{\{1,\dots,p\}}=\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_p\quad\text{ et }\quad\beta=\alpha_{\{p+1,\dots,p+q\}}=\alpha_{p+1}\otimes\cdots\otimes\alpha_{p+q}$$

par:

$$\begin{aligned}[\alpha,\beta]&=\sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ \sigma^{-1}(k)\le p<\sigma^{-1}(k+1)}}\varepsilon\begin{pmatrix}a_1&\dots&a_{p+q}\\ a_{\sigma^{-1}(1)}&\dots&a_{\sigma^{-1}(p+q)}\end{pmatrix}\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes[\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}]\otimes\cdots\otimes\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}\\ &=\sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ \sigma^{-1}(k)\le p<\sigma^{-1}(k+1)}}[\sigma.(\alpha\otimes\beta)]_k.\end{aligned}$$

Maintenant, on peut passer au quotient par les battements puisque:

Lemme 5.1.
Soient $\alpha\in\mathcal{G}[1]^{\otimes p}$, $\beta\in\mathcal{G}[1]^{\otimes q}$ et $\gamma\in\mathcal{G}[1]^{\otimes r}$. On a alors:

$$[bat_{p,q}(\alpha,\beta),\gamma]=bat_{p,q+r-1}(\alpha,[\beta,\gamma])+(-1)^{ab}bat_{q,p+r-1}(\beta,[\alpha,\gamma]).$$

Preuve
Notons $\alpha=\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_p$, $\beta=\alpha_{p+1}\otimes\cdots\otimes\alpha_{p+q}$ et $\gamma=\alpha_{p+q+1}\otimes\cdots\otimes\alpha_{p+q+r}$. On a

$$
\begin{aligned}
[bat_{p,q}(\alpha,\beta),\gamma] &= \sum_{\substack{\sigma_2\in Bat(p+q,r)\\ \sigma_2^{-1}(k)\leq p+q<\sigma_2^{-1}(k+1)}} [\sigma_2.(bat_{p,q}(\alpha,\beta)\otimes\gamma)]_k\\
&= \sum_{\substack{\sigma_2\in Bat(p+q,r),\ \sigma_1\in Bat(p,q)\\ \sigma_2^{-1}(k)\leq p+q<\sigma_2^{-1}(k+1)}} [\sigma_2\circ(\sigma_1\otimes id_{\{p+q+1,\dots,p+q+r\}}).(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)]_k\\
&= \sum_{\substack{\rho\in Bat(p,q,r)\\ \rho^{-1}(k)\leq p+q<\rho^{-1}(k+1)}} [\rho.(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)]_k\\
&= \sum_{\substack{\rho\in Bat(p,q,r)\\ p<\rho^{-1}(k)\leq p+q<\rho^{-1}(k+1)}} [\rho.(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)]_k + \sum_{\substack{\rho\in Bat(p,q,r)\\ \rho^{-1}(k)\leq p<p+q<\rho^{-1}(k+1)}} [\rho.(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)]_k\\
&= (I)+(II).
\end{aligned}
$$

D'autre part, on a aussi

$$
[\beta,\gamma] = \sum_{\substack{\sigma_1\in Bat(q,r)\\ p<\sigma_1^{-1}(k)\leq p+q<\sigma_1^{-1}(k+1)}} [\sigma_1.(\beta\otimes\gamma)]_k.
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\alpha\otimes[\beta,\gamma] &= \sum_{\substack{(id\otimes\sigma_1)\in Bat(p,q,r)\\ p<\sigma_1^{-1}(k)\leq p+q<\sigma_1^{-1}(k+1)}} [(id\otimes\sigma_1).(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)]_k\\
&= \sum_{\substack{(id\otimes\sigma_1)\in Bat(p,q,r)\\ p<\sigma_1^{-1}(k)\leq p+q<\sigma_1^{-1}(k+1)}} \varepsilon\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{p+q+r}\\ a_{(id\otimes\sigma_1)^{-1}(1)} & \dots & a_{(id\otimes\sigma_1)^{-1}(p+q+r)}\end{pmatrix}\beta_1^{\sigma_1}\otimes\cdots\otimes\beta_{p+q+r-1}^{\sigma_1},
\end{aligned}
$$

où on a posé

$$
\beta_j^{\sigma_1} = \begin{cases} \alpha_{(id\otimes\sigma_1)^{-1}(j)}, & \text{si } 1\leq j<k,\\ [\alpha_{(id\otimes\sigma_1)^{-1}(k)},\alpha_{(id\otimes\sigma_1)^{-1}(k+1)}], & \text{si } j=k,\\ \alpha_{(id\otimes\sigma_1)^{-1}(j+1)}, & \text{si } k<j\leq p+q+r-1.\end{cases}
$$

Par suite, on a

$$
\begin{aligned}
bat_{p,q+r-1}(\alpha,[\beta,\gamma]) = \sum_{\sigma_2\in Bat(p,q+r-1)}\ \sum_{\substack{\sigma_1\in Ba(q,r)\\ p<\sigma_1^{-1}(k)\leq p+q<\sigma_1^{-1}(k+1)}} &\varepsilon\begin{pmatrix}\beta_1 & \dots & \beta_{p+q+r-1}\\ \beta_{\sigma_2^{-1}(1)} & \dots & \beta_{\sigma_2^{-1}(p+q+r-1)}\end{pmatrix}\\
&\varepsilon\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{p+q+r}\\ a_{(id\otimes\sigma_1)^{-1}(1)} & \dots & a_{(id\otimes\sigma_1)^{-1}(p+q+r)}\end{pmatrix}\beta_{\sigma_2^{-1}(1)}^{\sigma_1}\otimes\cdots\otimes\beta_{\sigma_2^{-1}(p+q+r-1)}^{\sigma_1}.
\end{aligned}
$$

En posant $k' = \sigma_2^{-1}(k)$, on voit que l'application $(\sigma_1, \sigma_2, k) \mapsto (\rho, k')$ est une bijection entre les ensembles

$$\left\{(\sigma_1, \sigma_2, k) \in Bat(q,r) \times Bat(p, q+r-1) \times [1, p+q+r-1],\ p < \sigma_1^{-1}(k) \leq p+q < \sigma_1^{-1}(k+1)\right\}$$

et

$$\left\{(\rho, k') \in Bat(p,q,r) \times [1, p+q+r-1],\ p < \rho^{-1}(k') \leq p+q < \rho^{-1}(k'+1)\right\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} bat_{p,q+r-1}(\alpha, [\beta, \gamma]) &= \sum_{\substack{\rho \in Bat(p,q,r) \\ p < \rho^{-1}(k') \leq p+q < \rho^{-1}(k'+1)}} [\varepsilon \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{p+q+r} \\ a_{\rho^{-1}(1)} & \dots & a_{\rho^{-1}(p+q+r)} \end{pmatrix} \alpha_{\rho^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\rho^{-1}(p+q+r)}]_{k'} \\ &= \sum_{\substack{\rho \in Bat(p,q,r) \\ p < \rho^{-1}(k') \leq p+q < \rho^{-1}(k'+1)}} [\rho.(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)]_{k'} \\ &= (I). \end{aligned}$$

On montre de même que

$$(-1)^{ab} bat_{q,p+r-1}(\beta, [\alpha, \gamma]) = \sum_{\substack{\rho \in Bat(p,q,r) \\ \rho^{-1}(k') \leq p < p+q < \rho^{-1}(k'+1)}} [\rho.(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)]_k = (II).$$

D'où le lemme. □

Le lemme nous permet de définir $[\ ,\ ]$ par la même expression sur l'espace $\underline{\bigotimes}^p(\mathcal{G}[1]) \wedge \underline{\bigotimes}^q(\mathcal{G}[1])$. On obtient un crochet sur $\mathcal{H}$ qui vérifie les identités de Jacobi et de Leibniz.

Théorème 5.2. ($\mathcal{H}$ est une algèbre de Lie différentielle graduée)

L'espace $\mathcal{H}$, muni du crochet $[\ ,\ ]$ et de l'opérateur μ est une algèbre de Lie différentielle graduée: Pour tout α, β et γ de $\mathcal{H}$, on a:

(i) $[\alpha, \beta] = -(-1)^{ab}[\beta, \alpha]$,
(ii) $(-1)^{ac}[[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{ba}[[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{cb}[[\gamma, \alpha], \beta] = 0$,
(iii) $\mu([\alpha, \beta]) = [\mu(\alpha), \beta] + (-1)^a [\alpha, \mu(\beta)]$.

Preuve
(i) On sait que

$$\begin{aligned} [\alpha_{[1,p]}, \alpha_{[p+1,p+q]}] = \sum_{\substack{\sigma \in Bat(p,q) \\ \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} & \varepsilon \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{p+q} \\ a_{\sigma^{-1}(1)} & \dots & a_{\sigma^{-1}(p+q)} \end{pmatrix} \\ & \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \cdots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \cdots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}. \end{aligned}$$

Fixons un couple (σ,k) dans cette somme (tel que $\sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)$.) On définit trois permutations τ, ρ et ν de S_{p+q} par:

$$\tau(j)=\begin{cases} j+p, & \text{si } 1\leq j\leq q\\ j-q, & \text{si } q<j\leq q+p.\end{cases},\qquad \rho=\sigma\circ\tau \quad\text{et}\quad \nu^{-1}(i)=\begin{cases}\rho^{-1}(i), & \text{si } i\notin\{k,k+1\}\\ \rho^{-1}(k+1), & \text{si } i=k,\\ \rho^{-1}(k), & \text{si } i=k+1.\end{cases}$$

On vérifie immédiatement que ν appartient à $Bat(q,p)$ et que $\nu^{-1}(k)\leq q<\nu^{-1}(k+1)$. De plus l'application $(\sigma,k)\mapsto(\nu,k)$ est une bijection sur les ensembles correspondants.

Posons maintenant $\beta_j=\alpha_{\tau(j)}$. On a:

$$\varepsilon\begin{pmatrix}b_1&\dots&b_{p+q}\\ b_{\nu^{-1}(1)}&\dots&b_{\nu^{-1}(p+q)}\end{pmatrix}=\varepsilon\begin{pmatrix}a_1&\dots&a_{p+q}\\ a_{\sigma^{-1}(1)}&\dots&a_{\sigma^{-1}(p+q)}\end{pmatrix}(-1)^{a_{\sigma^{-1}(k)}a_{\sigma^{-1}(k+1)}}(-1)^{a_{[1,p]}a_{[p+1,p+q]}}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}[\alpha_{[1,p]},\alpha_{[p+1,p+q]}]=&(-1)^{a_{[1,p]}a_{[p+1,p+q]}}\sum_{\substack{\nu\in Bat(q,p)\\ \nu^{-1}(k)\leq q<\nu^{-1}(k+1)}}\varepsilon\begin{pmatrix}b_1&\dots&b_{p+q}\\ b_{\nu^{-1}(1)}&\dots&b_{\nu^{-1}(p+q)}\end{pmatrix}\\ &(-1)^{b_{\nu^{-1}(k)}b_{\nu^{-1}(k+1)}}\beta_{\nu^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\beta_{\nu^{-1}(k+1)},\beta_{\nu^{-1}(k)}]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\beta_{\nu^{-1}(p+q)}\\ =&(-1)^{a_{[1,p]}a_{[p+1,p+q]}}[\alpha_{[p+1,p+q]},\alpha_{[1,p]}].\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(ii) Soient $\alpha=\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_p$, $\beta=\beta_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\beta_q$ et $\gamma=\gamma_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\gamma_r$. Pour alléger les notations, pour toute permutation $\rho\in S_{p+q+r}$, notons $\varepsilon(\rho)$ le signe:

$$\varepsilon(\rho)=\varepsilon\begin{pmatrix}x_1&\dots&x_{p+q+r}\\ x_{\rho^{-1}(1)}&\dots&x_{\rho^{-1}(p+q+r)}\end{pmatrix},$$

si

$$\xi_i=\begin{cases}\alpha_i & \text{si } 1\leq i\leq p\\ \beta_{i-p} & \text{si } p+1\leq i\leq p+q\\ \gamma_{i-p-q} & \text{si } p+q+1\leq i\leq p+q+r\end{cases}$$

Gràce à l'associativité du produit battement, on a

$$\begin{aligned}(-1)^{ac}bat_{p,q,r}(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)&=(-1)^{ba}bat_{q,r,p}(\beta\otimes\gamma\otimes\alpha)\\ &=(-1)^{cb}bat_{r,p,q}(\gamma\otimes\alpha\otimes\beta).\end{aligned}$$

Plus précisément, il y a deux bijections canoniques:

$$\begin{array}{ccccc}Bat(p,q,r)&\longrightarrow&Bat(q,r,p)&\quad\text{et}\quad&Bat(p,q,r)&\longrightarrow&Bat(r,p,q)\\ \rho_1&\mapsto&\rho_2=\rho_1\circ\tau&&\rho_1&\longmapsto&\rho_3=\rho_1\circ\tau'.\end{array}$$

Avec

$$\tau(i)=\begin{cases}i+p, & \text{si } 1\leq i\leq q+r\\ i-(q+r), & \text{si } q+r<i\leq q+r+p.\end{cases}\quad\text{et}\quad\tau'(i)=\begin{cases}i+p+q, & \text{si } 1\leq i\leq r\\ i-r, & \text{si } r<i\leq q+r+p.\end{cases}$$

On a alors

$$(-1)^{ac}\rho_1.(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)=(-1)^{ba}\rho_2.(\beta\otimes\gamma\otimes\alpha)=(-1)^{cb}\rho_3.(\gamma\otimes\alpha\otimes\beta).$$

En écrivant $(-1)^{ac}[[\alpha,\beta],\gamma]$, on trouve des termes de la forme:

$$\begin{aligned}
(1.1):\ & (-1)^{ac}\varepsilon(\rho_{11})\xi_{i_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\alpha_i,\beta_j]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\beta_k,\gamma_l]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{i_{p+q+r}}\\
(1.2):\ & (-1)^{ac}\varepsilon(\rho_{12})\xi_{j_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\beta_j,\gamma_l]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\alpha_i,\beta_k]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{j_{p+q+r}}\\
(1.3):\ & (-1)^{ac}\varepsilon(\rho_{13})\xi_{k_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\alpha_i,\beta_j]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\alpha_k,\gamma_l]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{k_{p+q+r}}\\
(1.4):\ & (-1)^{ac}\varepsilon(\rho_{14})\xi_{l_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\alpha_i,\gamma_l]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\alpha_k,\beta_j]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{l_{p+q+r}}\\
(1.5):\ & (-1)^{ac}\varepsilon(\rho_{15})\xi_{s_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[[\alpha_i,\beta_j],\gamma_k]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{s_{p+q+r}}.
\end{aligned}$$

En écrivant $(-1)^{ba}[[\beta,\gamma],\alpha]$, on trouve des termes de la forme:

$$\begin{aligned}
(2.1):\ & (-1)^{ba}\varepsilon(\rho_{21})\xi_{i_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\beta_j,\alpha_i]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\beta_k,\gamma_l]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{i_{p+q+r}}\\
(2.2):\ & (-1)^{ba}\varepsilon(\rho_{22})\xi_{j_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\beta_j,\gamma_l]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\beta_k,\alpha_i]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{j_{p+q+r}}\\
(2.3):\ & (-1)^{ba}\varepsilon(\rho_{23})\xi_{t_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\beta_j,\gamma_k]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\gamma_l,\alpha_i]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{t_{p+q+r}}\\
(2.4):\ & (-1)^{ba}\varepsilon(\rho_{24})\xi_{r_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\gamma_k,\alpha_i]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\beta_j,\gamma_l]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{r_{p+q+r}}\\
(2.5):\ & (-1)^{ba}\varepsilon(\rho_{25})\xi_{s_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[[\beta_j,\gamma_k],\alpha_i]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{s_{p+q+r}}.
\end{aligned}$$

En écrivant $(-1)^{cb}[[\gamma,\alpha],\beta]$, on trouve des termes de la forme:

$$\begin{aligned}
(3.1):\ & (-1)^{cb}\varepsilon(\rho_{31})\xi_{k_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\alpha_i,\beta_j]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\gamma_l,\alpha_k]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{k_{p+q+r}}\\
(3.2):\ & (-1)^{cb}\varepsilon(\rho_{32})\xi_{l_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\gamma_l,\alpha_i]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\alpha_k,\beta_j]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{l_{p+q+r}}\\
(3.3):\ & (-1)^{cb}\varepsilon(\rho_{33})\xi_{r_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\gamma_k,\alpha_i]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\gamma_l,\beta_j]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{r_{p+q+r}}\\
(3.4):\ & (-1)^{cb}\varepsilon(\rho_{34})\xi_{t_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\gamma_k,\beta_j]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\gamma_l,\alpha_i]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{t_{p+q+r}}\\
(3.5):\ & (-1)^{cb}\varepsilon(\rho_{35})\xi_{s_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[[\gamma_k,\alpha_i],\beta_j]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{s_{p+q+r}}.
\end{aligned}$$

Considèrons les termes (1.1) et $(2,1)$, on voit que ρ_{21} est définie par $\rho_{21}^{-1}=(a_i,b_j)\circ(\rho_{11}\circ\tau)^{-1}$. On en déduit que la somme de ces deux termes s'annule.

De même, on vérifie que: $(1.2)+(2.2)=0$, $(1.3)+(3.1)=0$, $(1.4)+(3.2)=0$, $(2.3)+(3.4)=0$ et $(2.4)+(3.3)=0$.

D'autre part, par construction

$$\varepsilon(\rho_{25})=(-1)^{a_i(b_j+c_k)}(-1)^{a(b+c)}\varepsilon(\rho_{15})\quad\text{et}\quad\varepsilon(\rho_{35})=(-1)^{c_k(a_i+b_j)}(-1)^{c(a+b)}\varepsilon(\rho_{15}).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&(1.5)+(2.5)+(3.5)=\\
&=\varepsilon(\rho_{15})(-1)^{ac}\xi_{s_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\\
&\qquad\underline{\otimes}\Big([[\alpha_i,\beta_j],\gamma_k]+(-1)^{a_i(b_j+c_k)}[[\beta_j,\gamma_k],\alpha_i]+(-1)^{c_k(a_i+b_j)}[[\gamma_k,\alpha_i],\beta_j]\Big)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{s_{p+q+r}}\\
&=0.
\end{aligned}$$

(iii) On conserve la notation

$$\varepsilon(\sigma)=\varepsilon\begin{pmatrix}a_1&\dots&a_{p+q}\\ a_{\sigma^{-1}(1)}&\dots&a_{\sigma^{-1}(p+q)}\end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mu([\alpha_{[1,p]},\alpha_{[p+1,p+q]}]) = & \sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ i<k-1;\ \sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{r<i}a_{\sigma^{-1}(r)}}\\
&\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}\mu\big(\alpha_{\sigma^{-1}(i)},\alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}\big)\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}[\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}]\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}\\
&+\sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ i>k+1;\ \sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{r<i}a_{\sigma^{-1}(r)}}\\
&\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}[\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}\mu\big(\alpha_{\sigma^{-1}(i)},\alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}\big)\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}\\
&+\sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ k;\ \sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{r<k-1}a_{\sigma^{-1}(r)}}\\
&\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}\mu\big(\alpha_{\sigma^{-1}(k-1)},[\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}]\big)\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}\\
&+\sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ k;\ \sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{r<k}a_{\sigma^{-1}(r)}}\\
&\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}\mu\big([\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}],\alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}\big)\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}\\
=&\ (I)+(II)+(III)+(IV).
\end{aligned}$$

Dans la somme (I) (resp. (II)), on distingue quatre cas:

1) si $\{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(i+1)\}\subset\{1,\dots,p\}$: on note (I_1) (resp. (II_1)) la restriction de (I) (resp. (II)) à ce cas.
2) si $\{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(i+1)\}\subset\{p+1,\dots,p+q\}$: on note (I_2) (resp. (II_2)) la restriction de (I) (resp. (II)) à ce cas.
3) si $\sigma^{-1}(i)\leq p<\sigma^{-1}(i+1)$: on note (I_3) (resp. (II_3)) la restriction de (I) (resp. (II)) à ce cas.
4) si $\sigma^{-1}(i+1)\leq p<\sigma^{-1}(i)$: on note (I_4) (resp. (II_4)) la restriction de (I) (resp. (II)) à ce cas.

On vérifie directement que $(I_3)+(I_4)=0$ et $(II_3)+(II_4)=0$.
Dans la somme (III), on distingue deux cas:

1) si $\sigma^{-1}(k-1)\in\{1,\dots,p\}$: on note (III_1) la restriction de (III) à ce cas.
2) si $\sigma^{-1}(k-1)\in\{p+1,\dots,p+q\}$: on note (III_2) la restriction de (III) à ce cas.

Dans la somme (IV), on distingue deux cas:

1) si $\sigma^{-1}(k+2)\in\{1,\dots,p\}$: on note (IV_1) la restriction de (IV) à ce cas.
2) si $\sigma^{-1}(k+2)\in\{p+1,\dots,p+q\}$: on note (IV_2) la restriction de (IV) à ce cas.

Donc $\mu([X,Y])$ s'écrit:

$$\mu([\alpha_{[1,p]},\alpha_{[p+1,p+q]}])=(I_1)+(I_2)+(II_1)+(II_2)+(III_1)+(III_2)+(IV_1)+(IV_2).$$

D'autre part, on sait que

$$\mu(bat_{p,q}(\alpha_{[1,p]},\beta_{[p+1,p+q]}))=bat_{p-1,q}(\mu(\alpha_{[1,p]}),\alpha_{[p+1,p+q]})+(-1)^{a_{[1,p]}}bat_{p,q-1}(\alpha_{[1,p]},\mu(\alpha_{[p+1,p+q]})).$$

Donc

$$
\begin{aligned}
[\mu(\alpha_{[1,p]}),\alpha_{[p+1,p+q]}] = & \sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ i<k-1;\sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)\\ \{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(i+1)\}\subset\{1,\dots,p\}}} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{r<i}a_{\sigma^{-1}(r)}}\\
&\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\mu\big(\alpha_{\sigma^{-1}(i)},\alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}\big)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}\\
&+\sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ i>k+1;\sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)\\ \{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(i+1)\}\subset\{1,\dots,p\}}} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{r<i}a_{\sigma^{-1}(r)}}\\
&\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\otimes[\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\mu\big(\alpha_{\sigma^{-1}(i)},\alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}\big)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}\\
&+\sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ k;\sigma^{-1}(k)<\sigma^{-1}(k+1)\leq p<\sigma^{-1}(k+2)}} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{r<k}a_{\sigma^{-1}(r)}}\\
&\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\mu\big(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}\big),\alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}\\
=&\ (I')+(II')+(III').
\end{aligned}
$$

On vérifie que $(I')=(I_1)$, $(II')=(II_1)$. De plus, en appliquant l'identité de Leibniz pour $[\mu\big(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}\big),\alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}]$, on obtient,

$$
\begin{aligned}
(III') = & \sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ k;\sigma^{-1}(k)<\sigma^{-1}(k+1)\leq p<\sigma^{-1}(k+2)}} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{r<k}a_{\sigma^{-1}(r)}}\\
&\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\mu\big(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},[\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}]\big)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}\\
&+\sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ k;\sigma^{-1}(k)<\sigma^{-1}(k+1)\leq p<\sigma^{-1}(k+2)}} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{r<k}a_{\sigma^{-1}(r)}}(-1)^{a_{\sigma^{-1}(k+1)}a_{\sigma^{-1}(k+2)}}\\
&\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\mu\big([\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}],\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}\big)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}\\
=&\ (III_1)+(IV_1).
\end{aligned}
$$

De même, on vérifie que

$$
\begin{aligned}
(-1)^{a_{[1,p]}}[\alpha_{[1,p]},\mu(\alpha_{[p+1,p+q]})] = & \sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ i<k-1;\sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)\\ \{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(i+1)\}\subset\{p+1,\dots,p+q\}}} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{r<i}a_{\sigma^{-1}(r)}}\\
& \alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\mu\big(\alpha_{\sigma^{-1}(i)},\alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}\big)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}\\
& + \sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ i>k+1;\sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)\\ \{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(i+1)\}\subset\{p+1,\dots,p+q\}}} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{r<i}a_{\sigma^{-1}(r)}}\\
& \alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}]\underline{\otimes}\dots\otimes\mu\big(\alpha_{\sigma^{-1}(i)},\alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}\big)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}\\
& + \sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ k;\sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)<\sigma^{-1}(k+2)}} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{r<k+1}a_{\sigma^{-1}(r)}}\\
& \alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\mu\big(\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}\big)]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}\\
= & (I'')+(II'')+(III'').
\end{aligned}
$$

On vérifie comme plus haut que $(I'')=(I_2)$, $(II'')=(II_2)$ et $(III'')=(III_2)+(IV_2)$, ce qui achève la preuve. □

6. G_∞ ALGÈBRE

6.1. L_∞ algèbre associée à $\mathcal{H}$.

Par convention, dans toute la suite on notera le degré d'un élément $\alpha_{[1,n]}=\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_n\in\underline{\bigotimes}^n(\mathcal{G}[1])$ par $a_{[1,n]}=\sum_{i=1}^n a_i$ et on utilisera des lettres capitales pour les paquets, c'est à dire, pour un paquet $X=\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_n\in\big(\underline{\bigotimes}^n(\mathcal{G}[1])\big)[1]\subset\mathcal{H}[1]$ le degré sera noté $x=\sum_{i=1}^n a_i-1=a_{[1,n]}-1$.

Le degré d'un élément $X_1\centerdot\dots\centerdot X_n\in S^n\big(\mathcal{H}[1]\big)$ est alors $x_1+\dots+x_n$.

$(\mathcal{H},\mu,[\ ,\ ])$ étant une algèbre de Lie différentielle graduée. En suivant l'étude qu'on a fait dans la section 2, on pourra construire une L_∞ algèbre associée à $\mathcal{H}$ notée $\Big(S^+(\mathcal{H}[1]),\Delta,\ell+m\Big)$, avec

$$(\ell+m)_2=\ell_2=[\ ,\ ]\text{ et }(\ell+m)_1=m_1=\mu.$$

La comultiplication Δ est définie sur $S^+(\mathcal{H}[1])$ par

$$\Delta(X_1\centerdot\dots\centerdot X_n)=\sum_{\substack{I\sqcup J=\{1,\dots n\}\\ \#I>0,\#J>0}}\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}x_{\{1,\dots,n\}}\\ x_I,x_J\end{smallmatrix}\right)X_I\otimes X_J.$$

Le crochet $[\ ,\ ]$ sur $\mathcal{H}$ était antisyétrique de degré 0. Comme l'on veut une codérivation de degré 1 pour Δ, on pose $\ell_2(X,Y)=(-1)^x[X,Y]$. ℓ_2 devient une application symétrique

sur $S^2(\mathcal{H}[1])$ de degré 1. Elle vérifie:

(**i**) $\ell_2(X,Y) = (-1)^{xy}\ell_2(Y,X)$,
(**ii**) $(-1)^{xz}\ell_2(\ell_2(X,Y),Z) + (-1)^{yx}\ell_2(\ell_2(Y,Z),X) + (-1)^{zy}\ell_2(\ell_2(Z,X),Y) = 0$,
(**iii**) $m_1(\ell_2(X,Y)) = -\ell_2(m_1(X),Y) + (-1)^{1+x}\ell_2(X,m_1(Y))$.

On prolonge le crochet ℓ_2 à $S^+\big(\mathcal{H}[1]\big)$ de façon unique en une codérivation de degré 1 de la cogèbre $(S^+(\mathcal{H}[1]),\Delta)$. Ce prolongement est donné par:

$$\ell(X_1.\ldots.X_n) = \sum_{i<j} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ x_i x_j & x_1\ldots\hat{i}\hat{j}\ldots & x_n \end{smallmatrix}\right) \ell_2(X_i,X_j).X_1.\ldots.\hat{\imath}.\ldots.\hat{\jmath}.\ldots.X_n.$$

ℓ est de carré nul $\ell\circ\ell = 0$.

On prolonge, de même, m_1 à $S^n\big(\mathcal{H}[1]\big)$ en une dérivation m de degré 1 par:

$$m(X_1.\ldots.X_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\sum_{1\le r<j} x_r} X_1.\ldots.m_1(X_j).\ldots.X_n.$$

m est commutative et vérifie $m\circ m = 0$.

De plus, grâce à la propriété (iii), on a $(\ell+m)\circ(\ell+m) = 0$.
On peut voir alors $\Big(S^+\big(\mathcal{H}[1]\big),\Delta,\ell+m\Big)$ comme une L_∞ algèbre.

6.2. **Le cocrochet κ.**

$(\mathcal{H},\delta,m_1)$ étant une C_∞ algèbre. Le cocrochet δ sur $\underline{\bigotimes}^p(\mathcal{G}[1])$ devient un cocrochet κ sur $\underline{\bigotimes}^p(\mathcal{G}[1])[1]$ défini par:
Pour $X = \alpha_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_p$,

$$\begin{aligned}\kappa(X) &= \sum_{j=1}^{p-1} \Big((-1)^{a_{[1,j]}}\alpha_{[1,j]} \bigotimes \alpha_{[j+1,p]} - \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} a_{[1,n]} \\ a_{[j+1,n]} \; a_{[1,j]} \end{smallmatrix}\right) (-1)^{a_{[j+1,p]}}\alpha_{[j+1,p]} \bigotimes \alpha_{\{1,\ldots,j\}}\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{u_j+1}\Big(U_j \bigotimes V_j + \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} u_j & v_j \\ v_j & u_j \end{smallmatrix}\right) \alpha_{[j+1,p]} \bigotimes \alpha_{[1,j]}\Big).\end{aligned}$$

où $U_j = \alpha_{[1,j]}$, $V_j = \alpha_{[j+1,p]}$, $u_j = a_{[1,j]} - 1$ et $v_j = a_{[j+1,p]-1}$.

Autrement,

$$\kappa(X) = \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{u_j+1}\Big(U_j \bigotimes V_j + \tau\big(U_j \bigotimes V_j\big)\Big).$$

Le cocrochet κ sur $\underline{\bigotimes}^p(\mathcal{G}[1])[1]$ est alors cosymétrique ($\kappa = \tau\circ\kappa$) et de degré 1.

On prolonge κ à $S^+\big(\mathcal{H}[1]\big)$ par:

$$\kappa(X_1.\ldots.X_n) = \sum_{\substack{1\leq s\leq n\\ I\cup J=\{1,\ldots,n\}\setminus\{s\}}} (-1)^{\sum_{i<s}x_i} \sum_{\substack{U_s\otimes V_s=X_s\\ U_s,V_s\neq\emptyset}} (-1)^{u_s+1}\times$$
$$\times\Big(\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & u_s & v_s & x_J\end{smallmatrix}\right) X_I.U_s\bigotimes V_s.X_J + \varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & v_s & u_s & x_J\end{smallmatrix}\right) X_I.V_s\bigotimes U_s.X_J\Big),$$

avec

$$\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & u_s & v_s & x_J\end{smallmatrix}\right) = \varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & x_s & x_J\end{smallmatrix}\right)(-1)^{\sum_{i\in J}^{i<s}x_i}(-1)^{\sum_{i\in I}^{i>s}x_i}.$$

En posant $\tau_{12}=\tau\otimes id$ et $\tau_{23}=id\otimes\tau$, κ vérifie les identités de coJacobi et de coLeibniz:

Proposition 6.1.
(i) $\Big(id^{\otimes 3}+\tau_{12}\circ\tau_{23}+\tau_{23}\circ\tau_{12}\Big)\circ(\kappa\otimes id)\circ\kappa=0$. *(identité de coJacobi graduée)*
(ii) $(id\otimes\Delta)\circ\kappa=(\kappa\otimes id)\circ\Delta+\tau_{12}\circ(id\otimes\kappa)\circ\Delta$. *(identité de coLeibniz graduée)*
(Voir [BGHHW]*)*

Preuve:
(i) On calcule d'abord, $(\kappa\otimes id)\circ\kappa(X_1.\ldots.X_n)$, on trouve pour $t\neq s$ des termes de la forme:

$$(1):\varepsilon_1.X_I.U_t\bigotimes V_t.X_J.U_s\bigotimes V_s.X_K$$
$$(2):\varepsilon_2.X_I.V_t\bigotimes U_t.X_J.U_s\bigotimes V_s.X_K$$
$$(3):\varepsilon_3.X_I.U_t\bigotimes V_t.X_J.V_s\bigotimes U_s.X_K$$
$$(4):\varepsilon_4.X_I.V_t\bigotimes U_t.X_J.V_s\bigotimes U_s.X_K$$
$$(5):\varepsilon_5.X_I.U_s.U_t\bigotimes V_t.X_J\bigotimes V_s.X_K$$
$$(6):\varepsilon_6.X_I.U_s.V_t\bigotimes U_t.X_J\bigotimes V_s.X_K$$
$$(7):\varepsilon_7.X_I.V_s.U_t\bigotimes V_t.X_J\bigotimes U_s.X_K$$
$$(8):\varepsilon_8.X_I.V_s.V_t\bigotimes U_t.X_J\bigotimes U_s.X_K$$

Et pour $t=s$, si $X_s=U_s\otimes V_s\otimes W_s$ on trouve des termes de la forme:

$$(9):\varepsilon_9.X_I.U_s\bigotimes V_s.X_J\bigotimes W_s.X_K$$
$$(10):\varepsilon_{10}.X_I.V_s\bigotimes U_s.X_J\bigotimes W_s.X_K$$
$$(11):\varepsilon_{11}.X_I.V_s\bigotimes W_s.X_J\bigotimes U_s.X_K$$
$$(12):\varepsilon_{12}.X_I.W_s\bigotimes V_s.X_J\bigotimes U_s.X_K$$

On s'intéresse par exemple au terme $(1)=\varepsilon_1.X_I.U_t\bigotimes V_t.X_J.U_s\bigotimes V_s.X_K$ de $(\kappa\otimes id)\circ\kappa(X_1.\ldots.X_n)$ et on cherche le terme correspondant dans $\Big(id^{\otimes 3}+\tau_{12}\circ\tau_{23}+\tau_{23}\circ\tau_{12}\Big)\circ(\kappa\otimes$

$id) \circ \kappa(X_1 . \ldots . X_n)$. Il apparaît uniquement dans $\tau_{12} \circ \tau_{23} \circ (\kappa \otimes id) \circ \kappa(X_1 . \ldots . X_n)$ avec le signe $-\varepsilon_1$.

En effet, le signe ε_1 dans (1) est déterminé par:

- On part de $X_1, \ldots, X_n$, on le ramène en X_I, X_t, X_J, X_s, X_K accompagné du signe $\varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_I \; x_t \; x_J \; x_s \; x_K \end{smallmatrix} \right)$.

- On applique κ, le terme $X_I . X_t . X_J . U_s \bigotimes V_s . X_K$ apparaît une seule fois avec le signe

$$(-1)^{x_I + x_t + x_J + u_s + 1} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_I \; x_t \; x_J \; x_s \; x_K \end{smallmatrix} \right).$$

- Après en appliquant $(\kappa \otimes id)$, on obtient une seule fois le terme $X_I . U_t \bigotimes V_t . X_J . U_s \bigotimes V_s . X_K$ avec le signe

$$(-1)^{x_t + x_J + u_s + u_t} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_I \; x_t \; x_J \; x_s \; x_K \end{smallmatrix} \right) = (-1)^{v_t + u_s + x_J + 1} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_I \; x_t \; x_J \; x_s \; x_K \end{smallmatrix} \right) = \varepsilon_1.$$

On cherche maintenant le signe du terme (1) dans $\tau_{12} \circ \tau_{23} \circ (\kappa \otimes id) \circ \kappa(X_1 . \ldots . X_n)$.

- On part de $X_1, \ldots, X_n$, on le ramène en X_J, X_s, X_K, X_t, X_I accompagné du signe $\varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_J \; x_s \; x_K \; x_t \; x_I \end{smallmatrix} \right)$.

- On applique κ, le terme $X_J . X_s . X_K . V_t \bigotimes U_t . X_I$ apparaît une seule fois avec le signe

$$(-1)^{x_J + x_s + x_K + u_t + 1 + u_t v_t} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_J \; x_s \; x_K \; x_t \; x_I \end{smallmatrix} \right)$$

qui s'écrit encore $V_t . X_J . X_s . X_K \bigotimes X_I . U_t$ accompagné du signe

$$(-1)^{x_J + x_s + x_K + u_t + 1 + u_t v_t + u_t x_I + v_t (x_K + x_s + x_J)} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_J \; x_s \; x_K \; x_t \; x_I \end{smallmatrix} \right).$$

- Après en appliquant $(\kappa \otimes id)$, on obtient une seule fois le terme $V_t . U_s \bigotimes V_s . X_K \bigotimes X_I . U_t$ avec le signe

$$(-1)^{x_J + x_s + x_K + u_t + 1 + u_t v_t + u_t x_I + v_t (x_K + x_s + x_J) + x_J + v_t + u_s + 1} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_J \; x_s \; x_K \; x_t \; x_I \end{smallmatrix} \right).$$

- On applique ensuite $\tau_{12} \circ \tau_{23}$, on obtient le terme $X_I . X_t . U_t \bigotimes V_t . X_J . U_s \bigotimes V_s . X_K$ avec le signe

$$\begin{aligned}
&(-1)^{x_J + x_s + x_K + u_t + 1 + u_t v_t + u_t x_I + v_t (x_K + x_s + x_J) + x_J + v_t + u_s + 1} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_J \; x_s \; x_K \; x_t \; x_I \end{smallmatrix} \right) \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} v_t \; x_J \; u_s \; v_s \; x_K \; x_I \; u_t \\ x_I \; u_t \; v_t \; x_J \; u_s \; v_s \; x_K \end{smallmatrix} \right) \\
&= (-1)^{x_J + x_s + x_K + u_t + 1 + u_t v_t + u_t x_I + v_t (x_K + x_s + x_J) + x_J + v_t + u_s + 1} \times \\
&\times \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_J \; x_s \; x_K \; x_t \; x_I \end{smallmatrix} \right) \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_J \; x_s \; x_K \; x_t \; x_I \\ x_I \; x_t \; x_J \; x_s \; x_K \end{smallmatrix} \right) (-1)^{x_I + (v_t + 1)(x_J + x_K + x_s) + u_t + v_t (x_I + u_t) + x_t x_I} \\
&= -\varepsilon_1.
\end{aligned}$$

Les autres termes se simplifient de façon pareille.

(ii) D'une part, on a

$$(id\otimes\Delta)\circ\kappa(X_1.\dots.X_n)=\sum_{\substack{1\leq s\leq n\\ I\cup J\cup K=\{1,\dots,n\}\setminus\{s\}}}(-1)^{\sum_{i<s}x_i}\sum_{\substack{U_s\otimes V_s=X_s\\ U_s,V_s\neq\emptyset}}(-1)^{u_s+1}\times$$
$$\times\Big(\varepsilon\binom{x_1\dots x_n}{x_J\ u_s\ x_I\ v_s\ x_K}X_J.U_s\bigotimes X_I\bigotimes V_s.X_K+\varepsilon\binom{x_1\dots x_n}{x_J\ u_s\ v_s\ x_K\ x_I}X_J.U_s\bigotimes V_s.X_K\bigotimes X_I$$
$$+\varepsilon\binom{x_1\dots x_n}{x_J\ v_s\ x_I\ u_s\ x_K}X_J.V_s\bigotimes X_I\bigotimes U_s.X_K+\varepsilon\binom{x_1\dots x_n}{x_J\ v_s\ u_s\ x_K\ x_I}X_J.V_s\bigotimes U_s.X_K\bigotimes X_I\Big)$$
$$=(1)+(2)+(3)+(4).$$

D'autre part, on sait que $\Delta(X_1.\dots.X_n)=\sum_{\substack{I\cup J=\{1,\dots,n\}\\ \#I,\#J>0}}\varepsilon\binom{x_1\dots x_n}{x_I\ x_J}X_I\bigotimes X_J.$

Donc,

$$(id\otimes\kappa)\circ\Delta(X_1.\dots.X_n)=\sum_{\substack{1\leq s\leq n\\ I\cup J\cup K=\{1,\dots,n\}\setminus\{s\}}}\varepsilon\binom{x_1\dots x_n}{x_I\ x_J\ x_s\ x_K}(-1)^{x_I}(-1)^{\sum_{i\in J}x_i}\sum_{\substack{U_s\otimes V_s=X_s\\ U_s,V_s\neq\emptyset}}(-1)^{u_s+1}$$
$$\times\Big(\varepsilon\binom{x_I\ x_J\ x_s\ x_K}{x_I\ x_J\ u_s\ v_s\ x_K}X_I\bigotimes X_J.U_s\bigotimes V_s.X_K+\varepsilon\binom{x_I\ x_J\ x_s\ x_K}{x_I\ x_J\ v_s\ u_s\ x_K}X_I\bigotimes X_J.V_s\bigotimes U_s.X_K\Big).$$

Alors,

$$\tau_{12}\circ(id\otimes\kappa)\circ\Delta(X_1.\dots.X_n)=\sum_{\substack{1\leq s\leq n\\ I\cup J\cup K=\{1,\dots,n\}\setminus\{s\}}}\varepsilon\binom{x_1\dots x_n}{x_I\ x_J\ x_s\ x_K}(-1)^{x_I}(-1)^{\sum_{i\in J}x_i}\sum_{\substack{U_s\otimes V_s=X_s\\ U_s,V_s\neq\emptyset}}(-1)^{u_s+1}$$
$$\times\Big(\varepsilon\binom{x_I\ x_J\ u_s\ v_s\ x_K}{x_J\ u_s\ x_I\ v_s\ x_K}X_J.U_s\bigotimes X_I\bigotimes V_s.X_K+\varepsilon\binom{x_I\ x_J\ u_s\ v_s\ x_K}{x_J\ v_s\ x_I\ u_s\ x_K}X_J.V_s\bigotimes X_I\bigotimes U_s.X_K\Big)$$
$$=(5)+(6).$$

De plus, en écrivant que $\Delta(X_1.\dots.X_n)=\sum_{\substack{I\cup J=\{1,\dots,n\}\\ \#I,\#J>0}}\varepsilon\binom{x_1\dots x_n}{x_J\ x_I}X_J\bigotimes X_I$, on a

$$(\kappa\otimes id)\circ\Delta(X_1.\dots.X_n)=\sum_{\substack{1\leq s\leq n\\ I\cup J\cup K=\{1,\dots,n\}\setminus\{s\}}}\varepsilon\binom{x_1\dots x_n}{x_J\ x_s\ x_K\ x_I}(-1)^{\sum_{i\in J}x_i}\sum_{\substack{U_s\otimes V_s=X_s\\ U_s,V_s\neq\emptyset}}(-1)^{u_s+1}$$
$$\times\Big(\varepsilon\binom{x_J\ x_s\ x_K\ x_I}{x_J\ u_s\ v_s\ x_K\ x_I}X_J.U_s\bigotimes V_s.X_K\bigotimes X_I+\varepsilon\binom{x_J\ x_s\ x_K\ x_I}{x_J\ v_s\ u_s\ x_K\ x_I}X_J.V_s\bigotimes U_s.X_K\bigotimes X_I\Big)$$
$$=(7)+(8).$$

Un calcul nous montre que (1) = (5), (2) = (7), (3) = (6) et (4) = (8). Montrons par exemple que (1) = (5).

En effet, dans (1), le terme $X_J.U_s\bigotimes X_I\bigotimes V_s.X_K$ apparaît avec le signe

$$(-1)^{\sum_{i<s}x_i+u_s+1}\varepsilon\binom{x_1\dots x_n}{x_J\ u_s\ x_I\ v_s\ x_K}.$$

Dans (5), ce terme apparaît avec le signe

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & x_J & x_s & x_K \end{smallmatrix}^{x_1\ldots x_n}\right)(-1)^{\sum_{i\in J}x_i+x_I+u_s+1}\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & x_J & u_s & v_s & x_K \\ x_J & u_s & x_I & v_s & x_K \end{smallmatrix}\right)\\
&=(-1)^{\sum\limits_{i\in I\cup J}\sum\limits_{i>s}x_i}(-1)^{\sum\limits_{i\in K}\sum\limits_{i<s}x_i}(-1)^{\sum_{i\in J}x_i+x_I+u_s+1}\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & x_J & u_s & v_s & x_K \end{smallmatrix}^{x_1\ldots x_n}\right)\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & x_J & u_s & v_s & x_K \\ x_J & u_s & x_I & v_s & x_K \end{smallmatrix}\right)\\
&=(-1)^{\sum_{i<s}x_i+u_s+1}\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_J & u_s & x_I & v_s & x_K \end{smallmatrix}^{x_1\ldots x_n}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui montre que (1) = (5).

Donc, on trouve que $(id\otimes\Delta)\circ\kappa=(\kappa\otimes id)\circ\Delta+\tau_{12}\circ(id\otimes\kappa)\circ\Delta$. □

Finalement, l'espace $(S^+(\mathcal{H}[1]),\kappa)$ est une cogèbre de Lie. On vérifie que m est une codérivation de degré 1 de $S^+(\mathcal{H}[1])$ pour le cocrochet κ.

Proposition 6.2.

$$\Big(id\otimes m+m\otimes id\Big)\circ\kappa=-\kappa\circ m.$$

Preuve:

On a

$$\begin{aligned}
&\kappa\circ m(X_1.\ldots.X_n)=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{\sum_{i<s}x_i}\kappa(X_1.\ldots.m(X_s).\ldots.X_n)\\
&=\sum_{t<s}(-1)^{\sum_{i<s}x_i+u_t+1+\sum_{i<t}x_i}\Big(\\
&\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & u_t & v_t & (x_s{+}1) & x_J \end{smallmatrix}^{x_1\ldots u_tv_t\ldots(x_s+1)\ldots x_n}\right)X_I.U_t\bigotimes V_t.m(X_s).X_J+\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & (x_s{+}1) & u_t & v_t & x_J \end{smallmatrix}^{x_1\ldots u_tv_t\ldots(x_s+1)\ldots x_n}\right)X_I.m(X_s).U_t\bigotimes V_t.X_J\\
&+\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & v_t & u_t & (x_s{+}1) & x_J \end{smallmatrix}^{x_1\ldots u_tv_t\ldots(x_s+1)\ldots x_n}\right)X_I.V_t\bigotimes U_t.m(X_s).X_J+\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & (x_s{+}1) & v_t & u_t & x_J \end{smallmatrix}^{x_1\ldots u_tv_t\ldots(x_s+1)\ldots x_n}\right)X_I.m(X_s).V_t\bigotimes U_t.X_J\Big)\\
&+\sum_{t>s}(-1)^{\sum_{i<s}x_i+u_t+1+\sum_{i<t}x_i+1}\Big(\\
&\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & u_t & v_t & (x_s{+}1) & x_J \end{smallmatrix}^{x_1\ldots u_tv_t\ldots(x_s+1)\ldots x_n}\right)X_I.U_t\bigotimes V_t.m(X_s).X_J+\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & (x_s{+}1) & u_t & v_t & x_J \end{smallmatrix}^{x_1\ldots u_tv_t\ldots(x_s+1)\ldots x_n}\right)X_I.m(X_s).U_t\bigotimes V_t.X_J\\
&+\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & v_t & u_t & (x_s{+}1) & x_J \end{smallmatrix}^{x_1\ldots u_tv_t\ldots(x_s+1)\ldots x_n}\right)X_I.V_t\bigotimes U_t.m(X_s).X_J+\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & (x_s{+}1) & v_t & u_t & x_J \end{smallmatrix}^{x_1\ldots u_tv_t\ldots(x_s+1)\ldots x_n}\right)X_I.m(X_s).V_t\bigotimes U_t.X_J\Big)\\
&+\sum_{s=1}^{n}(-1)^{\sum_{i<s}x_i+(u_s+1)+1}\Big(\\
&\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & (u_s{+}1) & v_s & x_J \end{smallmatrix}^{x_1\ldots(u_s+1)\ldots x_n}\right)X_I.m(U_s)\bigotimes V_s.X_J+\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & v_s & (u_s{+}1) & x_J \end{smallmatrix}^{x_1\ldots(u_s+1)\ldots x_n}\right)X_I.V_s\bigotimes m(U_s).X_J\Big)\\
&+(-1)^{\sum_{i<s}x_i+u_s+1}\Big(\\
&\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & u_s & (v_s{+}1) & x_J \end{smallmatrix}^{x_1\ldots u_s\ (v_s+1)\ldots x_n}\right)X_I.U_s\bigotimes m(V_s).X_J+\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x_I & (v_s{+}1) & u_s & x_J \end{smallmatrix}^{x_1\ldots u_s\ (v_s+1)\ldots x_n}\right)X_I.m(V_s)\bigotimes U_s.X_J\Big)\\
&=(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6)+(7)+(8)+(9)+(10)+(11)+(12).
\end{aligned}$$

Après, en calculant $(id\otimes m)\circ\kappa(X_1.\ldots.X_n)$, on obtient $-(1)-(3)-(5)-(7)-(10)-(11)$ et en calculant $(m\otimes id)\circ\kappa(X_1.\ldots.X_n)$, on obtient $-(2)-(4)-(6)-(8)-(9)-(12)$. Par

exemple, le terme $X_I.U_t \bigotimes V_t.m(X_s).X_J$ de (1) apparaît dans $\kappa \circ m(X_1.\dots.X_n)$ avec le signe

$$(-1)^{\sum_{i<s} x_i+u_t+1+\sum_{i<t} x_i}\varepsilon \begin{pmatrix} x_1\dots u_t v_t\dots(x_s+1)\dots x_n \\ x_I\ u_t\ v_t\ (x_s+1)\ x_J \end{pmatrix}.$$

Ce même terme appaît dans $(id \otimes m) \circ \kappa(X_1.\dots.X_n)$ avec le signe

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\sum_{i<t} x_i+u_t+1}(-1)^{x_I+u_t+v_t}\varepsilon \begin{pmatrix} x_1\dots u_t v_t\dots x_s\dots x_n \\ x_I\ u_t\ v_t\ x_s\ x_J \end{pmatrix} \\
&= \varepsilon \begin{pmatrix} x_1\dots u_t v_t\dots(x_s+1)\dots x_n \\ x_I\ u_t\ v_t\ (x_s+1)\ x_J \end{pmatrix}(-1)^{\sum_{i<t} x_i+u_t+1}(-1)^{x_I+u_t+v_t}(-1)^{\sum\limits_{\substack{i<s\\ i\in J}} x_i+\sum\limits_{\substack{i>s\\ i\in I}} x_i} \\
&= (-1)^{v_t+\sum_{t<i<s} x_i+1}\varepsilon \begin{pmatrix} x_1\dots u_t v_t\dots(x_s+1)\dots x_n \\ x_I\ u_t\ v_t\ (x_s+1)\ x_J \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

D'où, le résultat. □

Aussi, on vérifie aussi que le crochet ℓ est une codérivation de degré 1 de $S^+(\mathcal{H}[1])$ pour κ:

Proposition 6.3.

$$\Big(id \otimes \ell + \ell \otimes id\Big) \circ \kappa = -\kappa \circ \ell.$$

Preuve:
On a d'une part,

$$\begin{aligned}
\kappa \circ \ell(X_1.\dots.X_n) &= \kappa\Big(\sum_{i<j} \varepsilon \begin{pmatrix} x_1\dots x_n \\ x_i\ x_j\ x_1\dots\hat{i}\hat{j}\dots x_n \end{pmatrix} \ell_2(X_i,X_j)X_1.\dots.\check{i}.\dots.\check{j}.\dots.X_n\Big) \\
&= \kappa\Big(\sum_{\substack{i<j\\ J=\{1,\dots,n\}\setminus\{i,j\}}} \varepsilon \begin{pmatrix} x_1\dots x_n \\ x_i\ x_j x_J \end{pmatrix} \ell_2(X_i,X_j).X_J\Big)
\end{aligned}$$

Dans $\kappa \circ \ell(X_1.\dots.X_n)$, il apparaît un terme (I) de la forme

$$\ell_2(X_i,X_j).X_{J_1}.U_s \bigotimes V_s.X_{J_2}$$

avec le signe

$$\varepsilon_1 = (-1)^{x_i+x_j+x_{J_1}+u_s}\varepsilon \begin{pmatrix} x_1\dots x_n \\ x_i\ x_j x_J \end{pmatrix}$$

où on a posé $J = J_1 \cup \{s\} \cup J_2$.

D'autre part, cherchons le terme correspondant dans $(\ell \otimes id) \circ \kappa(X_1.\dots.X_n)$.

On a

$$\begin{aligned}
(\ell \otimes id) \circ \kappa(X_1.\dots.X_n) &= (\ell \otimes id)\Big(\sum_{i<j} \sum_{\substack{s\\ J_1\cup J_2=\{1,\dots,n\}\setminus\{i,j,s\}}} \sum_{\substack{U_s\otimes V_s=X_s\\ U_s,V_s\neq\emptyset}} (-1)^{\sum_{r<s} x_r+u_s+1}\times \\
&\times \varepsilon \begin{pmatrix} x_1\dots u_s\ v_s\dots x_n \\ x_i\ x_j\ x_{J_1}\ u_s\ v_s\ x_{J_2} \end{pmatrix} X_i.X_j.X_{J_1}.U_s \bigotimes V_s.X_{J_2} + \cdots\Big) \\
&= (-1)^{\sum_{r<s} x_r+u_s+1}\varepsilon \begin{pmatrix} x_1\dots u_s\ v_s\dots x_n \\ x_i\ x_j\ x_{J_1}\ u_s\ v_s\ x_{J_2} \end{pmatrix} \ell_2(X_i,X_j).X_{J_1}.U_s \bigotimes V_s.X_{J_2} + \cdots.
\end{aligned}$$

Le premier terme $(1) = \ell_2(X_i, X_j).X_{J_1}.U_s \bigotimes V_s.X_{J_2}$ apparaît donc avec le signe

$$(-1)^{\sum_{r<s} x_r + u_s + 1}(-1)^{\sum\limits_{r\in J_2}^{r<s} x_r}(-1)^{\sum\limits_{r\in J_1\cup\{i,j\}}^{r>s} x_r}\varepsilon\begin{pmatrix} x_1 \dots x_s \dots x_n \\ x_i\ x_j\ x_{J_1}\ x_s\ x_{J_2}\end{pmatrix}$$
$$= (-1)^{x_i + x_j + x_{J_1} + u_s + 1}\varepsilon\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_i\ x_j\ x_J\end{pmatrix} = -\varepsilon_1.$$

Alors, $(I) = -(1)$. De même, les autres termes apparaissent dans le premier membre et le second membre à un signe (-1) près.

Juste le cas où on coupe $\ell_2(X_i, X_j)$ par κ, on va l'étudier comme le cas où on a deux paquets.

En effet, si $X = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p$ et $Y = \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q}$, on sait que

$$\ell_2(X, Y) =$$
$$(-1)^x \sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q) \\ \sigma^{-1}(k)\le p<\sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{p+q} \\ a_{\sigma^{-1}(1)} & \dots & a_{\sigma^{-1}(p+q)}\end{pmatrix} \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Alors,

$$\kappa \circ \ell_2(X, Y) = (-1)^x \sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q) \\ k;\ \sigma^{-1}(k)\le p<\sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{p+q} \\ a_{\sigma^{-1}(1)} & \dots & a_{\sigma^{-1}(p+q)}\end{pmatrix} \sum_{t<k} \Big($$
$$(-1)^{\sum_{i\le t} a_{\sigma^{-1}(i)}} \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(t)} \bigotimes \alpha_{\sigma^{-1}(t+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$$
$$- (-1)^{\sum_{i>t} a_{\sigma^{-1}(i)}} \varepsilon\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{p+q} \\ a_{[\sigma^{-1}(t+1), \sigma^{-1}(p+q)]} & & a_{[\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(t)]}\end{pmatrix}$$
$$\alpha_{\sigma^{-1}(t+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \bigotimes \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(t)}\Big)$$
$$+ \sum_{t>k} \Big($$
$$(-1)^{\sum_{i\le t} a_{\sigma^{-1}(i)}} \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(t)} \bigotimes \alpha_{\sigma^{-1}(t+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$$
$$- (-1)^{\sum_{i>t} a_{\sigma^{-1}(i)}} \varepsilon\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{p+q} \\ a_{[\sigma^{-1}(t+1), \sigma^{-1}(p+q)]} & & a_{[\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(t)]}\end{pmatrix}$$
$$\alpha_{\sigma^{-1}(t+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \bigotimes \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(t)}\Big)$$
$$= (1) + (2) + (3) + (4).$$

Sachant que κ passe au quotient modulo les battements, alors, par exemple pour le terme $(1) = \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(t)} \bigotimes \alpha_{\sigma^{-1}(t+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$ qui apparaît dans $\kappa \circ \ell_2(X, Y)$, on a nécessairement $\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(t)}$ appartiennent tous à X ou à Y. Alors, on a nécessairement $\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(t)} = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_t$ ou $\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(t)} = \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+t}$.

Supposons, par exemple, que le terme (1) s'écrit:

$$\alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+t} \bigotimes \alpha_{\sigma^{-1}(t+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Il apparaît dans $\kappa \circ \ell_2(X, Y)$ avec le signe $(-1)^x \varepsilon\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{p+q} \\ a_{\sigma^{-1}(1)} & \dots & a_{\sigma^{-1}(p+q)}\end{pmatrix} (-1)^{\sum_{p+1\le i\le p+t} a_i}$.

Cherchons le terme correspondant dans $(id \otimes \ell_2) \circ \kappa(X,Y)$.

Posons $U = \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+t}$ et $V = \alpha_{p+t+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q}$. On sait que

$$\kappa(X,Y) = \sum_{t=1}^{q} (-1)^{x+u+1} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x & u & v \\ u & v & x \end{smallmatrix}\right) U \bigotimes (\alpha_{p+t+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q}) \centerdot (\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p) + \text{d'autres termes...}$$

En appliquant $(id \otimes \ell_2)$, on obtient:

$$(id \otimes \ell_2) \circ \kappa(X,Y) = \sum_{t=1}^{q} (-1)^{u} (-1)^{x+u+1} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x & u & v \\ u & v & x \end{smallmatrix}\right) U \bigotimes \ell_2(\alpha_{p+t+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \centerdot \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p)$$
$$+ \text{d'autres termes...}$$

On considère une permutation λ de S_{p+q} définie par:

$$\lambda(i) = \begin{cases} p+i, & \text{si } 1 \leq i \leq q; \\ i-q, & \text{si } q+1 \leq i \leq p+q. \end{cases}$$

Posons $\beta_i = \alpha_{\lambda(i)}$. Alors,

$$(id \otimes \ell_2) \circ \kappa(X,Y) = \sum_{\substack{t<k \\ \eta \in Bat(q-t,p);\ \eta^{-1}(k) \leq q < \eta^{-1}(k+1)}} (-1)^{x+v} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x & u & v \\ u & v & x \end{smallmatrix}\right) \varepsilon \begin{pmatrix} b_{[t+1,p+q]} \\ b_{[\eta^{-1}(t+1),\eta^{-1}(p+q)]} \end{pmatrix}$$
$$U \bigotimes \beta_{\eta^{-1}(t+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\beta_{\eta^{-1}(k)}, \beta_{\eta^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \beta_{\eta^{-1}(p+q)} + \text{d'autres termes...}$$

où η est un battement de $Bat(q-t,p)$ définie sur $\{t+1,\dots,p+q\}$.

Dans la somme précédente, fixant $\eta \in Bat(q-t,p)$ telle que $\eta(i) = \sigma \circ \lambda(i), \forall i \in \{t+1,\dots,p+q\}$. On construit, après, une permutation ν de S_{p+q} définie par:

$$\nu^{-1}(i) = \begin{cases} p+i, & \text{si } 1 \leq i \leq t \\ \eta^{-1}(i), & \text{si } t+1 \leq i \leq p+q. \end{cases}$$

On vérifie que ν appartient à $Bat(q,p)$, $\beta_{\nu^{-1}(i)} = \alpha_{\sigma^{-1}(i)}, \forall i \in \{1,\dots,p+q\}$ et que

$$\varepsilon \begin{pmatrix} b_{[1,p+q]} \\ b_{[\nu^{-1}(1),\nu^{-1}(p+q)]} \end{pmatrix} = (-1)^{a_{[1,p]} a_{[p+1,p+q]}} \varepsilon \begin{pmatrix} a_{[1,p+q]} \\ a_{[\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(p+q)]} \end{pmatrix}.$$

Mais, par construction $\nu^{-1}(k) \leq q < \nu^{-1}(k+1)$. On construit, alors, une nouvelle permutation ρ de S_{p+q} définie par:
$\rho^{-1}(i) = \nu^{-1}(i),\ \forall i \notin \{k, k+1\}$, $\rho^{-1}(k) = \nu^{-1}(k+1)$ et $\rho^{-1}(k+1) = \nu^{-1}(k)$.

On vérifie que ρ appartient à $Bat(q,p)$, $\beta_{\rho^{-1}(i)} = \alpha_{\sigma^{-1}(i)}, \forall i \notin \{k, k+1\}$, $\beta_{\rho^{-1}(k)} = \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}$, $\beta_{\rho^{-1}(k+1)} = \alpha_{\sigma^{-1}(k)}$, $\rho^{-1}(k) \leq p < \rho^{-1}(k+1)$ et que

$$\varepsilon \begin{pmatrix} b_{[1,p+q]} \\ b_{[\rho^{-1}(1),\rho^{-1}(p+q)]} \end{pmatrix} = (-1)^{a_{[1,p]} a_{[p+1,p+q]}} \varepsilon \begin{pmatrix} a_{[1,p+q]} \\ a_{[\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(p+q)]} \end{pmatrix} (-1)^{a_{\sigma^{-1}(k)} a_{\sigma^{-1}(k+1)}}.$$

Enfin, le terme

$$U\bigotimes \beta_{\rho^{-1}(t+1)}\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}[\beta_{\rho^{-1}(k)},\beta_{\rho^{-1}(k+1)}]\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}\beta_{\rho^{-1}(p+q)}$$
$$=\alpha_{p+1}\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}\alpha_{p+t}\bigotimes \alpha_{\sigma^{-1}(t+1)}\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}[\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)},\alpha_{\sigma^{-1}(k)}]\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$$

apparaît dans $(id\otimes\ell_2)\circ\kappa(X,Y)$ avec le signe

$$(-1)^{a_{[1,p]}+v+1}\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}xuv\\uvx\end{smallmatrix}\right)(-1)^{a_{[1,p]}a_{[p+1,p+q]}}\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}a_{[1,p+q]}\\a_{[\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(p+q)]}\end{smallmatrix}\right)(-1)^{a_{\sigma^{-1}(k)}a_{\sigma^{-1}(k+1)}}.$$

Donc, le terme $\alpha_{p+1}\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}\alpha_{p+t}\bigotimes\alpha_{\sigma^{-1}(t+1)}\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}[\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}]\underline{\otimes}\cdots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$ apparaît dans $(id\otimes\ell_2)\circ\kappa(X,Y)$ avec le signe

$$(-1)^{x+v}\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}xuv\\uvx\end{smallmatrix}\right)(-1)^{a_{[1,p]}a_{[p+1,p+q]}}\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}a_{[1,p+q]}\\a_{[\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(p+q)]}\end{smallmatrix}\right)(-1)$$
$$=(-1)^{x+v+1}(-1)^{xa_{[p+1,p+q]}}(-1)^{a_{[1,p]}a_{[p+1,p+q]}}\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}a_{[1,p+q]}\\a_{[\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(p+q)]}\end{smallmatrix}\right)=(-1)^{x+u+1}\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}a_{[1,p+q]}\\a_{[\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(p+q)]}\end{smallmatrix}\right).$$

□

6.3. G_∞ algèbre.

On a construit deux codérivations m et ℓ de degré 1 pour la comultiplication Δ de la cogèbre cocommutative et coassociative $\left(S^+(\mathcal{H}[1]),\Delta\right)$ et pour le cocrochet κ de la cogèbre de Lie $\left(S^+(\mathcal{H}[1]),\kappa\right)$ vérifiant $m\circ m=0$ et $\ell\circ\ell=0$. De plus, la comultiplication Δ et le cocrochet κ vérifie l'identité de coLeibniz

$$(id\otimes\Delta)\circ\kappa=(\kappa\otimes id)\circ\Delta+\tau_{12}\circ(id\otimes\kappa)\circ\Delta.$$

On dit que $\left(S^+(\mathcal{H}[1]),\Delta,\kappa\right)$ est une cogèbre de Gerstenhaber graduée.

Comme $\ell+m$ est une codérivation de degré 1 de $\left(S^+(\mathcal{H}[1]),\Delta,\kappa\right)$ vérifiant l'équation maîtresse $[\ell+m,\ell+m]=(\ell+m)^2=0$. Alors, $\left(S^+(\mathcal{H}[1]),\Delta,\kappa,\ell+m\right)$ est une cogèbre de Gerstenhaber différentielle graduée.

Définition 6.4. (G_∞ algèbre)

Une G_∞ algèbre est une bicogèbre de la forme $G(\mathcal{G})=\left(S^+\left(\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]\right),\Delta,\kappa\right)$ munie d'une codérivation pour les deux structures Δ et κ notée $\ell+m$ et de carré nul.

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Gerstenhaber, alors, $G(\mathcal{G})=\left(S^+\left(\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]\right),\Delta,\kappa,\ell+m\right)$ avec

$$\ell_k=0\ si\ k\neq 2,\ \ell_2(X,Y)=(-1)^x[X,Y],\quad m_k=0\ si\ k\neq 1,\ m_1(X)=\mu(X),$$

$(X,Y\in\mathcal{H}=\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1]))$ s'appelle la G_∞ algèbre enveloppante de l'algèbre $\mathcal{G}$.

Remarque 6.5.

Pour définir une codérivation Q de la bicogèbre $\left(S^+\left(\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]\right),\Delta,\kappa\right)$, il suffit de se donner une suite d'applications

$$Q^{(N)}_{p_1\ldots p_n}:\underline{\bigotimes}^{p_1}(\mathcal{G}[1])[1].\ldots.\underline{\bigotimes}^{p_n}(\mathcal{G}[1])[1]\longrightarrow\mathcal{G}\qquad(p_1+\cdots+p_n=N).$$

(cette construction est explicitée dans la section suivante pour des morphismes de bicogèbres).

Une G_∞ algèbre est la G_∞ algèbre enveloppante d'une algèbre de Gerstenhaber si et seulment si sa codérivation $\ell+m$ vérifie $(\ell+m)^{(N)}_{p_1\dots p_n}=0$ sauf pour $(\ell+m)^{(2)}_{11}$ et $(\ell+m)^{(2)}_{2}$.

7. Cohomologie de Chevalley-Harrison des algèbres de Gerstenhaber

7.1. Morphismes de cogèbres entre G_∞ algèbres.

Rappelons que si $S^+(\mathfrak{g}[1])$ et $S^+(\mathfrak{g}'[1])$ sont deux L_∞ algèbres, resp.si $\underline{\bigotimes}^+(A[1])$ et $\underline{\bigotimes}(A'[1])$ sont deux C_∞ algèbres, un morphisme F de L_∞ algèbre, resp de C_∞ algèbre entre ces deux algèbres est un morphisme de cogèbre qui commute avec les codifférentielles $\ell^{\mathfrak{g}}$ et $\ell^{\mathfrak{g}'}$, resp. les codifférentielles m^A et $m^{A'}$. De plus, les morphismes de cogèbres sont caractérisés par leurs projections F_n

$$F_n : S^n(\mathfrak{g}[1]) \longrightarrow \mathfrak{h} \qquad \text{resp.} \quad F_n : \underline{\bigotimes}^n(A[1]) \longrightarrow A'.$$

Dans le cas de G_∞ algèbres, $S^+\left(\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]\right)$ et $S^+\left(\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}'[1])[1]\right)$, on dispose de deux coproduits: Δ et κ.

Proposition 7.1. (Les morphismes de cogèbres entre deux G_∞-algèbres)

Un morphisme de cogèbre $F : S^+\left(\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]\right) \longrightarrow S^+\left(\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}'[1])[1]\right)$, c'est à dire une application linéaire telle que

$$(F\otimes F)\circ\Delta=\Delta\circ F \qquad et \quad (F\otimes F)\circ\kappa=\kappa\circ F,$$

est uniquement caractérisé par ses projections dans $\mathcal{G}'$, que l'on note:

$$f_{p_1\dots p_n} : \underline{\bigotimes}^{p_1}(\mathcal{G}[1])\centerdot\dots\centerdot\underline{\bigotimes}^{p_n}(\mathcal{G}[1]) \longrightarrow \mathcal{G}'.$$

Nous ne démontrerons pas cette proposition annoncée dans [BGHHW] et [GH]. Nous allons seulement expliquer comment reconstruire F à partir des $f_{p_1\dots p_n}$. On vient de voir qu'il suffit de retrouver les projections

$$F_n : S^n\left(\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]\right) \longrightarrow \underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}'[1])$$

pour caractériser F. On va donc se contenter de décrire la construction des applications F_n à partir des applications $f_{p_1\dots p_n}$.

Soit donc $X_1\centerdot\dots\centerdot X_n$ un élément de $S^n\left(\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]\right)$, avec

$$X_j=\alpha^j_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha^j_{p_j}.$$

$F_n(X_1\centerdot\dots\centerdot X_n)$ est une somme de produits tensoriels modulo les battements de $f(Y_k)$ $(1\leq k\leq t)$ où les Y_k sont des produit $\centerdot$ de parties des X_j de la forme:

$$U^j_i=\alpha^j_{r_i+1}\underline{\otimes}\alpha^j_{r_i+2}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha^j_{r_{i+1}} \qquad (0\leq r_s\leq p_j).$$

On envoie donc les produits $(U_1^1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} U_{r_1}^1) \dots . (U_1^n \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} U_{r_n}^n)$ sur des sommes de termes de la forme

$$f(Y_1) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} f(Y_t) = f(V_1^1 \dots . V_{s_1}^1) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} f(V_1^t \dots . V_{s_t}^t).$$

Les V_ℓ^k forment une permutation des U_i^j. Si un X_j n'est pas décomposé ($r_j = 1$), il ne peut apparaître qu'en facteur d'au moins une vraie partie $U_i^{j'}$ d'un autre X ($r_{j'} > 1$). Si un X_j est décomposé ($r_j > 1$) chacune de ses parties apparaît dans un Y différent. Enfin, il y a autant de $.$ et de $\underline{\otimes}$ dans l'expression de $X_1 \dots . X_n$ que dans celle des $f(Y_1) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} f(Y_t)$.

Etape 1: Description des découpages des X_j.

On utilise un tableau T à n lignes. On découpe les X_j. Chaque ligne j du tableau T a r_j cases. Dans chaque case, on place les portions de X_j dans l'ordre du découpage ainsi: si on écrit $X_j = U_1^j \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} U_{r_j}^j$, on aura une ligne:

U_1^j	U_2^j	$\cdots$	$U_{r_j}^j$

Notons L = nombre de lignes, C = nombre de colonnes, N = nombre de cases de T.

Par exemple si on envisage de décomposer $X_1.X_2.X_3.X_4.X_5.X_6$ en

$$X_1.(U_2 \underline{\otimes} V_2).X_3.(U_4 \underline{\otimes} V_4 \underline{\otimes} W_4).(U_5 \underline{\otimes} V_5 \underline{\otimes} W_5 \underline{\otimes} R_5).(U_6 \underline{\otimes} V_6),$$

on posera:

$T =$

X_1			
U_2	V_2		
X_3			
U_4	V_4	W_4	
U_5	V_5	W_5	R_5
U_6	V_6		

Le tableau T caractérise maintenant la décomposition de $X_1 \dots . X_n$.

Etape 2: Suppression des lignes de longueur 1

On appelle T_1 le sous-tableau obtenu en enlevant toutes les lignes de longueur 1 de T. Il est clair que l'on peut reconstruire T à partir de T_1. Celui-ci caractérise donc aussi la décomposition de notre monôme. Dans notre exemple:

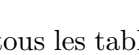
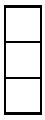
$T_1 =$

U_2	V_2		
U_4	V_4	W_4	
U_5	V_5	W_5	R_5
U_6	V_6		

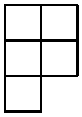
Notons L_1 = nombre de lignes, C_1 = nombre de colonnes, N_1 = nombre de cases de T_1 et $h = L_1 - 1$.

Etape 3: Construction du coeur de T'.

On dessine tous les tableaux T_2 ayant h cases vides tels que la longueur des lignes décroît de haut vers le bas. Dans notre exemple, ce nombre est 3. Dans notre exemple, il y a quatre possibilités:

$T_2 =$  $T_2 =$  $T_2 =$  $T_2 =$ 

On ajoute ensuite une case vide à T_2 en dessous de chacune des colonnes de T_2 (s'il n'y a aucune colonne, on ne fait rien). On obtient un tableaux T_3. Par exemple si on retient le second T_2 ci dessus, on obtient,

$T_2 =$  $\Longrightarrow \quad T_3 =$ 

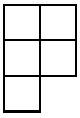
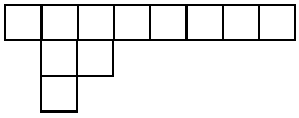
Etape 4: Construction de T_4 vide

On ajoute à la première ligne du tableau ainsi obtenu autant de cases qu'il faut pour obtenir un tableau T_4 ayant le même nombre de cases que T_1, c'est à dire tel que $N_4 = N_1$.

Remarque 7.2.
On a ajouté $N_1 - N_3 = N_1 - (h + C_2)$ cases à la première ligne de T_3. Alors, T_4 a donc C_4 colonnes où

$$\begin{aligned} C_4 &= C_3 + N_1 - (h + C_2) \\ &= N_1 - h = N - h - \#\{X_j \textit{ non décomposés}\} \end{aligned}$$

Par exemple si on retient le second T_3 ci dessus, on choisit, puisque T_1 possède 11 cases:

$T_3 =$  $\Longrightarrow \quad T_4 =$ 

Etape 5: Remplissage de T_4

On remplit ensuite T_4 en mettant dans chaque case une des lettres de T_1 ainsi:
On lit T_1, ligne par ligne, de la gauche vers la droite. Pour la ligne j de T_1, de longueur r_j, on choisit r_j colonnes de T_4 telles qu'il y ait dans chaque colonne au moins une case vide. Disons que ces colonnes sont $c_{i_1}, \ldots, c_{i_{r_j}}$ avec $i_1 < \cdots < i_{r_j}$. On place la $k^{ième}$ entrée U_k^j de la ligne j de T_1 dans la première case libre de la colonne n° i_k lorsqu'on parcourt la

colonne de haut en bas. On obtient ainsi un tableau rempli T_4. Par exemple:

$$T_4 \;=\; \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline U_2 & U_4 & V_2 & W_4 & V_5 & W_5 & R_5 & V_6 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & U_5 & V_4 \\ \cline{2-3} \multicolumn{1}{c}{} & U_6 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Etape 6: Ajout des X_j indécomposés

On ajoute des cases au tableau T_4 en dessous des colonnes existante de T_4 (exactement $N - N_4$ cases). On remplit ces cases en mettant les $X_j = U_1^j$ indécomposés de T. On obtient un tableau T_5. Par exemple:

$$T_4 \implies T_5 \;=\; \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline U_2 & U_4 & V_2 & W_4 & V_5 & W_5 & R_5 & V_6 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & U_5 & V_4 & X_1 \\ \cline{2-4} \multicolumn{1}{c}{} & U_6 & X_3 \\ \cline{2-3} \end{array}$$

Etape 7: Définition de T'

On range chaque colonne du tableau T_5 ainsi obtenu dans l'ordre croissant du haut vers le bas. C'est à dire, on construit des colonnes c'_i de la forme:

$$\begin{array}{|c|}\hline U_{a_1}^{j_1} \\ \hline U_{a_2}^{j_2} \\ \hline \vdots \\ \hline U_{a_s}^{j_t} \\ \hline \end{array} \qquad \text{avec } j_1 < \cdots < j_t.$$

On obtient ainsi un tableau noté T'.

Dans notre exemple:

$$T' \;=\; \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline U_2 & U_4 & V_2 & X_1 & V_5 & W_5 & R_5 & V_6 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & U_5 & X_3 & W_4 \\ \cline{2-4} \multicolumn{1}{c}{} & U_6 & V_4 \\ \cline{2-3} \end{array}$$

Etape 8: Calcul des $F(T')$.

A chaque colonne c'_i de T' $(1 \leq i \leq s)$, on associe un élément $f(c'_i)$ de $\mathcal{G}'$ qui est simplement l'image par f du produit $\boldsymbol{.}$ des termes de la colonne. Finalement on définit $F(T')$ comme le produit $\varepsilon(T,T')\underline{\otimes}_{i=1}^{s} f(c'_i)$ modulo les battements avec le signe obtenu à partir de la permutation passant de T à T'.

Dans notre exemple, on pose donc

$$\begin{aligned} f(Y_1) &= f(U_2) \\ f(Y_2) &= f(U_4.U_5.U_6) \\ f(Y_3) &= f(V_2.X_3.V_4) \\ f(Y_4) &= f(X_1.W_4) \\ f(Y_5) &= f(V_5) \\ f(Y_6) &= f(W_5) \\ f(Y_7) &= f(R_5) \\ f(Y_8) &= f(V_6). \end{aligned}$$

Donc

$$F(T') = \varepsilon(T,T')f(Y_1)\underline{\otimes}f(Y_2)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}f(Y_8).$$

Etape 9: Calcul de $F(X_1.\dots.X_n)$.

La quantité $F(X_1.\dots.X_n)$ s'obtient en faisant la somme pour des $F(T')$ toutes les décompositions T de $X_1.\dots.X_n$ et pour chaque T pour tous les tableaux T' qu'on peut construire à partir de T :

$$F(X_1.\dots.X_n) = \sum_{T,T'} \varepsilon(T,T')f(Y_1)\underline{\otimes}f(Y_2)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}f(Y_{C_{T'}}).$$

7.2. **Cohomologie de Chevalley-Harrison.**

On a la définition naturelle:

Définition 7.3. (Morphismes de G_∞ algèbres)

Soit $\left(S^+\left(\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]\right),\Delta,\kappa,\ell+m\right)$ *et* $\left(S^+\left(\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}'[1])[1]\right),\Delta',\kappa',\ell'+m'\right)$ *deux* G_∞ *algèbres. Une application* $F : S^+\left(\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]\right) \longrightarrow S^+\left(\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}'[1])[1]\right)$ *est un morphisme de* G_∞ *algèbres si* F *est un morphisme de cogèbres:*

$$(F\otimes F)\circ\Delta = \Delta'\circ F, \qquad (F\otimes F)\circ\kappa = \kappa'\circ F,$$

de degré 0 *qui préserve les codifférentielles:*

$$F\circ(\ell+m) = (\ell'+m')\circ F.$$

Soient $(\mathcal{G},\wedge,[\ ,\ ])$ et $(\mathcal{G}',\wedge',[\ ,\ ]')$ deux algèbres de Gerstenhaber. Comme précédemment, cherchons à construire un morphisme de G_∞ algèbres F. On a vu qu'en tant que morphisme de cogèbres, F est caractérisé par la suite des applications $(f_{p_1\dots p_r})$. Donnons-nous un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber $f_1 : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ et cherchons à construire des applications $f_{p_1\dots p_n}$ suivantes. Dans cette partie, nous noterons ces applications $f^{(N)}_{p_1\dots p_n}$ si $\sum p_j = N$.

Supposons connues tous les $f^{(k)}_{p_1\dots p_r}$ avec $k = p_1 + \cdots + p_r < N$, on cherche les $f^{(N)}_{p'_1\cdots p'_n}$.

Si X_j est un élément de $\underline{\bigotimes}^{p_j}(\mathcal{G}[1])[1]$, on notera aussi $p(X_j)$ le nombre p_j.

Si on applique $(\ell' + m') \circ F - F \circ (\ell + m)$ à $X_1 . \dots . X_n$ avec $X_j \in \underline{\bigotimes}^{p(X_j)}(\mathcal{G}[1])[1]$ et $\sum_j p(X_j) \leq N$, aucun terme en $f^{(N)}_{p'_1\dots p'_r}$ n'apparaît.

Ces termes apparaissent lorsqu'on applique $(\ell' + m') \circ F - F \circ (\ell + m)$ à $X_1 . \dots . X_n$ avec $\sum_j p(X_j) = N + 1$. On trouve les termes suivants:

Dans $(F \circ \ell)(X_1 . \dots . X_n)$, on a:

$$\begin{aligned}
&(F \circ \ell)(X_1 . \dots . X_n) \\
&= \sum_{j<k} \varepsilon \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_j x_k x_1 \dots \hat{\jmath} \dots \hat{k} \dots x_n \end{pmatrix} F\big(\ell_2(X_j, X_k) . X_1 . \dots \hat{\jmath} \dots \hat{k} \dots . X_n\big) \\
&= \sum_{j<k} \varepsilon \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_j x_k x_1 \dots \hat{\jmath} \dots \hat{k} \dots x_n \end{pmatrix} f^{(N)}_{p(X_j)+p(X_k)-1, p(X_1), \dots \hat{\jmath} \dots \hat{k} \dots, p(X_n)}\big(\ell_2(X_j, X_k) . X_1 . \dots \hat{\jmath} \dots \hat{k} \dots . X_n\big)
\end{aligned}$$

Dans $(F \circ m)(X_1 . \dots . X_n)$, on a:

$$\begin{aligned}
(F \circ m)(X_1 . \dots . X_n) &= \sum_{j/p(X_j)>1} (-1)^{\sum_{i<j} x_i} F(X_1 . \dots . m_1(X_j) . \dots . X_n) \\
&= \sum_{j/p(X_j)>1} (-1)^{\sum_{i<j} x_i} f^{(N)}_{p(X_1), \dots, p(X_j)-1, \dots, p(X_n)}(X_1 . \dots . m_1(X_j) . \dots . X_n)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, dans $(\ell' \circ F)(X_1 . \dots . X_n)$, les termes en $f^{(N)}$ n'apparaissent que dans les termes d'ordre 2 du développement de F. Avec les notations ci-dessus, il faut, en effet, au moins un produit de deux paquets et que l'un contienne N vecteurs de $\mathcal{G}'$. Il reste seulement:

$$\begin{aligned}
(\ell' \circ F)(X_1 . \dots . X_n) = &\sum_{j/p(X_j)=1} \ell'\Big(\varepsilon \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_j x_1 \dots \hat{\jmath} \dots x_n \end{pmatrix} f_1(X_j) . f^{(N)}_{p(X_1), \dots \hat{\jmath} \dots, p(X_n)}(X_1 . \dots \hat{\jmath} \dots . X_n)\Big) \\
&+ \sum_{r<N} \text{ termes en } f^{(r)}.
\end{aligned}$$

De même pour $(m' \circ F)(X_1 . \dots . X_n)$, les seuls termes en $f^{(N)}$ apparaissant sont:

$$\begin{aligned}
&(m' \circ F)(X_1 . \dots . X_n) \\
&= \sum_{j/p(X_j)>1} \varepsilon \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_j x_1 \dots \hat{\jmath} \dots x_n \end{pmatrix} m'\Big(f^{(1)}_1(\alpha^j_1) \underline{\otimes} f^{(N)}_{p_j-1, p_1, \dots \hat{\jmath} \dots, p_r}((\alpha^j_2 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha^j_{p_j}) . X_1 . \dots \hat{\jmath} \dots . X_n)\Big) \\
&+ \varepsilon \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_1 \dots \hat{\jmath} \dots x_n x_j \end{pmatrix} m'\Big(f^{(N)}_{p_1, \dots \hat{\jmath} \dots, p_r, p_j-1}(X_1 . \dots \hat{\jmath} \dots . X_n . (\alpha^j_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha^j_{p_j-1})) \underline{\otimes} f^{(1)}_1(\alpha^j_{p_j})\Big) \\
&+ \sum_{r<N} \text{ termes en } f^{(r)}.
\end{aligned}$$

L'opérateur de cobord d_{CH} dit de Chevalley-Harrison associé à cette construction de F et à $f_1^{(1)}$ est donc le suivant.

L'espace des cochaînes est l'espace

$$C^N = \sum_{p_1+\cdots+p_n=N} Hom\left(\underline{\bigotimes}^{p_1}(\mathcal{G}[1])[1].\ldots.\underline{\bigotimes}^{p_n}(\mathcal{G}[1])[1], \mathcal{G}'[1-N-n]\right).$$

Le cobord $d_{CH} : C^N \longrightarrow C^{N+1}$ est de la forme $d_{CH} = d_m + d_\ell$ avec

$$\begin{aligned}
&(d_m f^{(N)}_{p_1\ldots p_n})(X_1.\ldots.X_n) = (d_m f)^{(N+1)}_{p_1\ldots(p_j+1)\ldots p_n}(X_1.\ldots.X_n)\\
&= (-1)^{\alpha_1^j\sum_{i<j}x_i} m'\left(f_1^{(1)}(\alpha_1^j)\underline{\otimes} f^{(N)}_{p_1,\ldots,p_j-1,\ldots,p_r}(X_1.\ldots.(\alpha_2^j\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}\alpha^j_{p_j}).\ldots.X_n)\right)\\
&+ (-1)^{\alpha^j_{p_j}\cdot\sum_{i>j}x_i} m'\left(f^{(N)}_{p_1,\ldots,p_j-1,\ldots,p_r}(X_1.\ldots.(\alpha_1^j\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}\alpha^j_{p_j-1})\ldots.X_n)\underline{\otimes} f_1^{(1)}(\alpha^j_{p_j})\right)\\
&- (-1)^{\sum_{i<j}x_i} f^{(N)}_{p_1\ldots p_n}(X_1.\ldots.m(X_j).\ldots.X_n).
\end{aligned}$$

De même, $d_\ell : C^N_{p_1\ldots p_n} \longrightarrow \sum_{j,\ q_1+q_2=p_j+1} C^{N+1}_{q_1,q_2,p_1\ldots\hat{j}\ldots p_n}$ s'écrit

$$(d_\ell f^N_{p_1\ldots p_n}) = \sum_{\substack{j\\ q_1+q_2=p_j+1}} (d_\ell f)^N_{q_1,q_2,p_1\ldots\hat{j}\ldots p_n}.$$

Avec

1. Si $q_1 > 1$ et $q_2 > 1$, alors
$$\begin{aligned}
&(d_\ell f)^{(N+1)}_{q_1,q_2,p_1\ldots\hat{j}\ldots p_n}(Y_1.Y_2.X_1.\ldots\hat{j}\ldots.X_n) =\\
&-\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} y_1y_2x_1\ldots\hat{j}\ldots x_n\\ x_1\ldots y_1y_2\ldots x_n\end{smallmatrix}\right)(-1)^{\sum_{i<j}x_i} f^{(N)}_{p_1\ldots p_n}(X_1.\ldots.\ell(Y_1,Y_2).\ldots.X_n).
\end{aligned}$$
2. Si $q_1 = 1$ et $q_2 = p_j > 1$, alors
$$\begin{aligned}
&(d_\ell f)^{(N+1)}_{q_1,q_2,p_1\ldots\hat{j}\ldots p_n}(Y_1.Y_2.X_1.\ldots\hat{j}\ldots.X_n) =\\
&-\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} y_1y_2x_1\ldots\hat{j}\ldots x_n\\ x_1\ldots y_1y_2\ldots x_n\end{smallmatrix}\right)(-1)^{\sum_{i<j}x_i} f^{(N)}_{p_1\ldots p_n}(X_1.\ldots.\ell(Y_1,Y_2).\ldots.X_n)\\
&+\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} y_1y_2x_1\ldots\hat{j}\ldots x_n\\ y_1x_1\ldots y_2\ldots x_n\end{smallmatrix}\right)\ell'\Big(f_1^{(1)}(Y_1), f^{(N)}_{p_1\ldots p_N}(X_1.\ldots.Y_2.\ldots.X_n)\Big).
\end{aligned}$$
3. On a la même formule par symétrie si $q_2 = 1$ et $q_1 = p_j > 1$.
4. Enfin, si $q_1 = q_2 = 1$, alors
$$\begin{aligned}
&(d_\ell f)^{(N+1)}_{1,1,p_1\ldots\check{j}\ldots p_n}(Y_1.Y_2.X_1.\ldots\hat{j}\ldots.X_n) =\\
&\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} y_1y_2x_1\ldots\hat{j}\ldots x_n\\ y_1x_1\ldots y_2\ldots x_n\end{smallmatrix}\right)\ell'\left(f_1^{(1)}(Y_1).f^{(N)}_{p_1\ldots p_N}(X_1.\ldots.Y_2.\ldots.X_n)\right)\\
&+\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} y_1y_2x_1\ldots\hat{j}\ldots x_n\\ x_1\ldots y_1\ldots x_ny_2\end{smallmatrix}\right)\ell'\left(f^{(N)}_{p_1\ldots p_N}(X_1.\ldots.Y_1.\ldots.X_n).f_1^{(1)}(Y_2)\right)\\
&-(-1)^{\sum_{i<j}x_i}\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} y_1y_2x_1\ldots\hat{j}\ldots x_n\\ x_1\ldots y_1y_2\ldots x_n\end{smallmatrix}\right) f^{(N)}_{p_1\ldots p_n}(X_1.\ldots.\ell(Y_1.Y_2).\ldots.X_n).
\end{aligned}$$

Proposition 7.4. (d_{CH} est un opŕateur de cobord)

Soit $f_1^{(1)} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber. Alors

(i) *Pour tout N, $f_1^{(1)} + \sum_{p_1+\cdots+p_n=N} f^{(N)}_{p_1\ldots p_n}$ définit un morphisme de G_∞ algèbres à l'ordre $N+1$ de $G(\mathcal{G})$ dans $G(\mathcal{G}')$ si et seulement si:*

$$d_{CH}\left(\sum_{p_1+\cdots+p_n=N} f^{(N)}_{p_1\ldots p_n}\right) = 0$$

(ii) *Pour tout $g = \sum_{p_1+\cdots+p_n=N-1} g^{(N-1)}_{p_1\ldots p_n}$, $f + d_{CH}g$ est un morphisme à l'ordre $N+1$.*

(iii) *On a donc*

$$d_{CH} \circ d_{CH} = 0.$$

8. Un exemple

Dans cette section, nous allons montrer comment le premier cocycle fondamental de la cohomologie de Chevalley des champs de vecteurs à valeurs dans les fonctions survit dans la cohomologie de Chevalley-Harrison d'une sous algèbre de Gerstenhaber naturelle de $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans le corps de base.

On note $\mathcal{G} = T^{hom}_{poly}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des tenseurs totalement antisymétriques

$$\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \alpha^{i_1\ldots i_k} \partial_{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_k}$$

tels que chaque coefficient $\alpha^{i_1\ldots i_k}$ est un polynôme homogène de degré k.

$T^{hom}_{poly}(\mathbb{R}^d)$ est une sous algèbre de Gerstenhaber de $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$. En effet, si $\alpha, \beta \in T^{hom}_{poly}(\mathbb{R}^d)$, alors, $\alpha \wedge \beta$ et $[\alpha, \beta]_S$ sont encore des tenseurs homogènes et ils appartiennent à $T^{hom}_{poly}(\mathbb{R}^d)$.

D'autre part, $\mathcal{G}' = \mathbb{R}$ muni de la multiplication usuelle $\alpha \wedge \beta = \alpha\beta$ et du crochet nul $[\alpha, \beta] = 0$ est une algèbre de Gerstenhaber pour la graduation $degré(\alpha) = 0$, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application

$$f_1^1 : T^{hom}_{poly}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \alpha \longmapsto \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha \in \left(T^{hom}_{poly}(\mathbb{R}^d)\right)^0 ; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

est un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber.

Ceci définit donc une cohomologie de Chevalley-Harrison sur les espaces

$$C^N_{p_1\ldots p_n} = Hom\left(\underbrace{\bigotimes}^{p_1}(\mathcal{G}[1])[1]. \ldots .\underbrace{\bigotimes}^{p_n}(\mathcal{G}[1])[1], \mathcal{G}'[1-N-n]\right).$$

On sait dans [AAC1] ou [AAC2], que le premier cocycle fondamental de Chevalley pour les champs de vecteurs ou les tenseurs linéaires est un 3-cocycle qui s'écrit:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \partial_{i_3}\alpha_1^{i_1}\partial_{i_1}\alpha_2^{i_2}\partial_{i_2}\alpha_3^{i_3} - \partial_{i_2}\alpha_1^{i_1}\partial_{i_1}\alpha_3^{i_3}\partial_{i_3}\alpha_2^{i_2}.$$

Considèrons donc l'application $f^3_{111} \in C^3_{111}$ définie ainsi:

$$f^3_{111}\big((\alpha_1)\bullet(\alpha_2)\bullet(\alpha_3)\big) = \partial_{i_3}\alpha_1^{i_1}\partial_{i_1}\alpha_2^{i_2}\partial_{i_2}\alpha_3^{i_3} - \partial_{i_2}\alpha_1^{i_1}\partial_{i_1}\alpha_3^{i_3}\partial_{i_3}\alpha_2^{i_2},$$

si tous les α_j sont des champs de vecteurs, 0 sinon. (On a utilisé la notation (α) pour représenter un paquet contenant le seul tenseur α.)

L'application $f = f^3_{111}$ n'est pas nulle car $f^3_{111}\big((x_1\partial_2)\bullet(x_2\partial_3)\bullet(x_3\partial_1)\big) = 1$. Elle est bien définie sur $G(\mathcal{G})$. De plus, elle est un cocycle car $d_m(f) \in C^4_{211}$ mais $f(m(\alpha\underline{\otimes}\beta), \alpha_2, \alpha_3)$ est non nul seulement si $\alpha \wedge \beta$ est un champ de vecteurs, c'est à dire si α est une constante et β est un champ de vecteurs ou β est une constante et α est un champ de vecteurs.

$m'\big(f^1_1(\alpha), f(\beta, \alpha_2, \alpha_3)\big)$ est non nul seulement si α est une constante et β est un champ de vecteurs.

De même, $m'\big(f(\alpha, \alpha_2, \alpha_3), f^1_1(\beta)\big)$ est non nul seulement si β est une constante et α est un champ de vecteurs.

Il nous reste

$$(d_m f)\big((\alpha), (\beta), (\alpha_2), (\alpha_3)\big) = -f^3_{111}(\alpha\beta, \alpha_2, \alpha_3) + \alpha f^3_{111}(\beta, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

ou

$$(d_m f)\big((\alpha), (\beta), (\alpha_2), (\alpha_3)\big) = \beta f^3_{111}(\alpha, \alpha_2, \alpha_3) - f^3_{111}(\alpha\beta, \alpha_2, \alpha_3) = 0.$$

D'autre part, $d_\ell(f) = 0$. En effet, on a $\ell' = 0$ et nécessairement $d_\ell(f) \in C^4_{1111}$.

Alors, les seuls termes restant sont de la forme $f^3_{111}\big(\ell((\alpha)\bullet(\beta))\bullet(\gamma)\bullet(\delta)\big)$. Ces termes sont différents de 0 seulement si α, β, γ et δ sont des champs de vecteurs. Il ne reste que:

$$\begin{aligned}&(d_\ell f)^4_{1111}\big((\alpha_1)\bullet(\alpha_2)\bullet(\alpha_3)\bullet(\alpha_4)\big) = f([\alpha_1, \alpha_2]_S, \alpha_3, \alpha_4) - f([\alpha_1, \alpha_3]_S, \alpha_2, \alpha_4)\\ &+ f([\alpha_1, \alpha_4]_S, \alpha_2, \alpha_3) + f([\alpha_2, \alpha_3]_S, \alpha_1, \alpha_4) - f([\alpha_2, \alpha_4]_S, \alpha_1, \alpha_3) + f([\alpha_3, \alpha_4]_S, \alpha_1, \alpha_2)\\ &= (d_C f)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0.\end{aligned}$$

De plus, f ne peut pas être un cobord car la seule possibilité serait $f^3_{111} = d_\ell(g^2_{11})$ avec $d_m(g^2_{11}) = 0$. Mais, puisque f^3_{111} s'annule sur les tenseurs qui ne sont pas des champs de vecteurs et puisque $\ell((\alpha)\bullet(\beta)) = -[\alpha, \beta]_S$ n'est un champ de vecteurs que si α et β sont des champs de vecteurs, on peut supposer que g^2_{11} s'annule sur tous les paquets $(\alpha), (\beta)$ sauf si α et β sont des champs de vecteurs.

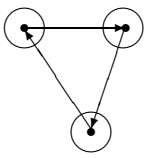
Alors, l'équation $f^3_{111} = d_\ell(g^2_{11})$ s'écrit $f = d_C(g^2_{11})$ et on sait que f n'est pas un cobord pour la cohomologie de Chevalley.

Théorème 8.1.

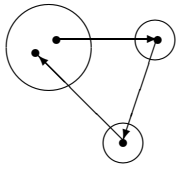
La cohomologie de Chevalley-Harrison de $T^{hom}_{poly}(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ n'est pas triviale.

Remarque 8.2.

Ce cocycle est du type des opérateurs définis par des "graphes avec paquets" introduits par Gammella et Halbout (voir [GaHa]*). Il est associé au graphe:*



Le fait de se restreindre à $T^{hom}_{poly}(\mathbb{R}^d)$ nous a permis d'éliminer dans le calcul de $d_m(f^3_{111})$ le graphe suivant:



References

[AAC1] W. Aloulou, D. Arnal, R. Chatbouri, *Cohomologie de Chevalley des graphes vectoriels*, Pacific J of Math, vol 229, no 2, (2007) 257-292.

[AAC2] W. Aloulou, D. Arnal, R. Chatbouri, *Chevalley cohomlogy for linear graphs*, Lett. Math. Phys. vol 80 (2007) 139-154.

[AMM] D. Arnal, D. Manchon, M. Masmoudi, *Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich*, Pacific J of Math, vol 203, no 1 (2002), 23-66.

[BGHHW] M. Bordemann, G. Ginot, G. Halbout, H.C. Herbig, S. Waldmann, *Formalité G_∞ adaptée et star-représentations sur des sous variétés coïsotropes*, math.QA/0504276 v 1 13 Apr 2005.

[G] G. Ginot, *Homologie et modèle minimal des algèbres de Gerstenhaber*, Ann. Math. Blaise Pascal, vol 11, no 1 (2004), 95-126.

[GaHa] A. Gamella, G. Halbout, *G_∞-Formality Theorem in Terms of Graphs and Associated Chevalley-Eilenberg-Harrison Cohomology* , Comm. in algebra Vol 33. N° 10, sep 2005, 3515-3528.

[GH] G. Ginot, G. Halbout, *A formality theorem for Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. Vol 66 (2003), 37-64.

[K] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. Vol 66 (2003), no. 3, 157-216.

[L] J.L. Loday, *Cyclic Homology*, Second Edition, Volume 301, Grundlerhren der Mathematischern Wissenschaften, A series of compehensive studies in mathematics, Springer.

[T] D. Tamarkin, *Another proof of M. Kontsevich's formality theorem*, math.QA/9803025.

Institut de Mathématiques de Bourgogne, UMR CNRS 5584, Université de Bourgogne, U.F.R. Sciences et Techniques B.P. 47870, F-21078 Dijon Cedex, France
E-mail address: Didier.Arnal@u-bourgogne.fr

Département de Mathématiques, Unité de Recherche Physique Mathématique, Faculté des Sciences de Monastir, Avenue de l'environnement, 5019 Monastir, Tunisie
E-mail address: Walid.Aloulou@ipeim.rnu.tn
E-mail address: Ridha.Chatbouri@ipeim.rnu.tn