

Livre :

Modélisation et Commande embarquée d'objets volants miniatures

Chapitre 5 :

## Approches prédictives pour la stabilisation en temps discret de l'avion planaire à décollage vertical

Par

Nicolas Marchand † Ahmed Chemori † Guylaine Poulin ‡

† LAG - UMR 5528 CNRS-INPG-UJF, ENSIEG BP 46

38402, Saint Martin d'Hères Cedex, France

† LEG - UMR 5529 CNRS-INPG-UJF, ENSIEG BP 46

38402, Saint Martin d'Hères Cedex, France

21 juillet 2006

### Résumé du chapitre

L'avion planaire à décollage vertical (PVTOL aircraft en anglais) a fait l'objet de recherches nombreuses ses dernières années car il est souvent une première étape avant la commande en trois dimensions d'un drone. En effet, son modèle peut être vu comme la projection du modèle général d'un engin dans un plan vertical attaché à celui-ci. Les approches et donc les commandes proposées jusqu'alors sont temps continu et nécessitent d'être échantillonnées avant d'être implantées. Nous proposons dans ce chapitre une approche originale basée sur une discrétisation en deux étapes du PVTOL dont le résultat s'écrit à base d'intégrales de Fresnel. On obtient ainsi un système en temps discret qui peut être vu comme deux systèmes linéaires, le premier est temps invariant tandis que le second est temps variant. Une approche prédictive est proposée. Elle permet la stabilisation du PVTOL en prenant en compte les saturations et contrainte de positivité des actionneurs. Des critères comme la minimisation de l'énergie consommée peuvent être pris en compte. Le coût de calcul associé est extrêmement limité au regard de celui de la commande optimale classique tout en offrant la même souplesse dans le choix du critère. Ce travail s'inscrit dans le fort développement de techniques prédictives pour les systèmes à dynamique rapide.

## 1 introduction

Les avions à décollage vertical (PVTOL : *Planar Vertical Take-Off and Landing* en anglais) sont des machines volantes qui ont la capacité de décoller et atterrir verticalement comme un hélicoptère, mais qui ont la capacité de voler avec l'efficacité d'un avion classique. La dynamique non linéaire simplifiée de tels avions a été introduite par [4], elle comporte trois degrés de liberté et deux entrées de commande. Ce système est devenu un 'benchmark' des systèmes de commande à non minimum de phase. Deux exemples d'avions réels à décollage sont représentés sur la figure 1, il s'agit des avions Harrier-av8b (British aerospace/britannique) et Harrier-yav8b (McDonnell Douglas/américain) <sup>1</sup>.



Figure 1 – Exemples d'avion à décollage vertical

Le modèle simplifié du PVTOL peut être considéré comme étant la projection sur un plan vertical d'un objet volant à six degrés de liberté. Une telle dynamique simplifiée d'un PVTOL a été largement utilisée à cause des difficultés inhérentes qu'elle englobe, telles que le sous-actionnement (deux entrées de commande pour trois degrés de liberté), la propriété de non minimum de phase (l'existence d'une dynamique des zéros instable). En outre ce système inclut toutes les difficultés de l'intégrateur de Brockett (système unicycle) qui peut être obtenu en négligeant le paramètre de couplage.

Dans le contexte de la commande du PVTOL plusieurs approches de commande ont été proposées et qui peuvent être classées en deux grandes familles, à savoir les approches de *poursuite de trajectoires* et les approches de *stabilisation*.

Dans le cadre de la première famille l'objectif consiste à trouver une loi de commande permettant de poursuivre une certaine trajectoire de référence. Dans ce cas il existe deux classes principales d'approches de commande : la première représente les approches à base de *linéarisation*, alors que la deuxième représente les approches à base de *décomposition*. Dans [4] une approche de commande à base de linéarisation entrée/sortie approchée a été proposée, où le système à non minimum de phase est approximé par un système à minimum de phase. Cette approche permet la poursuite de trajectoires aussi bien que la stabilisation des avions V/STOL. Les auteurs dans [8] ont proposé une extension de l'approche de Hauser. La stratégie proposée utilise le centre d'oscillation d'Huygens comme sortie plate pour le modèle du PVTOL, puis un retour d'état dynamique est utilisé dans la linéarisation exacte du modèle. L'avantage d'une telle méthode est qu'elle reste valide que ce soit pour un petit ou un grand paramètre de couplage. Dans [6] une approche de commande inspirée de l'approche de [9] a été proposée, elle consiste à utiliser une transformation à une forme normale puis appliquer une linéarisation entrée/sortie.

<sup>1</sup>cf. <http://www.kensaviation.com/AV-8.htm>

Pour la classe des approches à base de décomposition, les auteurs dans [1] ont proposé une stratégie qui consiste à décomposer le système en deux : un sous-système à minimum de phase et un sous-système à non minimum de phase. Ensuite une inversion dynamique est utilisée pour le premier sous-système, alors que pour le deuxième un retour d'état robuste, stabilisant, basé sur une commande LQR est appliqué au modèle linéarisé autour de l'équilibre

La stabilisation quant à elle consiste à ramener les états du système d'une certaine condition initiale à l'origine. Pour résoudre un tel problème, différentes approches de commande ont été proposées, elles peuvent être classées en deux classes principales, à savoir les approches de commande non bornées et les approches de commande bornées.

Dans le cadre de la première classe, [12] a proposé une approche qui utilise le centre d'oscillation et une linéarisation à deux pas pour stabiliser l'avion. Dans [10] l'auteur a traité le problème de stabilisation globale du PVTOL avec un grand paramètre de couplage, l'approche proposée utilise un retour d'état statique lisse. Dans [7] une approche de stabilisation robuste a été proposée, où l'objectif de commande est formulé comme étant un problème de commande optimale. La robustesse d'une telle approche de commande est démontrée à travers des simulations numériques.

Dans la classe des approches de commande bornée, des contraintes sur la sortie aussi bien que sur les entrées de commande (i.e positivité de la poussée) sont prises en compte dans la conception de l'approche de commande. Par exemple dans [2] une approche de commande qui prend en compte les contraintes sur la commande et ne présente pas de singularités a été proposée. L'algorithme de commande consiste à imposer une certaine dynamique désirée pour les deux sous-systèmes  $x$  et  $y$  telles que les accélérations et les vitesses correspondantes seront bornées. Dans [14, 3] une approche de stabilisation globale a été proposée, elle est basée sur l'utilisation de combinaison non linéaire des fonctions de saturations linéaires sur la poussée et le moment de roulis.

Dans ce chapitre une approche de commande prédictive non linéaire est proposée pour la stabilisation d'un avion à décollage vertical PVTOL. Le principe de base de cette stratégie de commande consiste à décomposer la dynamique en deux sous systèmes linéaires, qui seront utilisés dans deux problèmes d'optimisation convexe qui peuvent être résolus avec des algorithmes de programmation quadratique. Les contraintes aussi bien sur la poussée que sur le couple de roulis sont prises en compte dans cette approche de commande. Différents résultats de simulation sont proposés permettant de montrer l'efficacité de la stratégie de commande et sa robustesse envers des incertitudes sur les paramètres du systèmes.

## **2 Modèle dynamique du PVTOL**

On considère la dynamique simplifiée du PVTOL<sup>2</sup> qui a été introduite initialement par Hauser [5] et qui a été fortement utilisée depuis. Cette dynamique est décrite par les équations

---

<sup>2</sup>Cette dynamique qui a le minimum nombre de degrés de liberté et entrées de commande reste représentative des principales caractéristiques de l'avion réel

suivantes :

$$\ddot{x} = -\sin(\theta)u + \varepsilon \cos(\theta)v \quad (1)$$

$$\ddot{y} = \cos(\theta)u + \varepsilon \sin(\theta)v - 1 \quad (2)$$

$$\ddot{\theta} = v \quad (3)$$

où  $x$  et  $y$  représentent les positions cartésiennes horizontale (respectivement verticale) du centre de gravité de l'avion comme le montre la figure 2.  $\theta$  représente l'angle du roulis (c'est l'angle que fait l'avion avec l'horizon). Les entrées de commande  $u$  et  $v$  représentent les grandeurs normalisées relatives à la poussée verticale dirigée vers le haut par rapport à l'avion et le couple de roulis.  $\varepsilon$  représente le paramètre de couplage entre le couple de roulis et l'accélération latérale de l'avion. Le coefficient  $-1$  dans (2) correspond à l'accélération normalisée de la gravité.

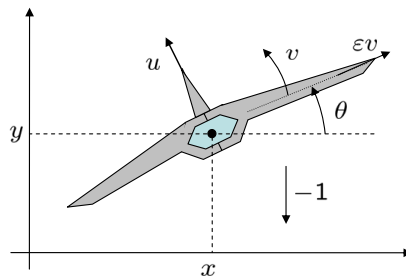


Figure 2 – view of the PVTOL in the frontal plane

## 3 L'approche de commande proposée

### 3.1 Formulation du problème de commande en boucle-ouverte

Le principe de base de commande prédictive consiste à trouver à chaque instant  $t$  une stratégie de commande en boucle ouverte permettant de calculer le vecteur de commande

$$[u(\tau), v(\tau)] \quad ; \quad \tau \in [t, t + t_f]$$

(où  $t_f$  représente l'horizon de prédiction) qui conduit les états du système  $z = (x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$  à un certain état désiré final  $z(t + t_f) = (x(t + t_f), \dot{x}(t + t_f), y(t + t_f), \dot{y}(t + t_f), \theta(t + t_f), \dot{\theta}(t + t_f))$ . La mise à jour de la commande à chaque période d'échantillonnage résulte en une commande en boucle fermée. Soit  $T$  la période d'échantillonnage, telle que  $t_f = NT$ . Les entrées de commande sont supposées être constantes sur chaque période d'échantillonnage. Dans la suite de ce chapitre, l'indice  $k$  représente la valeur à l'instant  $t + kT$ . La loi de commande est alors définie par les deux vecteurs :

$$U(t) = [u_0 \ u_1 \ \cdots \ u_{N-1}]^T$$

$$V(t) = [v_0 \ v_1 \ \cdots \ v_{N-1}]^T$$

L'objectif est de trouver des commande bornées, à savoir une poussée positive  $0 \leq u_k \leq u^{\max}$  et un couple de roulis limité  $v^{\min} \leq v_k \leq v^{\max}$ , et pour des raison de commandabilité  $u_k$

doit vérifier  $u^{\max} > 1$ . L'idée de base de l'approche de commande qu'on propose consiste à subdiviser le problème de commande deux sous-problèmes. Dans le premier la commande  $v$  est utilisée pour stabiliser  $\theta$  et  $\dot{\theta}$ . Alors que dans le deuxième, l'objectif consiste à stabiliser  $x, y$  et leurs dérivées quel que soit le choix de  $v$ . Ceci est uniquement possible si l'évolution de  $\theta$  est suffisamment "riche". Le terme "riche" fait référence à deux phénomènes qui seront expliqués par la suite. Premièrement, à cause de la positivité de la commande  $u$ ,  $\theta$  doit évoluer alternativement (positive/négative) sur l'intervalle  $[t, t + NT]$  dans le but de préserver la commandabilité du reste du système même dans le cas d'un couplage nul. Pour cela, la dynamique de (3) est complétée avec

$$\dot{I}_\theta = \theta$$

Si  $I_\theta$  commence et termine à l'origine, la commandabilité de  $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})$  sera préservée. Le deuxième quant à lui correspond à la perte de commandabilité si  $\theta$  s'annule, ce cas sera traité dans la suite.

On considère maintenant le sous-système de  $\theta$  étendu, à savoir  $\Theta := (I_\theta, \theta, \dot{\theta})^T$  qui correspond à une chaîne d'intégrateur d'ordre 3, dont la discrétisation donne :

$$\Theta_{k+1} = A_\theta \Theta_k + B_\theta v_k.$$

Par récurrence  $\Theta_N$  peut être exprimée en fonction de  $\Theta_0$  par :

$$\Theta_N = A_\theta^N \Theta_0 + [A_\theta^{N-1} B_\theta \ A_\theta^{N-2} B_\theta \ \dots \ B_\theta] V \quad (4)$$

Soit  $\tilde{V}$  la solution (si elle existe) du problème de programmation quadratique sous contraintes qui est exprimé, pour des raisons de simplicité, sous sa forme de stabilisation

$$\mathcal{P}_v : \tilde{V} := \min_V \sum_{k=1}^N \Theta_k^T Q \Theta_k + r V_{k-1}^T V_{k-1} \quad (5)$$

avec  $Q, r > 0$  sont les termes de pondérations. sous les contraintes (4) et :

$$v^{\min} \leq V_i \leq v^{\max} \quad \text{for } i = 0, \dots, N-1$$

Par convention, si  $N = 0$ ,  $\mathcal{P}_v$  admet  $V = (\cdot)$  comme solution.

Étant donné que la dérivée seconde de  $\theta$  est constante alors  $\theta$  quadratique en  $\tau \in [t + kT, t + (k+1)T]$  :

$$\theta(\tau) = \alpha_k + \beta_k[\tau - (t + kT)] + \gamma_k[\tau - (t + kT)]^2$$

où  $\alpha_k := \theta(t + kT), \beta_k := \dot{\theta}(t + kT), \gamma_k := \frac{1}{2}v(t + kT)$  sont constants sur chaque période d'échantillonnage.

Soit  $\zeta := (x, \dot{x}, y, \dot{y})^T$ , en utilisant (1-2), des calculs fastidieux nous permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned} \zeta_N &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{t_f^2}{2} \\ -t_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t_f & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \zeta_0 \\ &+ (Q_1 \Gamma + T Q_3 \Gamma D_N) U \\ &+ \varepsilon (Q_2 \Gamma + T Q_4 \Gamma D_N) \tilde{V} \end{aligned} \quad (6)$$

où  $\Gamma$  est une matrice constante basée sur les intégrales de Fresnel, qui pourra être calculée aisément [15].  $Q_1, \dots, Q_4$  sont des matrices de permutation et  $D_N$  est une matrice diagonale. toutes ces matrices sont détaillées dans l'appendice A. Pour trouver la séquence de commande bornée en boucle ouverte  $U(t)$ , il serait nécessaire d'inverser (6). Ceci nécessite que la matrice  $Q_1\Gamma + TQ_3\Gamma D_N$  soit de rang plein. Ceci ne sera pas prouvé ici, néanmoins cette propriété peut être formellement vérifiée si  $N > 4$ ,  $\theta(t) \neq \theta(t + t_f)$  et  $T$  suffisamment petit [11]. Cependant la condition sur la période d'échantillonnage  $T$  peut être relaxer, étant donné que la matrice  $\Gamma$  est composée de fonction linéairement indépendantes, et par conséquent elle est de rang plein. La séquence de commande  $U$  qui conduit le sous-système  $(x, y)$  de  $\zeta(t)$  à  $\zeta(t + t_f)$  peut être obtenue par solution du problème de programmation quadratique suivant :

$$\mathcal{P}_u : \tilde{U} := \min_U \sum_{k=1}^N \zeta_k^T O \zeta_k + p U_{k-1}^T U_{k-1} \quad (7)$$

sous les contraintes (6) et :

$$0 \leq U_i \leq u^{\max} \quad \text{for } i = 0, \dots, N - 1$$

où  $O, p > 0$  sont les pondérations.

Soit  $\tilde{U}(T, N, \tilde{V}, \zeta(t), \zeta(t + NT))$  représente, si elle existe, la solution de (7).

### 3.2 Évitement des singularités en boucle ouverte

L'étape suivante consiste à placer le système dans une configuration qui assure l'existence d'une solution de (5) et (7). Il y a deux problèmes qui sont étroitement liés. Le premier correspond à la condition initiale singulière  $\theta(t) = \theta(t + NT) = 0$  qui résulte dans une perte de commandabilité sur  $x$ . Un tel problème est trivial dans le contexte de la commande des systèmes non holonomes où le linéarisé est non commandable. Face à ce problème, une solution existante dans la littérature, consiste à prendre ce cas comme cas particulier, mais cette solution n'est point satisfaisante. En effet, si  $\theta(t)$  et  $\theta(t + t_f)$  sont trop proches l'une de l'autre, le problème d'optimisation (5) n'admettra pas une solution qui vérifie les contraintes (solution bornée). Le deuxième problème déjà mentionné ci-dessus se produit lorsque la contrainte sur  $u$  est trop restrictive par rapport à celle sur  $v$ . En effet, avec des arguments classiques linéaires, on peut assurer que le problème d'optimisation (5) admet une solution pour tout  $N$  suffisamment grand, alors qu'il reste quelques soucis sur  $\zeta$ . La trajectoire optimale en boucle ouverte de  $\theta(t)$  doit typiquement de même signe que  $\theta(0)$ , puis de signe opposé jusqu'à ce que  $\theta$  rejoint l'origine où elle y reste jusqu'à la fin de l'horizon de prédiction. Par conséquent, si  $\theta$  s'annule "trop vite" à cause de contraintes non restrictives ( $v^{\min}, v^{\max}$ ), alors il serait impossible de conduire  $\zeta$  à l'origine avec une contrainte  $u^{\max}$  trop restrictive, et l'augmentation de l'horizon ne résoudra pas forcément ce problème. Par conséquent, l'approche de commande permet, au premier lieu, de se déplacer latéralement en forçant  $\theta$  de rester non nulle avant de converger vers l'origine. Ceci assure que le système soit nécessairement dans une certaine configuration à partir de laquelle il serait possible de l'amener à l'origine par le moyen d'une commande bornée. En effet, si par exemple le système commence avec une certaine position  $x(0) > 0$ , alors en forçant  $\theta$  de converger vers  $\theta_d > 0$  avec  $v$ , et utiliser  $u$  pour compenser la gravité va produire une translation de l'avion dans le sens contraire de l'axe des  $x$  (vers la gauche). A une

certaine distance de l'axe  $x = 0$  qui dépend de  $v_{max}$  et  $v_{min}$ , il existe une certaine commande qui ramène l'avion à l'axe  $x = 0$  ou  $\mathcal{P}_u$  et  $\mathcal{P}_v$  ont évidemment des solutions. Pour cela soit [13] :

$$v = \left[ \theta_1 \operatorname{sat}\left(\frac{y_1}{\sigma}\right) + \left(\frac{y_2}{\sigma}\right) \right] \sigma \quad \text{avec} \quad y = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^2 & \frac{T^2}{2} \\ -T & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ d\theta \end{pmatrix} \quad (8)$$

où

$$\left[ \sigma = \frac{\min(v_{max}, -v_{min})}{\theta_1 + \theta_2} \right] \quad \text{et} \quad 0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$$

$$u = \operatorname{sat}_0^{u_{max}} \left( \frac{1 - \varepsilon \sin \theta v}{\cos \theta} \right) \quad (9)$$

### 3.3 La commande stabilisante en boucle fermée

Dans cette section le résultat principal de l'approche de commande sera introduit par le théorème suivant :

**Théorème 3.1.** *Soit  $(\zeta_f, \Theta_f) = (x_f, 0, y_f, 0, 0, 0, 0)$  un certain état final désiré et on suppose que le système à l'instant  $kT$  est à un point  $(\zeta(kT), \Theta(kT))$  de l'espace d'état. L'algorithme suivant consiste à définir la loi de commande qui stabilise le système (1)-(3) asymptotiquement à  $(\zeta_f, \Theta_f)$ .*

**Algorithm :**

- **Étape 0 :** fixer l'horizon de prédiction  $t_f := NT$
- **Étape 1 :** Calculer à travers la solution de  $\mathcal{P}_u$  et  $\mathcal{P}_v$  l'ensemble  $\mathcal{C}$  des commandes admissible définies par :

$$\mathcal{C}(\zeta(kT), \Theta(kT), \zeta_f, \Theta_f, N, \delta^{\max}, \beta) = \left. \begin{aligned} & \left\{ \left( \begin{array}{l} \hat{U}(T, n, \hat{V}, \zeta(kT), \zeta_f) \\ \hat{V}(T, n, \alpha, \delta, \Theta(kT), \Theta_f) \end{array} \right), \alpha \in \{-\beta, \beta\}, \right. \\ & \left. \delta \in \{-1, 0, \dots, \delta^{\max}\}, n \in \{0, \dots, N\} \right\} \end{aligned} \right\}$$

- **Étape 2 :** Si  $\mathcal{C} = \emptyset$ , ce qui veut dire qu'il n'y a pas de commandes  $(U, V)$  vérifiant les contraintes, qui conduisent le système de  $(\zeta(kT), \Theta(kT))$  à  $(\zeta_f, \Theta_f)$  dans une durée inférieure à  $NT$ , alors augmenter  $N$  et aller à l'étape 1. Sinon,  $\mathcal{C}$  contient les commandes admissibles en boucle-ouverte, qui conduisent le système de  $(\zeta(kT), \Theta(kT))$  à  $(\zeta_f, \Theta_f)$  pendant une durée inférieure ou égale à  $NT$ . Soit  $(U^{opt}, V^{opt})$  définie par

$$\begin{pmatrix} U^{opt}(kT) \\ V^{opt}(kT) \end{pmatrix} := \operatorname{Arg} \min_{\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \in \mathcal{C}} J(U, V) \quad (10)$$

où  $J(U, V) = U^T U + eV^T V$  avec  $e > 0$  et par convention, pour prendre en compte le cas  $(\zeta(kT), \Theta(kT)) = (\zeta_f, \Theta_f)$  où la solution des problèmes d'optimisation donne des vecteurs vides, on prend la solution  $J((\cdot), (\cdot)) = 0$ .

– **Étape 3** : La loi de commande en boucle-fermée est alors donnée par :

◇ If  $(U^{opt}, V^{opt})$  sont des vecteurs vides :

$$\begin{cases} u(\zeta(kT), \Theta(kT)) := 1 \\ v(\zeta(kT), \Theta(kT)) := 0 \end{cases} \quad (11)$$

◇ Sinon la loi de commande en boucle-fermée est le premier élément de  $(U^{opt}, V^{opt})$  :

$$\begin{cases} u(\zeta(kT), \Theta(kT)) := U_0^{opt} \\ v(\zeta(kT), \Theta(kT)) := V_0^{opt} \end{cases} \quad (12)$$

Noter que  $J$  peut être choisi linéaire en  $U$  au lieu d'un choix quadratique. Comme cela était mentionné auparavant, ce choix dépend fortement de la relation entre la poussée et l'énergie (électrique, carburant, etc) utilisée.

### Preuve

Le point clé de la preuve consiste à établir le principe d'invariance de Bellman pour l'approche proposée. En d'autres termes, l'idée consistait à vérifier, pour tout  $k$ , que la solution optimale de (10) à l'instant  $kT$  demeure (décalée par une période d'échantillonnage) dans l'ensemble des commandes admissibles  $\mathcal{C}(\zeta((k+1)T), \Theta((k+1)T), \zeta_f, \Theta_f, N, \delta^{\max}, \beta)$  dans lequel la solution optimale à l'instant  $(k+1)T$  est recherchée. Cette propriété permet donc de conclure sur la stabilité de l'approche proposée.

*Principe d'invariance* : Soit  $(U^{opt}(kT), V^{opt}(kT))$  la solution de (10) à l'instant  $kT$ , et  $n^{opt}$  l'horizon de prédiction correspondant. Il sera prouvé ici que  $(U^{opt}(kT), V^{opt}(kT))$  décalé d'une période d'échantillonnage, à savoir

$$\begin{pmatrix} U_s^{opt}(kT) \\ V_s^{opt}(kT) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} U_1^{opt}(kT), \dots, U_{n^{opt}}^{opt}(kT) \\ V_1^{opt}(kT), \dots, V_{n^{opt}}^{opt}(kT) \end{pmatrix}$$

appartient à  $\mathcal{C}(\zeta((k+1)T), \Theta((k+1)T), \zeta_f, \Theta_f, N, \delta^{\max}, \beta)$ . Noter au premier lieu que  $(U_s^{opt}(kT), V_s^{opt}(kT))$  conduit le système de  $(\zeta((k+1)T), \Theta((k+1)T))$  à  $(\zeta_f, \Theta_f)$ . De plus, l'application du principe d'invariance de Bellman au problème d'optimisation  $\mathcal{P}_v$  garantit que  $(V_1^{opt}(kT), \dots, V_{n^{opt}}^{opt}(kT))$  est une solution de  $\mathcal{P}_v(T, n^{opt}-1, \alpha, \max(-1, \delta-1), \Theta((k+1)T), \Theta_f)$ . L'application du même principe pour  $\mathcal{P}_u$  permet d'en déduire que  $(U_1^{opt}(kT), \dots, U_{n^{opt}}^{opt}(kT))$  est solution de  $\mathcal{P}_u(T, n^{opt}-1, V_s^{opt}(kT), \zeta((k+1)T), \zeta_f)$ . Le cas trivial où  $n^{opt} = 0$  ne sera pas détaillé ici. Il correspond à la situation où l'état final désiré est déjà atteint, et la loi de commande garantit que le système reste à l'état final avec un coût associé nul  $J = 0$ . Par conséquent il en résulte de la définition de  $\mathcal{C}$  que  $(U_s^{opt}(kT), V_s^{opt}(kT))$  appartient à  $\mathcal{C}(\zeta((k+1)T), \Theta((k+1)T), \zeta_f, \Theta_f, N-1, \delta^{\max}, \beta)$  et donc appartenant à  $\mathcal{C}(\zeta((k+1)T), \Theta((k+1)T), \zeta_f, \Theta_f, N, \delta^{\max}, \beta)$ .

*Stabilité* : La stabilité peut être déduite en se basant sur le résultat précédent. En effet, si on considère  $J$  comme une fonction de Lyapunov, on a :

1.  $J = 0$  si et seulement s'il est possible d'atteindre une position désirée sans commande. Par conséquent, grâce à (1)-(3), l'ensemble de positions initiales tel que  $J = 0$  est incluse dans le sous-espace  $\mathcal{S} = \{(\dot{x}, \theta, \dot{\theta}) = 0, xy \geq y_f\}$ . Bien évidemment, Le seul sous-espace de  $\mathcal{S}$  invariant est l'origine.



2.  $N$  ne peut pas croître sur les trajectoires en boucle fermée du système à l'exception de l'instant initial. En effet, le profil de la commande représentée par la solution à l'instant  $kT$ , sans le premier élément de la séquence, constitue une solution à l'instant  $(k+1)T$  pour ramener le système au point désiré cible  $(\zeta_f, \Theta_f)$  dans une durée inférieure ou égale  $(N-1)T$ . Cependant, l'ensemble  $\mathcal{C}$  à l'instant  $(k+1)T$  peut être vide et par conséquent  $N$  reste constant.
3. *La fonction coût est croissante* : Si  $J_k$  représente la valeur du coût à l'instant  $kT$ , alors il en découle de la propriété de 'transitivity' précédente que  $J_{k+1} \leq J_k$ .
4.  *$J$  ne peut pas se stabiliser à une valeur constante autre que zéro* D'après la définition de  $J$  il en découle que  $J_{k+1} = J_k$  ce qui implique que  $(U_0^{\text{opt}}(kT), V_0^{\text{opt}}(kT)) = (0, 0)$ . Si ce cas demeure, alors il en résulte de (2) que  $y$  décroît et par conséquent le système s'éloigne de la position cible finale  $(\zeta_f, \Theta_f)$ . Mais un coût constant  $J$  implique aussi qu'il est possible d'atteindre ce point final désiré durant une période inférieure ou égale  $NT$  avec des commandes bornées. Étant donné que  $N$  ne peut pas croître, ces deux points sont clairement incompatibles assurant que  $J$  décroît nécessairement après un nombre fini de périodes d'échantillonnage.
5.  *$J$  ne peut pas tendre vers une valeur constante autre que zéro*. Un tel cas implique que la décroissance de  $J$  tend vers zéro et par conséquent  $(U_0^{\text{opt}}(kT), V_0^{\text{opt}}(kT)) \rightarrow (0, 0)$ . Ceci signifie aussi que le système s'éloigne de l'état désiré cible étant donné que la gravité ne peut être compensée. Cependant ceci ne peut pas durer car c'est en contradiction avec (2) qui garantit l'existence de commande qui satisfait les contraintes et qui est en mesure de ramener le système à  $(\zeta_f, \Theta_f)$  en une durée égale à  $NT$ . Items (3), (4) et (5) garantissent certainement que le vecteur d'état tend vers un ensemble où  $J = 0$ . D'après le principe d'invariance de Lasalle et l'argument (1) on en déduit de la stabilité du système sous l'approche de commande proposée. ▲

**Remarque 1.** La stratégie de commande proposée à horizon fuyant est basée sur une approche à deux étapes. En effet elle consiste à résoudre deux problèmes d'optimisation quadratiques de dimension  $N$  pour trouver la séquence de commande adéquate. Cependant la solution à base de commande optimale consiste à résoudre un problème d'optimisation non linéaire de dimension  $2N$ . Par conséquent le temps de calcul de l'approche proposée sera significativement réduit par rapport à la solution de commande optimale. Cet avantage permet l'implémentation en temps réel de l'approche proposée sur des systèmes de commande embarquée pour l'avion PVTOL.

## 4 Résultats de simulation

Cette section sera consacrée à la présentation des résultats de simulation correspondants avec éventuellement des commentaires et des interprétations des résultats obtenus. Ces simulations permettent aussi de montrer l'efficacité de l'approche proposée. Deux scénarios de simulation sont proposés. Le premier scénario concerne la stabilisation de l'avion PVTOL alors que le deuxième consiste à tester la robustesse de l'approche proposée envers des incertitudes paramétriques, et en particulier sur le paramètre de couplage  $\varepsilon$ .

On considère le modèle dynamique (1)-(3) de l'avion PVTOL, avec le paramètre de couplage

$\varepsilon = 0.25$ . l'algorithme de l'approche de commande proposée est celui expliqué dans la section 3.3, les paramètres associés sont récapitulés dans le tableau 1.

Paramètre	Signification	valeur
$t_f$	horizon de prédiction	20sec
$T$	période d'échantillonnage	0.5sec
$u^{\max}$	saturation sur la poussée	4
$v^{\max}, -v^{\min}$	saturation sur le couple de roulis	0.5
$\delta^{\max}$	horizon de la commande constante	0
$\beta$	pondérations sur la commande constante	$0.001v^{\max}$
$Q_k$	pondération sur $\Theta$ dans (5)	$I_{3 \times 3}$
$R$	pondération sur $V$ dans (5)	$5I_{k \times k}$
$O_k$	pondération sur $\zeta$ dans (7)	$I_{4 \times 4}$
$P$	pondération sur $U$ dans (7)	$5I_{k \times k}$

Tableau 1 – Paramètre de l'approche de commande

## 4.1 Stabilization de l'avion PVTOL

On considère le problème de stabilisation de l'avion à partir de la condition initiale suivante (comme dans [3])

$$(x(0), \dot{x}(0), y(0), \dot{y}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)) = (30, 0, 20, 0, \frac{3\pi}{5}, 0)$$

Ce choix de cette condition initiale est judicieux car  $\theta$  excède  $\frac{\pi}{2}$ , ce qui n'est pas permis par la plupart des approche de commande proposées dans la littérature [see 5, 10].

Dans ce scénario de simulation, une contrainte sur la poussée  $u$  est imposée, cette limite est identique à celle imposée dans [3], elle est définie par  $u^{\max} = 4$ , ce qui va nous permettre de comparer notre approche à celle proposée dans [3]. De plus une autre contrainte sur le couple de roulis est considérée, elle est exprimé par  $v^{\max} = -v^{\min} = 0.5$ , ce qui n'est pas permis, à notre connaissance, par les différentes approches de commande proposées dans la littérature. Les résultats de simulation obtenus sont représentés sur les figures 3-8.

L'évolution de la position et la vitesse de l'avion suivant l'axe des  $x$  est représenté sur la figure 3, alors que celles suivant l'axe des  $y$  est représenté sur la figure 4. L'angle de roulis et sa vitesse sont tracées sur la figure 5. D'après les courbes de simulation obtenues, le contrôleur proposée à horizon fuyant arrive à stabiliser le système au bout d'une période inférieur à 15sec. L'évolution des entrées de commande générées par le contrôleur est représentée sur la figure 6. La fonction coût quant à elle est tracée sur la figure 7. La figure 8 trace la séquence de position effectuée par l'avion PVTOL dans le plan frontal pendant la stabilisation. Pour donner une idée comparative en terme de consommation d'énergie par rapport à l'approche de commande proposée dans [3], on considère l'intégral de  $u$  nécessaire pour atteindre la boule de rayon 0.05 autour de l'état final désiré. La poussée nécessaire pour stabiliser l'avion avec notre approche est 65 % inférieur à celle de l'approche proposée dans [3]. Ce fait est en relation étroite avec le temps nécessaire pour rejoindre le voisinage proposé. En effet le temps nécessaire pour notre approche pour rejoindre ce voisinage ( $\approx 13sec$ ) est la moitié du temps nécessaire pour le rejoindre avec l'approche de commande proposée dans [3].

## 4.2 Robustesse envers des incertitudes paramétriques

L'objectif principal de ce scénario de simulation est de montrer l'efficacité de l'approche de commande proposée en terme de robustesse envers des incertitudes dans les paramètres de modèle. Étant donné qu'en pratique, comme cela a été signalé par Hauser [5], le paramètre de couplage est généralement inconnu et difficile à mesurer. De plus pour certains engins volants (telles que les robots biomimétique à ailes battantes), ce paramètre peut être variable, donc il serait intéressant de considérer une incertitude sur ce paramètre. Pour cela soit

$$\varepsilon_u = \varepsilon + \Delta\varepsilon \quad ; \quad \Delta\varepsilon = 50\%$$

Les résultats de simulation correspondants à ce scénario sont représentés par les figures 9-13, pour le système nominal aussi bien que pour le système incertain. Il est intéressant de noter que les trajectoires obtenues pour le système incertain sont très proches de celles du système nominal, en dépit de l'ampleur de l'incertitude considérée (50% de la valeur nominale). Ce résultat intéressant reflète clairement la robustesse de l'approche proposée.

## 5 Conclusion

Dans ce chapitre, une approche de commande à horizon fuyant à été proposée pour la stabilisation globale d'un avion à décollage vertical PVTOL (*Planar Vertical Take Off and Landing aircraft*). L'approche de commande proposée prend en considération les saturations sur les deux entrées de commande, à savoir la poussée et le couple de roulis. De plus elle permet la stabilisation de l'avion à n'importe quel point dans l'espace. Un autre point intéressant de cette approche de commande proposée réside dans le coût de calcul réduit<sup>3</sup> qui est obtenu grâce à la formulation du problème de commande comme étant deux problèmes de programmation quadratique de dimension réduite. Étant donné que la fonction d'optimisation est convexe, la convergence vers l'optimum est garantie. L'analyse de stabilité du système en boucle fermée est effectuée en se basant sur le principe d'invariance de Bellman. Afin d'illustrer l'approche proposée, deux scénarios de simulation ont été proposés. Le premier scénario concerne la stabilisation de l'avion, alors que le deuxième consiste à montrer la robustesse de l'approche de commande proposée envers des incertitudes paramétriques.

## Références

- [1] S. AL-Hiddabi, J. Shen, and N. H. McClamroch. A study of flight maneuvers for the PVTOL aircraft model. In *Proc. American Control Conference*, pages 2727–2731, 1999.
- [2] P. Castillo, R. Lozano, I. Fantoni, and A. Dzul. Control design for the pvtol aircraft with arbitrary bounds on the acceleration. In *41<sup>st</sup> IEEE conf. on Decision and Control, CDC'02*, 2002.
- [3] I. Fantoni, A. Zavala, and R. Lozano. Global stabilization of a PVTOL aircraft with bounded thrust. In *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 4462–4467, 2002.

<sup>3</sup>Ceci est très intéressant voir indispensable quand on s'intéresse aux systèmes de commande embarquée.

- [4] J. Hauser, S. Sastry, and P. Kokotovic. Nonlinear control via approximated input-output linearization : the ball and beam example. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37 :392–398, 1992.
- [5] J. Hauser, S. Sastry, and G. Meyer. Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems : application to v/stol aircraft. *Automatica*, 28(4), 1992.
- [6] C. Huang and K. Yuan. Output tracking of a non-linear non-minimum phase pvtol aircraft based on non-linear state feedback control. *International Journal of Control*, 75(6) :466–473, 2002.
- [7] F. Lin, W. Zhang, and R. D. Brandt. Robust hovering control of a PVTOL aircraft. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 7(3) :343–351, 1999.
- [8] P. Martin, S. Devasia, and Paden B. A different look at output tracking : control of a vtol aircraft. *Automatica*, 32(1) :101–107, 1996.
- [9] A. F. Okou, O. Akhrif, and L. A. Dessaint. Nonlinear control of nonminimum phase systems : Application to the voltage and speed regulation of power systems. 1999.
- [10] R. Olfati-Saber. Global configuration stabilization for the vtol aircraft with strong input coupling. *IEEE transactions on Automatic Control*, 47(11) :1949–1952, 2002.
- [11] G. Poulin, A. Chemori, and N. Marchand. Minimum energy oriented global stabilizing control of the pvtol aircraft. *Int. Journal of Control*, to appear, 2006.
- [12] M Saeki and Y. Sakaue. Flight control design for a nonlinear non-minimum phase vtol aircraft via two-step linearization. In 40<sup>th</sup> *IEEE conf. on Decision and Control, CDC'01*, 2001.
- [13] J. Y. Yang, E. D. Sontag, and H. J. Sussmann. Global stabilization of linear discrete-time systems with bounded feedback. *Systems & Control Letters*, 30 :273–281, 1997.
- [14] A. Zavala, I. Fantoni, and R. Lozano. Global stabilization of a PVTOL aircraft with bounded inputs. *Int. Journal of Control*, 76(18) :1833–1844, 2003.
- [15] S. Zhang and J. Jin. *Computation of Special Functions*. Wiley, 1996.

## A Détails des matrices

Les différentes matrices utilisées dans (6) sont données par :

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= (-e_4, -e_2, e_3, e_1)^T & Q_3 &= (-e_2, 0_{1 \times 4}, e_1, 0_{1 \times 4})^T \\
 Q_2 &= (e_3, e_1, e_4, e_2)^T & Q_4 &= (e_1, 0_{1 \times 4}, e_2, 0_{1 \times 4})^T \\
 \Gamma &= \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{N-1} \\ s_0 & s_1 & \dots & s_{N-1} \\ C_0 & C_1 & \dots & C_{N-1} \\ S_0 & S_1 & \dots & S_{N-1} \end{pmatrix} \\
 D_N &= \text{diag}(N-1, N-2, \dots, 1, 0)
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} e_1 &:= (1 \ 0 \ 0 \ 0) & e_2 &:= (0 \ 1 \ 0 \ 0) \\ e_3 &:= (0 \ 0 \ 1 \ 0) & e_4 &:= (0 \ 0 \ 0 \ 1) \end{aligned}$$

et pour  $k = 0, \dots, N - 1$  :

$$\begin{aligned} s_k &:= \int_0^T \sin(\alpha_k + \beta_k \nu + \gamma_k \nu^2) d\nu \\ c_k &:= \int_0^T \cos(\alpha_k + \beta_k \nu + \gamma_k \nu^2) d\nu \\ S_k &:= \int_0^T \int_0^{\nu_2} \sin(\alpha_k + \beta_k \nu_1 + \gamma_k \nu_1^2) d\nu_1 d\nu_2 \\ C_k &:= \int_0^T \int_0^{\nu_2} \cos(\alpha_k + \beta_k \nu_1 + \gamma_k \nu_1^2) d\nu_1 d\nu_2 \end{aligned} \tag{13}$$

Il faut noter que le calcul de la matrice  $\Gamma$  n'est point coûteux (au contraire de ce qu'on pense) étant donné qu'elle ne nécessite pas d'intégrer (13). L'idée consiste à utiliser ce qu'on appelle des intégrales de Fresnel (souvent utilisés en électromagnétisme et en optique) pour calculer les termes de  $c_k$ ,  $s_k$ ,  $C_k$  et  $S_k$  (donnés en annexe B). Ces intégrales sont donnés par :

$$s(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2} \nu^2\right) d\nu \tag{14}$$

$$c(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2} \nu^2\right) d\nu \tag{15}$$

## B Calcul de $s_k$ , $c_k$ , $S_k$ et $C_k$ par les intégrales de Fresnel

If  $\gamma_k \neq 0$ , taking  $a_k := \frac{\beta_k}{2\gamma_k}$  and  $b_k := \alpha_k - \frac{\beta_k^2}{4\gamma_k}$  one has :

$$\begin{aligned} s_k &= \frac{1}{\gamma_k} \sqrt{\frac{\pi |\gamma_k|}{2}} \cos(b_k) \left[ s\left(\sqrt{\frac{2|\gamma_k|}{\pi}}(T + a_k)\right) \right. \\ &\quad \left. - s\left(\sqrt{\frac{2|\gamma_k|}{\pi}} a_k\right) \right] + \sqrt{\frac{\pi}{2|\gamma_k|}} \sin(b_k) \\ &\quad \times \left[ c\left(\sqrt{\frac{2|\gamma_k|}{\pi}}(T + a_k)\right) - c\left(\sqrt{\frac{2|\gamma_k|}{\pi}} a_k\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_k = & \sqrt{\frac{\pi}{2|\gamma_k|}} \cos(b_k) \left[ c \left( \sqrt{\frac{2|\gamma_k|}{\pi}} (T + a_k) \right) \right. \\
 & \left. - c \left( \sqrt{\frac{2|\gamma_k|}{\pi}} a_k \right) \right] - \frac{1}{\gamma_k} \sqrt{\frac{\pi|\gamma_k|}{2}} \sin(b_k) \\
 & \times \left[ s \left( \sqrt{\frac{2|\gamma_k|}{\pi}} (T + a_k) \right) - s \left( \sqrt{\frac{2|\gamma_k|}{\pi}} a_k \right) \right]
 \end{aligned}$$

$S_k$  et  $C_k$  peuvent être obtenus en intégrant par partie  $s_k$  et  $c_k$  :

$$\begin{aligned}
 S_k &= \left( T + \frac{\beta_k}{2\gamma_k} \right) s_k + \frac{1}{2\gamma_k} \\
 &\quad \times [\cos(\alpha_k + \beta_k T + \gamma_k T^2) - \cos(\alpha_k)] \\
 C_k &= \left( T + \frac{\beta_k}{2\gamma_k} \right) c_k - \frac{1}{2\gamma_k} \\
 &\quad \times [\sin(\alpha_k + \beta_k T + \gamma_k T^2) - \sin(\alpha_k)]
 \end{aligned} \tag{16}$$

Si  $\gamma_k = 0$  et  $\beta_k \neq 0$ , les calculs sont triviales et on a :

$$\begin{aligned}
 s_k &= \frac{1}{\beta_k} [\cos(\alpha_k) - \cos(\alpha_k + \beta_k T)] \\
 c_k &= \frac{1}{\beta_k} [\sin(\alpha_k + \beta_k T) - \sin(\alpha_k)]
 \end{aligned} \tag{17}$$

et

$$\begin{aligned}
 S_k &= -\frac{1}{\beta} (c_k - T \cos(\alpha_k)) \\
 C_k &= \frac{1}{\beta} (s_k - T \sin(\alpha_k))
 \end{aligned} \tag{18}$$

Enfin, si  $\gamma_k = 0$  et  $\beta_k = 0$ , alors

$$\begin{aligned}
 s_k &= T \sin(\alpha_k) \\
 c_k &= T \cos(\alpha_k)
 \end{aligned} \tag{19}$$

et

$$\begin{aligned}
 S_k &= \frac{T^2}{2} \sin(\alpha_k) \\
 C_k &= \frac{T^2}{2} \cos(\alpha_k)
 \end{aligned} \tag{20}$$

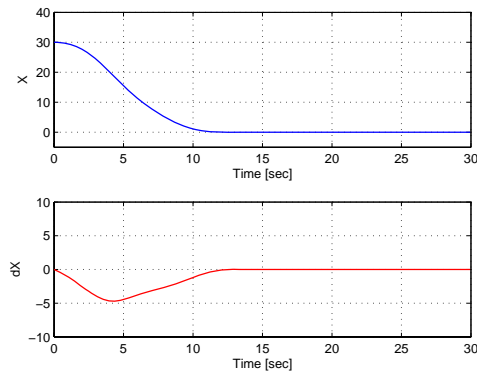


Figure 3 – Évolution de la position et la vitesse suivant  $x$

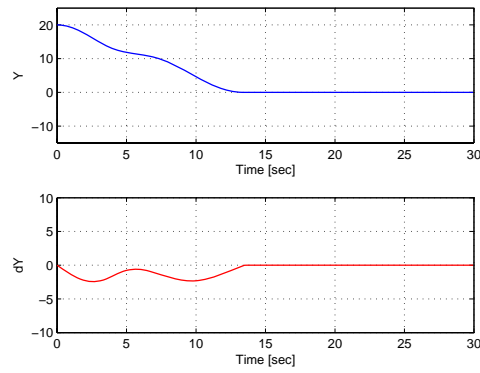


Figure 4 – Évolution de la position et la vitesse suivant  $y$

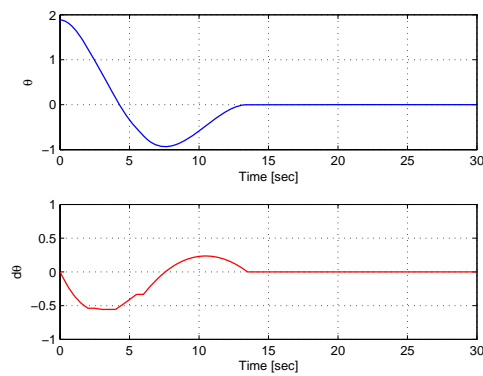


Figure 5 – Évolution de la position et la vitesse de  $\theta$

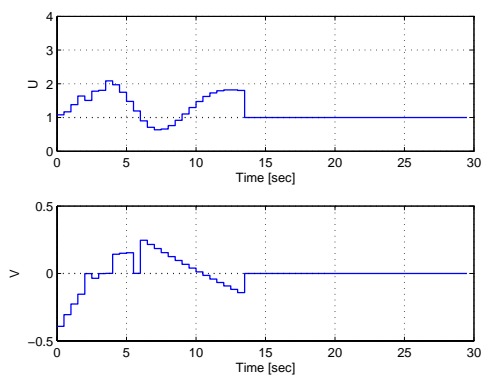


Figure 6 – Entrées de commande

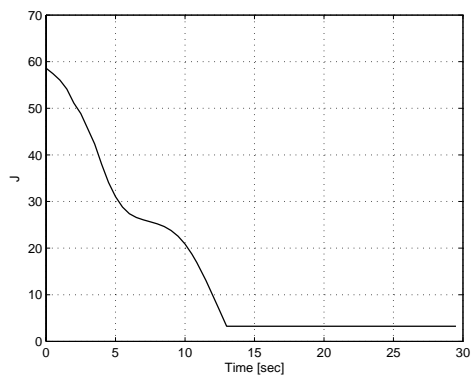


Figure 7 – Évolution de la fonction coût

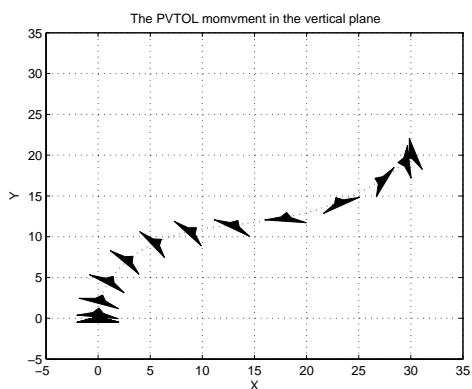


Figure 8 – Mouvement effectué par l'avion



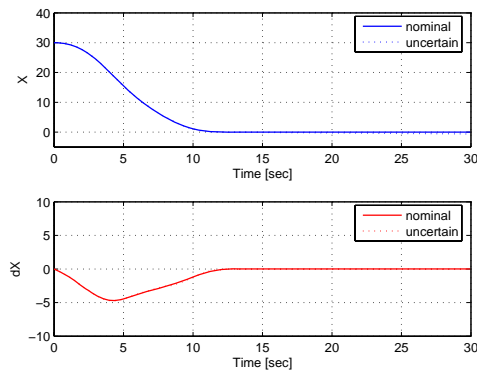


Figure 9 – Évolution de la position et la vitesse suivant  $x$

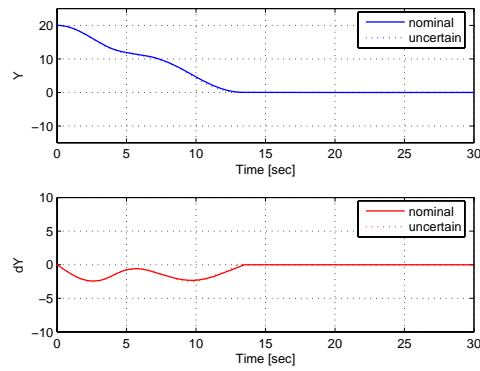


Figure 10 – Évolution de la position et la vitesse suivant  $y$

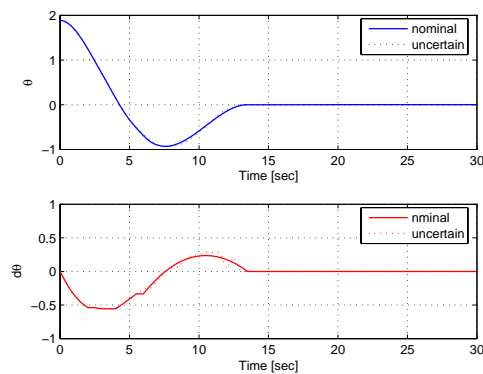


Figure 11 – Évolution de la position et la vitesse suivant de  $\theta$

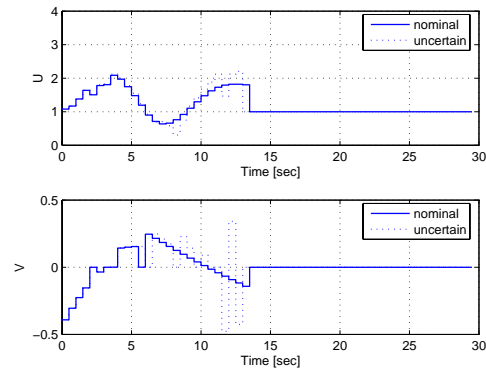


Figure 12 – Les entrées de commande (poussé et couple de roulis)

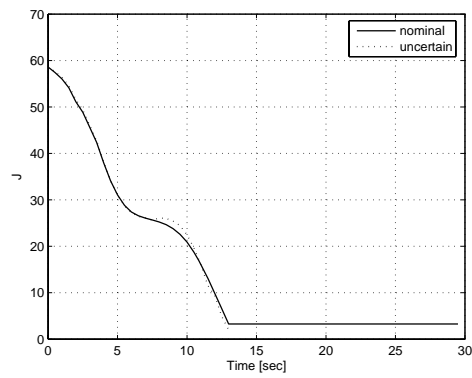


Figure 13 – Évolution de la fonction coût