

Linear diffusion with stationary switching regime

Xavier Guyon, Serge Iovleff, Jian-Feng Yao

▶ **To cite this version:**

Xavier Guyon, Serge Iovleff, Jian-Feng Yao. Linear diffusion with stationary switching regime. ESAIM: Probability and Statistics, 2004, 8, pp.25-35. 10.1051/ps:2003017 . hal-00272033

HAL Id: hal-00272033
https://hal.science/hal-00272033

Submitted on 10 Apr 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Diffusion linéaire à régime stationnaire

Xavier Guyon*, Serge Iovleff*, Jian-Feng Yao**
* SAMOS, Université Paris 1 et **IRMAR, Université de Rennes 1
guyon@univ-paris1.fr

February 14, 2002

Abstract

Soit Y une diffusion de Ornstein-Uhlenbeck gouvernée par un régime X : $dY_t = -a(X_t)Y_t dt + \sigma(X_t)dW_t, Y_0 = y_0$. On établit que $\alpha = E_\mu(a(X_0)) < 0$ est une condition suffisante d'ergodicité de Y lorsque X est stationnaire de loi invariante μ. Puis on s'intéresse à l'existence de moments pour la loi invariante de Y. Utilisant les résultats de Brandt sur les modèles à coefficient aléatoire, et le fait que Y est, conditionnellement à X, gaussien, on établit simplement une condition d'existence du moment d'ordre $s \geq 0$ lorsque X est un processus de saut markovien à nombre fini d'états. On retrouve un résultat de Basak et altri établi à l'aide de techniques de contrôle de système linéaire.

Mots clés : diffusion de Ornstein-Uhlenbeck à régime stationnaire, modèle à coefficient aléatoire, processus markovien de sauts, ergodicité, moment de la loi invariante.

Classification AMS : 60J60, 60J75

1 Introduction

Les modèles à temps discret $Y = (Y_n, n \in \mathbf{N})$ gouvernés par une chaîne de Markov $X = (X_n, n \in \mathbf{N})$ sont bien adaptés aux situations où un régime autonome X module la dynamique de Y. Ces modèles, relativement parcimonieux en nombre de paramètres, élargissent significativement le cas d'un régime unique. Parmi eux, les modèles auto-régressifs à régime markovien (switching Markov AR model) sont les plus populaires. Leur utilisation en économétrie est due à Hamilton ([7, 8]). Leur étude statistique (cf. par exemple [8], [15], [9], [10]) a précédé les études probabilistes. L'ergodicité a été étudiée par Francq et Roussignol [6] et par Yao et Attali [17]. Dans ce dernier travail, les auteurs donnent :

(i) des conditions de stabilité d'un AR non-linéaire Y à régime markovien X;

(ii) des conditions d'existence d'un moment d'ordre $s \geq 0$ pour la loi de Y.

Ces deux résultats, obtenus sous des conditions de sous-linéarité ou de Lipshitz pour la fonction d'auto-régression, sont préalables à toute étude asymptotique.

Notre objectif est d'établir des résultats (i) et (ii) pour une diffusion de Ornstein-Uhlenbeck (notée O.U.) $Y = (Y_t, t \geq 0)$ à régime $X = (X_t, t > 0)$. On obtient une condition générale de stabilité (i) de Y si le régime X est stationnaire. La question (ii) est étudiée par Basak, Bisi et Ghosh [1] pour X un processus de saut markovien à nombre fini d'états, Y étant multidimensionnelle. Leur approche utilise la stabilité et le contrôle de systèmes linéaires à saut, perturbés ou non (cf. Mariton [14], Ji et Chizeck [12]). Notre approche de cette question (ii) est différente : elle repose d'une part sur l'utilisation d'une représentation $AR(1)$ à coefficient aléatoire de $Y^{(\delta)} = (Y_{n\delta}, n \in \mathbf{N})$, d'autre part sur les résultats d'ergodicité de Brandt [3] pour les modèles à coefficient aléatoire, et enfin sur l'utilisation du caractère *conditionnellement gaussien* de Y. Nous obtenons ainsi une condition suffisante d'existence de moment d'ordre $s > 0$ pour la loi

invariante de Y. Quelques manipulations simples montrent que cette condition est équivalente à celle donnée par [1].

Le modèle de diffusion à régime X est présenté au §2. On établit au §3 la condition (i) d'ergodicité de Y si le régime X est stationnaire. Le §4 établit (ii), l'existence d'un moment d'ordre $s \geq 0$ pour la loi invariante de Y lorsque X est un processus de saut markovien à nombre fini d'états.

2 Diffusion linéaire à régime stationnaire

On dira qu'un processus à temps continu $S = (S_t)_{t\geq 0}$ est *ergodique* s'il existe une mesure de probabilité ν telle que quand $t \to \infty$, la loi de S_t converge faiblement vers ν indépendamment de la loi initiale de S_0. ν sera appelée la *loi limite* de S. Si S est un processus de Markov, ν est la loi invariante de S et elle est unique.

Nous définissons une diffusion Y à régime X en deux étapes. On se donne d'abord un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$, dit de *régime*. On supposera toujours par la suite que X est stationnaire, à valeur réelle et défini sur un espace de probabilité $(\Omega, , Q)$.

Soit ensuite $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien (MB) standard défini sur un espace de probabilité $(\Theta, \mathcal{B}, Q')$, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$ la filtration du MB. On considérera l'espace produit $(\Omega \times \Theta, \times \mathcal{B}, Q \otimes Q')$, $\mathbb{P} = Q \otimes Q'$ et $\mathbb{E}$ l'espérance associée. Conditionnellement à X, $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus de diffusion à valeur réelle défini, pour tout $\omega \in \Omega$, par :

1. Y_0 est une v.a. définie sur $(\Theta, \mathcal{B}, Q')$, $\mathcal{F}_0$-mesurable ;
2. Y est solution de l'EDS linéaire

$$dY_t = a(X_t)Y_t dt + \sigma(X_t)dW_t\ , \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Ainsi (Y_t) est une diffusion linéaire à coefficients aléatoires fonctions d'un processus "exogène" (X_t). Ici a et σ sont deux fonctions mesurables à valeurs réelles. L'existence et l'unicité d'une solution forte pour l'Eq. (1) est assurée par la condition **[S]** suivante (voir [13], §5.6 ou [16]), condition que nous supposerons vérifiée par la suite :

[S] : Q-p.s, $t \mapsto a(X_t(\omega))$ et $t \mapsto \sigma(X_t(\omega))$ sont localement bornées.

Notons pour $0 \leq s \leq t$,

$$\Phi(s,t) = \Phi_{s,t}(\omega) = \exp \int_s^t a(X_u)du\ .$$

Le processus Y admet la représentation ([13]) :

$$Y_t = Y_t(\omega) = \Phi(0,t)\left[Y_0 + \int_0^t \Phi(0,u)^{-1}\sigma(X_u)dW_u\right]$$

et pour $0 \leq s \leq t$, Y vérifie la relation de récurrence

$$\begin{aligned} Y_t &= \Phi(s,t)\left[Y_s + \int_s^t \Phi(s,u)^{-1}\sigma(X_u)dW_u\right] \\ &= \Phi(s,t)Y_s + \int_s^t \left[\exp \int_u^t a(X_v)dv\right]\sigma(X_u)dW_u\ . \end{aligned}$$

Il est commode de réécrire cette récurrence sous la forme

$$Y_t(\omega) = \Phi_{s,t}(\omega)Y_s(\omega) + V_{s,t}(\omega)^{1/2}\,\xi_{s,t}\ , \tag{2}$$

où $\xi_{s,t}$ est une variable gaussienne centrée réduite, fonction de $(W_u, s \leq u \leq t)$ et

$$V_{s,t}(\omega) = \int_s^t \exp\left[2\int_u^t a(X_v)dv\right]\sigma^2(X_u)du\ . \tag{3}$$

Pour $\delta > 0$, nous appellerons *discrétisation à pas* δ de Y le processus à temps discret $Y^{(\delta)} = (Y_{n\delta})_n$ où $n \in \mathbb{N}$. Notre étude de Y est basée sur celle de ses discrétisations $(Y^{(\delta)})$.

3 Ergodicité de Y et existence d'une solution stationnaire

3.1 Ergodicité des processus discrétisés $Y^{(\delta)}$

Dans cette section, on fixe $\delta > 0$ et on considère le processus discrétisé $Y^{(\delta)}$. D'après Eq. (2), pour $n \geq 0$,

$$Y_{(n+1)\delta}(\omega) = \Phi_{n+1}(\omega) Y_{n\delta}(\omega) + V_{n+1}(\omega)^{1/2} \xi_{n+1} \ , \tag{4}$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(\omega) &= \exp \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} a(X_u(\omega)) du \ , \\ V_{n+1}(\omega) &= \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} \exp \left[2 \int_u^{(n+1)\delta} a(X_v(\omega)) dv \right] \sigma^2(X_u(\omega)) du \ , \end{aligned}$$

où (ξ_n) est une suite i.i.d gaussienne réduite définie sur $(\Theta, \mathcal{B}, Q')$.

L'équation (4) définit un modèle AR(1) à coefficients aléatoires, la suite des coefficients $(\Phi_n, V_n^{1/2} \xi_n)$ étant stationnaire. On peut alors étendre (4) sur $\mathbb{Z}$.

Proposition 1 *Supposons que les fonctions mesurables a et σ vérifient les conditions suivantes :*

1. $\int |a(x)| \mu(dx) < \infty$ *et* $\alpha := \int \mu(dx) a(x) < 0$ *;*
2. $\int \log^+ \sigma^2(x) \mu(dx) < \infty$.

Alors,

(i) il existe une unique solution stationnaire $(\tilde{Y}_{n\delta})$ satisfaisant sur $\mathbb{Z}$ l'Eq. 4 et donnée par

$$\tilde{Y}_{n\delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_n \Phi_{n-1} \cdots \Phi_{n-k+1} V_{n-k}^{1/2} \, \xi_{n-k} \ , \qquad n \in \mathbb{Z} \ .$$

(ii) Si $Y^{(\delta)}$ est une suite satisfaisant l'Eq. 4 pour $n \geq 0$, de valeur initiale une v. a. Y_0 quelconque, alors p.s.

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log |Y_{n\delta} - \tilde{Y}_{n\delta}| \leq \alpha \delta < 0 \ .$$

Preuve. (i). C'est une conséquence du Theorème 1 de Brandt [3] dont nous vérifions les conditions d'application, à savoir :
(a) $\mathbb{E} \log^+ |\Phi_0| < \infty$; (b) $\mathbb{E} \log^+ |V_0^{1/2} \xi_0| < \infty$; (c) $\gamma_1 := \mathbb{E} \log |\Phi_0| < 0$.
Pour $x, y, a > 0$, $\log^+ x = \max(0, \log x)$ vérifie $\log^+(xy) \leq \log^+ x + \log^+ y$ et $\log^+ x^a = a \log^+ x$.

(c) : en utilisant le théorème de Fubini et l'hypothèse 1), on obtient :

$$\gamma_1 = \mathbb{E} \log |\Phi_0| = \mathbb{E} \int_0^\delta a(X_u) du = \int_0^\delta \mathbb{E} a(X_u) du = \delta \alpha < 0 \ .$$

(a) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \log^+ |\Phi_0| &= \mathbb{E} \log^+ \exp \int_0^\delta a(X_u) du \leq \mathbb{E} \log^+ \exp \int_0^\delta |a(X_u)| du \\ &= \mathbb{E} \int_0^\delta |a(X_u)| du = \delta \, \mathbb{E} |a(X_0)| < \infty \ . \end{aligned}$$

(b) : $\mathbb{E}\log^+|V_0^{1/2}\,\xi_0| \le \mathbb{E}\log^+ V_0^{1/2} + \mathbb{E}\log^+|\xi_0|$.

Le deuxième terme du majorant est fini puisque ξ_0 est gaussien. Pour le premier terme :

$$\begin{aligned} V_0 &= \int_0^\delta \exp\left[2\int_u^\delta a(X_v)dv\right]\sigma^2(X_u)du \le \int_0^\delta \exp\left[2\int_u^\delta |a(X_v)|dv\right]\sigma^2(X_u)du \\ &\le \int_0^\delta \exp\left[2\int_0^\delta |a(X_v)|dv\right]\sigma^2(X_u)du = \exp\left[2\int_0^\delta |a(X_v)|dv\right]\int_0^\delta \sigma^2(X_u)du\ . \quad (5) \end{aligned}$$

D'où

$$\log^+ V_0 \le 2\int_0^\delta |a(X_v)|dv + \log^+\int_0^\delta \sigma^2(X_u)du\ .$$

Le premier terme est d'espérance finie d'après l'hypothèse (1). Pour le second terme, $\log^+$ étant concave

$$\begin{aligned} \log^+\int_0^\delta \sigma^2(X_u)du &= \log^+\left\{\delta\int_0^\delta \sigma^2(X_u)(du/\delta)\right\} \\ &\le \log^+\delta + \log^+\int_0^\delta \sigma^2(X_u)(du/\delta) \\ &\le \log^+\delta + \int_0^\delta \log^+\sigma^2(X_u)(du/\delta)\ , \end{aligned}$$

qui est d'espérance finie d'après l'hypothèse (2).

(ii). On a pour $n \ge 1$,

$$Y_{n\delta} - \tilde{Y}_{n\delta} = \Phi_n\cdots\Phi_1(Y_0 - \tilde{Y}_0).$$

Les hypothèses entraînent que p.s.

$$\lim_n \frac{1}{n}\log|\Phi_n\cdots\Phi_1| = \gamma_1 < 0\ .$$

La conclusion s'en déduit immédiatement. ∎

Une conséquence de la proposition est que sous la loi $\mathbb{P}$, si on note ν la loi commune des $\tilde{Y}_{n\delta}$, pour toute solution $Y^{(\delta)} = (Y_{n\delta}),\ n \ge 0$ de l'Eq. (4), $Y_{n\delta}$ converge en loi vers ν quand $n \to \infty$: $Y^{(\delta)}$ est ergodique.

3.2 Ergodicité du processus Y

Dorénavant, on *choisira* le pas δ dans la suite (2^{-m}) pour des entiers $m \ge 1$. Sous les conditions de la Proposition 1, $Y^{(2^{-m})}$ est ergodique, et pour $m' \ge m$, les processus discrétisés $Y^{(2^{-m})}$ et $Y^{(2^{-m'})}$ ont la même loi limite. Si Y est ergodique, sa loi limite est nécessairement celle de tous ses processus discrétisés $Y^{(\delta)}$. Nous allons établir l'ergodicité de Y en évaluant l'écart entre Y et ses discrétisés $Y^{(\delta)}$.

Proposition 2 *Sous les conditions de la proposition 1 et si*

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^\delta \sigma^2(X_u)du = 0\ , \quad \textit{en probabilité} \qquad (6)$$

alors la diffusion linéaire Y à régime X définie par 1 est ergodique.

Preuve. Soit ν la loi limite commune des processus discrétisés. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et choisissons A_ε tel que $\nu\{x : |x| \ge A_\varepsilon\} \le \varepsilon$. On notera $c = \mathbb{E}[|a(X_0)|]$. Pour $\delta = 2^{-m}$ et $t > 0$, soit n_t le plus grand multiple de δ inférieur à t. On a $n_t < t \le n_t + \delta$. La relation de récurrence (2) s'écrit :

$$Y_t - Y_{n_t} = [\Phi(n_t, t) - 1]\,Y_{n_t} + e_t\ ,$$

avec $e_t = V_{n_t,t}^{1/2}\xi_{n_t,t}$. Nous avons :

$$\mathbb{P}\left(|Y_t - Y_{n_t}| \geq 2\varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(|[\Phi(n_t,t)-1]Y_{n_t}| \geq \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left[|e_t| \geq \varepsilon\right] . \tag{7}$$

(1). Contrôle de $|e_t|$: On a pour $K \geq 0$

$$\{|e_t| \geq \varepsilon\} = \{|e_t| \geq \varepsilon, |\xi_{n_t,t}| \leq K\} \cup \{|e_t| \geq \varepsilon, |\xi_{n_t,t}| > K\} .$$

$\xi_{n_t,t}$ étant gaussienne réduite, on fixe un $K > 0$ tel que $\mathbb{P}(|\xi_{n_t,t}| > K) \leq \varepsilon$. D'où

$$\mathbb{P}\left[|e_t| \geq \varepsilon\right] \leq \mathbb{P}\left[V_{n_t,t}^{1/2} \geq \frac{\varepsilon}{K}\right] + \varepsilon .$$

D'autre part, de façon analogue à Eq. (5),

$$0 \leq V_{n_t,t} \leq \exp\left[2\int_{n_t}^{n_t+\delta} |a(X_v)|dv\right] \int_{n_t}^{n_t+\delta} \sigma^2(X_u)du .$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left[V_{n_t,t} \geq (\varepsilon/K)^2\right] \leq \mathbb{P}\left(\exp\left[2\int_{n_t}^{n_t+\delta} |a(X_v)|dv\right] \geq 2\right) + \mathbb{P}\left(\int_{n_t}^{n_t+\delta} \sigma^2(X_u)du \leq (\varepsilon/K)^2/2\right) .$$

Par l'inégalité de Markov, le premier terme est majoré par $2c\delta/\log(2)$; le deuxième tend vers 0 quand $\delta \to 0$ d'après l'hypothèse. Il existe donc un δ_1 tel que pour tout $\delta \leq \delta_1$, on a

$$\mathbb{P}\left[|e_t| \geq \varepsilon\right] \leq 3\varepsilon . \tag{8}$$

(2). Contrôle du premier terme : utilisant le fait que $|e^x - 1| \leq e^{|x|} - 1$, on a, pour $s > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[|\Phi(n_t,t)-1| \geq s\right] &\leq \mathbb{P}\left[\left|\int_{n_t}^t a(X_u)du\right| \geq \log(s+1)\right] \\
&\leq \log(s+1)^{-1}\,\mathbb{E}\left|\int_{n_t}^t a(X_u)du\right| \leq \log(s+1)^{-1}\,\mathbb{E}\int_{n_t}^{(n_t+\delta)} |a(X_u)|du \\
&= (c\delta)/\log(s+1) .
\end{aligned} \tag{9}$$

Par ailleurs, on déduit de la décomposition

$$\{|[\Phi(n_t,t)-1]Y_{n_t}| \geq \varepsilon\} = \{|[\Phi(n_t,t)-1]Y_{n_t}| \geq \varepsilon, |Y_{n_t}| < A_\varepsilon\} \cup \{|[\Phi(n_t,t)-1]Y_{n_t}| \geq \varepsilon, |Y_{n_t}| \geq A_\varepsilon\} ,$$

que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[|[\Phi(n_t,t)-1]Y_{n_t}| \geq \varepsilon\right] &\leq \mathbb{P}\left[|\Phi(n_t,t)-1| \geq \varepsilon/A_\varepsilon\right] + \mathbb{P}\left[|Y_{n_t}| \geq A_\varepsilon\right] \\
&\leq (c\delta)/\log((\varepsilon/A_\varepsilon)+1) + \mathbb{P}\left[|Y_{n_t}| \geq A_\varepsilon\right] .
\end{aligned}$$

Choisissons un δ tel que $\delta \leq \delta_1$ et $c\delta\log((\varepsilon/A_\varepsilon)+1)^{-1} < \varepsilon$. Avec ce δ, on a

$$\mathbb{P}\left[|[\Phi(n_t,t)-1]Y_{n_t}| \geq \varepsilon\right] \leq \mathbb{P}\left[|Y_{n_t}| \geq A_\varepsilon\right] + \varepsilon . \tag{10}$$

(3). fin de la preuve : En résumé, des estimations (8)-(10) on obtient que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists A_\varepsilon$, $\exists\delta$, $\forall t > 0$, $\exists n_t$, tels que $\nu\{|x| \geq A_\varepsilon\} \leq \varepsilon$, $n_t < t \leq t+\delta$ et

$$\mathbb{P}\left(|Y_t - Y_{n_t}| \geq 2\varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left[|Y_{n_t}| \geq A_\varepsilon\right] + 4\varepsilon .$$

Considérons maintenant une suite $(Y_{t_k})_k$ avec $t_k \to \infty$. L'inégalité précédente en $t = t_k$ donne:

$$\mathbb{P}\left(\left|Y_{t_k} - Y_{n_{t_k}}\right| \geq 2\varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left[|Y_{n_{t_k}}| \geq A_\varepsilon\right] + 4\varepsilon .$$

D'où

$$\limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|Y_{t_k} - Y_{n_{t_k}}\right| \geq 2\varepsilon\right) \leq \nu\{|x| \geq A_\varepsilon\} + 4\varepsilon \leq 5\varepsilon \ .$$

Notons $C(\nu)$ l'ensemble des points de continuité de la f.d.r F_ν de la loi ν. Soit $x \in C(\nu)$, et choisissons $\epsilon > 0$ tel que $x \pm 2\epsilon \in C(\nu)$. Nous avons

$$\mathbb{P}(Y_{t_k} \leq x) \leq \ \mathbb{P}(Y_{n_{t_k}} \leq x + 2\varepsilon) + \ \mathbb{P}\left(\left|Y_{t_k} - Y_{n_{t_k}}\right| \geq 2\varepsilon\right) \ ,$$

et de façon analogue

$$\mathbb{P}(Y_{n_{t_k}} \leq x - 2\varepsilon) \leq \ \mathbb{P}(Y_{t_k} \leq x) + \ \mathbb{P}\left(\left|Y_{t_k} - Y_{n_{t_k}}\right| \geq 2\varepsilon\right) \ .$$

D'où

$$F_\nu(x - 2\varepsilon) - 5\varepsilon \leq \liminf_k \mathbb{P}(Y_{t_k} \leq x) \leq \limsup_k \mathbb{P}(Y_{t_k} \leq x) \leq F_\nu(x + 2\varepsilon) + 5\varepsilon \ .$$

En faisant tendre ε vers 0 (avec $x \pm 2\epsilon \in C(\nu)$, ce qui est possible puisque $C(\nu)$ est dense), on obtient :

$$\lim_k \mathbb{P}(Y_{t_k} \leq x) = F_\nu(x) \ , \quad x \in C(\nu) \ . \qquad \blacksquare$$

4 Diffusion linéaire à régime markovien fini

Dans cette section, nous examinons le cas particulier où le régime X est un processus markovien de saut à valeur dans un ensemble fini $E = \{1, 2, \cdots, N\}$, $N > 1$ (pms, cf. Feller [5] , Coccoza [4], ch. 8). On considérera par la suite sa version canonique $(\Omega, , (Q_x)_{x\in E})$ où $\Omega = D([0,\infty[)$ est l'espace des fonctions réelles càdlàg sur $[0,\infty[$ et sa tribu borélienne associée à la métrique de Skohokod.

Soit $\lambda : E \to]0,\infty[$ la fonction d'intensité de X que l'on supposera strictement positive : X est alors ergodique de loi invariante μ. Si T_1 est le premier instant de saut

$$T_1 = \inf\{t \ : \ t > 0 \quad \text{et} \quad X_t \neq X_0\}$$

T_1 suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda(X_0)$, et la transition de $X_{T_1^-}$ vers X_{T_1} est définie par un noyau markovien $q(x,y)$ sur E vérifiant $q(x,x) = 0$ pour tout $x \in E$. On définit de la même manière les instants de sauts (T_n), avec $T_0 = 0$, par

$$\forall n \geq 0, \quad T_{n+1} = \inf\{t \ : \ t > T_n \quad \text{et} \quad X_t \neq X_{T_n}\} \ .$$

La suite des états visités $Z = (Z_n)$, $Z_n = X_{T_n}$, est une chaîne de Markov de transition q. Elle est ergodique et on notera π sa loi invariante. Les deux lois invariantes sont reliées par la relation :

$$\pi_i \propto \mu_i \lambda(i) \ , \quad i \in E \ .$$

Par construction, les intervalles de sauts $(\Delta_n = T_{n+1} - T_n, n \geq 0)$ sont des variables exponentielles de paramètres $(\lambda(Z_n), n \geq 0)$, indépendantes entre elles et indépendantes de la chaîne Z.

Les probabilités produit seront notées $\mathbb{P}_x = Q_x \otimes Q'$. En particulier, sous la probabilité $\mathbb{P}_\mu = Q_\mu \otimes Q'$, le régime X est stationnaire. La transcription de la Proposition 2 dans le cas présent donne :

Corollaire 1 *On suppose que le processus markovien de sauts X à nombre fini d'états est stationnaire de loi invariante μ. Alors la diffusion de O.U. Y à régime markovien X est ergodique dès que*

$$\sum_{i=1,N} \mu_i a(i) < 0 \ . \tag{11}$$

Nous allons donner des conditions suffisantes pour l'existence de moments d'ordre $s \geq 0$ dans ce cas particulier. Nous montrerons au paragraphe 4.3 que nos conditions sont équivalentes avec celles de Basak et al [1]. Toutefois notre méthode de démonstration est très différente.

4.1 La diffusion $U_n = Y_{T_n}$ aux instants de changement de régime T_n

Soit $U = (U_n = Y_{T_n}, n \geq 0)$ la diffusion aux instants de changement de régime. Utilisant (4), U est un $AR(1)$ à coefficients aléatoires $C = (C_n)$:

$$U_n = C_n U_{n-1} + e_n \ , \quad n \geq 1 \ , C_n = \exp[a(Z_{n-1})\Delta_n] \ , \tag{12}$$

où $\Delta_n = T_n - T_{n-1}$ est la longueur du n-ième intervalle de saut. Sous $\mathbb{P}_\mu$, la suite $Z = (Z_n)$ des régimes étant stationnaire et les variables Δ_n étant exponentielles $\mathcal{E}(\lambda(Z_{n-1}))$ indépendantes, $C = (C_n)$ est stationnaire. D'autre part, conditionnellement à $X = (X_t, t \geq 0)$, les variables e_n sont gaussiennes centrées, indépendantes, de variances :

$$\mathbf{Var}_\mu(e_n \mid X) = \sigma^2(Z_{n-1}) \frac{\exp\{2a(Z_{n-1})\Delta_n\} - 1}{2a(Z_{n-1})}$$

Une première conséquence de la représentation (12) est l'obtention directe de l'ergodicité de U: $((C_n, e_n), n \geq 1)$ étant stationnaire, $\log^+ C_n$ et $\log^+ |e_n|$ étant intégrables, les résultats de Brandt [3] (cf. aussi Bougerol et Picard [2]) assurent que U est ergodique dès que l'exposant supérieur de Lyapunov de la suite (C_n) est négatif, à savoir :

$$\gamma = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \mathbb{E}_\mu \left[\log\{C_n C_{n-1} \cdots C_1\}\right] < 0$$

Ce coefficient est ici simple à évaluer :

$$\begin{aligned} \gamma &= \mathbb{E}_\mu[\log C_1] = \mathbb{E}_\mu[a(Z_0)\Delta_1] = \mathbb{E}_\mu[a(Z_0)\lambda(Z_0)^{-1}] \\ &= \sum_i \pi_i a(i)\lambda(i)^{-1} = \frac{\sum_i \mu_i a(i)}{\sum_i \mu_i \lambda(i)} \ . \end{aligned}$$

On retrouve la condition d'ergodicité (11) de Y établie au paragraphe précedent.

4.2 Existence de moments pour la loi invariante ν de Y

Une deuxième conséquence est que (12) permet d'estimer les moments de la loi invariante ν de Y. Définissons, pour $s \geq 0$, la matrice : $Q_s = ((q(i,j)\psi(j), i, j = 1, N)$, où

$$\psi(j) = \frac{\lambda(j)}{\lambda(j) - sa(j)} \ . \tag{13}$$

On a le résultat suivant :

Proposition 3 *Supposons que, pour $s \geq 0$, les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$\forall i \in E$: $sa(i) - \lambda(i) < 0$.*
2. *le rayon spectral $\rho(Q_s)$ de Q_s est inférieur à 1.*

Alors la loi invariante ν de Y admet un moment d'ordre s.

Preuve. Montrons d'abord que ces conditions entraînent $\gamma < 0$ et par conséquent l'ergodicité de Y. Utilisant le Lemme 2 de [17], on a

$$\sum_i \pi_i \log \psi(j) = \sum_i \pi_i \log[1 - sa(i)\lambda(i)^{-1}]^{-1} \leq \log \rho(Q_s) < 0 \ .$$

La fonction $\log(1 - sx)^{-1}$ étant convexe sur $\{x : x < s^{-1}\}$, on a :

$$\log \left(1 - s \sum_i \pi_i a(i)\lambda(i)^{-1}\right)^{-1} \leq \sum_i \pi_i \log(1 - sa(i)\lambda(i)^{-1})^{-1} < 0 \ .$$

Donc $\sum_i \pi_i a(i)\lambda(i)^{-1} = \gamma < 0$. Ainsi Y est ergodique de même loi invariante que U. Plus précisément, la série

$$U_n = \sum_{k=0}^{\infty} d_{n,k} e_{n-k} \ , \tag{14}$$

avec

$$d_{n,k} = C_n C_{n-1} \cdots C_{n-k+1} = \exp \sum_{\ell=0}^{k-1} a(Z_{n-\ell-1}) \Delta_{n-\ell} \ ,$$

converge p.s. et est une solution stationnaire de Eq. (12). Montrons que cette série converge absolument dans L^s.

Conditionnement à X, les $d_{n,k}$ et e_{n-k} sont respectivement des constantes et des gaussiennes centrées de variance

$$\mathrm{Var}_\mu \ (e_{n-k}|X) = \sigma^2(Z_{n-k-1}) \frac{\exp\{2a(Z_{n-k-1})\Delta_{n-k}\} - 1}{2a(Z_{n-k-1})} \ .$$

D'où

$$\begin{aligned} \xi_{n,k} \ &:= \ \mathbb{E}_\mu \left[|d_{n,k} e_{n-k}|^s \mid X \right] = |d_{n,k}|^s \times \ \mathbb{E}_\mu \left[|e_{n-k}|^s \mid X \right] \\ &\leq \ C_1 |d_{n,k}|^s \left[\sigma^2(Z_{n-k-1}) \frac{\exp\{2a(Z_{n-k-1})\Delta_{n-k}\} - 1}{2a(Z_{n-k-1})} \right]^{s/2} \ , \end{aligned}$$

où C_1 dépend de s seulement. L'espérance en X, processus qui est résumé par $((Z_n, \Delta_n))$, se calcule en 2 étapes :

(i) on prend l'espérance en $\Delta = (\Delta_n)$ à $Z = (Z_n)$ fixée. Les variables Δ_n étant exponentielles et indépendantes, les espérances ci-dessous existent et sont finies à condition que, $\forall i \in E$, $sa(i) - \lambda(i) < 0$. D'une part, pour C_2 dépendant de s seul, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu \left[\left\{ \frac{\exp\{2a(Z_{\ell-1})\Delta_\ell\} - 1}{2a(Z_{\ell-1})} \right\}^{s/2} \mid Z \right] \ &\leq \ \mathbb{E}_\mu \left[\{\Delta_\ell \left(1 \vee \exp\{2a(Z_{\ell-1})\Delta_\ell\}\right)\}^{s/2} \mid Z \right] \\ &\leq \ \mathbb{E}_\mu \left[\Delta_\ell^{s/2} + \Delta_\ell^{s/2} \exp\{sa(Z_{\ell-1})\Delta_\ell\} \mid Z \right] \\ &\leq \ C_2 \left\{ \lambda(Z_{\ell-1})^{-s/2} + [-sa(Z_{\ell-1}) + \lambda(Z_{\ell-1})]^{-(s/2+1)} \right\} \\ &= \ C_2 \varphi(Z_{\ell-1}) \ , \end{aligned}$$

où la première inégalité découle de

$$\frac{e^x - 1}{x} \leq 1 \vee e^x \ , \quad x \in \mathbb{R}$$

et où on a posé

$$\varphi(z) = \lambda(z)^{-s/2} + [\lambda(z) - sa(z)]^{-(s/2+1)} \ . \tag{15}$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}_\mu \left[\exp\{sa(Z_{\ell-1})\Delta_\ell\} \mid Z \right] = \psi(Z_{\ell-1}) \ .$$

D'où, pour C_3 dépendant de s seul, on a :

$$\mathbb{E}_\mu \left[\xi_{n,k} \mid Z \right] \leq C_3 \sigma^2(Z_{n-k-1}) \varphi(Z_{n-k-1}) \prod_{\ell=0}^{k-1} \psi(Z_{n-\ell-1}) \ .$$

(ii) on prend ensuite l'espérance en Z :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mu\left[|d_{n,k}e_{n-k}|^s\right] &= \mathbb{E}_\mu[\xi_{n,k}] \\ &\leq C_3 \sum_{i_0,i_1,\cdots,i_k\in E} \mu_{i_0}\sigma^2(i_0)\varphi(i_0)\prod_{\ell=1,k} q(i_{\ell-1},i_\ell)\psi(i_\ell) = C_3\ u^T Q_s^k \mathbb{I}\,,\end{aligned}$$

où u est le vecteur de composantes $u_i = \pi_i\sigma^2(i)\varphi(a_i)$ et $\mathbb{I}$ le vecteur de composantes toutes égales à 1. Comme $\rho(Q_s) < 1$, Q_s^k tend vers 0 à vitesse exponentielle quand $k \to \infty$.

D'où la convergence absolue de la série U_n dans L^s. ∎

4.3 Comparaison avec les résultats [1]

Transposons le résultat de Basak et al [1]. Concernant X, le régime à N états, rien n'est changé si ce n'est que leur résultat utilise Λ, le générateur infinitésimal de X :

$$\Lambda(i,j) = \begin{cases} \lambda(i)q(i,j) & \text{si } i \neq j \\ -\lambda(i) & \text{si } i = j \end{cases}$$

Considérons une diffusion vectorielle $Y \in \mathbb{R}^d$ solution de (1), mais cette fois ci pour $(a(i),\sigma(i))$, $i = 1,\ldots,N$ des matrices $d\times d$. Leur condition (A2) assurant l'existence d'un moment d'ordre $s > 0$ est la suivante :

(A2) Il existe N matrices $d \times d$ symétriques B_i, définies positives, $\gamma > 0$, $s > 0$ tels que :

$$u'B_i a(i)u + \frac{1}{s}u'B_i u\sum_{j=1}^N \Lambda_{ij}\left(\frac{u'B_j u}{u'B_i u}\right)^{s/2} \leq -\gamma|u|^2, \qquad \forall u\in\mathbb{R}^d,\ u\neq 0,\ i=1,\ldots,N.$$

Leur résultat est le suivant (Théorème 3.1 et Lemme 3.2) :

Proposition 4 *Sous la condition (A2) le processus (X_t, Y_t) est ergodique et la loi limite de Y_t admet un moment d'ordre s.*

Montrons que (A2) implique les conditions 1. et 2. de la proposition 3 si $d = 1$. En exprimant Λ à partir des λ et q, quelques manipulations simples montrent que (A2) se réécrit :

(A2)' $\exists b_i > 0,\ i = 1,\ldots,N,\ s > 0$ tels que :

$$(sa(i) - \lambda(i))b_i + \sum_{j:j\neq i}\lambda(i)q(i,j)b_j < 0, \qquad i = 1,\ldots N.$$

Ce qui implique la condition 1. D'autre part comme, pour tout i, $sa(i)-\lambda(i) \neq 0$, alors, pour la matrice Q_s définie précédemment, $b = (b_1,\ldots,b_N)' > 0$, où $>$ est la relation d'ordre strict sur chaque coordonnées, la condition (A2)' devient : $Q_s B < B$, condition qui implique 2. (voir par exemple [11], pp. 492).

4.4 Exemple : une diffusion linéaire à deux régimes

X est à deux états $E = \{1,2\}$, de fonction d'intensité $\alpha = \lambda(1) > 0$, $\beta = \lambda(2) > 0$. La matrice de transition des sauts est $q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La loi invariante de X est $\mu = (\beta,\alpha)/(\alpha+\beta)$. On suppose également que $\sigma(1) > 0$, $\sigma(2) > 0$. On obtient alors :

- Ergodicité de Y si :

$$(\mathbf{E}) : \quad \alpha a(2) + \beta a(1) < 0$$

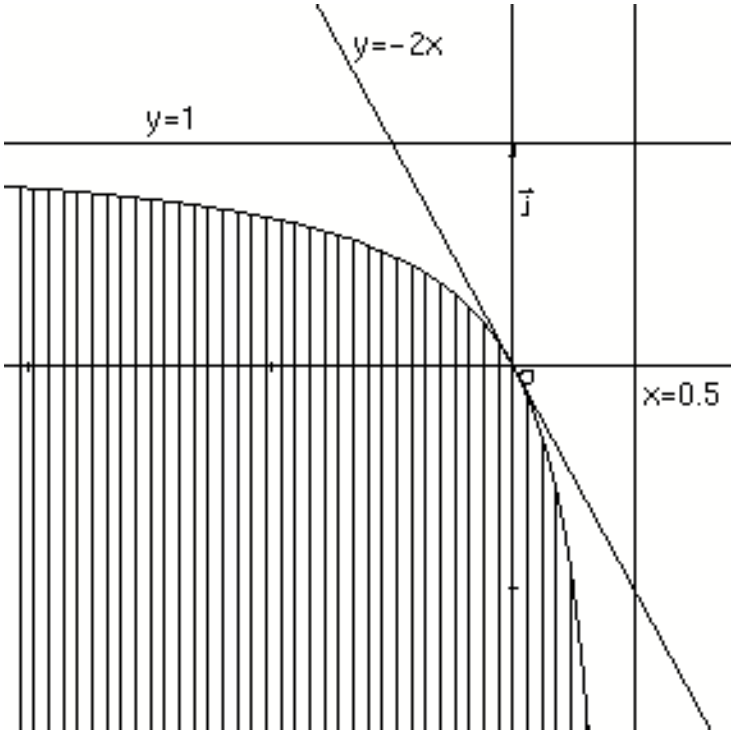


Figure 1: Diffusion à deux régimes avec $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $s = 2$: la zone d'ergodicité (**E**) se trouve sous la droite d'équation $y = -2x$ et la zone de stabilité à l'ordre 2 (**E2**) se trouve en hachuré.

- Ergodicité et existence d'un moment d'ordre s pour Y :

$$(\mathbf{E2}) : \quad \begin{cases} (i) & sa(1) - \alpha < 0, \quad sa(2) - \beta < 0 \\ (ii) & a(1)\beta + a(2)\alpha - sa(1)a(2) < 0 \end{cases}$$

Dans le plan $(a(1), a(2))$:

(i) **(E)** est délimitée par le demi-plan inférieur de frontière $\beta a(2) + \alpha a(1) = 0$.

(ii) **(E2)** est le demi-espace inférieur de frontière l'arc d'hyperbole passant par l'origine tangent à la droite délimitant **(E)** et d'équation : $a(1)\beta + a(2)\alpha - 2a(1)a(2) = 0$.

References

[1] Basak G.K., Bisi A. et Ghosh M.K., 1996, Stability of random diffusion with linear drift, J. Math. Anal. Appl. 202, 604-622

[2] Bougerol P. et Picard N., 1992, Strict stationarity of generalized autoregressive processe, Ann. Proba. 20, 1714-1730

[3] Brandt A., 1986, The stochastic equation $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ with stationnary coefficients, Adv. Appl. Proba. 18, 211-220

[4] Cocozza-Thivent C., 1997, *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, Springer

[5] Feller W. , 1966, *An Introduction to Probability Theory, Vol. II*, Wiley

[6] Francq C. et Roussignol M., 1998, Ergodicity of autoregressive processes with Markov switching and consistency of maximum-likelihood estimator, Statistics 32, 151-173

[7] Hamilton J.D., 1989, A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle Econometrica, 57, 151-173

[8] Hamilton J.D., 1990, Analysis of time series subject to changes in regime, J. of Econom. 45, 39-70

[9] Hamilton J.D., 1996, Specification testing in Markov-switching time series models, J. of Econom. 70, 127-157

[10] Hansen B., 1996, The likelihood ratio test under nonstandard conditions : testing the Markov switching model of GNP, J. Applied Econometrics 7, 61-82

[11] R.A. Horn et C.R. Johnson, 1985. *Matrix Analysis* Cambridge University Press

[12] Ji Y. et Chizeck H.J., 1990, Controllability, stabilizability and continuous-time Markovian jump linear quadratic control, IEEE Trans. Automat. Control 35, 777-788

[13] I. Karatzas et S.E. Shreve, 1991. *Brownian Motion and Stochastic calculus* (2nd ed.), Springer, New-York

[14] Mariton M., 1990, *Jump linear systems in Automatic Control,* Dekker

[15] McCullogh R.E. et Tsay R.S., 1994, Statistical analysis of econometric times series via Markov switching models, J. Time Series Anal. 15, 523-539

[16] B. Oksendal, 1998. *Stochastic Differential Equations* (5ème ed.), Springer-Verlag, Berlin

[17] Yao J.F. et Attali J.G., 2000, On stability of nonlinear AR processes with Markov switching, Adv. Appl. Proba. 32, 394-407