



# Régularisation de l'équation de Langevin en dimension 1 par le mouvement Brownien fractionnaire

Lounis Tewfik, Saïd Bouabdellah

► **To cite this version:**

Lounis Tewfik, Saïd Bouabdellah. Régularisation de l'équation de Langevin en dimension 1 par le mouvement Brownien fractionnaire. 2007. <hal-00292103>

**HAL Id: hal-00292103**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00292103>**

Submitted on 1 Jul 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Régularisation de l'équation de Langevin en dimension 1 par le mouvement Brownien fractionnaire

Lounis Tewfik<sup>a</sup> et Saïd Bouabdellah<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*tewfik.lounis@gmail.com*

<sup>b</sup>*said.bouabdellah@gmail.com*

---

## Abstract

The main goal of this paper is to provide a fractional stochastic differential equation modelling the physical phenomena governed by the Langevin equation in 1-dimension. A generalized equation leaning on the fractional Brownian motion (fBm) will be proposed, the later will allow a description of the complexity of the physical systems which escape any prediction of the of the standard Langevin equation. We shall begin at first to remind the basic notions of the standard Brownian motion (Bm) and the fractional Brownian motion (fBm), then, we shall establish a generalization to long memory of the Langevin equation.

## Résumé.

L'objectif de ce travail est de donner une équation différentielle stochastique fractionnaire modélisant les phénomènes physiques gouvernés par l'équation de Langevin en dimension 1. Une équation généralisée s'appuyant sur le mouvement brownien fractionnaire mBf sera proposée, elle permettra une description de la complexité des systèmes physiques qui échappent à toute prédiction de l'équation de Langevin standard. On commencera dans un premier temps par rappeler les notions de base du mouvement brownien standard mB et le mouvement brownien fractionnaire mBf, puis, nous établirons une généralisation à mémoire longue de l'équation de Langevin. Ce travail s'inscrit dans le cadre de la continuité de l'application du travail de Lounis (2007) inspiré des travaux de Nualart (2003).

---

## 1 La mémoire courte et longue

Nous connaissons de nombreux modèles stochastiques à mémoire courte: on peut citer les variables indépendantes, les variables m-indépendantes, certain processus de Markov, les moyennes mobiles, la plupart des processus autorégressifs à moyenne mobile (ARMA) et de nombreux processus linéaires. L'avantage de la courte mémoire

est qu'elle induit, le plus souvent, de nombreux théorèmes limites comme les lois des grands nombres, des théorèmes centraux fonctionnels et des théorèmes de grandes déviations. Lorsque la mémoire est longue, la situation est souvent différente. Il y a au moins un siècle que les astronomes ont noté l'existence de séries d'observations à mémoire persistante. Depuis lors, des phénomènes de même type ont été observés, notamment, en chimie, en hydrologie, en climatologie, et en économie. De telles séries posent évidemment d'intéressants problèmes statistiques et leur modélisation ainsi que leur traitement statistique ont déjà fait l'objet de plusieurs travaux de recherches. Dans Beran (1994), on trouve quelques exemples historiques traités par modélisation brownienne fractionnaire. La modélisation de certains phénomènes physiques, dits à mémoire longue, peut s'effectuer par l'introduction de termes intégral-différentiels à noyaux faiblement singuliers (càd localement intégrables, mais pas nécessairement continus) dans les équations de Hamilton - Jacobi ou Euler - Lagrange qui régissent la dynamique physique. Il existe également des applications à la modélisation en chimie des polymères ou à la modélisation de la dynamique à l'interface de structures fractales: voir Mehaute (2000) pour l'aspect physique appliquée et, par exemple, Giona and Roman (1992) pour l'aspect physique théorique. De plus, la dérivation fractionnaire peut paraître naturellement lorsqu'un phénomène dynamique est fortement conditionné par la géométrie du problème: un exemple simple, très instructif, est présenté dans la référence Torvik (1984).

## 2 Préliminaires

Dans toute cette partie,  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est un espace de probabilité,  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  une filtration sur cet espace,  $\{X_t, t \geq 0\}$  un processus adapté à valeurs dans  $R^d$ , ( $d \geq 1$ ),  $\{B_t, t \geq 0\}$  est  $\mathcal{F}_t$  mouvement brownien.  $[0, T]$  est un intervalle borné dans  $\mathbb{R}$  sur lequel on définit une subdivision  $(t_i)$  où  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , et on pose  $\Delta = \max(t_i - t_{i-1})$ .

### 2.1 Mouvement brownien ordinaire

Un mouvement brownien ordinaire  $B = \{B_t, t \geq 0\}$  (ou processus de Wiener) est un processus sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$  adapté, continu et admettant les propriétés suivantes :

- $P(B_0 = 0) = 1$   $\mathbb{P}$ -p.s sur  $\Omega$ .
- $\forall s \geq 0$  et  $\forall t \geq 0$  avec  $t \geq s$ ;  $(B_t - B_s)$  est une variable réelle, de loi gaussienne, centrée et de variance  $t - s$ .
- $\forall s \geq 0$  et  $\forall t \geq 0$  avec  $t \geq s$ ;  $(B_t - B_s)$  est indépendant de  $\mathcal{F}_u$  où  $u \leq s$ .

## 2.2 Quelques propriétés du mouvement brownien standard

### 2.2.1 Variation quadratique du mouvement brownien standard

**Définition 2.1** La variation quadratique du mouvement brownien  $B = \{B_t, t \geq 0\}$  est la limite dans  $L^2(\Omega)$  de  $\sum_{i=1}^n |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2$  quand  $\Delta$  tend vers 0.

**Théorème 2.1** La limite ci-dessus existe dans  $L^2(\Omega)$  et vaut  $T$ .

### 2.2.2 Propriété de Markov

**Définition 2.2** La fonction aléatoire  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  est un processus de Markov par rapport à  $\mathcal{F}$ , si pour  $s \geq 0, t \geq 0$  et tout borélien  $A$  de  $\mathbb{R}^d$  on a :

$$P(X_{t+s} \in A | \mathcal{F}_t) = P(X_{t+s} \in A | X_t). \quad (2.1)$$

Cette dernière égalité s'appelle propriété de Markov, cela signifie que la loi de  $X_{t+s}$  sachant  $\mathcal{F}_t$  ne dépend que de  $X_t$ . "La loi du futur ne dépend du passé que par le présent".

**Remark 2.1** Pour plus de détails sur les démonstrations, on peut se rapporter au livre de T. Meyre et F. Comets (2006).

## 3 Mouvement brownien fractionnaire

Un mouvement brownien fractionnaire  $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$ , de paramètre  $H$  dans  $(0, 1)$ , est un processus gaussien centré vérifiant les conditions suivantes :

- (1)  $B^H$  est un processus stationnaire;
- (2)  $\mathbb{E}(B_t^H) = t^{2H}$ ;
- (3)  $B_0^H = 0$ .

Le paramètre  $H$  est l'indice de Hurst.

**Remark 3.1** (1) Si  $H = \frac{1}{2}$ ,  $B^H$  est le mouvement brownien standard.  
(2) Si  $H \neq \frac{1}{2}$ , les accroissements du mBf ne sont pas indépendants.

### 3.1 Quelques propriétés du mBf

**Propriété 3.1**  $B^H$  admet comme fonction de covariance, la fonction  $R_H$  définie pour tout  $(s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  par:

$$R_H(t, s) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}). \quad (3.1)$$

**Remark 3.2** Si  $H = \frac{1}{2}$ , alors:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t^H B_s^H) &= \frac{1}{2}(t + s - |t - s|) \\ &= s \\ &= s \wedge t \\ &= \text{Cov}(B_t, B_s). \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la covariance du mouvement brownien standard.

**Propriété 3.2** La fonction de covariance  $R_H$  définie de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  est continue, semi-définie positive et symétrique.

### 3.2 Correlations à long terme

Le mouvement brownien fractionnaire est caractérisé par la présence de corrélations à long terme lorsque  $H$  est différent de  $\frac{1}{2}$ . Un exposant supérieur à  $\frac{1}{2}$  révèle des phénomènes de persistance, c'est-à-dire que l'évolution du processus tend à suivre ses tendances. Si le processus a augmenté précédemment, la probabilité est forte qu'il continue à le faire. Les processus persistants ont une mémoire à long terme, c'est-à-dire qu'il existe une corrélation à long terme entre les événements actuels et les événements futurs. Chaque observation porte la mémoire des événements qui l'ont précédé. À l'inverse, un exposant inférieur à  $\frac{1}{2}$  révèle un phénomène d'anti-persistance, dans ce cas les accroissements successifs tendent à être négativement corrélés. Une augmentation de la variable tend à être suivi d'une diminution, et inversement.

## 4 Représentation d'un mBf sur un intervalle

Dans cette partie, la représentation du mBf sera faite sur un intervalle  $[0, T]$ , une technique qui s'appuie sur les noyaux de carré intégrable. Fixons l'intervalle  $[0, T]$  et considérons les deux cas:  $H > \frac{1}{2}$  et  $H < \frac{1}{2}$ . **Premier cas:**  $H > \frac{1}{2}$  Nualart (2003)

avait prouvé que:

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t, s) dB_s \quad (4.1)$$

Où la fonction de carré intégrable  $K_H$  définit par:

$$K_H(t, s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du, \quad (4.2)$$

avec  $t > s$ , et en choisissant  $c_H = \left[ \frac{H(2H-1)}{\beta(2-2H, H-\frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}}$ , on a:

$$\int_0^{t \wedge s} K_H(t, u) K_H(s, u) du = R_H(t, s). \quad (4.3)$$

Notons que:

$$\frac{\partial K_H}{\partial t}(t, s) = c_H \left( \frac{t}{s} \right)^{H-\frac{1}{2}} (t-s)^{H-\frac{3}{2}}. \quad (4.4)$$

**Deuxième cas:**  $H < \frac{1}{2}$  Nualart (2003) avait prouvé que:

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t, s) dB_s. \quad (4.5)$$

Où la fonction de carré intégrable  $K_H$  définit par:

$$K_H(t, s) = c_H \left[ \left( \frac{t}{s} \right)^{H-\frac{1}{2}} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - \left( H - \frac{1}{2} \right) s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t u^{H-\frac{3}{2}} (u-s)^{H-\frac{1}{2}} du \right], \quad (4.6)$$

avec  $t > s$ , et en choisissant  $c_H = \left[ \frac{2H}{(1-2H)\beta(1-2H, H+\frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}}$ , on a:

$$\int_0^{t \wedge s} K_H(t, u) K_H(s, u) du = R_H(t, s) \quad (4.7)$$

Notons que:

$$\frac{\partial K_H}{\partial t}(t, s) = c_H \left( H - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{t}{s} \right)^{H-\frac{1}{2}} (t-s)^{H-\frac{3}{2}}. \quad (4.8)$$

## 5 Principe d'invariance

Soit  $\{\xi_i, i \geq 1\}$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, avec  $\mathbb{E}\xi = 0$  et  $\mathbb{E}\xi^2 = \sigma^2$ . On considère la marche aléatoire:

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n \quad , \quad n \geq 1. \quad (5.1)$$

Le théorème de la limite centrale implique que  $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$  converge en loi vers  $\mathcal{N}(0, 1)$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Derrière cette convergence de variables aléatoires se cache une convergence

de fonctions aléatoires. Définissons la ligne polygonale  $X^n$  extrapolant la marche aléatoire  $S$ :

$$X^n(t) = \frac{\sum_{i=1}^{[nt]} \xi_i + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}}{\sigma\sqrt{n}}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (5.2)$$

$X^n$  est une fonction aléatoire réelle continue. On calcule facilement ses accroissements:

$$\begin{pmatrix} X^n(t_1) \\ X^n(t_2) - X^n(t_1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{[nt_1]} \xi_i \\ \sum_{i=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \xi_i \end{pmatrix} + o_{L^2}(1) \\ \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, t_1) \otimes \mathcal{N}(0, t_2 - t_1)$$

si  $n \rightarrow \infty$ , par la théorème de la limite centrale. Plus généralement, pour une subdivision arbitraire  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_m$ , on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [X^n(t_i)]_{i=1}^m - X^n(t_{i-1})]_{i=1}^m = [B(t_i) - B(t_{i-1})]_{i=1}^m \quad (5.3)$$

en loi, et donc la convergence en loi des martingales fini-dimensionnelles:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [X^n(t_i)]_{i=1}^m = [B(t_i)]_{i=1}^m. \quad (5.4)$$

On admet le théorème suivant:

**Théorème 5.1 (Donsker (1951): Principe d'invariance)** *La suite de processus aléatoires  $\{X^n, n \geq 1\}$  converge en loi vers le mouvement brownien. En d'autres termes, soit  $P_n$  la loi de  $X^n$  sur  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , et  $P_B$  la loi de  $B$ . Alors,*

$$P_n \rightarrow P_B \quad \text{étroitement}$$

.

## 6 Équation de Langevin

On considère le modèle d'une particule de masse  $m$  qui se déplace sur une droite, soumise à une force de friction et une force dynamique extérieure  $F_t$  qui modélise les chocs avec les autres particules. On suppose que la particule n'est soumise à aucune autre force extérieure. D'après la seconde loi de la dynamique non relativiste de Newton dans un référentiel Galilien, la position  $x_t$  est alors solution de l'équation différentielle:

$$mx_t'' = -bx_t' + F_t, \quad (6.1)$$

qu'on peut écrire aussi sous la forme:

$$mv_t' = -bv_t + F_t. \quad (6.2)$$

avec  $b > 0$ , le coefficient de friction et  $x_t$  la position instantanée de la particule. Si la force extérieure  $F_t$  est dû à des chocs, nombreux et petits, le principe d'invariance de la section précédente nous incite à considérer que  $\int_0^t F_s ds = \sigma B_t$ , pour un coefficient  $\sigma > 0$ , paramétrisant l'intensité de chocs et leurs amplitudes. La force  $F$  est alors un bruit blanc i.e. la  $\ddot{x}$  dérivée  $\dot{x}$  d'un mouvement brownien, et l'équation ci-dessus est improprement écrite, elle doit porter sur les différentielles stochastiques. La vitesse  $V_t = x'_t$  est solution de l'équation différentielle stochastique:

$$m dV_t = -bV_t dt + \sigma dB_t \quad (6.3)$$

au sens où, presque sûrement:

$$V_t - V_0 + \int_0^t \frac{b}{m} V(s) ds = \frac{\sigma}{m} B_t \quad , \quad \forall t \geq 0. \quad (6.4)$$

Cette équation différentielle stochastique fut proposé par Paul Langevin en 1908.

### 6.1 Équation de Langevin en dimension 1

Soit  $B$  un  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  mouvement brownien unidimensionnel. On admet la proposition suivante:

**Proposition 6.1** *La solution de l'équation de Langevin (6.3), partant de  $V_0 \in L^2(\mathcal{F}_0)$ , est donnée par le processus d'**Ornstein-Uhlenbeck**, défini par:*

$$V_t = e^{-\frac{b}{m}t} V_0 + \int_0^t e^{-b(t-s)} \frac{\sigma}{m} dB_s. \quad (6.5)$$

On peut montrer par un simple calcul que:

$$\mathbb{E}V_t = e^{-\frac{b}{m}t} \mathbb{E}V_0. \quad (6.6)$$

### 6.2 $mBf$ et l'équation de Langevin

Si on examine de prêt l'équation de Langevin, on est parti d'une force aléatoire  $F_t$  qui est approximé par un bruit blanc. Vu que le mouvement brownien standard est un processus de markov (par rapport à sa filtration), et pour mieux mettre en évidence l'influence du passé, il sera judicieux d'élaborer un modèle qui tient compte de l'effet du passé tout en gardant les caractères gaussiens et la stationnarité. À cet effet, on introduit le mouvement brownien fractionnaire (processus non markovien pour  $H \neq \frac{1}{2}$ ). Stroock (1982) avait montré qu'on peut approcher un bruit blanc par un processus  $(\theta_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ . Quand  $\epsilon \rightarrow 0$  cette convergence est en loi dans  $\mathcal{C}_0([0, T])$ .



- Si  $H > \frac{1}{2}$ , alors  $\int_0^t K_H(t, s)\theta_\epsilon(s)ds$  converge en loi quand  $\epsilon > 0$  vers  $B_t^H$ .
- Si  $H < \frac{1}{2}$ , on a le même résultat de convergence en loi mais avec des conditions supplémentaires qu'on notera dans toute la suite (CS). Pour plus de détail sur les conditions de type (CS), on se réfère aux travaux de Bardina *et al.* (2003). Par exemple, quand on approche le bruit blanc par le processus:

$$\theta_\epsilon(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k I_{[k-1, k)}\left(\frac{s}{\epsilon^2}\right), \quad (6.7)$$

où  $\{\xi_k, k \geq 1\}$  est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, avec  $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ ,  $\text{Var}\xi_1^2 = 1$ , on suppose que les variables aléatoires  $\xi_k$  ont des moments d'ordre  $m \in \mathbb{N}$  et  $m > \frac{1}{H}$ .

Dans le but d'écrire l'équation de Langevin généralisée, on traitera séparément les cas où  $H$  est supérieur à  $\frac{1}{2}$  et  $H$  est inférieur à  $\frac{1}{2}$ .

**Premier cas:**  $H > \frac{1}{2}$  Considérons l'équation de Langevin (6.3):

$$mv'_t = -bv_t + F_t. \quad (6.8)$$

Le processus  $\theta_\epsilon(t)$ , où  $\theta_\epsilon(t)$  est un bruit blanc quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , (l'existence de ce processus est dû à (Stroock (1982))). On suppose que pour tout  $\epsilon > 0$ , on a:

$$F_t + g_{\epsilon(t)} = \theta_\epsilon(t), \quad (6.9)$$

où  $g_\epsilon$  est une fonction déterministe telle que  $g_\epsilon \rightarrow 0$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . Multiplions les deux membres de l'équation (6.3) par la fonction de carré intégrable  $K_H$  définie par:

$$K_H(t, s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du, \quad (6.10)$$

avec  $t > s$  et  $c_H = \left[ \frac{H(2H-1)}{\beta(2-2H, H-\frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}}$ . En intégrant sur l'intervalle  $[0, t]$ , on obtient pour tout  $\epsilon > 0$

$$m \int_0^t K_H(t, s) dv_s = -b \int_0^t K_H(t, s) v_s ds + \int_0^t K_H(t, s) \theta_\epsilon(s) ds - \int_0^t K_H(t, s) g_\epsilon(s) ds \quad (6.11)$$

Au passage à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\int_0^t K_H(t, s)\theta_\epsilon(s)ds$  converge en loi vers  $B_t^H$  dans  $\mathcal{C}_0([0, T])$  Bardina *et al.* (2003); Tudor (2003). Dans ce cas, presque sûrement on a l'équation suivante

$$m \int_0^t K_H(t, s) dV_s = -b \int_0^t K_H(t, s) V_s ds + \sigma B_t^H \quad (6.12)$$

L'équation (6.12) sera utile pour définir l'équation de Langevin généralisée.

**Deuxième cas:**  $H < \frac{1}{2}$  D'une manière analogue en utilisant le noyau

$$K_H(t, s) = c_H \left[ \left( \frac{t}{s} \right)^{H-\frac{1}{2}} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (H-\frac{1}{2}) s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t u^{H-\frac{3}{2}} (u-s)^{H-\frac{1}{2}} du \right] \quad (6.13)$$

avec  $t > s$  et en choisissant  $c_H = \left[ \frac{2H}{(1-2H)\beta(1-2H, H+\frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}}$ , et sous les conditions de type (CS), on obtient une équation analogue à (6.12).

## 7 Définition de la vitesse fractionnaire

**Premier cas:**  $H > \frac{1}{2}$  Après approximation du terme  $\int_0^t K_H(t, s) V_s ds$  par une somme (au sens de Riemann) et vu que  $K_H(t, s) ds$  admet la même unité en temps que  $t^{H-\frac{1}{2}}$ , il est naturel de définir une vitesse fractionnaire en se basant sur l'intégrale  $\int_0^t K_H(t, s) V_s ds$  normalisée par une fonction de type  $\Phi_H(t) = A_H t^{\frac{1}{2}-H}$ , où  $A_H$  est une constante qui dépend de  $H$ , dont le rôle sera explicité plus loin. On définit ainsi la vitesse fractionnaire  $V_t^H$  par:

$$V_t^H = V_0 + \Phi_H(t) \int_0^t K_H(t, s) V_s ds \quad (7.1)$$

Posons  $f_H(t) = \int_0^t K_H(t, s) V_s ds$  et calculons sa dérivée par rapport à  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{df_H(t)}{dt} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} \left( \int_0^t K_H(t, s) V_s ds - \int_0^{t-h} K_H(t-h, s) V_s ds \right) \right] \\ &= \int_0^t \frac{\partial K_H(t, s)}{\partial t} V_s ds + \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} \int_{t-h}^t K_H(t, s) V_s ds \right] \end{aligned}$$

D'autre part

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \int_{t-h}^t K_H(t, s) V_s ds \right) = 0 \quad (7.2)$$

On en déduit

$$\frac{df_H(t)}{dt} = \int_0^t \frac{\partial K_H(t, s)}{\partial t} V_s ds \quad (7.3)$$

Par suite

$$\frac{dV_t^H}{dt} = \Phi_H'(t) f_H(t) + \Phi_H(t) \frac{df_H(t)}{dt} \quad (7.4)$$

Soit donc

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial K_H(t, s)}{\partial t} V_s ds &= \frac{1}{\Phi_H(t)} \frac{d(V_t^H - V_0)}{dt} - \frac{\Phi'_H(t)}{\Phi_H(t)^2} (V_t^H - V_0) \\ &= \frac{d\left(\frac{V_t^H - V_0}{\Phi_H(t)}\right)}{dt} \end{aligned}$$

Multiplions les deux termes l'équation (6.12) par  $\Phi_H(t)$ , on obtient ainsi:

$$m \Phi_H(t) \int_0^t K_H(t, s) dV_s = -b \Phi_H(t) \int_0^t K_H(t, s) V_s ds + \sigma \Phi_H(t) B_t^H \quad (7.5)$$

soit

$$m \Phi_H(t) \int_0^t K_H(t, s) \frac{dV_s}{ds} ds = -b (V_t^H - V_0) + \sigma \Phi_H(t) B_t^H \quad (7.6)$$

On introduit la notation suivante:

**Notation:**

Pour toute fonction  $u(x) = \int_0^x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} g(y) dy$ , on note:

$$\mathcal{P}^H(u(x)) = \int_0^x f(x, y) \frac{\partial g(y)}{\partial y} dy \quad (7.7)$$

(Le rôle de  $\mathcal{P}^H$  consiste à permuter les dérivées partielles).

Puisque

$$\frac{d\left(\frac{V_t^H - V_0}{\Phi_H(t)}\right)}{dt} = \int_0^t \frac{\partial K_H(t, s)}{\partial t} V_s ds \quad (7.8)$$

il est claire que:

$$\mathcal{P}^H\left(\frac{d\left(\frac{V_t^H - V_0}{\Phi_H(t)}\right)}{dt}\right) = \int_0^t K_H(t, s) \frac{dV_s}{ds} ds \quad (7.9)$$

Finalement, l'équation de Langevin, quand  $H > \frac{1}{2}$ , s'écrit sous la forme:

$$m\mathcal{P}^H\left(\frac{d\left(\frac{V_t^H - V_0}{\Phi_H(t)}\right)}{dt}\right) = -\frac{b}{\Phi_H(t)}(V_t^H - V_0) + \sigma B_t^H \quad (7.10)$$

**Deuxième cas:**  $H < \frac{1}{2}$

Par un raisonnement analogue, en considérant le noyau de carré intégrable  $K_H$  correspondant et sous les conditions de type (CS), on obtient l'équation (7.10). En résumé, l'équation généralisée de Langevin sur l'intervalle  $[0, T]$  s'écrit: Pour  $H \neq \frac{1}{2}$

$$m\mathcal{P}^H\left(\frac{d\left(\frac{V_t^H - V_0}{\Phi_H(t)}\right)}{dt}\right) = -\frac{b}{\Phi_H(t)}(V_t^H - V_0) + \sigma B_t^H \quad (7.11)$$

Pour  $H = \frac{1}{2}$ , l'équation de Langevin est donnée par:

$$m dV_t = -bV_t dt + \sigma dB_t \quad (7.12)$$

**Remark 7.1** *En s'appuyant sur l'équation (6.6), et en choisissant les noyaux correspondants avec les conditions correspondantes, on a:*

$$\mathbb{E}V_t^H = \mathbb{E}(V_0)(1 + \Phi_H(t) \int_0^t K_H(t, s) e^{-\frac{b}{m}s} ds) \quad (7.13)$$

## 8 Indice de Hurst et l'analyse R/S

L'indice de Hurst peut être calculer en utilisant la méthode de l'analyse R/S Hurst (1951). Pour une série temporelle,  $X = X_1, X_2, \dots, X_n$ , la méthode R/S est comme suit:

(1) On calcule la valeur moyenne  $m$ :

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (8.1)$$

(2) On calcule la série Y de l'ajustement moyen:

$$Y_t = X_t - m, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (8.2)$$

(3) On calcule la série Z de la déviation cumulative:

$$Z_t = \sum_{i=1}^t Y_i, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (8.3)$$

(4) On calcule la série des étendues R:

$$R_t = \max(Z_1, Z_2, \dots, Z_t) - \min(Z_1, Z_2, \dots, Z_t), \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (8.4)$$

(5) On calcule la série R de la déviation standard:

$$S_t = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (X_i - \mu)^2}, \quad \mu = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t X_i, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (8.5)$$

(6) On calcule la série R/S des étendues normalisées:

$$(R/S)_t = \frac{R_t}{S_t}, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (8.6)$$

Hurst (1951) avait montré que lorsque  $t$  est assez grand, on a:

$$(R/S)_t = \lambda t^H \quad (8.7)$$

Soit donc:

$$\ln((R/S)_t) = H \ln(t) + \ln(\lambda) \text{ où } \lambda > 0 \quad (8.8)$$

En faisant une regression simple où la variable à expliquer est  $\ln((R/S)_t)$  et la variable explicative est  $\ln(t)$ , la pente de la droite de regression fournit une estimation de l'exposant H de Hurst (1951). Bien évidemment, Dans la littérature, d'autres formes de cette méthodes existent et pour cela on peut se référer au travail de Hurst (1951). Une estimation de la moyenne de l'exposant H a été donnée par Feller (1951).

## 9 Estimation de $A_H$

Reprenons l'expression de la vitesse fractionnaire  $V_t^H$  quand  $H \neq \frac{1}{2}$ .

$$V_t^H = V_0 + \Phi_H(t) \int_0^t K_H(t, s) V_s ds, \quad (9.1)$$

où

$$\Phi_H(t) = A_H t^{\frac{1}{2}-H}. \quad (9.2)$$

On a donc:

$$A_H = \frac{t^{H-\frac{1}{2}}(V_t^H - V_0)}{\int_0^t K_H(t, s) V_s ds} \quad (9.3)$$

Après estimation de  $H$ , on utilise le noyau correspondant  $K_H$ , puis on estime  $A_H$ , de la manière suivante:

On définit sur l'intervalle  $[0, t]$ , une subdivision  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$ . On choisira  $t_0 = 0$  et  $t_1$  très proche de 0. Dans ce cas on estime  $A_H$  par:

$$\widehat{A}_H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{t_i^{H-\frac{1}{2}} (\widehat{V}_{t_i}^H - V_0)}{\int_0^{t_i} K_H(t_i, s) V_s ds}$$

Où  $\widehat{V}_{t_i}^H$  est la vitesse fractionnaire estimée à l'instant  $t_i$ .

Le rôle de  $A_H$  consiste à mieux approcher les valeurs expérimentales des valeurs théoriques.

## 10 Utilisation du modèle

On considère la subdivision précédente de l'intervalle  $[0, t]$ , et on mesure expérimentalement les vitesses fractionnaires  $\widehat{V}_{t_i}^H$ , à tout instant  $(t_i)_{i=1}^n$ . En utilisant la méthode R/S, on estime le paramètre de Hurst  $H$ . Avec la valeur de  $H$  estimée, et en considérant le noyau correspondant, on estime  $A_H$ . En revenons à l'équation (7.1), et en remplaçant  $H$  et  $A_H$  par leurs valeurs estimées, on obtient une expression de la vitesse du phénomène physique considéré. Bien évidemment, la valeur de  $H$ , caractérise la série chaotique correspondant au phénomène physique étudié.

## 11 Simulation de la vitesse fractionnaire

Une simulation a été faite pour certaines valeurs de  $H$  quand  $H > \frac{1}{2}$  et  $H < \frac{1}{2}$  pour une valeur fixée de  $A_H$  voir figures .

## 12 Conclusion

Les mouvements browniens fractionnaires (mBf) modélisent de très nombreux phénomènes auto-similaires, ou du moins localement auto-similaires: fluctuations boursières en mathématiques financières, trafic sur Internet, textures en analyse d'images, approches de la turbulence en physique des fluides et la liste est longue. Un domaine en pleine expansion est celui des équations différentielles stochastiques régies ou guidées par un mouvement brownien fractionnaire. Les expérimentateurs cherchent souvent à disposer de modèles leur fournissant des ensembles de fonctions génériques qu'ils pourront mieux comparer à leurs observations qu'un exemple particulier de fonction. Toutes ces raisons expliquent sans doute la popularité des modèles où l'irrégularité se conjugue avec l'aléatoire. On fait alors appel au probabiliste pour construire des processus (fonctions dépendant du hasard) tels que l'on puisse spécifier leur irrégularité sans pour autant pouvoir prédire la forme particulière de la fonction générée. Pour

illustrer cette manière de penser, et connaissant les propriétés du mBf, il apparaît comme un bon processus pour réaliser une telle modélisation.

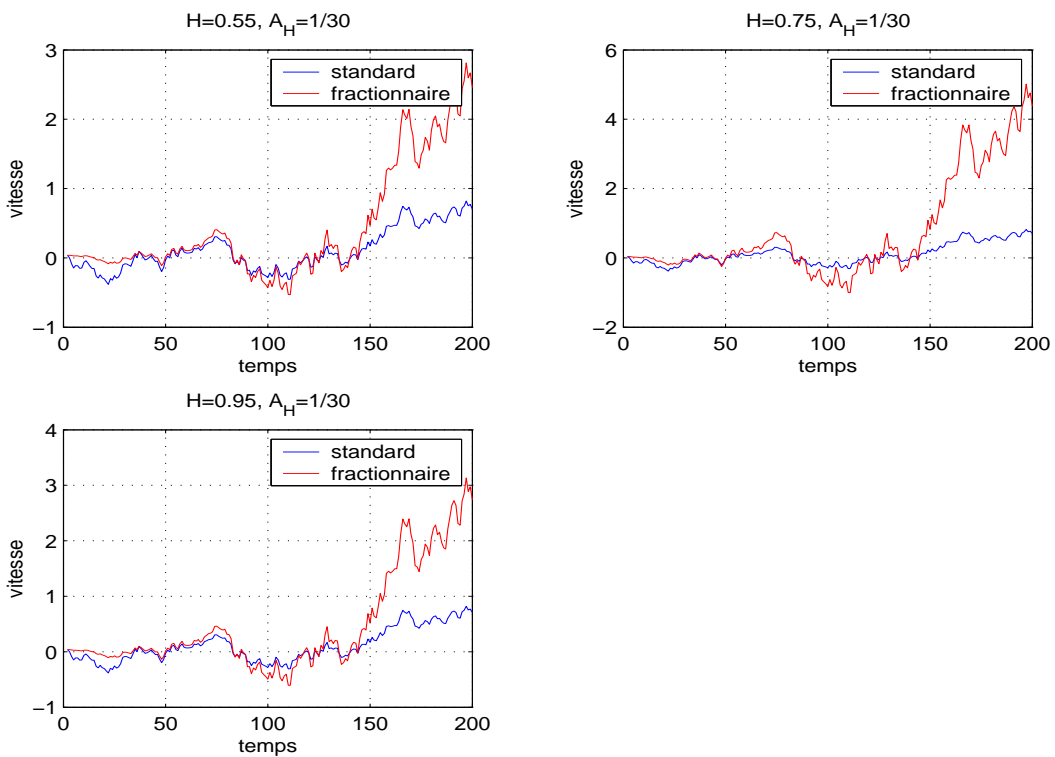


Fig. 1. Simulation des vitesses standard et fractionnaires pour  $H > \frac{1}{2}$ .

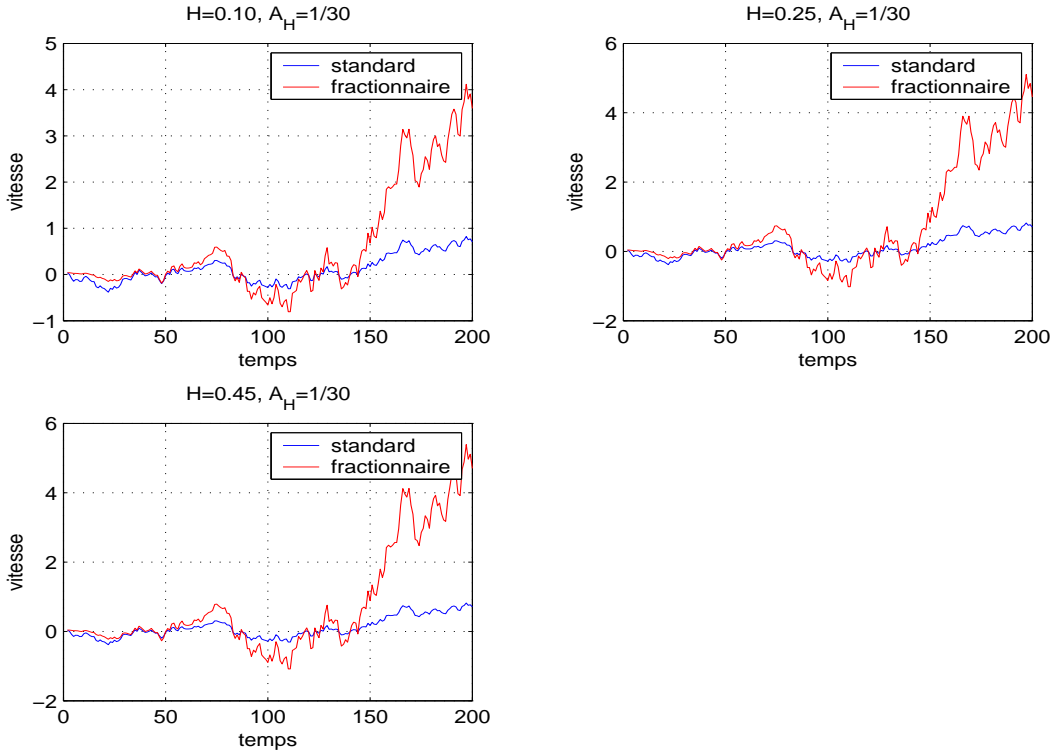


Fig. 2. Simulation des vitesses standard et fractionnaires pour  $H < \frac{1}{2}$ .

## References

- Bardina, X., Jolis, M., and Tudor, C. A. (2003). Convergence in law to the multiple fractional integral. *Stochastic Process. Appl.*, **105**(2), 315–344.
- Beran, J. (1994). *Statistics for long-memory processes*, volume 61 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman and Hall, New York.
- Feller, W. (1951). The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables. *Ann. Math. Statistics*, **22**, 427–432.
- Giona, M. and Roman, H. E. (1992). Fractional diffusion equation on fractals: one-dimensional case and asymptotic behaviour. *Journal of physics A: Mathematical and general*, **25**(8), 2093 – 2105.
- Hurst, H. (1951). Long-term storage of reservoirs: an experimental study. *Transactions of the the american society of civil engineers*, **116**, 770 – 799.
- Lounis, T. (2007). *Stochastic integration with respect to fractionnal motion and application*. Mémoire de master de mathématiques et applications, Université de franche-Comté, Besançon.
- Mehaute, A. L. (2000). *Les géométries fractales : l'espace-temps brisé*.
- Nualart, D. (2003). Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications. In *Stochastic models (Mexico City, 2002)*, volume 336 of *Contemp. Math.*, pages 3–39. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- Stroock, D. W. (1982). *Lectures on topics in stochastic differential equations*, volume 68 of *Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay. With notes by Satyajit



Karmakar.

T. Meyre, F. Comets (2006). *Calcul stochastique et modèles de diffusions*.

Torvik, P. J. (1984). A variational approach to the dynamics of structures having mixed or discontinuous boundary conditions. *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **51**(4), 831–836.

Tudor, C. A. (2003). *Calcul stochastique gaussien et applications à l'inférence statistique*. Habilitation à diriger des recherches, Université de Paris 1.