Une borne inférieure pour la constante de la condition inf-sup sur l'opérateur de divergence

A lower bound for the inf-sup condition's constant for the divergence operator

Stéphane Del Pino^a, Ulrich Razafison^b, Driss Yakoubi^b

^a*CEA/DAM-Île-de-France*

*Département des Sciences de la Simulation et de l'Information
BP 12 - 91380 Bruyères-Le-Châtel - France*

^b*Laboratoire Jacques-Louis Lions*

Université Pierre et Marie Curie

Boîte courrier 187 - 75252 Paris Cedex 05 - France

Abstract

The inf-sup condition [1,2] plays an important role in problems from fluid mechanics. The purpose of this Note is to give, for any connected bounded open set ω with a Lipschitz-continuous boundary, a lower bound for the inf-sup condition's constant that only depends on the norm of the harmonic trace lifting on ω and on the $\sup_{\Omega \supset \overline{\omega}} \beta(\Omega)/c_p(\Omega)$ where $c_p(\Omega) > 1$ is a constant defined by (3).

Résumé

La condition inf-sup [1,2] joue un rôle important dans de nombreux problèmes issus de la mécanique des fluides. Le but de cette Note est de donner, pour tout ouvert borné connexe de frontière lipschitzienne ω une borne inférieure pour la constante de la condition inf-sup qui ne dépend que de la norme du relèvement harmonique sur ω et du $\sup_{\Omega \supset \overline{\omega}} \beta(\Omega)/c_p(\Omega)$ où $c_p(\Omega) > 1$ est la constante définie par (3).

Abridged English version

Let ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, with a Lipschitz-continuous boundary. We denote by $b_\omega(\cdot, \cdot)$ the bilinear form

Email addresses: stephane.delpino@cea.fr (Stéphane Del Pino), razafison@ann.jussieu.fr (Ulrich Razafison), yakoubi@ann.jussieu.fr (Driss Yakoubi).

$$\forall(\mathbf{u}, p) \in H^1(\omega)^d \times L^2(\omega) \quad b_\omega(\mathbf{u}, p) = - \int_\omega \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

We will use the notation $L_0^2(\omega) = \{q \in L^2(\omega), \int_\omega q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0\}$. We recall the inf-sup condition, which was first introduced, independently by I. Babuška [1] and F. Brezzi [2] in an abstract framework (see also [3]).

Theorem 0.1 (Inf-sup condition) *Let $\omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, be a connected bounded open set with a Lipschitz-continuous boundary. Then there exists a constant $\beta = \beta(\omega) > 0$ that only depends on the domain ω , such that*

$$\inf_{q \in L_0^2(\omega)} \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\omega)^d} \frac{b_\omega(\mathbf{v}, q)}{\|q\|_{L^2(\omega)} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\omega)^d}} = \beta,$$

where $|\cdot|_{H^1(\omega)^d}$ is the semi-norm of $H^1(\omega)^d$. The purpose of this Note is to give a lower bound for the constant $\beta(\omega)$. More precisely, we establish the following result:

Theorem 0.2 (Lower bound) *Let ω be a connected bounded open set of $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, with a Lipschitz-continuous boundary. Then for all $\Omega \supset \bar{\omega}$ connected bounded open set of $\mathbb{R}^d$ with a Lipschitz-continuous boundary, one has*

$$\beta(\omega) \geq \frac{\beta(\Omega)}{c_p(\Omega)(1 + \|R_h\|)},$$

where R_h is the harmonic trace lifting on ω and $c_p(\Omega) > 1$ is the constant defined by (3).

Proof (sketch)

Let first $q_\omega \in L_0^2(\omega)$. Then, to prove the previous lower bound of $\beta(\omega)$, it is enough to show (5). Next, let $\mathbf{v}_\Omega \in H_0^1(\Omega)^d$ and $\mathbf{v}_\omega = \mathbf{v}_\Omega|_\omega \in H^1(\omega)^d$ and consider $q_\Omega \in L^2(\Omega)$ defined by (6). The proof of (5) is made of three steps:

In the first step, we compute $b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega)$ and we show Inequality (12).

In the second step, using (12), we prove the first lower bound (14), where $c = \|\gamma\| \|R\|$, γ is the trace operator from $H^1(\omega)^d$ to $H^{1/2}(\partial\omega)^d$ and R is a linear and continuous trace lifting operator from $H^{1/2}(\partial\omega)^d$ from $H^1(\omega)^d$.

In the third step, we give a characterisation of the constant c : choosing $\|\gamma \mathbf{v}\|_{H^{1/2}(\partial\omega)^d} = \inf\{\|\mathbf{w}\|_{H^1(\omega)^d}, \gamma \mathbf{w} = \gamma \mathbf{v} \text{ on } \partial\omega\}$, we naturally have $c = \|R\|$. Then the smallest c is given by choosing the harmonic trace lifting R_h . ■

Observe now that if $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ is a vector of $\mathbb{R}^d$, λ is a real number and $\Phi_{\lambda, \mathbf{a}}$ is the mapping defined by (15), then one can easily show that $\beta(\Omega_{\lambda, \mathbf{a}}) = \beta(\Omega)$. This property of the inf-sup constant $\beta(\omega)$ together with Theorem 0.2 allow to have the following result:

Corollary 0.3 *Let ω be a connected bounded open set of $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, with a Lipschitz-continuous boundary. Then for all connected bounded open set Ω of $\mathbb{R}^d$ Lipschitz-continuous boundary, we have*

$$c_p(\omega)(1 + \|\tilde{R}_h\|)\beta(\Omega) \geq \beta(\omega) \geq \frac{\beta(\Omega)}{c_p(\Omega)(1 + \|R_h\|)},$$

where R_h and $\tilde{R}_h$ are respectively the harmonic trace lifting operators on ω and Ω .

Note that if in the definition of the inf-sup constant $\beta(\omega)$ we choose the full norm of $H^1(\omega)^d$ (see (16)), then the lower bound is reduced to (17).

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier C. Bernardi, T. Chacón Rebollo, V. Girault et F. Lagoutière pour leurs précieux conseils et nombreuses remarques.

1. Introduction

On considère un ouvert ω borné de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, de frontière lipschitzienne. Nous noterons $b_\omega(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire qui à tout couple $(\mathbf{u}, p) \in H^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)$ associe le réel

$$b_\omega(\mathbf{u}, p) = - \int_\omega \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1)$$

Nous rappelons la condition inf-sup qui a été établie indépendamment par I. Babuška [1] et par F. Brezzi [2] dans un cadre abstrait (voir aussi [3]).

Théorème 1.1 (Condition inf-sup) *Soit ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, de frontière lipschitzienne. Il existe une constante $\beta = \beta(\omega) > 0$ qui ne dépend que du domaine ω , telle que*

$$\inf_{q \in L_0^2(\omega)} \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\omega)^d} \frac{b_\omega(\mathbf{v}, q)}{\|q\|_{L^2(\omega)} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\omega)^d}} = \beta. \quad (2)$$

Ici $L_0^2(\omega)$ désigne l'espace $\{q \in L^2(\omega), \int_\omega q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0\}$ et $\|\cdot\|_{H^1(\omega)}$ la semi-norme de $H^1(\omega)^d$.

Supposons que Ω soit un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$ de frontière lipschitzienne. Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, on introduit la constante $c_p(\Omega) > 1$ vérifiant

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq c_p(\Omega) |v|_{H^1(\Omega)}. \quad (3)$$

Le but de cette Note est de donner une borne inférieure pour la constante $\beta(\omega)$, qui ne dépend que de la norme du relèvement harmonique sur ω et du $\sup_{\Omega \supset \overline{\omega}} \beta(\Omega)/c_p(\Omega)$.

2. Une borne inférieure pour la constante de la condition inf-sup

Nous allons maintenant énoncer le résultat principal de cette Note.

Théorème 2.1 (Borne inférieure) *Soit ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, de frontière lipschitzienne. Alors, pour tout Ω ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$ de frontière lipschitzienne tel que $\Omega \supset \overline{\omega}$, on a*

$$\beta(\omega) \geq \frac{\beta(\Omega)}{c_p(\Omega)(1 + \|R_h\|)}, \quad (4)$$

où R_h est l'opérateur de relèvement harmonique sur ω .

Nous allons à présent prouver cette minoration de $\beta(\omega)$. Soit tout d'abord $q_\omega \in L_0^2(\omega)$. D'après la définition de $\beta(\omega)$, pour établir (4), il suffit de montrer que

$$\sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\omega)^d} \frac{b_\omega(\mathbf{v}, q_\omega)}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\omega)} \|q_\omega\|_{L^2(\omega)}} \geq \frac{\beta(\Omega)}{c_p(\Omega)(1 + \|R_h\|)}. \quad (5)$$

Soient maintenant $\mathbf{v}_\Omega \in H_0^1(\Omega)^d$ et $\mathbf{v}_\omega$ sa restriction sur ω : $\mathbf{v}_\omega = \mathbf{v}_\Omega|_\omega$ ($\mathbf{v}_\omega = \mathbf{v}_\Omega$ presque partout dans ω). Par construction, on a $\mathbf{v}_\omega \in H^1(\omega)^d$. Nous considérons par ailleurs la fonction q_Ω définie de la façon suivante :

$$q_\Omega = \begin{cases} \alpha q_\omega & \text{sur } \omega, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega, \end{cases} \quad (6)$$

où α est une constante réelle que nous choisirons ultérieurement. Notons que, par construction, q_Ω appartient à $L_0^2(\Omega)$ et

$$\|q_\Omega\|_{L^2(\Omega)} = |\alpha| \|q_\omega\|_{L^2(\omega)}. \quad (7)$$

La preuve de (5) est composée de trois étapes.

2.1. Première étape : calcul de $b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega)$.

Nous distinguons ici deux cas : selon que $\mathbf{v}_\omega$ est nul ou non sur ω .

2.1.1. Le cas $\mathbf{v}_\Omega|_\omega = \mathbf{v}_\omega \neq \mathbf{0}$

Soit R un opérateur de relèvement linéaire continu de $H^{1/2}(\partial\omega)^d$ dans $H^1(\omega)^d$ de norme égale à c_R . On a alors

$$\|R\gamma\mathbf{v}_\omega\|_{H^1(\omega)^d} \leq c_R \|\gamma\mathbf{v}_\omega\|_{H^{1/2}(\partial\omega)^d} \leq c_R c_\gamma \|\mathbf{v}_\omega\|_{H^1(\omega)^d},$$

où c_γ est la norme de l'opérateur de trace γ de $H^1(\omega)^d$ dans $H^{1/2}(\partial\omega)^d$. On note $c = c_R c_\gamma$ et on pose $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\omega - R\gamma\mathbf{v}_\omega$. Par construction $\mathbf{v} \in H_0^1(\omega)^d$ et on a

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\omega)^d} \leq \|\mathbf{v}_\omega\|_{H^1(\omega)^d} + \|R\gamma\mathbf{v}_\omega\|_{H^1(\omega)^d} \leq (1+c)\|\mathbf{v}_\omega\|_{H^1(\omega)^d}. \quad (8)$$

De plus, comme $\mathbf{v}_\omega$ est la restriction de $\mathbf{v}_\Omega$ sur ω , il est clair que $\|\mathbf{v}_\omega\|_{H^1(\omega)^d} \leq \|\mathbf{v}_\Omega\|_{H^1(\Omega)^d}$, et en utilisant (3) et (8), on obtient donc

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\omega)^d} \leq c_p(\Omega)(1+c)\|\mathbf{v}_\Omega\|_{H^1(\Omega)^d}. \quad (9)$$

Estimons maintenant $b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega)$. D'après (1), on peut écrire

$$b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega) = - \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{v}_\Omega q_\Omega d\mathbf{x} = - \int_\omega \operatorname{div} \mathbf{v}_\Omega q_\Omega d\mathbf{x} - \int_{\Omega \setminus \omega} \operatorname{div} \mathbf{v}_\Omega q_\Omega d\mathbf{x}.$$

Grâce à la définition (6), on a

$$b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega) = - \int_\omega \operatorname{div} \mathbf{v}_\omega \alpha q_\omega d\mathbf{x},$$

$$b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega) = -\alpha \int_\omega \operatorname{div} (\mathbf{v} + R\gamma\mathbf{v}_\omega) q_\omega d\mathbf{x}.$$

Finalement, on obtient

$$b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega) = \alpha b_\omega(\mathbf{v}, q_\omega) - \alpha \int_\omega \operatorname{div} R\gamma\mathbf{v}_\omega q_\omega d\mathbf{x}.$$

Nous choisissons à présent α pour que la quantité $b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega)$ soit inférieure à la quantité $\alpha b_\omega(\mathbf{v}, q_\omega)$. Pour cela, il suffit de prendre

$$\text{si } \int_\omega \operatorname{div} R\gamma\mathbf{v}_\omega q_\omega d\mathbf{x} \neq 0, \quad \alpha = \frac{\int_\omega \operatorname{div} R\gamma\mathbf{v}_\omega q_\omega d\mathbf{x}}{\left| \int_\omega \operatorname{div} R\gamma\mathbf{v}_\omega q_\omega d\mathbf{x} \right|}, \quad \text{et}$$

$$\text{si } \int_\omega \operatorname{div} R\gamma\mathbf{v}_\omega q_\omega d\mathbf{x} = 0, \quad \alpha = 1.$$

Notons que dans les deux cas, la constante α vérifie $|\alpha| = 1$, et on a

$$\frac{b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega)}{\|\mathbf{v}_\Omega\|_{H^1(\Omega)^d}} \leq \alpha \frac{b_\omega(\mathbf{v}, q_\omega)}{\|\mathbf{v}_\Omega\|_{H^1(\Omega)^d}} \leq \frac{|b_\omega(\mathbf{v}, q_\omega)|}{\|\mathbf{v}_\Omega\|_{H^1(\Omega)^d}}.$$

D'après la relation (9), on obtient

$$\frac{b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega)}{\|\mathbf{v}_\Omega\|_{H^1(\Omega)^d}} \leq c_p(\Omega)(1+c) \frac{|b_\omega(\mathbf{v}, q_\omega)|}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\omega)^d}}.$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout $\mathbf{v}_\Omega \in H_0^1(\Omega)^d$, avec $\mathbf{v}_\Omega|_\omega \neq \mathbf{0}$, on en déduit que

$$\sup_{\substack{\mathbf{v}_\Omega \in H_0^1(\Omega)^d \\ \mathbf{v}_\Omega|_\omega \neq \mathbf{0}}} \frac{b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega)}{|\mathbf{v}_\Omega|_{H^1(\Omega)^d}} \leq c_p(\Omega)(1+c) \sup_{\substack{\mathbf{v} \in H_0^1(\omega)^d \\ \mathbf{v}|_\omega \neq \mathbf{0}}} \frac{|b_\omega(\mathbf{v}, q_\omega)|}{|\mathbf{v}|_{H^1(\omega)^d}},$$

c'est-à-dire

$$\sup_{\substack{\mathbf{v}_\Omega \in H_0^1(\Omega)^d \\ \mathbf{v}_\Omega|_\omega \neq \mathbf{0}}} \frac{b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega)}{|\mathbf{v}_\Omega|_{H^1(\Omega)^d}} \leq c_p(\Omega)(1+c) \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\omega)^d} \frac{b_\omega(\mathbf{v}, q_\omega)}{|\mathbf{v}|_{H^1(\omega)^d}}. \quad (10)$$

Nous traitons maintenant le cas $\mathbf{v}_\omega = \mathbf{0}$.

2.1.2. *Le cas : $\mathbf{v}_\Omega|_\omega = \mathbf{v}_\omega = \mathbf{0}$*

Le calcul de b_Ω donne :

$$b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega) = - \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{v}_\Omega q_\Omega d\mathbf{x} = - \int_\omega \operatorname{div} \mathbf{v}_\Omega q_\Omega d\mathbf{x} - \int_{\Omega \setminus \omega} \operatorname{div} \mathbf{v}_\Omega q_\Omega d\mathbf{x}.$$

D'après la définition (6) et comme $\mathbf{v}_\omega = \mathbf{0}$, on a

$$b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega) = - \int_\omega \operatorname{div} \mathbf{v}_\omega \alpha q_\omega d\mathbf{x} = 0.$$

On obtient donc

$$0 = \sup_{\substack{\mathbf{v}_\Omega \in H_0^1(\Omega)^d \\ \mathbf{v}_\Omega|_\omega = \mathbf{0}}} \frac{b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega)}{|\mathbf{v}_\Omega|_{H^1(\Omega)^d}} \leq c_p(\Omega)(1+c) \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\omega)^d} \frac{|b_\omega(\mathbf{v}, q_\omega)|}{|\mathbf{v}|_{H^1(\omega)^d}}. \quad (11)$$

Les relations (10) et (11) donnent l'inégalité suivante :

$$\sup_{\mathbf{v}_\Omega \in H_0^1(\Omega)^d} \frac{b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega)}{|\mathbf{v}_\Omega|_{H^1(\Omega)^d}} \leq c_p(\Omega)(1+c) \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\omega)^d} \frac{|b_\omega(\mathbf{v}, q_\omega)|}{|\mathbf{v}|_{H^1(\omega)^d}}. \quad (12)$$

2.2. *Deuxième étape : minoration de $\beta(\omega)$*

D'après la définition de $\beta(\Omega)$, on a

$$\sup_{\mathbf{v}_\Omega \in H_0^1(\Omega)^d} \frac{b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega)}{|\mathbf{v}_\Omega|_{H^1(\Omega)^d}} \geq \beta(\Omega) \|q_\Omega\|_{L^2(\Omega)}.$$

Grâce à l'inégalité (12), on obtient donc

$$\sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\omega)^d} \frac{b_\omega(\mathbf{v}, q_\omega)}{|\mathbf{v}|_{H^1(\omega)^d}} \geq \frac{\beta(\Omega)}{c_p(\Omega)(1+c)} \|q_\Omega\|_{L^2(\Omega)}. \quad (13)$$

En utilisant (13) et (7), et comme $|\alpha| = 1$, on en déduit la minoration de $\beta(\omega)$ suivante :

$$\sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\omega)^d} \frac{b_\omega(\mathbf{v}, q_\omega)}{|\mathbf{v}|_{H^1(\omega)^d} \|q_\omega\|_{L^2(\omega)}} \geq \frac{\beta(\Omega)}{c_p(\Omega)(1+c)}, \quad (14)$$

où $c = c_{RC_\gamma} = \|\gamma\| \|R\|$ ne dépend que du domaine ω . Il reste maintenant à caractériser la constante c .

2.3. Troisième étape : caractérisation de la constante c .

Comme dans ce qui précède, l'opérateur de relèvement est quelconque, afin de choisir le plus petit c possible, on peut prendre $c = \|\gamma\| \inf_{R \in H} \|R\|$, où

$$\|\gamma\| = \sup_{\mathbf{v} \in H^1(\omega)^d} \frac{\|\gamma \mathbf{v}\|_{H^{1/2}(\partial\omega)^d}}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\omega)^d}}, \quad \|R\| = \sup_{\mathbf{v} \in H^{1/2}(\partial\omega)^d} \frac{\|R \mathbf{v}\|_{H^1(\omega)^d}}{\|\mathbf{v}\|_{H^{1/2}(\partial\omega)^d}},$$

et $H = \left\{ R : \text{relèvement linéaire continu de } H^{1/2}(\partial\omega)^d \text{ dans } H^1(\omega)^d \right\}.$

Si on prend $\|\gamma \mathbf{v}\|_{H^{1/2}(\partial\omega)^d} = \inf \{ \|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)^d}, \gamma \mathbf{w} = \gamma \mathbf{v} \text{ sur } \partial\Omega \}$, alors $c = \inf_{R \in H} \|R\|$. De plus, on a $\inf_{R \in H} \|R\| = \|R_h\|$, où R_h est le relèvement harmonique, donc le plus petit c est $c = \|R_h\|$. Ceci termine la preuve de (5). ■

Remarque 1 Soient $\mathbf{a}$ un vecteur quelconque non nul de $\mathbb{R}^d$, λ un réel et $\Phi_{\lambda, \mathbf{a}}$ l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda, \mathbf{a}} : \Omega &\rightarrow \Omega_{\lambda, \mathbf{a}}, \\ \mathbf{x} &\rightarrow \Phi_{\lambda, \mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{x}. \end{aligned} \tag{15}$$

On a alors

$$\beta(\Omega_{\lambda, \mathbf{a}}) = \beta(\Omega).$$

Autrement dit, la constante $\beta(\Omega)$ vérifiant la condition inf-sup est invariante par translation et par homothétie du domaine Ω .

Grâce à la propriété ci-dessus et au théorème 2.1, on peut facilement obtenir un encadrement de la constante $\beta(\omega)$.

Corollaire 2.2 Soit ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, de frontière lipschitzienne. Alors pour tout Ω ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$ de frontière lipschitzienne, on a

$$c_p(\omega)(1 + \|\tilde{R}_h\|)\beta(\Omega) \geq \beta(\omega) \geq \frac{\beta(\Omega)}{c_p(\Omega)(1 + \|R_h\|)},$$

où R_h et $\tilde{R}_h$ sont respectivement les opérateurs de relèvement harmonique sur ω et Ω .

Remarque 2 Soit ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ de frontière lipschitzienne. Si la constante $\beta(\omega)$ vérifiant la condition inf-sup est définie en choisissant la norme complète de $H^1(\omega)^d$:

$$\beta(\omega) = \inf_{q \in L_0^2(\omega)} \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\omega)^d} \frac{b_\omega(\mathbf{v}, q)}{\|q\|_{L_0^2(\omega)} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\omega)^d}}, \tag{16}$$

alors on peut montrer la minoration suivante :

$$\beta(\omega) \geq \frac{\sup_{\Omega \supset \bar{\omega}} \beta(\Omega)}{1 + \|R_h\|}. \tag{17}$$

Références

- [1] I. Babuška, *The finite element method with Lagrangian multipliers*, Numer. Math.20, pp 179-192.(1973).
- [2] F. Brezzi, *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers*, R.A.I.R.O., Anal. Numer. R2, pp. 129-151. (1974).
- [3] V. Girault et P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer-Verlag (1986).