



Théon d'Alexandrie et la Mesure du cercle d'Archimède

Bernard Vitrac

► To cite this version:

Bernard Vitrac. Théon d'Alexandrie et la Mesure du cercle d'Archimède. *Oriens-Occidens* :: sciences, mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'Age classique, 1997, 1, pp.48-81. hal-00175158

HAL Id: hal-00175158

<https://hal.science/hal-00175158>

Submitted on 7 Feb 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THEON D'ALEXANDRIE ET LA MESURE DU CERCLE D'ARCHIMEDE

BERNARD VITRAC (CNRS, UPR 21)

Dans un ouvrage récent Wilbur Knorr a soutenu la thèse que le texte conservé du traité de *La mesure du cercle* d'Archimède n'est pas à proprement parler celui d'une édition — au sens ancien du terme — mais une composition disparate élaborée à partir de textes secondaires dus au travail de Héron, Pappus, Théon d'Alexandrie et Sporus de Nicée, entre autres¹. La thèse est évidemment audacieuse et l'argumentation riche et complexe; elle attire l'attention sur un ensemble de textes dont les commentateurs avaient certainement trop peu tenu compte et c'est l'un de ses mérites.

Dans cet article je me propose de reprendre l'une des pistes proposées par Knorr : le travail de Théon d'Alexandrie sur le traité d'Archimède tel qu'on peut le lire dans certains passages de son *Commentaire à l'Almageste* auquel Knorr fait d'ailleurs jouer un rôle essentiel dans sa reconstruction. De celle-ci je ne pourrai évidemment pas examiner tous les détails, mais je crois que le cas de Théon fournit déjà quelques éléments intéressants de discussion. Dans une première partie j'essayerai de fournir quelques repères contextuels (sur Théon, sur les commentaires à l'*Almageste*, à propos de différentes citations d'Archimède) pour permettre au lecteur de situer l'objet du débat. La deuxième partie, la plus importante, est consacrée à l'examen de la première proposition du traité de la *Mesure du cercle* ; enfin j'évoquerai rapidement le travail de l'Alexandrin à propos des deux autres résultats du même traité d'Archimède.

Je remercie Roshdi Rashed de m'avoir invité à traiter de cette question dans son Séminaire d'Histoire des Sciences de l'Antiquité à l'Âge classique ainsi que tous les participants à cette stimulante réunion.

I. REPERES CONTEXTUELS

A. Théon²

On sait peu de choses de la vie de Théon. A partir de la notice biographique que lui consacre la *Suda* et qui en fait un contemporain du règne de Théodose I (379-395), à partir d'éléments connus par ses œuvres conservées³ et par la date de la mort de sa fille Hypatie en 415, on peut affirmer, sans grand risque de se tromper, qu'il était actif dans la seconde moitié du IV^e siècle de notre ère. Selon la *Suda*, il était professeur de mathématiques au Musée à Alexandrie ; il en serait apparemment le dernier membre attesté. Ses œuvres conservées nous le font connaître comme un éditeur et un commentateur : éditeur d'Euclide (*Éléments*, *Données*, *Optique* ?) et commentateur de Ptolémée. De ce dernier il a commenté l'*Almageste* et les *Tables dites faciles ou manuelles*, pour lesquelles il a produit deux commentaires⁴ : un 'Grand', en cinq livres, et un 'Petit' en un livre, pour ses élèves les plus faibles ; ce dernier a connu un grand succès puisque Anne Tihon a dénombré 56 manuscrits.

La *Suda* mentionne encore quelques autres titres d'ouvrages perdus dont un traité sur le petit astrolabe. Le *Fihrist* lui attribue également un traité sur cet instrument ; Otto Neugebauer et Toomer considèrent la composition d'un tel traité comme vraisemblable⁵.

A partir de l'analyse des ouvrages conservés de Théon, les modernes prononcent un jugement assez sévère à son endroit : Théon était un mathématicien compétent pour son époque, mais dénué de toute originalité et satisfait d'exposer les « grands classiques » sans chercher à aller plus loin.

B. Les commentaires à l'*Almageste*

Rédigée vers 150 de notre ère⁶, l'*Almageste* a été commentée entre autres⁷ par Pappus (vers 320) et par Théon (vers 370)⁸.

a — Du commentaire de Pappus on connaît un fragment de celui au Livre V et le commentaire au Livre VI. Ils ont été édités par le chanoine Adolphe Rome. Pappus renvoie à son travail sur le Livre IV et certainement aussi au Livre I (qu'il appelle commentaires aux *Mathematica* de Ptolémée). A partir de ces éléments, la plupart des modernes sont persuadés que Pappus a commenté les 13 livres de l'*Almageste*. Notons cependant que la *Suda* mentionne un commentaire en 4 livres⁹.

b — Du commentaire en 13 livres de Théon, on a longtemps considéré qu'il en restait à peu près 11: le onzième est perdu; du cinquième ne subsistait qu'un fragment¹⁰. Récemment Anne Tihon a retrouvé un ensemble très important de scholies dans les marges d'un manuscrit de l'*Almageste* qui représente la *quasi* totalité du Livre V du commentaire¹¹.

Si l'on en croit l'introduction de ce commentaire, il s'agissait de publier les cours de Théon, à la demande de ses auditeurs; les deux premiers livres font référence à ce qu'on peut appeler une édition originale, le Livre III à une révision par Hypatie¹²; pour la suite, il n'y a plus de mention d'éditeur¹³.

La seule édition des 11 livres conservés est celle de Joachim Camerarius, à Bâle, chez J. Walderius, en 1538. En fait il s'agit de l'édition du manuscrit N (Nuremberg), du XV^e siècle, donné par le cardinal Bessarion à Regiomontanus. L'abbé Halma a édité et traduit les deux premiers livres, à partir de cette édition, qu'il confrontait au manuscrit P (Par. gr. 2398)¹⁴. Enfin le chanoine Rome a établi l'édition critique des Livres I à IV après avoir recensé 18 manuscrits et collationné 8 d'entre eux¹⁵.

c — A ces deux principaux commentaires on peut adjoindre l'*Introduction anonyme* à l'*Almageste* (Προλεγόμενα τῆς Πτολεμαίου μεγάλης συντάξεως) qui se réfère d'ailleurs assez souvent à Pappus et à Théon. Elle est contenue dans l'une des familles de manuscrits qui contiennent l'*Almageste*, famille distinguée par Heiberg dans son édition critique¹⁶.

Dans un travail fondamental¹⁷, J. Mogenet a recensé 25 manuscrits¹⁸ contenant ces prolégomènes. Il considère qu'il s'agit de notes, non destinées à la publication sous cette forme, en vue de la rédaction d'un commentaire au premier Livre de l'*Almageste*. Il a proposé Eutocius comme auteur de l'*Introduction*¹⁹. Knorr a vigoureusement contesté cette thèse²⁰. A ma connaissance il n'y a pas d'édition critique de ce texte; seuls plusieurs extraits ont été publiés.

C. Les contextes des citations d'Archimède

1 — Après une préface de type philosophique, le premier Livre de l'*Almageste* se propose de traiter de cinq préalables fondamentaux pour la compréhension du système géocentrique :

- Le ciel se meut comme une forme sphérique²¹.
- La terre est sensiblement sphérique dans toutes ses parties²².
- Elle se trouve au milieu des cieux²³.
- Elle a un rapport de point relativement aux cieux²⁴.
- Elle ne produit pas non plus de mouvement local²⁵.

2 — Pour argumenter sur le premier préalable Ptolémée avance plusieurs arguments dont certains étaient vraisemblablement des « classiques »²⁶ :

a — Une série d'arguments élaborés à partir de certains « phénomènes », en particulier :

- le mouvement apparent des Fixes et la distinction: étoiles toujours visibles / étoiles parfois visibles, parfois non, et ceci en fonction du lieu d'observation ;
- l'invariabilité des distances relatives entre étoiles qui permet de parler des « Fixes » ;
- le fonctionnement des cadrans solaires.

Selon Ptolémée, tous ces phénomènes ne peuvent être « sauvés » que si l'on admet l'hypothèse de la sphéricité du cosmos.

b — Des arguments que j'appellerais « de convenance » :

b1 — Le mouvement des cieux est le moins contraint et le plus libre ; telles sont les propriétés du mouvement circulaire qui appartient au cercle et à la sphère.

b2 — L'éther est le plus homéomère des corps et la figure solide la plus homéomère est la sphère²⁷.

b3 — La propriété de maxima du cercle et de la sphère :

... de la même manière aussi, puisque parmi les différentes figures ayant un périmètre égal, les plus polygonales sont plus grandes : parmi les <figures> planes, le cercle devient plus grand, parmi les solides, la sphère ; or le ciel est plus grand que les autres corps²⁸.

Au début de son commentaire²⁹ Théon annonce, à propos de cet argument, qu'il va résumer le traité *Sur les figures isopérimétriques* de Zénodore dont l'acmé, selon Toomer se situerait vers 180 avant notre ère, selon Knorr vers 230³⁰. Or l'*Introduction anonyme* contient, elle aussi, outre des prolégomènes et un exposé de calcul sexagésimal, un fragment sur les figures isopérimétriques³¹. On retrouve également un tel exposé dans la première partie du Livre V de la *Collection mathématique* de Pappus.

3 — Dans la mesure où il prétend résumer Zénodore, on a considéré que la version de Théon était la plus fidèle au modèle. Mais, par ailleurs, l'exposé du Livre V de la *Collection* de Pappus est plus complet. Comme dans son commentaire au Livre VI, Théon suit d'assez près Pappus, on peut considérer (Toomer, Knorr) que Théon ici aussi suit Pappus, précisément le commentaire au premier Livre de Ptolémée qui est perdu. Quant au fragment contenu dans l'*Introduction anonyme*, il est à la fois suffisamment proche et suffisamment différent des deux autres versions pour imaginer une source commune avec Pappus et Théon qui ne soit ni l'un ni l'autre de ces deux textes.

4 — Les 3 exposés contiennent les quatre principaux résultats suivants:

- Proposition A : Si on a deux polygones réguliers isopérimétriques, le plus grand est le « plus polygonal ».
- Proposition B : Si un polygone régulier est isopérimétrique à un cercle, le cercle est plus grand.
- Proposition C : Si on a deux polygones ayant le même nombre de côtés et isopérimétriques dont l'un seulement est régulier, ce dernier est plus grand que l'autre.

A partir de ceci, on conclut que le cercle est plus grand que tout polygone de même périmètre, régulier ou non.

- Proposition D : La sphère est plus grande que tout polyèdre régulier de même surface.

Pappus et Théon exposent les résultats dans cet ordre ; dans l'*Introduction anonyme* l'ordre est A, C, B, D. Dans la *Collection*, entre C et D, Pappus intercale un groupe de propositions³² afin d'établir que parmi les segments de cercle d'arc de longueur donnée, le plus grand est le demi-cercle, ainsi que des considérations sur les 13 polyèdres semi réguliers découverts par Archimède qui ne seront cependant pas pris en compte pour la propriété maximale de la sphère.

Dans la démonstration de la proposition B, nos trois auteurs se réfèrent à la *Mesure du cercle*³³ d'Archimède en citant ce qu'on appellera une « version alternative » de la proposition 1 :

« Le <rectangle contenu> par le périmètre et le rayon est double du cercle »
(forme "produit-rectangle")³⁴.

L'*Introduction anonyme* en explicite la dérivation à partir de la première proposition de la *Mesure du cercle*³⁵. En revanche, Pappus et Théon proposent une démonstration du théorème d'Archimède. Ces témoignages peuvent s'avérer importants pour l'état du texte archimédien au IV^e siècle de notre ère. En fait dans les différentes reconstructions que propose Knorr, ils jouent un rôle fondamental.

5 — Pour assimiler la terre à une sphère, il faut évidemment négliger les reliefs. Théon se livre donc à un calcul de comparaison³⁶ entre le diamètre terrestre et la hauteur des montagnes les plus élevées. Ce calcul est l'occasion pour lui de se référer à la *Géographie* de Ptolémée — pour l'estimation de la circonférence terrestre de 18 myriades de stades —, à Ératosthène — pour l'estimation de la différence entre les montagnes les plus hautes et les plaines les plus basses à 10 stades — et de nouveau à Archimède: il cite successivement les troisième et première propositions de la *Mesure du cercle* (DC 3, 1) et en « dérive » la deuxième (DC 2) ; il utilise de nouveau DC 3 et ajoute un calcul du volume de la Terre — ce qui, *a priori*, est hors de propos.

On retrouve un calcul similaire dans l'*Expositio* de Théon de Smyrne, qui prétend suivre Adraste³⁷. Ultérieurement Simplicius puisera certainement aux mêmes sources pour commenter le *De caelo* (298 a15) d'Aristote³⁸.

6 — Au Livre VI, Chapitre 7, Ptolémée explique la construction de différentes tables d'éclipses, en particulier une petite table pour convertir l'évaluation des éclipses exprimées en termes de fraction de diamètre occultée, en termes de fraction de la surface occultée.

A cette occasion, il cite explicitement Archimède et l'encadrement de la proposition 3 de la *Mesure du cercle*, ensuite il utilise une règle de calcul dérivée de DC, 1 et un lemme sur les secteurs circulaires³⁹. Dans son commentaire au Livre VI, Pappus y ajoutera une démonstration de ce lemme et deux démonstrations du résultat sur l'aire des secteurs circulaires, résultat similaire, pour les secteurs à celui de DC 1 pour le cercle entier⁴⁰. Dans les *Métriques*, Héron rapporte cette proposition sur l'aire des secteurs au traité archimédien sur la *Mesure du cercle*⁴¹, mais celle-ci ne figure plus dans le texte grec tel qu'il nous est parvenu.

Tels sont donc les contextes de l'*Almageste* pour lesquels les commentateurs vont se référer à Archimède et tout particulièrement à sa *Mesure du cercle*.

II. LA PROPOSITION 1 DE LA MESURE DU CERCLE DANS LE COMMENTAIRE DE THEON

Deux traits particulièrement saillants distinguent la version théonienne de DC 1, par rapport à celle éditée par Heiberg :

- la forme même de l'énoncé;
- la présence dans Théon d'un lemme préliminaire qui n'existe pas à proprement parler dans DC⁴².

Je commencerai par l'examen de ce second point puisque je prends le texte de Théon comme base de comparaison.

A. Comparaison entre le lemme de Théon et DC

1. Dans la démonstration indirecte, ce lemme, dans le deuxième « cas de figure »⁴³, justifie la construction d'un polygone régulier P' circonscrit au cercle — donc plus grand — mais toutefois plus petit que D . Ce polygone P' , intermédiaire, permet d'obtenir une contradiction puisque son périmètre p' est $> c$, et son apothème égale à r ; donc $P' = (1/2) \text{ Rect}(p', r)$ sera plus grand que D ; ce qui est absurde. L'argument présuppose l'utilisation de la proposition X. 1 des *Éléments* — deux grandeurs inégales étant proposées, si de la plus grande est retranchée une <grandeur> plus grande que la moitié, puis du reste une <grandeur> plus grande que la moitié, et que ceci soit toujours poursuivi, une certaine grandeur restera, laquelle sera plus petite que la plus petite grandeur proposée — sur le modèle de la proposition XII. 2 des *Éléments* qui traite seulement du cas « inscrit »⁴⁴. Une adaptation est donc requise.

On prend un polygone circonscrit au cercle P' :
si $D > P' > C$, il n'y a rien à faire ; sinon $P' > D > C$ et $G = P' - C > D - C = G'$; on appliquera X. 1 à (G, G') . Pour ce faire, il faut montrer que lorsque l'on dichotomise les arcs de cercle qui sous-tendent deux côtés consécutifs d'un polygone circonscrit P' , puis que l'on mène les tangentes au cercle passant par ces points, on a construit un nouveau polygone circonscrit P'' , ayant deux fois plus de côtés et tel que $P' - P'' > 1/2 (P' - C)$. Telle est la finalité du lemme de Théon. Celui-ci part du cas particulier où P' est le carré circonscrit au cercle, mais cette particularité ne doit pas intervenir dans la preuve.

2. Par rapport à ce lemme, deux hypothèses au moins se présentent :

- ou bien ce lemme est dû à Théon et il l'a introduit parce qu'il estimait que sa source était insuffisante sur ce point, qu'il s'agisse de P^* ou d'Archimède ;

- ou bien ce lemme était une proposition préliminaire insérée dans le traité d'Archimède et elle en a disparu ; de tels lemmes élémentaires ne sont pas rares dans le corpus archimédien.

a/ Deux remarques s'imposent :

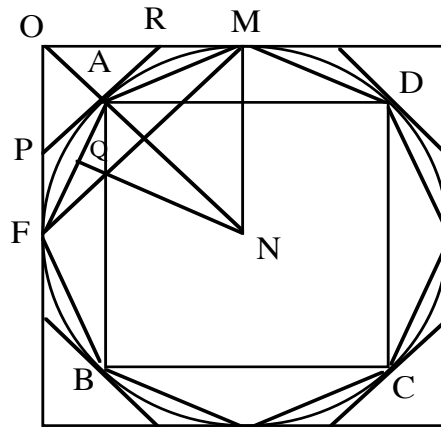
- * La manière dont Théon s'exprime peut suggérer que ce lemme lui est propre:

« [...] δυνατόν ἄρα ἐστίν, ἀκολουθῶς τῇ ἐπὶ τοῦ προεκτεθέντος ἡμῖν θεωρήματος ἀγωγῇ [...] »

([...] Il est donc possible, conformément à notre démarche pour le théorème préalablement exposé [...]).

C'est l'opinion de Rome et de Knorr; mais on peut aussi remarquer que le lemme est inclus après : « [...] δείκνυσιν οὕτως » (il le démontre ainsi) qui vise certainement Archimède et que le « nous » peut marquer simplement un renvoi au résultat précédent à l'aide d'un collectif englobant « auteur et lecteurs » (il s'agit de cours rédigés) ou bien il peut s'agir d'une référence textuelle qui n'implique pas nécessairement une revendication de droits d'« inventeur ».

- ** Il y a dans la seconde partie de *DC* une partie qui correspond partiellement au contenu du lemme⁴⁵:



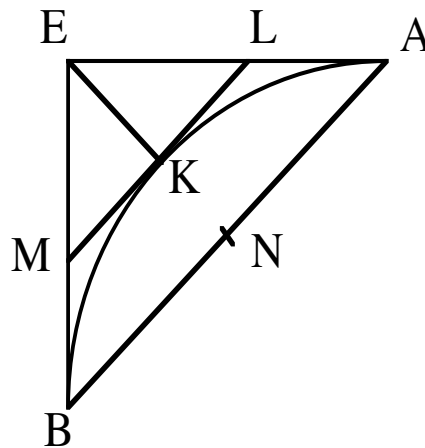
Ἐστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων τοῦ *E* τριγώνου, καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ῥηθῶσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ *OAP*. Ἡ *OP* ἄρα τῆς *MP* ἐστὶν μείζων· ἡ γὰρ *PM* τῇ *PA* ἴση ἐστὶ· καὶ τὸ *POΠ* τρίγωνον ἄρα τοῦ *OZAM* σχήματος μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισυ. Λελείφθωσαν οἱ τῷ *ΠΖΑ* τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει τὸ *E* τοῦ *ΑΒΓΔ* κύκλου· ἔτι ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον τοῦ *E* ἐστὶν ἐλάσσον· ὅπερ ἄτοπον· ἐστὶν γὰρ μείζον, ὅτι ἡ μὲν *NA* ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου, ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. Ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ *E* τριγώνῳ ;

(Et que le cercle soit, si c'est possible, plus petit que le triangle *E*, et que le carré soit circonscrit et que les arcs soient coupés en deux <parties égales>, et que par les points soient menées les tangentes ; donc l'<angle> sous *OAR* est droit. Donc *OR* est plus grande que *MR* ; car *RM* est égale à *RA* ; et le triangle *ROP* est donc plus grand que la moitié de la figure *OFAM*. Que les <sections> semblables à la section *PFA* aient été prises plus petites que l'excès, celui par lequel *E* dépasse le cercle *ABCD* : la <figure> rectiligne circonscrite est donc encore plus petite que *E* ; ce qui est

absurde ; en effet elle est plus grande car d'une part NA est la perpendiculaire du triangle, d'autre part le périmètre est plus grand que la base du triangle. Donc le cercle est égal au triangle E).

Il faut donc admettre que si le lemme figurait dans la version « primitive » de DC , sa disparition a provoqué un remaniement ultérieur. Cela dit, que le traité archimédien ait été remanié, c'est certain.

b/ Pour approfondir le lien entre Théon et DC on peut remarquer que la partie de DC correspondante au lemme est nettement moins détaillée que celui-ci : en fait, elle fait usage d'un présupposé élémentaire qui est justement démontré par Théon et que l'on peut exprimer de deux manières :



- quand on prolonge la droite passant par le centre du cercle et le point de dichotomie K , elle passe par le sommet E ;
- ou bien quand on joint EK et qu'on la prolonge, elle passe par le centre du cercle.

Dans DC on admet sans précaution que O est sur NA (dont la construction, au passage, n'a pas été annoncée) pour dire que l'angle sous OAR est droit. La démarche de Théon renvoie plutôt à la seconde formulation : il montre que EK , prolongée, coupe la corde AB en son milieu et à angles droits ; il y a une référence implicite au porisme de la proposition III. 1 des *Éléments* d'Euclide. A partir de là, on montre facilement que $EL > LK = LA$ et donc que $\Delta(EKL) > \Delta(LKA)$.

Par différence avec DC , Théon justifie l'égalité $LK = LA$ (ce résultat n'est pas dans les *Éléments*, mais Héron, d'après an-Nayrîzî, l'avait mentionné dans son commentaire à Eucl. *Él.* III. 17). Ensuite l'inégalité provenant de la symétrie est explicitée par Théon (Pour les mêmes raisons ...) ; enfin l'inégalité renforcée (introduite par « de beaucoup ») est bien précisée.

Compte tenu de cette analyse doit-on penser que Théon a explicité les présupposés de DC dont la rédaction aurait été, dans cette hypothèse plutôt laconique, ou bien DC 1 n'est-elle qu'une version abrégée, « démembrée » de Théon, comme l'avance Knorr ?

3. Avant de comparer le reste de la proposition⁴⁶, on peut convoquer d'autres témoins et voir comment ils traitent cette partie de la démonstration.

a/. Pappus ne mentionne pas de lemme préliminaire⁴⁷ ; il affirme la possibilité de construire le polygone circonscrit requis, mais il n'indique rien quant à la « convergence » du procédé. La phrase qui conclut cette affirmation pourrait être intéressante pour la discussion présente, quoique opaque :

« [...] τοῦτο γὰρ ὡς δυνατόν [ἀνάγκη] γενέσθαι δέδεικται »

(Car {nécessairement} il a été démontré qu'il est possible de produire ceci).

Intéressante car on a là l'une des rares divergences entre mss; certains (*ABS*) portent « δειχθήσεται » (il sera démontré). Peut-être y avait-il un lemme, perdu dans la *Collection*, mais que Théon aurait ramené en tête de démonstration ? Peut-être, comme le pense Knorr, la source archimédienne de Pappus⁴⁸, la première version de Pappus⁴⁹, dans le Livre I du commentaire à l'*Almageste*, étaient-elles muettes sur ce point ; d'où le travail de Théon qui aurait laissé des traces de remaniements dans *DC*.

Dans la première hypothèse le mystère reste entier : ce lemme se trouvait-il dans *A** ou seulement dans *P** ? Dans l'autre hypothèse comment Archimède pouvait-il se permettre de ne pas justifier la convergence de ses procédés⁵⁰ ? Quelles sont les habitudes du Syracusain en ce domaine ?

b/. Son commentateur Eutocius suggère que le seul point sur lequel il faille éventuellement compléter la première proposition de *DC* 1 est justement l'affirmation que le triangle *ROP* est supérieur à la moitié de la figure *AZOM*, ou d'une manière générale, qu'il est possible de circonscrire à un cercle donné une figure rectiligne de sorte que les segments entre la circonférence du cercle et les côtés de la figure circonscrite soient plus petits qu'une aire donnée⁵¹, autrement dit qu'il est possible d'appliquer la proposition *El. X. 1*. Mais il précise qu'à ce sujet le nécessaire a été dit dans le commentaire au premier Livre du traité *De la sphère et du cylindre*⁵², en particulier en commentant la proposition *SC* 10⁵³.

4. Avant de regarder ce deuxième spécimen de littérature archimédienne, on peut jeter un coup d'œil sur la tradition médiévale arabo-latine. Dans la traduction attribuée traditionnellement à Thâbit ibn Qurra⁵⁴, on trouve semble-t-il un argument plus développé que dans *DC*, mais moins que dans Théon et différemment⁵⁵ :

- d'abord circonscription du carré et dichotomie des arcs, puis tracé des tangentes⁵⁶.

Cette partie correspond assez bien à *DC* et à Pappus, ainsi d'ailleurs qu'à l'argument exposé dans la proposition XII. 2 des *Éléments* pour le cas « inscrit ».

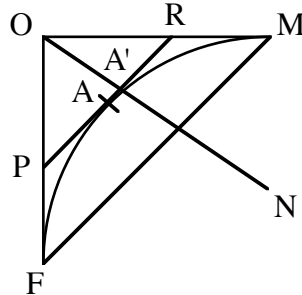
- affirmation que *RP* a été dichotomisée en *A* [m2]⁵⁷ ;
- que *NO* est perpendiculaire à *PR* et même chose pour les lignes analogues [m3] ;
- et que, comme *PO* et(+) *OR* > *PR* (Eucl. *El. I. 20*), de même pour les moitiés et donc : *OR* > *AR* = *RM*. [m4].

A partir de là, l'argument, du point de vue mathématique, est très proche de celui de Théon, avec un ordre inversé pour la partie [m5] :

- inégalité renforcée par rapport à la figure mixtiligne ;
- « raisonnement analogique » pour la partie symétrique.

Ensuite le texte arabe précise qu'il faudra effectuer l'opération sur les parties semblables de la figure [m6], et qu'en procédant ainsi il sera laissé des segments qui, pris ensemble, sont plus petits que l'excès du triangle sur le cercle [p]⁵⁸.

La tradition médiévale admet semble-t-il le même présupposé que *DC*, démontré par Théon, puisqu'on admet que *NO* passe par *A*. Sinon on pourrait avoir seulement $OR > A'R = RM$ comme sur la figure ci-dessous :



5. Une autre possibilité est d'admettre que le triangle *POR* est isocèle et que la hauteur est aussi médiane ; or *OFM* est isocèle⁵⁹ ; il faudrait donc expliciter que *PR* est parallèle à *FM* ce qu'affirme justement *SC I, 10*, et ce que justifie Eutocius dans son commentaire à cette proposition. Archimède dans *SC I, 10* utilise justement l'inégalité triangulaire (cf. ci-dessus [m4]) pour obtenir une inégalité du même type.

a/ Eutocius, quant à lui, montre que la tangente menée par le point de dichotomie de l'arc est parallèle à la corde qui joint les points de contact. Sa démonstration ressemble beaucoup à celle du lemme de Théon :

- il montre que les triangles *NFO* et *NMO* sont égaux (*El. I 8*) ; d'où l'égalité des angles *FON*, *NOM*;
- il admet que *A* est sur *ON* ; comme les angles *PAO* et *OAR* sont droits, il en déduit l'égalité des angles *OPA*, *ORA*, puis celle des côtés *PO*, *OR* (*I. 6*) ;
- le parallélisme est une conséquence de *El. VI. Prop. 2*.

On voit que, dans cette affaire, seul Théon ne s'est pas fait « piéger » par les propriétés de la figure.

b/ Plus intéressante peut-être est la suite de la démonstration de *SC I, 10*. Archimède utilise l'argument suivant⁶⁰ :

Ἦστω δὴ τὸ Θ ἑλάσσον τῶν περιλειμμάτων. Ἀεὶ δὴ περιγράφοντες πολύγωνα περὶ τὰ τμήματα ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων λείψομέν τινα ἀπολείμματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Θ χωρίου.

(Alors que l'aire *H* soit plus petite que les <aires> restantes tout autour. Alors, en circonscrivant semblablement, de manière répétée, des polygones autour des segments en coupant en deux <parties égales> les <arcs de> circonférences restantes autour et en menant les tangentes, nous laisserons certaines <aires> restantes, lesquelles seront plus petites que l'aire *H*).

Archimède ne fournit pas d'explications à cet endroit; en fait il n'en a peut-être pas besoin; dans les propositions 5-6 du même traité, il est en effet montré que l'on peut inscrire et circoncrire un polygone à un cercle ou à un secteur de cercle de sorte que le rapport du polygone circonscrit relativement au polygone inscrit soit inférieur à n'importe quel rapport. A la suite de quoi il est rappelé que, d'après les *Éléments*, il est possible d'inscrire des polygones équilatéraux dans un cercle ou un secteur de cercle qui laissent comme reste une aire inférieure à toute aire donnée⁶¹ :

δυνατόν ἐστὶν ἐγγράφοντα εἰς τὸν κύκλον ἢ τὸν τομέα πολύγωνα ἰσόπλευρα καὶ ἔτι αἰεὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα λείπειν τινὰ τμήματα τοῦ κύκλου ἢ τομέως, ἅπερ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προκειμένου χωρίου· ταῦτα γὰρ ἐν τῇ Στοιχειώσει παραδέδοται (Il est possible, en inscrivant dans le cercle ou le secteur des polygones équilatéraux, ceci toujours et encore dans les segments qui restent autour, de laisser certains segments du cercle ou du secteur, qui seront plus petits que l'aire proposée; car ceci est fourni par les *Éléments*).

De ces deux résultats, il déduit facilement, par séparation de rapports, qu'il est aussi possible de circoncrire un polygone à un cercle ou à un secteur de cercle de sorte que les segments de la figure circonscrite restants soient plus petits que n'importe quelle aire donnée⁶². Ainsi la « convergence » des procédures sera assurée une fois pour toutes, et l'on peut penser que pour tout lecteur attentif de *SC*, par exemple Zénodore ou Pappus, il était bien connu que l'on peut inscrire ou circoncrire un polygone régulier dans un cercle qui « approche » ce cercle autant que l'on voudra⁶³.

c/ Evidemment, on peut aussi, avec Knorr, suspecter l'interpolation de ce passage dans *SC* I. 6⁶⁴. Un des arguments en faveur de cette hypothèse pourrait être le commentaire d'Eutocius au passage cité⁶⁵ ; en effet ce dernier rappelle que le cas des polygones inscrits est traité dans les *Éléments*, mais pas celui des polygones circonscrits et, quoiqu'il mentionne la proposition *SC* I. 6, il se propose de montrer que lorsque l'on applique le procédé « dichotomie des arcs — tracé de la tangente au point de dichotomie », on retranche plus de la moitié de l'aire restante. Il ne semble donc pas voir que cela se déduit immédiatement de la conjonction des deux résultats *El.* XII. 2 et *SC* I. 5, ni qu'Archimède ait lui-même établi ce point, si la version de *SC* I. 6 qui nous est parvenue est bien authentique.

Mais une autre explication est possible : il se peut que la justification archimédienne ne lui convienne pas, liée qu'elle est au contexte de *SC* I ; la cause de la propriété n'est pas mise en évidence par l'astuce archimédienne ; la démonstration d'Eutocius remédie à cet inconvénient. Elle correspond exactement à la séquence que nous avons vue dans Théon et dans la version arabe ([m4-5], [p]) : l'ordre suivi est le même que dans cette dernière et non pas celui de Théon.

6. A partir de tous ces éléments on peut donc considérer comme vraisemblable que :

- le traité archimédien procédait comme dans Pappus, sans justifier véritablement la « convergence » du procédé, mais en rappelant sommairement la description de celui-ci sur le modèle de la Prop. XII. 2 des *Éléments* (comparer Pappus et *SC* I. 10) ;

- que des commentateurs ont cru bon de préciser en quoi *El.* X. 1 s'appliquait, peut-être Pappus, et en tout cas Théon. On peut penser que la justification initiale était du type de celle que l'on trouve dans Eutocius et dans la version arabe, mais que Théon en a débusqué un présupposé élémentaire, d'où son petit lemme ;
- cette exigence de justification a été intégrée dans le texte archimédien lui-même comme le montre la version arabe, si l'on admet que celle-ci est une traduction au sens strict du terme et non une version élaborée à partir de *DC* et des commentaires d'Eutocius. La manière dont s'exprime Eutocius laisse penser que cette intégration n'était pas encore faite dans le texte dont il disposait ;
- que, contrairement à ce que dit Knorr, aussi bien la version actuelle de *DC* que la traduction arabe, dépendent moins de Théon que du texte dont disposait Eutocius, de cette justification initiale et/ou d'Eutocius.

B. Autres éléments de comparaison

1. Avant d'en venir à l'énoncé, remarquons que la preuve de Théon⁶⁶ est structurellement beaucoup plus soignée que celle transmise dans *DC* :

- introduction explicite des deux branches de l'alternative consécutive au raisonnement indirect : (Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἑλασσόν ἐστιν αὐτοῦ ἢ μείζον); ceci manque dans *DC* ;
- libellé orthodoxe de la construction de l'apothème :
(καὶ ἀπὸ τοῦ Θ κέντρου ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΑΒ κάθετος ἦχθω ἢ ΘΚ),
ce qui n'est pas le cas dans *DC* (Εἰλήφθω κέντρον τὸ Ν καὶ κάθετος ἢ ΝΞ);
- rappel de l'hypothèse alors que l'on vient d'aboutir au contraire
(ἀλλὰ καὶ ἑλαττον, ὅπερ ἀδύνατον); ce qui manque dans *DC* ;
- transition explicite pour la seconde partie de la démonstration :
(Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ μείζον. εἰ γὰρ δυνατόν ...) ce qui manque dans *DC* ;
- jonction de *HB*, alors que celle de *NA* dans *DC* n'est pas mentionnée (celle de *NQ* l'était précédemment);
- rappel de la première partie pour déduire l'égalité
(ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἑλασσον. ἴσον ἄρα); ce qui manque dans *DC*.

Il va de soi que l'on ne peut rien déduire du point de vue de l'établissement textuel de ce qui se trouve dans Théon et manque dans *DC* : ces « formules » n'ont rien de personnel et se retrouvent dans tout raisonnement par exhaustion convenablement rédigé, archimédien ou non. Leur absence dans *DC* 1 suggère simplement que l'on a affaire à une sorte de résumé, peut-être des « notes de lectures » qui veulent garder le noyau du raisonnement sans s'encombrer de l'appareillage traditionnel d'exposition.

2. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que les écarts entre les versions de Théon et Pappus soient beaucoup moins importants que ceux que nous venons de relever. Quelques points méritent cependant l'attention:

- comme dans *DC*, l'introduction explicite des deux branches de l'alternative consécutive au raisonnement indirect manque dans Pappus ;
- la référence à la démarche suivie dans le Livre XII des *Éléments* est quasiment identique :

δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἀκολουθῶς τῇ ἐν τῷ δωδεκάτῳ τῶν Στοιχείων ἀγωγῇ ἐγγράψαι εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον πολύγωνον, ὥστε μείζον αὐτὸ γίνεσθαι τοῦ Δ χωρίου. (Théon)
 δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἀκολουθῶς τῇ ἀγωγῇ τῇ ἐν τῷ δωδεκάτῳ τῶν στοιχείων ἐγγράψαι εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πολύγωνον, ὥστε τὸ ἐγγραφὲν πολύγωνον μείζον εἶναι τοῦ Ζ χωρίου [...] (Pappus)

Et l'on peut en conclure qu'ici Théon suit Pappus ou plutôt P*. Mais il faut remarquer que cette référence apparaît un peu inutile dans Pappus, puisque le procédé est brièvement réexposé, comme dans *DC*, ce dont se dispense Théon, pourtant habituellement plus proluxe⁶⁷.

Mieux, cela lui permet, en admettant la construction du polygone comme déjà réalisée, de partir d'un hexagone, alors que Pappus, comme *DC*, part du carré circonscrit, et après une première dichotomie des arcs, raisonne en fait sur un octogone. On pourrait donc tout aussi bien croire que la référence à Euclide dans P est une interpolation post-théonienne. Après tout, on soumet le texte archimédien à la question, mais celui de la *Collection*, quoique moins ancien, n'a certainement pas été épargné par les interpolations⁶⁸.

• La construction de l'apothème dans la première partie, du rayon dans la seconde, est encore plus détaillée chez Pappus que chez Théon:

[...] καὶ ἀπὸ τοῦ Η κέντρου ἤχθω ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ΑΒΓΔΕ πολυγώνου ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ ΗΘ ;

[...] καὶ ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Η κέντρου ἐπὶ μίαν τῶν συναφῶν τὴν Ο ἡ ΗΟ.

Ou bien Théon a simplifié Pappus, mais ce n'est pas son habitude, ou bien, s'il suivait P*, c'est Pappus qui aura amplifié son texte en rédigeant la version de la *Collection*, ou là encore celle-ci aura été amplifiée par un interpolateur.

• L'articulation des contradictions dans le raisonnement indirect est légèrement différente : l'absurdité est proclamée d'abord ; la justification suit :

« [...] ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ ἔλασσον ».

• Pappus utilise le terme « ὁποσαγώνον » (*Coll.*, V, 314. 19), un hapax semble-t-il, qu'il n'a pas repris dans la suite du texte, pas plus que Théon d'ailleurs.

• La conclusion de la première partie :

« donc le cercle *ABCD* n'est pas plus grand que l'aire *F* »

ne correspond pas tout à fait à ce qui était proposé :

« l'aire est plus petite que le cercle » ;

de ce fait, la seconde partie de la démonstration est introduite par :

« je dis alors qu'il n'est pas non plus plus petit »

qui renvoie à la conclusion de la première partie, alors qu'elle devrait être introduite par :

« je dis alors que l'aire n'est pas non plus plus grande que le cercle ».

A la fin de la seconde partie de la démonstration, par une inversion du même type, Pappus retombe sur ses pieds si l'on peut dire. Théon, lui, reste cohérent; *DC*, rappelons-le, omet ces chevilles de transition. On ne peut certainement rien en déduire car Théon, même s'il suit Pappus, a pu en rétablir la structure. A la fin de la démonstration Théon a ajouté une ultime inférence pour le résultat proposé, inférence dont Pappus laisse le soin à son lecteur.

3. Finalement les convergences entre Pappus et Théon, qui paraissent si fortes à W. Knorr au point qu'il se propose, à partir de là, de reconstruire le prototype archimédien A* et de le

comparer à *DC*, ne me paraissent pas si remarquables ; les divergences pourraient bien être tout autant significatives. Si l'on compare les versions de Pappus et Théon du « lemme sur les secteurs de cercle » dans leurs commentaires au Livre VI de l'*Almageste*, on peut alors effectivement reconnaître une proximité textuelle beaucoup plus grande, la part de Théon se réduisant pour l'essentiel à détailler un peu plus la manipulation des rapports⁶⁹. Ce n'est pas vraiment le cas ici et il faudrait donc admettre, pour se ranger à la thèse de Knorr, qu'il y ait eu une grande variation de la part de Pappus entre ses deux rédactions successives, celle du commentaire à l'*Almageste* et celle de la *Collection*. Une contamination de cette dernière n'est pas non plus à exclure.

C. L'énonciation de *DC* 1

Quoi qu'il en soit, ce qui est certainement décisif pour Knorr, au-delà des coïncidences et des divergences dans les deux preuves que l'on pourrait expliquer de diverses manières, c'est la coïncidence entre Pappus et Théon au niveau de l'énonciation, à laquelle il nous faut venir maintenant.

1. Autant Pappus que Théon citent en effet la proposition *DC* 1 sous la forme suivante :

« [...] τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου
διπλάσιόν ἐστι τοῦ κύκλου »

ce que j'appelle la formulation "produit-rectangle". Elle diffère manifestement de la forme "cercle = triangle" transmise par *DC* à laquelle elle est mathématiquement équivalente :

Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μὲν τῷ
περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.

Tout cercle est égal à un triangle rectangle, duquel d'une part le rayon est égal à
l'un des côtés autour de l'<angle> droit, d'autre part le périmètre <est égal> à la
base⁷⁰.

On pourrait penser que cette équivalence est tellement triviale que la variation d'expression qu'elle représente n'était pas prise en compte par les auteurs anciens lorsqu'ils citaient ce résultat archimédien bien connu. Ce pourrait être le cas de Zénodore qui aurait utilisé la forme "produit-rectangle", bien adaptée à son propos. Pappus, puis Théon, n'auraient fait que reproduire cet idiotisme, sans que cela ait de signification particulière pour la forme propre du résultat dans le corpus archimédien auquel ces commentateurs pouvaient certainement se reporter.

On fera remarquer d'ailleurs que Théon rapporte la forme "produit-rectangle" à Archimède mais ne cite pas de titre d'ouvrages ; il suit peut-être une source secondaire, Zénodore ou plus vraisemblablement P*. Dans Pappus, on observe absolument le même phénomène, quoique, dans l'exposé de la proposition B des isopérimètres (*Coll.* V, Prop. 2), on lise :

[...] τὸ μὲν ὑπὸ τῆς ΔΘ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας διπλάσιον τοῦ ΔΕΖ κύκλου
(καὶ τοῦτο γὰρ ὑπὸ Ἀρχιμήδους ἐν τῷ περὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας δέδεικται)
[...]

mais il pourrait s'agir d'une simple glose interpolée comme sont généralement considérées les références de ce type, en particulier dans la *Collection*⁷¹.

2. Les choses ne sont pas si simples, et Knorr pense que la formulation archimédienne originale, pour autant qu'on puisse la reconstituer, était la forme "produit-rectangle" et non celle que nous a transmise *DC*. C'est à la fois un résultat important et un argument fondamental dans le développement de sa reconstruction. Ses deux principaux points d'appui sont les suivants :

a/ Il y a une première divergence entre la formulation de la Prop. 1 dans *DC* et celle qu'Archimède lui-même rapporte dans la *Méthode* :

[...] πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου [...]
 ([...] tout cercle est égal à un triangle, celui ayant d'une part la circonférence du cercle pour base, d'autre part la hauteur égale au rayon du cercle [...])⁷².

Il ne s'agit pas d'un triangle rectangle comme dans *DC* et donc de côté de l'angle droit, mais d'un triangle quelconque ayant une certaine base et une certaine hauteur. Knorr attache semble-t-il une grande importance à cette variation et pense que la forme « cercle = triangle » que l'on trouve ici est dictée par l'analogie, proposée par Archimède à cet endroit de la *Méthode*, entre, d'une part, cercle et sphère, d'autre part, triangle et cône. Elle n'implique pas, selon lui, que la formulation originale du résultat était la forme "cercle = triangle" plutôt que la forme "produit-rectangle".

b/ Par ailleurs tous les auteurs qui citent le résultat d'Archimède se répartissent en deux catégories.

- Les plus anciens, Héron⁷³, Théon de Smyrne⁷⁴, Pappus⁷⁵, Théon d'Alexandrie⁷⁶, le citent sous la forme "produit-rectangle". On pourrait, avec Knorr, leur adjoindre Zénodore ou Ptolémée : ces mathématiciens appliquent le résultat de la proposition *DC* 1 sous la forme "produit-rectangle", mais ils n'en font pas à proprement parler une « citation »⁷⁷.
- Seuls les auteurs tardifs, ou présumés tels, le citent sous la forme "cercle = triangle" : Proclus⁷⁸, Eutocius⁷⁹ et l'auteur de l'*Introduction anonyme*⁸⁰.

En conséquence, dans l'hypothèse où cette classification reflèterait l'état du texte de l'énoncé, il faudrait en conclure que la citation des *Definitiones* de Héron⁸¹ (*DC* 1 littérale) est une interpolation, ce qui n'aurait d'ailleurs rien de très surprenant. En revanche, toujours dans cette hypothèse, on remarquera que Simplicius, quoique tardif, mais sans doute fidèle à ses sources secondaires, cite la forme "produit-rectangle" :

δείκνυται δὲ πάλιν τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ τοῦ τετάρτου μέρους τῆς περιμέτρου ἴσον τῷ ἐμβαδῷ τοῦ κύκλου [...];
 Et il est ensuite démontré que le <rectangle contenu> par le diamètre et la quatrième partie du périmètre est égal à la surface du cercle [...]⁸².

3. Cette convergence peut paraître décisive quant à la formulation de l'énoncé, mais j'avoue que deux ou trois points de détail m'inspirent quelques doutes à ce sujet, et d'abord deux remarques formelles :

a/ Dans la démonstration qu'ils proposent, Pappus comme Théon ne ré énoncent pas la proposition (ecthèse) de la même manière que dans l'énoncé (protase) : il ne peut s'agir de montrer que le rectangle est double du cercle, mais que le cercle est la moitié du rectangle, en fait qu'il est égal à l'aire Δ , elle-même moitié de ce rectangle ; la procédure d'exhaustion implique d'ailleurs cette manière technique d'envisager la formulation⁸³. Il aurait donc été plus expédient de proposer comme énoncé alternatif :

« Tout cercle est moitié du <rectangle contenu> par le périmètre du cercle et son rayon »⁸⁴.

b/ Si l'on reprend les citations de *DC* 1 sous la forme "produit-rectangle", on peut distinguer en fait deux formulations : la forme "produit-rectangle" proprement dite et la formulation suivante :

[...] τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς κύκλου περιφερείας εἰς εὐθείαν ἐξαπλουμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον τετραπλάσιον εἶναι τοῦ ἐμβαδοῦ τετάρτου μέρους τῆς σφαίρας, ἴσου τῷ ἐμβαδῷ τοῦ κύκλου ([...] le rectangle contenu par le diamètre et la circonférence du cercle, déroulée en une droite, est quadruple de la quatrième partie de la surface de la sphère, <laquelle est> égale à la surface du cercle⁸⁵).

La même « citation » se retrouve presque mot à mot dans Théon d'Alexandrie qui suit soit Théon de Smyrne, soit sa source, Adraste, soit une source commune.

Pour Knorr⁸⁶, le passage de l'*Expositio*, est une interpolation byzantine ; l'argumentation est sommaire mais un article prochain est annoncé ! Mon impression — il ne s'agit que d'une impression — est que de telles citations s'inscrivent dans un contexte où l'on cite *SC*, ou plus exactement un ouvrage qui combinerait les résultats archimédiens de *SC*⁸⁷ et *DC*, en vue d'établir des procédures calculatoires sur les surfaces à éléments circulaires, plutôt qu'une citation du traité sur la *Mesure du cercle*.

c/ Pappus, quant à lui, dans la proposition 22 du Livre VIII de la *Collection*, en explicite la déduction à partir de la forme "produit-rectangle"⁸⁸ :

[...] τοῦ δὲ ΓΔ κύκλου τετραπλάσιόν ἐστιν τὸ ὑπὸ τῆς ΓΔ καὶ τῆς τοῦ ΓΔ περιφερείας (τὸ γὰρ ὑπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου περιεχόμενον ὀρθογώνιον διπλάσιόν ἐστιν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου, ὡς Ἀρχιμήδης, καὶ ὡς ἐν τῷ εἰς τὸ πρῶτον τῶν μαθηματικῶν σχολίῳ δέδεικται καὶ ὑφ' ἡμῶν δι' ἐνὸς θεωρήματος)

([...] Et du cercle *CD*, quadruple est le <rectangle contenu> par la <droite> *CD* et la circonférence de *CD* (car le rectangle contenu par le rayon du cercle et le périmètre du cercle est double de la surface du cercle, comme cela a été démontré par Archimède, et comme <cela a été démontré> aussi par nous dans un théorème, dans le commentaire au premier <livre> des *Mathematica*).

Plus remarquable, dans la Prop. 11 du Livre V, il écrit :

[...] τοῦ δὲ ΓΔ κύκλου τετραπλάσιόν ἐστιν τὸ ὑπὸ τῆς ΓΔ εὐθείας καὶ τῆς τοῦ ΓΔ κύκλου περιφερείας (τοῦτο γὰρ προδέδεικται).

([...]) Et du cercle CD , quadruple est le <rectangle contenu> par la droite CD et la circonférence du cercle CD (car ceci a été démontré auparavant)).

Or il semble que le renvoi ne puisse viser que la proposition 3 du Livre V, dont nous avons déjà abondamment parlé, et qui énonce la forme "produit-rectangle"! On pourrait ajouter la formulation utilisée par Simplicius, qui en est une variante. Qu'en conclure sinon que les géomètres anciens, dans leurs citations des résultats classiques ne se sentaient pas nécessairement tenus à l'exactitude formelle qu'attendrait un mathématicien formaliste moderne ou qu'un paléographe attend de la part d'un copiste scrupuleux⁸⁹.

d/ Enfin je ne suis pas certain que l'« autocitation » d'Archimède, dans le traité de la *Méthode*, soit à mettre au compte d'un souci pédagogique qui s'affranchirait de la forme originale de l'énoncé ; certes rien ne s'y oppose, mais rien ne s'oppose non plus à ce que cette formulation originale ait été :

Tout cercle est égal à un triangle, celui-ci ayant d'une part la circonférence du cercle pour base, d'autre part la hauteur égale au rayon du cercle.

4. Il est difficile de trancher une telle question qui paraît relever d'une appréciation stylistique subjective ; en fait deux travaux préliminaires seraient nécessaires pour renforcer l'un ou l'autre point de vue, travaux qui à ma connaissance n'ont pas été réalisés : examiner comment les mathématiciens se citent eux-mêmes, comment ils citent leurs prédécesseurs. La tâche est rendue difficile par le fait que de telles références sont rares, souvent suspectes d'interpolation, et qu'il n'y a aucune raison de supposer qu'il y ait eu une norme en la matière, valable pour tous les auteurs, et pour toutes les périodes de production de la littérature mathématique grecque. Mais une petite enquête, quelles que soient les limites qu'il faille lui assigner, ne me paraît pas mauvaise.

Le peu que j'ai pu faire pour l'instant renforcerait plutôt mes réticences quant à la proposition de Knorr d'identifier la formulation "produit-rectangle" à la forme archimédienne originale : une grande partie des énoncés archimédiens importants est formulée de manière universelle ; lorsqu'il se cite lui-même, Archimède, malgré de petites variations, est, autant que l'on puisse en juger, assez fidèle ; en revanche, parmi les citations assez nombreuses d'Archimède insérées dans le corpus héronien, on observe des citations parfois très fidèles, lorsque l'énoncé possède déjà une forme calculatoire telle *SC I. 33*, mais aussi des adaptations assez souples.

La forme "produit-rectangle" me paraît relever d'un contexte calculatoire où diverses équivalences en mesure fondamentales étaient dérivées des résultats géométriques importants, résultats pour lesquels les travaux de géomètres comme Eudoxe et surtout Archimède étaient décisifs si l'on en croit l'un des « spécialistes » de ce courant métrologique : Héron⁹⁰. Quant à attribuer l'équivalence calculatoire sous une forme ou sous une autre à l'auteur du résultat géométrique, voire à la confondre avec celui-ci, indépendamment des fluctuations d'énonciation que cela implique, comme semblent le faire Pappus et Théon, cela n'a rien d'in vraisemblable. Ce semble être le cas de la règle de calcul du volume de la sphère ; on verra que les deux autres propositions de *DC* ont peut-être connu le même sort. Il me paraît donc

imprudent de sur interpréter cette assimilation de la part des commentateurs dans une vaste reconstruction de l'histoire du texte de *DC* comme le fait Knorr⁹¹.

Les citations de la forme "produit-rectangle" s'intègrent justement dans un tel contexte calculatoire, appliqué à l'astronomie. A l'inverse, Proclus s'inscrit dans une tradition de commentaires plutôt philosophiques, peut-être plus attentifs aux modalités d'expression ; quant au commentaire d'Eutocius, il est certes de type mathématique, mais il s'agit justement d'un commentaire de *DC* et non de l'*Almageste* ! Sans contester que les textes tardifs aient connu de multiples contaminations, sans douter non plus que l'état actuel de *DC* soit moins que satisfaisant, il n'est donc pas certain que sur le point précis qui nous intéresse ici — l'énoncé original de *DC* 1 —, les auteurs « tardifs » soient moins fiables que les commentateurs mathématiciens des premiers siècles de notre ère dont les préoccupations étaient peut-être davantage orientées vers les questions de justification mathématique plutôt que vers celles d'exactitude textuelle.

III. LES PROPOSITIONS 2 ET 3 DE *DC* DANS LE COMMENTAIRE DE THEON

Dans cette partie je serai beaucoup plus bref et je me contenterai pour l'essentiel de décrire l'état de la question à partir des travaux de Knorr.

A. La proposition 2

1. Deux ou trois textes citent le résultat de *DC* 2 :

a/ Héron, dans les *Métriques* :

Ἀρχιμήδης μὲν οὖν ἐν τῇ τοῦ κύκλου μετρήσει δείκνυσιν, ὅτι ἡ τετράγωνος τὰ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἴσα γίνονται ὡς ἑγγιστα ἰδὲ κύκλοις.

(Effectivement Archimède, dans *la Mesure du cercle*, démontre que 11 carrés <décrits> sur le diamètre du cercle deviennent à peu près égaux à 14 cercles⁹²).

D'où il dérive une procédure élémentaire de calcul de la surface du cercle connaissant le diamètre, procédure expliquée sur un exemple :

ὥστε ἐὰν δοθῇ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου εἰ τύχοι μονάδων 1, δεήσει τὰ 1 ἐφ' ἑαυτὰ ποιῆσαι· γίνονται 1· ταῦτα ἐπὶ τὰ 11· γίνονται 11, ἀρ' ὧν τὸ ἰδ' γίνονται 11· τοσούτου δεῖ ἀποφαίνεσθαι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

(de sorte que si le diamètre du cercle est donné, par exemple: 10 unités, il faudra multiplier les 10 par elles-mêmes; 100 sont produites; celles-ci par les 11; il est produit 1100; dont le 14^e: il est produit 78 2' 14'. C'est ainsi qu'il faut faire connaître la surface du cercle).

On remarquera que l'« énoncé » ainsi proposé est celui de l'équivalence de deux aires, alors que *DC* 2 énonce un rapport :

Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ἡ πρὸς ἰδ' ⁹³

(Le cercle, relativement au carré sur le diamètre, a comme rapport, celui de 11 relativement à 14).

b/ Théon de Smyrne et Théon d'Alexandrie énoncent le résultat sous forme de rapport et en proposent une « dérivation » à partir de la variante de la forme "produit-rectangle" de *DC* 1, et d'une égalité approximative dérivée de *DC* 3⁹⁴ que l'on peut résumer de manière moderne sous la forme : $\pi = 3d + (1/7)d$.

Dans les deux textes, on en déduit ensuite le rapport du cube du diamètre d'une sphère à son volume (en utilisant *SC* I, 34 Por.).

2. A partir de là, Knorr émet les hypothèses suivantes:

- Dans l'original, *DC* 2 n'était qu'un simple porisme de *DC* 3, vraisemblablement sans démonstration.
- Ce résultat étant connu de Héron, il ne s'agit pas d'une interpolation ou d'une fabrication tardive.
- L'énoncé original correspondait à la forme héronienne : égalité approximative de 14 cercles à 11 carrés sur le diamètre.

Knorr ne développe pas véritablement d'argumentation ; sans doute parce que sous la forme de *DC* 2, la formulation est inacceptable : en effet elle ne mentionne pas le caractère approximatif du rapport proposé. De même les deux Théon proposent un rapport 14 : 11 sans en mentionner le caractère approché ; il est alors logique de penser que l'un de ceux-ci (ou leur source) est à l'origine de la formulation de *DC* 2. Knorr pense même que la démonstration proposée dans *DC* n'est qu'une version géométrique de la « dérivation » de type arithmétique proposée par Théon d'Alexandrie⁹⁵. Dans l'hypothèse de Knorr, les travaux de Théon seraient donc à l'origine de la version conservée de la deuxième proposition de la *Mesure du cercle* comme d'une partie de la première.

B. La proposition 3

1. Pour la troisième proposition, nous disposons seulement de quelques citations de l'énoncé du résultat, ou d'une partie seulement du résultat, à savoir l'égalité approximative $\pi = 3.d + (1/7)d$.

a/ La première de ces citations partielles est due à Archimède lui-même:

[...] γὰρ δεδειγμένον ὑφ' ἡμῶν ὅτι παντὸς κύκλου ἡ περιφέρεια μείζων ἐστὶν ἢ τριπλασίῳ τῆς διαμέτρου ἐλάσσονι ἢ ἐβδόμῳ μέρει [...]

(Car <il a> été démontré par nous que la circonférence de tout cercle est plus grande que le triple du diamètre par moins d'une septième partie)⁹⁶.

b/ Héron n'est pas vraiment utilisable puisqu'il prétend citer non pas la *Mesure du cercle*, mais le traité *Sur les plinthes et les cylindres*. Son propos est d'en dériver deux procédures de calcul :

- du périmètre d'un cercle, le diamètre étant donné ;
- et inversement du diamètre, le périmètre étant donné⁹⁷.

c/ Théon de Smyrne ne cite que la célèbre égalité approximative; elle est reprise par Théon d'Alexandrie dans un texte très parallèle (calcul du diamètre de la terre à partir de la

circonférence), mais basé sur des données numériques différentes, parce que provenant de sources différentes (Ératosthène pour Théon de Smyrne, Ptolémée pour Théon d'Alexandrie).

d/ Ptolémée évoque les valeurs de l'encadrement archimédien⁹⁸, mais il ne cite pas à proprement parler Archimède. Il faut remarquer qu'il s'exprime en termes de rapport:

$$\pi : d :: 3^{\circ} 8' 30'' : \text{un.}$$

L'affirmation de Ptolémée est évidemment commentée par Pappus et Théon d'Alexandrie⁹⁹. Parmi les auteurs tardifs, *DC* 3 est citée par Eutocius¹⁰⁰ et Simplicius¹⁰¹.

2. L'examen de ces citations fait apparaître quelques problèmes de terminologie :

- on trouve soit une expression en terme de rapport $\pi : d$, soit une formulation du type :
« le périmètre dépasse le (ou est supérieur au) triple du diamètre par [...] » ;
- on observe l'intervention de la nomenclature des rapports chez Théon d'Alexandrie ;
- on peut aussi relever l'opposition terminologique « périmètre » / « circonférence ».

3. Selon Knorr la preuve conservée de *DC* 3 contient des maladroresses qui la rendent suspecte quoiqu'il ne fasse pas de doute que son schéma et ses calculs soient archimédiens. Ici les travaux de Théon n'ont pas joué de rôle mais il considère que la version conservée pourrait dériver du *Rucher* de Sporus.

CONCLUSIONS

1. La principale conclusion des travaux de Knorr est que le texte conservé du traité de *La mesure du cercle* d'Archimède est une composition disparate élaborée à partir de textes secondaires dus au travail de Héron, Pappus, Théon d'Alexandrie, Sporus de Nicée... Pour le savant américain, cette situation ne constitue pas un cas unique : l'*Introduction anonyme* à l'*Almageste* de Ptolémée est, elle aussi, une compilation de divers fragments de commentaires au Livre I du grand ouvrage d'astronomie. On remarquera cependant qu'elle ne se présente pas comme une édition de l'un de ces commentaires, ni a fortiori comme un traité de Ptolémée : la comparaison me paraît donc forcée.

2. A partir d'une comparaison des versions de *DC* 1 transmises par Pappus et Théon d'Alexandrie, en considérant également les citations partielles conservées, Knorr conclut que ces sources secondaires permettent de remonter d'abord à un modèle commun P* : le commentaire de Pappus au premier Livre de l'*Almageste*, lequel suivait lui-même une source archimédienne A*, encore accessible au début du IV^e siècle. L'accord qu'il relève — *uniquement* pour l'énoncé de *DC* 1 — avec Héron et avec ce qu'il identifie de Zénodore lui font conclure que A* permet de remonter à la fin du III^e siècle avant notre ère.

3. Une partie du travail de Knorr n'a pas été abordé ici : A*, selon lui, contenait d'autres résultats, cités par les commentateurs, mais non conservés, ni dans le texte dont disposait Eutocius, ni dans *DC* :

a/ Résultat sur l'aire des secteurs (cité par Héron et Pappus)¹⁰².

b/ Constance du rapport $\pi : d$ (Cf. *Coll.* V, Prop. 11)¹⁰³.

c/ Résultat sur les segments de cercle (Héron, *Métr.*, I, 27-32).

d/ Propriété isopérimétrique du demi-cercle (*Coll. V*, Prop. 17).

4. Du point de vue méthodologique, il est clair que l'on doit émettre bien des réserves sur la démarche et les conclusions de Knorr. Il compare des choses qui ne sont pas toujours comparables : édition critique d'un texte, d'un côté, un manuscrit de l'autre ; il utilise les variations dans le vocabulaire sur une base documentaire non exhaustive ; il avance des hypothèses *ad hoc* : les témoignages embarrassants deviennent des interpolations ; dans le même temps les textes « témoins », par exemple la *Collection* de Pappus, sont supposés fiables, alors que c'est peu vraisemblable.

Particulièrement délicate est l'utilisation de coïncidences et/ou de divergences textuelles dans un domaine où l'usage d'un langage formulaire rend les premières inévitables, et ce d'autant qu'il n'y a pas vraiment de critère pour savoir lesquelles sont significatives, lesquelles ne le sont pas. Tous les éditeurs de textes anciens connaissent le parti que l'on peut tirer de la tradition indirecte, en particulier des citations et des commentaires anciens, mais son usage a aussi ses limites. Tout spécialement dans le cas qui nous intéresse puisqu'il s'agit essentiellement de commentaires à l'*Almageste*, et non à la *Mesure du cercle*, et, qui plus est, parce qu'il n'est pas tout à fait certain que nos principaux auteurs (Héron, Pappus, Théon) se réfèrent explicitement et exactement à ce traité d'Archimède.

5. Aussi, quant aux conclusions de Knorr, je crois, à l'issue de ce travail sur le seul Théon, devoir être extrêmement prudent, tant en ce qui concerne la dépendance de Théon par rapport à Pappus pour sa preuve de *DC 1*, qu'en ce qui concerne l'influence du lemme de Théon sur *DC*. Si minime qu'il soit, l'apport mathématique propre au lemme de Théon semble avoir échappé à notre collègue. J'ai essayé de rendre compte autrement des ressemblances et des dissemblances qui existent entre les différents traitements du cas de figure des « polygones circonscrits ».

La proposition de Knorr pour la forme originale de l'énoncé de *DC 1* me paraît improbable ; il faut au moins proposer un énoncé universel, soit :

« Tout cercle est moitié du <rectangle contenu> par le périmètre du cercle et son rayon »,

soit :

« Tout cercle est égal à un triangle, celui ayant d'une part la circonférence du cercle pour base, d'autre part la hauteur égale au rayon du cercle »,

et l'utilisation de la forme "produit-rectangle" par Héron, Pappus, Théon... ne me paraît pas décisive pour trancher en faveur de l'une de ces deux formules (en l'occurrence la première).

Le rôle qu'il fait jouer à Théon dans l'élaboration de *DC 2* est suspendu à l'authenticité du texte de Théon de Smyrne et est peut-être très exagéré. Comme pour la question de l'énoncé de *DC 1*, tant les *Métriques* de Héron que les différents commentaires de l'*Almageste* suggèrent plutôt que l'on a composé un ou des recueil(s) de procédures calculatoires portant sur les figures à éléments circulaires. Si tel est le cas, les résultats géométriques d'Archimède, ceux de *DC* mais aussi ceux de *SC*, ont certainement joué un rôle fondamental dans cette composition, même si, privilégiant l'aspect « algorithmique », elle a entraîné une altération de la formulation

littérale des résultats sélectionnés. Quant aux hypothèses que Knorr formule sur la source archimédienne A*, on ne peut que lui en laisser la responsabilité !

ANNEXE: EXTRAITS DE L'ALMAGESTE, TEMOIGNAGES DIVERS ET COMMENTAIRES

Texte 1 (Ptol. *Alm.* I, 13. 16-20 Heiberg) :

« [...] ὡσαύτως δ' ὅτι, τῶν ἴσην περίμετρον ἔχόντων σχημάτων διαφόρων ἐπειδὴ μείζονά ἐστιν τὰ πολυγωνιώτερα, τῶν μὲν ἐπιπέδων ὁ κύκλος γίνεται μείζων, τῶν δὲ στερεῶν ἡ σφαῖρα, μείζων δὲ καὶ ὁ οὐρανὸς τῶν ἄλλων σωμάτων. »

« [...] de la même manière aussi, puisque parmi les différentes figures ayant un périmètre égal, les plus polygonales sont plus grandes: parmi les <figures> planes, le cercle devient plus grand, parmi les solides, la sphère; or le ciel est plus grand que les autres corps »

Texte 2 (Théon, *In Ptol.* I, 4, 355. 3 - 4 Rome) :

« Ποιησόμεθα δὴ τὴν τούτων ἀπόδειξιν ἐν ἐπιτομῇ ἐκ τῶν Ζηνοδώρῳ δεδειγμένων ἐν τῷ Περὶ ἰσοπεριμέτρων σχημάτων. »

« Alors nous ferons la démonstration de ces choses, de manière résumée, à partir de ce qui a été démontré par Zénodore dans son *Sur les figures isopérimétriques* »

Texte 3 (Théon, *In Ptol.* I, 4, 394. 5 - 398. 5 Rome) :

Περὶ δὲ τοῦ πρὸς αἴσθησιν σφαιροειδῆ εἶναι τὴν γῆν, εἴρηται μὲν ἡμῖν καὶ μικρῷ πρόσθεν, ὅτι τὰ ὄρη ἐλαχίστας ποιῶντα ἐπαναστάσεις ὡς πρὸς τὸ ὅλον τῆς γῆς μέγεθος ἀναλλοίωτον * αὐτῆς τὸ σφαιρικὸν σχῆμα συντηροῦσιν πρὸς αἴσθησιν. ἔστιν δὲ καὶ ἀπὸ τῶν καταληφθέντων μεγεθῶν τῆς τε γῆς καὶ τῶν ὄρων τὸ τοιοῦτον ἐπιγνώναι. Τὸ γὰρ ὅλον τῆς γῆς μέγεθος κατὰ τὸν μέγιστον ἐαυτῆς κύκλον μετρούμενον σταδίων μυριάδων ἐστὶν ιη, καθάπερ αὐτὸς ὁ Πτολεμαῖος ἐν τῇ Γεωγραφίᾳ συνήγαγεν.

Ἀρχιμήδης δὲ τοῦ κύκλου τὴν περίμετρον εἰς εὐθείαν ἐκτεινομένην δείκνυσιν τῆς διαμέτρου γ καὶ ζ μέρος μείζονα.

ὥστε εἴη ἂν ἡ πᾶσα τῆς γῆς διάμετρος σταδίων

Et de ce que la terre est sensiblement de forme sphérique, cela a été traité par nous; on peut ajouter brièvement que les montagnes, produisant des éminences des plus petites par rapport à la grandeur totale de la terre, conservent inchangée sa figure sensiblement sphérique. Et quant aux grandeurs de la terre et des montagnes, laissées de côté jusqu'ici, ceci est à connaître: la grandeur de la terre entière, selon son plus grand cercle, mesuré en stades est en effet de 18 myriades, comme le même Ptolémée l'a défendu dans la *Géographie*.

Et Archimède démontre que le périmètre du cercle étiré en une droite, est plus grand que 3 fois le diamètre et une 7^e partie¹⁰⁴.

De sorte que le diamètre de toute la terre serait de :

ε
Μ καὶ /ζσογ·

5 7273 stades ;

τούτῳ γὰρ τριπλασίῳν καὶ ζ' μέρει μείζων ἢ ἔγγιστα ἢ τῶν ιη μυριάδων περίμετρος.

Τὴν δὲ ἀπὸ τῶν ὑψηλοτάτων ὄρων ἐπὶ τὰ χθαμαλώτερα πίπτουσιν κάθετον δείκνυσιν Ἐρατοσθένης διὰ τῶν ἐξ ἀποστημάτων μετρούσων διοπτρῶν σταδίων ι.

ἐπεὶ οὖν ἀπεδείχθη πάλιν Ἀρχιμήδῃ ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας εἰς εὐθείαν ἐξαπλουμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον τετραπλάσιόν ἐστιν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ τοῦ δ' μέρους τῆς περιφερείας ἴσον ἐστὶν τῷ ἐμβαδῷ τοῦ κύκλου. διόπερ εὐρίσκεται τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου λόγον ἔχον, ὃν ιδ πρὸς ια, οὕτως.

ἐπεὶ γὰρ ἡ περιφέρεια τῆς διαμέτρου τριπλασίῳν ἐστὶν καὶ ἔτι ἐβδόμῳ μέρει μείζων, οἷων ἄρα ἐστὶν ἡ διάμετρος ζ, τοιούτων ἡ μὲν περιφέρεια γίνεται κβ. τὸ δὲ δ' αὐτῆς ε <. ὥστε καὶ οἷων τὸ τετράγωνον μθ, τοιούτων ὁ κύκλος λη <. καὶ διὰ τὸ ἐπιτρέχον ἡμισυ διπλασιάσαντες αὐτά, ἔξομεν οἷων τὸ τετράγωνον ρη, τοιούτων τὸν κύκλον οζ.

τούτων δὲ ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ὁ λόγος ἐστὶν ὁ τῶν ιδ πρὸς ια. μέγιστον γὰρ κοινὸν μέτρον αὐτῶν ἐστὶν ὁ ζ, καὶ μετρεῖ τὸν μὲν ρη κατὰ τὸν ιδ, τὸν δὲ οζ κατὰ τὸν ια.

καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου τετράγωνον πρὸς τὸν κύκλον, οὕτως ὁ κύβος πρὸς τὸν ἰσουψῆ κύλινδρον ὡς ἐξῆς δείξομεν, ἔξει ἄρα καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύλινδρον τὸν τῶν ιδ πρὸς τὰ ια λόγον.

καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη πάλιν Ἀρχιμήδῃ ἐν τῷ *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* ὅτι ὁ κύλινδρος ὁ ἰσουψῆς τῇ σφαίρᾳ καὶ ἔχων βάσιν τὸν μέγιστον ἐν αὐτῇ κύκλον ἡμιόλιός ἐστιν τῆς σφαίρας, ἔσται καὶ οἷων ὁ κύλινδρος ια, τοιούτων ἡ σφαῖρα ζ γ'.

car le triple et une 7^e partie de ceux-ci est très approximativement plus grand que le périmètre de 18 myriades.

Or Eratosthène a démontré, à partir de la mesure dioptrique des élévations, que des montagnes les plus hautes sur les parties les plus basses tombait une verticale de 10 stades.

Puisque ensuite il a été démontré par Archimède que le rectangle contenu par le diamètre et la circonférence du cercle — déroulée en une droite est quadruple de la surface du cercle, donc celui <contenu> par le diamètre et la 4^e partie de la circonférence est égal à la surface du cercle; c'est pourquoi on trouve que le carré sur le diamètre, relativement à la surface du cercle, a comme rapport celui de 14 à 11 de la manière suivante¹⁰⁵.

Puisqu'en effet la circonférence est triple du diamètre et plus grande en plus par la septième partie, donc, par exemple si le diamètre est 7, de ceux-ci d'une part la circonférence devient 22, d'autre part leur 4': 5 2'; de sorte aussi que si le carré <du diamètre est> 49, de ceux-ci le cercle est 38 2'. Et en les doublant pour l'élimination du demi, nous exhiberons par exemple le carré de 98 et de ceux-ci le cercle de 77;

et le rapport de ceux-ci, en les plus petits nombres, est celui de 14 relativement à 11; car leur plus grande commune mesure est 7, qui mesure d'une part 98 selon 14, d'autre part 77 selon 11.

Et puisque comme le carré sur le diamètre du cercle <est> relativement au cercle, ainsi est le cube relativement au cylindre de hauteur égale, comme nous le démontrerons à la suite, donc le cube aura aussi, relativement au cylindre le rapport de 14 relativement à 11.

Et puisque de nouveau il a été démontré par Archimède dans *Sur la sphère et le cylindre* que le cylindre de hauteur égale à la sphère et ayant pour base le plus grand cercle en elle est hémiole de la sphère, on aura : si par exemple le cylindre est de 11, de ceux-ci la sphère est 7 3'.

ἀλλὰ οἷων ὁ κύβος ιδ, τοιούτων ὁ κύλινδρος ια, καὶ οἷων ἄρα ὁ κύβος ιδ ἢ σφαῖρα ζ γ', ἔσται ἄρα ἡ σφαῖρα τοῦ κύβου ζ γ' τεσσαρακαίδεκατα.

Mais si par exemple le cube est 14, de ceux-ci le cylindre <est> 11, et donc si le cube est 14, la sphère <est> 7 3', donc la sphère sera 7 3' quatorzièmes du cube.

καὶ ἐπεὶ τὴν διάμετρον τῆς γῆς ἀπεδείκνυμεν σταδίων μυριάδων ε καὶ ἔτι /ζσογ, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον

Et puisque nous avons démontré que le diamètre de la terre est en stades de 5 myriades plus 7273, le carré sur le diamètre sera :

λβ

32 8019 6529

M /ηιθ

M M /ςφκθ.

Et le cube :

ὁ δὲ κύβος

ρπζ

187 8666 9580 5417

M /ηχξς

M M /θφπ

M M M /ευιζ.

De ceux-ci le 14^e :

τούτων τὸ ιδ',

ιγ

13 4190 4970 0386

M /δρϞ

M M /δ>λο

M M M τπς.

Ceux-ci, sept fois, produisent :

ταῦτα ἐπτάκις γίνεται

Ϟγ

93 9333 4790 2702.

M /θτλγ

M M /δψϞ

M M M /βψβ.

A ceux-ci j'ajoute le 3' du 14', lequel est :

τούτοις προστίθῃμι τοῦ ιδ' τὸ γ', ὃ ἔστι

δ

4 4730 1656 6795

M /δψλ

M M /αχνς

M M M /ςψϞε,

Et il est produit en tout :

καὶ γίνεται ὁμοῦ

Ϟη

98 4063 6446 9497

M /δξγ

M M /ςυμς

M M M /υϞζ.

τοσούτων ἄρα ἔσται τὸ τῆς γῆς σφαιρικὸν μέγεθος.

Autant que ceux-là, donc, sera la grandeur de la terre sphérique.

ἔστιν δὲ καὶ ἡ τοῦ μεγίστου ὄρους κάθετος σταδίων ι.

Or la <hauteur> verticale de la plus grande montagne <est> 10 stades.

ἐὰν ἄρα ἐπὶ τοῦ τηλικούτου τῆς γῆς μεγέθους ἐπινοήσωμεν ἐπανάστασιν τινα γενομένην σταδίων ι, διὰ τὴν τοσαύτην τοῦ τῆς γῆς μεγέθους ὑπερβολὴν ἀναλλοίωτον αὐτῆς πρὸς αἰσθησιν τὸ σφαιρικὸν σχῆμα διαμένει

Si donc nous concevions sur la terre d'une telle grandeur une certaine éminence de dix stades, malgré un tel dépassement sur la grandeur de la terre, sa forme sensiblement sphérique resterait inchangée.

Texte 4 (Ptol., *Alm.* VI, 512. 25 - 513. 5; 514. 5-6 et 515. 10-12 Heiberg) :

a. « [...] τοῦ λόγου τῶν περιμέτρων πρὸς τὰς διαμέτρους ὄντος, ὃν ἔχει τὰ γ η λ πρὸς τὸ εἶν οὗτος γὰρ ὁ λόγος μεταξύ ἐστὶν ἔγγιστα τοῦ τε τριπλασίου πρὸς τῷ ζ' μέρει καὶ τοῦ τριπλασίου πρὸς τοῖς δέκα ἑβδομηκοστομόνοις, οἷς ὁ Ἀρχιμήδης κατὰ τὸ ἀπλούστερον συνεχρήσατο [...]] »

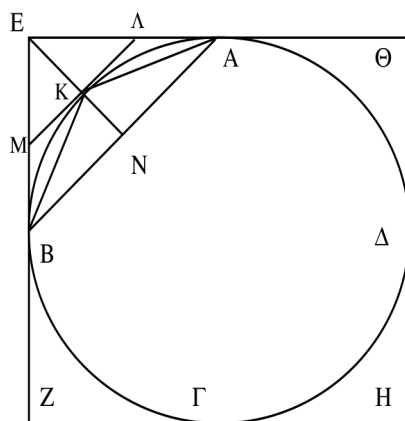
b. « [...] ἐπειδήπερ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν περίμετρον πολλαπλασιασθεῖσα δύο ἔμβαδὰ τοῦ κύκλου ποιεῖ [...]] »

c. « [...] ὥστ' ἐπεὶ ὁ αὐτὸς λόγος ἐστὶν τῶν κύκλων πρὸς τὰς περιφερείας καὶ τῶν ἔμβადων αὐτῶν πρὸς τὰ τῶν ὑπὸ τὰς περιφερείας τομέων [...]] »

« [...] du rapport des périmètres relativement aux diamètres, lequel est 3p 8' 30" relativement à un. En effet ce rapport-ci est approximativement au milieu du triple avec une 7^e partie et du triple avec dix soixante et onzièmes, qu'Archimède a conjointement utilisés pour plus de simplicité [...]] »

« [...] puisque le rayon, multiplié par le périmètre produit deux surfaces du cercle [...]] »

« [...] de sorte que, puisqu'il y a le même rapport entre les <circonférences des> cercles relativement aux arcs et entre leurs aires et celles des secteurs <contenus> par les arcs [...]] »

Texte 5 (Théon, *In Ptol.* I, 4, 360.4 - 362.10 Rome) :

Ὅτι δὲ τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου διπλάσιόν ἐστιν τοῦ κύκλου, δείκνυσιν οὕτως.

Ἐστω πρῶτον κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸν τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ, καὶ τμηθείσης τῆς ΑΒ περιφερείας δίχα κατὰ τὸ Κ ἤχθω δι' αὐτοῦ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ἡ ΛΚΜ. λέγω ὅτι τὸ ΕΜΛ τρίγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ καὶ τῆς ΑΚΒ περιφερείας περιεχομένου σχήματος.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΑΚ, ΚΒ, ΕΚ.

Et que le <rectangle contenu> par le périmètre et le rayon est double du cercle, il le démontre ainsi :

Soit premièrement le cercle *ABCD* et que le carré *EFGH* soit circonscrit autour de lui, et l'arc *AB* étant coupé en deux <parties égales> en *K*, que par lui soit menée *LKM*, tangente au cercle. Je dis que le triangle *EML* est plus grand que la moitié de la figure contenue par les <droites> *AE*, *EB* et l'arc *AKB*.

En effet que *AB*, *AK*, *KB*, *EK* soient jointes.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ EA τῇ EB κοινὴ δὲ ἡ EK καὶ βάσις ἡ AK βάσει τῇ KB ἐστὶν ἴση, ἴσαι ἄρα καὶ αἱ πρὸς τῷ E γωνίαι.

πάλιν ἐπεὶ ἴση ἡ EA τῇ EB κοινὴ δὲ ἡ EN , καὶ γωνίαι αἱ πρὸς τῷ E ἴσαι, καὶ πάντα πᾶσιν, ἴση ἄρα ἡ AN τῇ NB , καὶ ἔτι αἱ πρὸς τῷ N γωνίαι. ὥστε ἡ KN τὴν AB δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. ἡ KN ἄρα ἐπὶ τὸ κέντρον πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ ὑπὸ EKL , EKM . μείζων ἄρα ἡ EL τῆς LK .

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ LA τῇ LK , ἀπὸ γὰρ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ L ἐφάπτονται, μείζων ἄρα καὶ ἡ EL τῆς LA . ὥστε καὶ τὸ EKL τρίγωνον τοῦ LKA μείζον ἐστίν. διὰ ταῦτα δὲ καὶ τὸ EKM τρίγωνον τοῦ KBM μείζον ἐστίν. ὅλον ἄρα τὸ LEM τρίγωνον μείζον ἐστίν συναμφοτέρων τῶν ALK , KMB τριγώνων. πολλῶ ἄρα μείζον ἐστὶ τὸ LEM τρίγωνον τῶν περιεχομένων ἀποτμημάτων ὑπὸ τῶν AL , LK , KM , MB εὐθειῶν καὶ τῶν AK , KB περιφερειῶν. τὸ ἄρα ELM τρίγωνον μείζον ἐστίν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου σχήματος ὑπὸ τε τῶν AE , EB εὐθειῶν καὶ τῆς AKB περιφερείας.

Et puisque EA est égale à EB , que EK <est> commune et que la base AK est égale à la base KB , donc les angles en E sont aussi égaux.

Ensuite puisque EA est égale à EB , que EN <est> commune, et que les angles en E sont égaux, et tous à tous, AN <est> donc égale à NB et de plus les angles en N . De sorte que KN coupe AB en deux <parties égales> et à angles droits. Donc KN passera par le centre du cercle. Donc les <angles> sous EKL , EKM sont droits. Donc EL est plus grande que LK .

Et puisque LA est égale à LK — car elles sont des tangentes <menées> à partir du même point L , donc EL est aussi plus grande que LA . De sorte aussi que le triangle EKL est plus grand que LKA . Alors pour les mêmes raisons aussi le triangle EKM est plus grand que KBM . Donc le triangle LEM tout entier est plus grand que les triangles ALK , KMB , les deux ensemble. Donc le triangle LEM est plus grand, de beaucoup, que les <aires> découpées, contenues par les droites AL , LK , KM , MB et les arcs AK , KB . Donc le triangle ELM est plus grand que la moitié de la figure contenue par les droites AE , EB et l'arc AKB .

Texte 6 (Théon, *In Ptol.* I, 4, 362.11 - 364.11 Rome) :

Τούτου προλημθέντος, ἐξῆς ἂν εἶη τὸ προκείμενον δεῖξαι, ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου διπλάσιόν ἐστίν τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Ἔστω γὰρ κύκλος ὁ $ABΓ$, καὶ τοῦ ὑπὸ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἥμισυ ἔστω τὸ Δ χωρίον.

λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶν τὸ Δ χωρίον * τῷ $ABΓ$ κύκλῳ.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἔλασσόν ἐστίν αὐτοῦ ἢ μείζον.

Ἔστω πρότερον ἔλασσον.

δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἀκολουθῶς τῇ ἐν τῷ δωδεκάτῳ τῶν Στοιχείων ἀγωγῇ ἐγγράψαι εἰς τὸν $ABΓ$ κύκλον πολύγωνον, ὥστε μείζον αὐτὸ γίνεσθαι τοῦ Δ χωρίου.

Ceci étant préalablement acquis, à la suite ce qui est proposé peut être démontré: que le <rectangle contenu> par le périmètre et le rayon est double de ce même cercle.

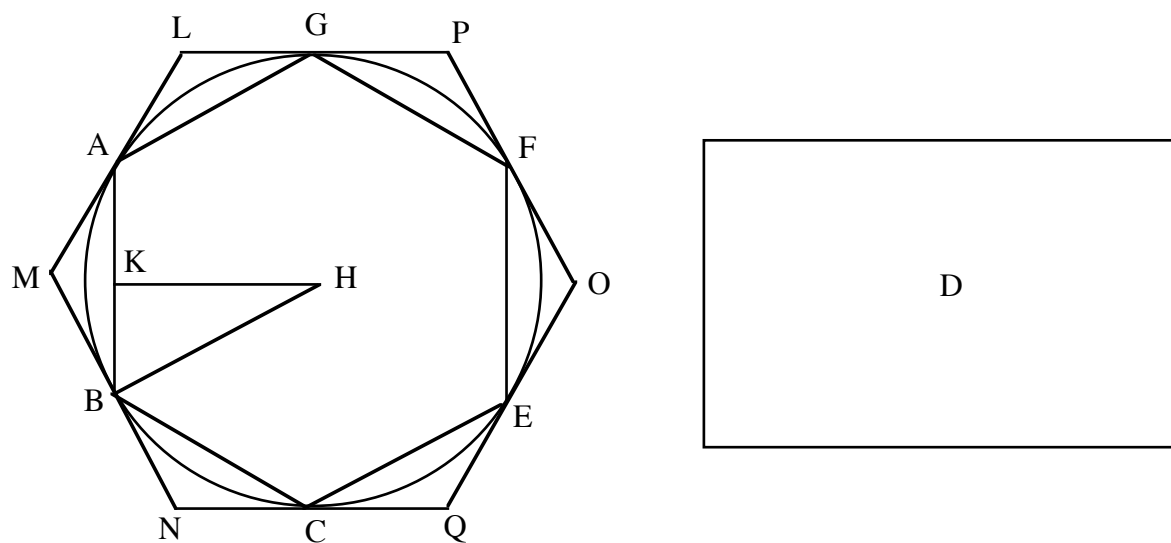
En effet soit le cercle ABC et que l'aire D soit la moitié du <rectangle contenu> par son périmètre et son rayon.

Je dis que l'aire D est égale au cercle ABC .

Car sinon, elle est soit plus petite que lui, soit plus grande.

Qu'elle soit d'abord plus petite.

Il est donc possible, conformément à la démarche <suivie> dans le douzième <Livre> des *Éléments*, d'inscrire un polygone dans le cercle $ABCD$, de manière à le produire plus grand que l'aire D . Qu'il soit inscrit et que ce soit $ABCEFG$.



ἐγγεγράφθω, καὶ ἔστω τὸ $ABΓΕΖΗ$. καὶ ἀπὸ τοῦ Θ κέντρου ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν AB κάθετος ἦχθω ἡ ΘK .

ἐπεὶ οὖν ἡ περίμετρος τοῦ κύκλου μείζων ἐστὶν τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου (ἐπεὶ καὶ ἐκάστη περιφέρεια τῆς ὑπ' αὐτὴν εὐθείας), ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου μείζων τῆς ΘK καθέτου, μείζον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ, τοῦ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ΘK .

καὶ ἔστιν τὸ μὲν ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ διπλάσιον τοῦ Δ χωρίου, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ΘK διπλάσιον τοῦ πολυγώνου· ὥστε καὶ τὰ ἡμίση. μείζον ἄρα τὸ Δ χωρίον τοῦ $ABΓΕΖΗ$ πολυγώνου. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Δ χωρίον ἔλαττόν ἐστιν τοῦ $ABΓ$ κύκλου.

Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ μείζον.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζον τὸ Δ χωρίον τοῦ κύκλου.

Et qu'à partir du centre H soit menée HK perpendiculaire à l'un des côtés, AB .

Puisque alors le périmètre du cercle est plus grand que le périmètre du polygone (puisque chaque arc aussi <est plus grand> que la droite <sous-tendue> par lui), que le rayon du cercle est plus grand que la perpendiculaire HK , donc le <rectangle contenu> par le périmètre du cercle et son rayon est aussi plus grand que celui <contenu> par le périmètre du polygone et HK .

Or d'une part celui <contenu> par le périmètre du cercle et son rayon est double de l'aire D ; d'autre part celui <contenu> par le périmètre du polygone et HK est double du polygone; il en est de même aussi des moitiés; donc l'aire D est plus grande que le polygone $ABCEFG$. Mais aussi plus petite, ce qui est impossible. Donc l'aire D n'est pas plus petite que le cercle ABC .

Je dis alors qu'<elle n'est pas> non plus plus grande.

Car si c'est possible que l'aire D soit plus grande que le cercle.

δυνατὸν ἄρα ἐστίν, ἀκολουθῶς τῇ ἐπὶ τοῦ προεκτεθέντος ἡμῖν θεωρήματος ἀγωγῇ, περιγράφοντα περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον καὶ τέμνοντα δίχα τὰς ἀπολαμβανομένας περιφερείας καὶ ἀφαιροῦντα ἀπὸ τῶν τμημάτων μείζον ἢ τὸ ἥμισυ περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον ὥστε ἔλασσον αὐτὸ γίνεσθαι τοῦ Δ χωρίου, καταλειπομένων τῶν ἐκτὸς τοῦ κύκλου ἀποτμημάτων ἐλασσόνων τῆς ὑπεροχῆς ἢ ὑπερέχει τὸ Δ χωρίον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου.

περιγεγράφθω, καὶ ἔστω τὸ $\Lambda MN\Xi O\Pi$.

καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘB .

καὶ ἐπεὶ ἡ περίμετρος τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου μείζων ἐστὶν τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ΘB μείζον ἐστὶν τοῦ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς ΘB . ὥστε καὶ τὰ ἡμίση. τὸ ἄρα πολύγωνον μείζον ἐστὶν τοῦ Δ χωρίου.

ἀλλὰ καὶ ἔλασσον, ὑπόκειται γάρ, ὅπερ ἄτοπον.

οὐκ ἄρα τὸ Δ χωρίον μείζον ἐστὶν τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου.

ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἔλασσον. ἴσον ἄρα.

Καὶ ἔστιν τοῦ Δ χωρίου διπλάσιον τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ. ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ διπλάσιόν ἐστιν τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Il est donc possible, conformément à notre démarche pour le théorème préalablement exposé, un carré étant circonscrit autour du cercle et les arcs découpés étant coupés en deux <parties égales>, et à partir des segments, plus de la moitié étant retranché, de circonscrire autour du cercle un polygone de manière à le produire plus petit que l'aire D , en laissant finalement les <aires> découpés à l'extérieur du cercle, plus petites que l'excès par lequel l'aire D dépasse le cercle ABC .

Qu'il soit circonscrit et que ce soit $LMNQOP$.

Et que HB soit jointe.

Et puisque le périmètre du polygone circonscrit est plus grand que le périmètre du cercle, donc le <rectangle contenu> par le périmètre du polygone et HB est plus grand que celui <contenu> par le périmètre du cercle et HB . Et il en est de même aussi des moitiés. Donc le polygone est plus grand que l'aire D .

Mais aussi plus petit, car c'est l'hypothèse; ce qui est absurde. Donc l'aire D n'est pas plus grande que le cercle ABC . Et il a été démontré <qu'elle n'est pas> non plus plus petite. Donc <elle lui est> égale.

Et le <rectangle contenu> par le périmètre du cercle et son rayon est double de l'aire D . De sorte que le <rectangle contenu> par le périmètre du cercle et son rayon est double de ce même cercle.

Texte 7 (Pappus, *Coll.* V. 3, 2^e partie, 314. 27 - 316.17 Hultsch) :

Λέγω δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάσσων· δυνατόν ἄρα περιγράψαι περὶ τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον πολύγωνον, ὥστε τὸ Z χωρίον μείζον εἶναι τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, εἰ πρότερον τετράγωνον περιγραφείη περὶ τὸν κύκλον καὶ δίχα αἰ τεμνομένων τῶν ἀπολειπομένων περιφερειῶν ἄγουντο ἐφαπτόμεναι, μέχρις ἂν ἀπολειφθῇ τινα τμήματα τῶν ἐκτὸς σχημάτων, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς ἢ ὑπερέχει τὸ Z χωρίον τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου.

Je dis alors qu'<il n'est pas> non plus plus petit.

Car si c'est possible qu'il soit plus petit; il est donc possible de circonscrire un polygone autour du cercle $ABCD$ de sorte que l'aire F soit plus grande que le polygone circonscrit, si premièrement un carré est circonscrit autour du cercle, et les arcs des segments découpés étant toujours coupés en deux <parties égales>, des tangentes sont menées jusqu'à ce que certains segments des figures soient découpés à l'extérieur, lesquels seront plus petits que l'excès par lequel l'aire F dépasse le cercle $ABCD$.

τοῦτο γὰρ ὥς δυνατόν [ἀνάγκη] γενέσθαι δέδεικται. περιγεγράφθω οὖν, ὥς εἴρηται, τὸ πολυγώνον καὶ ἔστω τὸ ΚΑΜΝΞ, καὶ ἐπεξεύχθω ἀπὸ τοῦ Η κέντρου ἐπὶ μίαν τῶν συναφῶν τὴν Ο ἢ ΗΟ. ἐπεὶ οὖν ἡ περίμετρος τοῦ ΚΑΜΝΞ πολυγώνου μείζων ἐστὶν τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ΚΑΜΝΞ πολυγώνου καὶ τῆς ΗΟ μείζον ἐστὶν τοῦ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου καὶ τῆς ΗΟ. καὶ τὰ ἡμίση· τὸ ἄρα ΚΑΜΝΞ πολυγώνον μείζον τοῦ Ζ χωρίου, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ ἔλασσον· οὐκ ἄρα τὸ Ζ χωρίον μείζον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου.

Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἔλασσον· ἴσον ἄρα. καὶ ἔστι τοῦ Ζ χωρίου διπλάσιον τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Car {nécessairement} il a été démontré qu'il est possible de produire ceci. Alors que le polygone soit circonscrit comme il est dit et que ce soit *KLMNQ*; et qu'à partir du centre *G*, *GO* soit jointe jusqu'à l'un des sommets *O*. Puisque alors le périmètre du polygone *KLMNQ* est plus grand que le périmètre du cercle *ABCD*, donc le <rectangle contenu> par le périmètre du polygone *KLMNQ* et *GO* est plus grand que celui <contenu> par le périmètre du cercle *ABCD* et *GO*. Leurs moitiés aussi; donc le polygone *KLMNQ* <est> plus grand que l'aire *F*, ce qui est impossible; car il est supposé plus petit; donc l'aire *F* n'est pas plus grande que le cercle *ABCD*.

Or il a été démontré qu'<elle n'est pas> non plus petite; donc <elle lui est> égale. Et le <rectangle contenu> par le périmètre du cercle *ABCD* et le rayon du cercle est double de l'aire *F*.

Texte 8 (Pappus, *In Ptol.* VI, 7, I, 253. 6 - 256.1 Rome) :

Ἀπέδειξεν γὰρ ὁ Ἀρχιμήδης ἐν τῷ περὶ τοῦ κύκλου βιβλίῳ, ὅτι παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος μείζων ἐστὶν ἢ τριπλασίῳν, ἐλάσσων μὲν ἢ ζ' μέρει τῆς διαμέτρου, μείζων δὲ ἢ ι οα'.

καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου ὡς εὐθείας καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου περιεχόμενον ὀρθογώνιον, διπλάσιόν ἐστιν τοῦ ἑμβαδοῦ τοῦ κύκλου. τὰ μὲν οὖν τριπλάσια καὶ τὰ ι οα' τοῦ α γίνεται γ η κζ· τὰ δὲ τριπλάσια πρὸς τῷ ζ' μέρει γίνεται γ η λδ· ὧν μεταξὺ ἐστὶν ἔγγιστα τὰ γ η λ.

Πρὸς δὲ τὸ μὴ δεῖσθαι τοῦ Ἀρχιμήδους συντάγματος, ἐν τοῖς εἰς τὸ πρῶτον σχολίοις ἀπεδείχθη ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ διπλάσιόν ἐστιν τοῦ ἑμβαδοῦ τοῦ κύκλου.

Car Archimède a démontré dans le livre *Sur le cercle*, que de tout cercle le périmètre est plus grand que le triple du diamètre, d'une part par moins d'une septième partie, d'autre part par plus de 10 71°.

Et que le rectangle contenu par le périmètre du cercle — <considéré> comme une droite — et le rayon du cercle est double de la surface du cercle.

Alors d'une part les triples et les 10 71°, cela produit 3p 8' 27"; d'autre part les triples plus la 7° partie, cela produit 3p 8' 34"; au milieu desquels est à peu près 3p 8' 30".

Pour ne pas devoir <recourir> à la collection archimédienne, il a été démontré dans les commentaires au premier <Livre> que le <rectangle contenu> par le périmètre du cercle et son rayon est double de la surface du cercle.

Texte 9 (Théon, *In Ptol.* VI, 7, édition de Bâle, 1538, p. 316. 20-30) :

Οὕτως γὰρ ὁ λόγος μεταξὺ ἐστὶν ἔγγιστα τῶν δειχθέντων παρὰ Ἀρχιμήδους λόγων, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ κύκλου πρὸς τῆς διαμέτρου ἐλάττονα μὲν λόγον ἔχει ἢ τριπλασιεφέβδομου, μείζονα δὲ ἢ τριπλασίου, προσέτι καὶ ἡ ἐβδομηκοστομόνιος · καὶ εἰσὶν ὁ τριπλασιεφέβδομος λόγος ὁ τῶν $\bar{\gamma}$ η λδ πρὸς τὸ α, ὁ δὲ τριπλασίος πρὸς τοῖς $\bar{\gamma}$ η κζ πρὸς τὸ α. ὦν μεταξὺ ἐστὶν ὁ τῶν $\bar{\gamma}$ η λ πρὸς τὸ α λόγος.

Car ce rapport est à peu près au milieu des rapports démontrés par Archimède : que le périmètre du cercle, relativement au diamètre, d'une part a un rapport plus petit que le triple et un septième, d'autre part plus grand que le triple et encore en plus 10 soixante et onzièmes; et d'une part le rapport triple et un septième est celui des 3p 8' 34" relativement à 1, d'autre part le triple avec les 10 soixante et onzièmes, celui des 3p 8' 27" relativement à 1. Au milieu desquels est le rapport des 3p 8' 30" relativement à 1.

καὶ ἔτι ὡς δείχθεντος Ἀρχιμήδους ὅτι, τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου εἰς εὐθεῖαν ἐξαπλουμένης, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπ' αὐτῆς καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, διπλάσιόν ἐστιν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ αὐτοῦ κύκλου, καθάπερ καὶ ἡμεῖς ἐν τοῖς εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον ὑπομνήμασι παρεθέμεθα.

Et de plus, comme cela est démontré par Archimède, la circonférence du cercle étant déroulée en une droite, le rectangle contenu par elle et le rayon du cercle est double de la surface du cercle lui-même, de même aussi par nous, dans les commentaires que nous avons proposés sur le premier Livre.

¹ Wilbur Richard Knorr, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry* (Boston, Basel, Berlin, 1989). En particulier, 405, 410, 505, 813.

² Voir Thomas Little Heath, *A History of Greek Mathematics*, Réimpression Dover Inc, 2 vol. (New York, 1981), II, 526-8 et G.J. Toomer, « Theon of Alexandria » dans C.G. Gillispie (édit.), *Dictionary of Scientific Biography*, 18 vol. (New York, 1976), XIII, 321-5.

³ Observations de deux éclipses, une de soleil et une de lune en 364; références chronologiques dans la liste des consuls, étendues jusque 372 pour son édition des *Tables manuelles* de Ptolémée.

⁴ Voir Anne Tihon (édit.), 'Le Petit Commentaire' de *Théon d'Alexandrie aux Tables faciles de Ptolémée*, Studi e Testi n° 282 (Cité du Vatican, Biblioteca Apostolica Vaticana, 1978) et Joseph Mogenet (édit.) et Anne Tihon (commentaires), 'Le Grand Commentaire' de *Théon d'Alexandrie aux Tables faciles de Ptolémée*, Studi e Testi n° 315, (Cité du Vatican, Biblioteca Apostolica Vaticana, 1985).

⁵ Severus Sebokht s'en serait inspiré pour rédiger son travail (en syriaque, avant 660). Voir Toomer, « Theon of Alexandria », 323.

⁶ Claude Ptolémée (≈100-175) observe de 127 à 141. Il dédicace l'inscription de Canope pour l'an 10 du règne d'Antonin le Pieux en 146-7. Selon Toomer l'*Almageste* aurait été publiée après 150.

⁷ Voir aussi le fragment de commentaire anonyme datant du début du III^e siècle publié par Alexander Jones, *Ptolemy's First Commentator*, Transactions of the American Philosophical Society, 80, Part 7, (Philadelphia, 1990).

⁸ Mais pour la *Suda*, Pappus et Théon étaient contemporains. Dans un canon royal (ms. Leidensis 79, fol. 55^r) en face de Dioclétien on lit : « à cette époque vivait Pappus » et Rome [Adolphe Rome (édit.), *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, 3 vol., Studi e Testi n° 54, 72, 106, (Cité du Vatican,

Biblioteca Apostolica Vaticana, 1931, 1936, 1943), I, pp. X-XIII] identifie la prédiction d'une éclipse de soleil par Pappus à celle de 320. Par ailleurs Hypatie est intervenue au moins pour l'édition du Livre III du commentaire de Théon; v. *infra*.

⁹ Rome (édit.), II, p. XVII.

¹⁰ V. Adolphe Rome, « Sur l'authenticité du 5^e livre du Commentaire de Théon d'Alexandrie sur l'*Almageste* », *Bulletin de la Classe des Lettres et des Sciences morales et politiques, de l'Académie Royale de Belgique*, 5^e série, 39 (1953), 500-21.

¹¹ V. Anne Tihon, « Le Livre V retrouvé du *Commentaire à l'Almageste* de Théon d'Alexandrie », *L'antiquité classique* 56 (1987), 201-18.

¹² Comparer les formules : « Θέωνος ἀλεξανδρέως τῆς παρ' αὐτοῦ γεγενημένης ἐκδόσεως εἰς τὸ πρῶτον τῆς συντάξεως Πτολεμαίου ὑπόμνημα » et « Θέωνος ἀλεξανδρέως εἰς τὸ τρίτον τῆς μαθηματικῆς Πτολεμαίου συντάξεως ὑπόμνημα. Ἐκδόσεως παραναγνωσθείσης τῇ φιλοσόφῳ θυγατρὶ μου Ὑπατίᾳ ».

¹³ En faveur d'une action d'Hypatie limitée au Livre III, on peut invoquer le fait que ce Livre a disparu de tous les mss sauf L ; dans le sens inverse on peut faire remarquer que les méthodes de division sexagésimale aux Livres I et III sont différentes et que celle du Livre III, plus facile si l'on dispose d'une abaque, se retrouve également aux Livres IV et IX. Quant au style et aux idiotismes de la langue de Théon (usage du μ parasite dans la flexion de λαμβάνειν et de ses dérivés, usage pléonastique de ὥς ὅτι ...), l'étude partielle de Rome l'amènent à la conclusion que « la fille parle comme le père » (Rome (édit.), *Ibid.*, III, p. CXXV).

¹⁴ N. Halma (édit.), *Commentaires de Théon d'Alexandrie, sur le premier Livre de la Composition mathématique de Ptolémée*, Réimpression Blanchard (Paris, 1993).

¹⁵ V. Rome (édit.), *Ibid.*, I, pp. XXI-XXIV. Le plus ancien (et le meilleur), L (Laurentianus gr. 28. 18) date du IX^e siècle; il ne contient pas les Livres VII à XIII. Les plus récents datent du XVI^e. On connaît aussi deux versions latines du commentaire, l'une à partir de l'édition de Bâle, l'autre à partir d'un manuscrit désormais perdu.

¹⁶ J.L. Heiberg (édit.), *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia, Syntaxis Mathematica*, 2 vol. Bibliotheca scriptorum graecorum et romanorum Teubneriana (Leipzig, 1898, 1903).

¹⁷ Joseph Mogenet, *l'Introduction à l'Almageste*. Académie Royale de Belgique, Mémoires 51, fascicule 2, Bruxelles (1956).

¹⁸ Les plus anciens sont le Vaticanus gr. 1594 (IX^e) et le Marcianus gr. 313 (X^e); *l'Introduction* se trouve aussi (en l'état actuel) sans *l'Almageste* (Parisinus gr. 2396).

¹⁹ Tannery l'identifiait à Héliodore, à cause des observations astronomiques annexées dans les mss à la suite (non immédiate) de *l'Introduction*. L'idée avait déjà été émise par l'abbé Halma dans la préface à son édition de *l'Almageste*, 50.

²⁰ Knorr, *Textual Studies*, 155-211.

²¹ Heiberg (édit.), I, 10-14; commentaires de Théon, 334-80 Rome.

²² Heiberg, I, 14-16; commentaires de Théon, 381-400 Rome.

²³ Heiberg, I, 16-20; commentaires de Théon, 401-416 Rome.

²⁴ Heiberg, I, 20-1; commentaires de Théon, 417-421 Rome.

²⁵ Heiberg, I, 21-6; commentaires de Théon, 422-434 Rome.

²⁶ Certains de ces arguments sont repris dans Cléomède, *Théorie élémentaire*, Ch. 8, §8 pour la sphéricité de la terre; d'où il passe à celle du monde; la propriété géométrique devient : la sphère est capable d'englober toutes les figures dotées du même diamètre qu'elle !

²⁷ Ptolémée invoque les arguments dans l'ordre b1) - b3) - b2).

²⁸ Ptol. *Alm.*, 13, l. 16-20 Heiberg. Cf. Théon, 354, l. 19-355, l. 2 Rome. Le lecteur trouvera en annexe les extraits de l'*Almageste* et des commentaires qu'ils ont suscités et que je discute ici, ainsi que des traductions « de travail », sans aucune prétention littéraire ou stylistique.

²⁹ Voir annexe, texte 2.

³⁰ Pour Toomer, qui suit Crönert, Zénodore le mathématicien est celui que connut le philosophe épicurien Philonides, contemporain d'Apollonios, de Dyonisodore et de Dioclès; v. G.J. Toomer, « The Mathematician Zenodorus », *Greek, Roman and Byzantine Studies* 13 (1972), 177-92. Knorr place ces mathématiciens plus tôt, en liaison avec Dosithée. Voir Knorr, *The Ancient Tradition of Geometric Problems* (Boston, Basel, Berlin, 1986), 275-6.

³¹ Edité (de manière non critique) par Hultsch en appendice à la *Collection* de Pappus. Voir F. Hultsch (édit.), *Pappi alexandrini collectionis quae supersunt*. 3 vol. (Berlin, 1876-1878), III, 1138-65.

³² Prop. V. 11-17.

³³ Désignée par DC dans ce qui suit.

³⁴ Cf. annexe, textes 3, 5, 6, 8, 9.

³⁵ Pour Knorr, il s'agit d'une interpolation, pour mettre le texte de l'*Introduction* en accord avec celui de la *Mesure du cercle*, tel que nous le connaissons. Pour lui, la formulation qu'on y trouve (cercle = triangle...) n'est pas la forme originale du traité archimédien, laquelle devait être la forme "produit-rectangle"; voir *infra*, § II. C.

³⁶ Rome (édit.), II, 394, 5-398, 5. Voir annexe, texte 3.

³⁷ E. Hiller (édit.), *Theonis Smyrnaei Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*, Bibliotheca scriptorum graecorum et romanorum Teubneriana (Leipzig, 1878), 124, l. 7-127, l. 19.

³⁸ *In Aristotelis de Caelo commentaria* (CAG, Berlin, 1894), 549, l. 1-550, l. 4 Heiberg.

³⁹ Voir annexe, texte 4.

⁴⁰ Rome (édit.), I, 254, l. 1-260, l. 23.

⁴¹ Héron, *Métriques*, l. I, Prop. 37. *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*, 5 vol. Bibliotheca scriptorum graecorum et romanorum Teubneriana, Vol. III, H. Schöne (édit.), (Leipzig, 1903), 86, l. 22-25.

⁴² Voir annexe, texte 5.

⁴³ On suppose que l'aire $D [= (1/2) \text{ Rect. } (c, r)]$ est plus grande que le cercle, c désigne la circonférence du cercle, r son rayon.

⁴⁴ Voir Eucl. *Él.*, XII. 2. E.S. Stamatis (édit., post J.L. Heiberg), *Euclidis Elementa*. 4 vol. Bibliotheca scriptorum graecorum et romanorum Teubneriana (Leipzig, 1969, 1970), 1972, 1973), IV, 80, l. 13-82, l. 1.

⁴⁵ Archimède, *Mesure du Cercle*, Prop. 1, 2^e partie dans *Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii*, I-III. Bibliotheca scriptorum graecorum et romanorum Teubneriana (Stuttgart, 1972), I, 232, l. 2-234, l. 17 Heiberg.

⁴⁶ Comme indice d'une altération de DC, on peut, à la suite de Knorr, mentionner la variation de vocabulaire : là où chez Théon on retranche des segments (ἀποτμήματα ; chez Pappus : τμήματα) à partir du cercle, dans DC il s'agit de secteurs (τομείς), ce qui ne correspond pas à la terminologie classique.

⁴⁷ Voir annexe, texte 7.

⁴⁸ Que nous désignerons, à la suite de Knorr, par A*.

⁴⁹ Que nous désignerons par P*.

⁵⁰ Il faut reconnaître que Knorr a répondu à tout et en particulier à cette question : parce qu'Archimède disposait d'une version différente du Livre XII des *Éléments* dans laquelle les deux approximations du cercle étaient décrites dans l'équivalent de notre proposition XII. 2 (qui ne traite que du cas « inscrit »); il suffisait de faire allusion à ce résultat dans les deux cas de figures. Ce à quoi correspondraient les deux parties (cas inscrit — cas circonscrit) de l'argument d'ailleurs complètement symétrique chez Pappus.

⁵¹ V. *Archimedis*, III, 230, l. 27 - 232, l. 5 Heiberg.

⁵² Désigné par SC dans ce qui suit.

⁵³ On voit que lorsque Eutocius affirme qu'il n'y a pas de problèmes avec DC 1, il s'agit d'une remarque très pragmatique, relative à son auditoire ou lecteur, censé avoir déjà lu le commentaire à SC, et non d'un jugement absolu sur l'état du traité comme l'interprète Knorr.

⁵⁴ Mais qu'il faudrait rapporter à Qusta ibn Lûqâ selon Knorr; voir *Textual Studies*, Appendice III, 441-50.

⁵⁵ Traduit par Knorr, à partir du ms. Fatih 3414/1, f. 2v-3v., *Textual Studies*, 436-8.

⁵⁶ J'utilise ici le système d'indexation des différentes parties de la démonstration utilisé par Knorr; cette partie correspond à [m1] dans sa traduction. Voir *Textual Studies*, 437.

⁵⁷ Le lettrage est celui de DC 1.

⁵⁸ Il y a un problème dans les références de Knorr : la section [n] a disparu ! Voir le fac-similé, 456.

⁵⁹ Les notations sont celles de la figure de DC ; voir *supra*, § 2. a.

⁶⁰ Voir *Archimedis*, I, 38, l. 7-11 Heiberg.

⁶¹ *Ibid.*, 20, l. 10-16 Heiberg.

⁶² *Ibid.*, 20, l. 17-22, l. 27 Heiberg.

⁶³ Cf. les renvois de Pappus (*in Coll.* V, 3, I, 314, l. 8-11 Hultsch et annexe, texte 7) et de Théon d'Alexandrie (II, 363, l. 5-7 Rome et annexe, texte 6).

⁶⁴ Voir *Textual Studies*, III, 2, 407-410.

⁶⁵ Voir *Archimedis*, III, 26, l. 20-28, l. 14 Heiberg.

⁶⁶ Voir annexe, texte 6.

⁶⁷ Ce qu'on lit dans la proposition 6 de SC I (suspectée par Knorr) est moins détaillé et moins précis que ce qu'on trouve dans Pappus, mais plus que dans Théon. Voir le texte *supra*, § A, 5, b.

⁶⁸ Cf. ce que nous avons dit sur le « lemme » *supra*; qui plus est l'interpolation de la Prop. V. 12, à partir du commentaire à l'*Almageste*, dans la partie de la *Collection* qui nous intéresse (début du Livre V) est quasi certaine. Voir aussi V. 11 quasi identique à VIII. 22.

⁶⁹ Cf. Papp., *Comm. in Alm.* VI. 7, 254, l. 1-258, l. 19 Rome et Théon, *Comm. in Alm.* VI. 7, édition de Bâle, 1538, 317, l. 27-318, l. 23. Les textes 8 et 9 de l'annexe mettent en évidence un « état intermédiaire » de proximité textuelle entre Pappus et Théon.

⁷⁰ Archimède DC., Prop. 1, *Archimedis*, I, 232, l. 2-4 Heiberg.

⁷¹ D'ailleurs le titre ainsi proposé ne correspond pas au titre « habituel » : ἡ τοῦ κύκλου μέτρησις. v. Héron, *Métr.*, I. 26, 66, l. 6 Schöne. Dans le *Comm. in Alm.* VI, Pappus cite un *Sur le cercle*, mais ne lui rapporte explicitement que DC 3; pour DC 1 (forme "produit-rectangle"), il mentionne - de manière négative - la « collection archimédienne » (τὸ Ἀρχιμήδους σύνταγμα).

⁷² Archimède *Méth.*, prop. 2, 446, l. 10-12 Heiberg.

⁷³ Héron, *Métr.*, I. 26, 66, l. 27-30 Schöne.

⁷⁴ Théon de Smyrne, *Expositio*, 126, l. 8-12 Hiller. V. *infra*, § 3, b.

⁷⁵ Pappus, *Comm. in Alm.* VI, 7, 254, l. 1-256. l. 1 Rome; voir annexe, texte 8; *Coll. math.*, IV, p. 258, l. 17-19 Hultsch; *Ibid.*, V, 312, l. 18-20; 312, l. 25-314, l. 3 Hultsch; *Ibid.*, VIII, 1106, l. 10-15 Hultsch.

⁷⁶ Théon d'Alexandrie, *Comm. in Alm.* I, 3, 359, l. 14 - 360, l. 1 Rome; *Ibid.*, 360, l. 4-5; *Ibid.*, 362, l. 11-13; *Ibid.*, 395, l. 2 - 6. *Comm. in Alm.* VI, Ed. de Bâle, 1538, 316; voir annexe, texte 9.

⁷⁷ Zénodore (?) : dans Pappus, *Coll.* V, v. *supra*; dans Théon Alex., *Comm. in Alm.* I, v. *supra*; dans l'*Introduction anonyme*, v. *infra*, n. 77. Pour Ptolémée, v. *Alm.*, VI, 514, l. 5-6 Heiberg et annexe, texte 4, § b.

⁷⁸ G. Friedlein (édit.), *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum Commentarii*, Bibliotheca scriptorum graecorum et romanorum Teubneriana (Leipzig, 1873), 423, l. 3-5.

⁷⁹ Eutocius, *Comm. in DC*, 230, l. 8-10 Heiberg n'énonce pas vraiment *DC* 1 mais suppose bien le format "cercle = triangle".

⁸⁰ *Introduction anonyme*, 1158, l. 18-19 Hultsch (Zénodore ?).

⁸¹ J. L. Heiberg (édit.), *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*, Bibliotheca scriptorum graecorum et romanorum Teubneriana, IV, (Leipzig, 1912), 134, l. 7-11.

⁸² Simplicius, in *Aristotelis de Caelo* (298 a 15), 549, l. 13-15 Heiberg.

⁸³ On imagine assez mal la construction d'un cercle double quoique cela soit aisé à partir de *Él.* XII. 2.

⁸⁴ Sous cette forme on maintient de surcroît l'énonciation universelle qui paraît être de règle chez Archimède pour ce genre de résultats.

⁸⁵ Théon de Smyrne, *Expositio*, 126, l. 8 - 12 Hiller.

⁸⁶ *Textual Studies*, p. 493 n. 14.

⁸⁷ En particulier *SC* I, 33, 34, 34 porisme, 35, 39 porisme, 42-43, 44.

⁸⁸ Papp. *Coll.*, VIII, 1106, l. 10-15 Hultsch.

⁸⁹ De tels présupposés transparaissent à plusieurs endroits dans les analyses de Knorr.

⁹⁰ V. les préfaces des L. I et II des *Métriqes*, 2, l. 12-4, l. 4 et 92, l. 8-10 Schöne.

⁹¹ Bien entendu notre collègue avance bien d'autres arguments que je n'ai pas discutés ici; mais la formulation de la proposition 1 de *DC* joue un rôle particulièrement important dans son étude.

⁹² V. Héron, *Métr.*, I. 26, 66, l. 6-9 Schöne; cf. *Geometrica*, 386, l. 16-22 Heiberg.

⁹³ Archimède *DC*, Prop. 2, 234, l. 19-20 Heiberg.

⁹⁴ Voir annexe, texte 3.

⁹⁵ Rappelons qu'il rejette le texte de Théon de Smyrne comme inauthentique.

⁹⁶ Archimède, *Arénaire*, II, 230, l. 4-6 Heiberg.

⁹⁷ Voir Héron, *Métr.*, I. 26, 66, l. 13- 27 Schöne.

⁹⁸ Voir annexe, texte 4, § a.

⁹⁹ Voir annexe, textes 8 et 9.

¹⁰⁰ Eutocius, *comm. in DC*, 228, l. 21-24 Heiberg.

¹⁰¹ Simplicius, *comm. in Aristotelis de Caelo*, 413, l. 31 et 549, l. 11-12 Heiberg.

¹⁰² Et inclus sous forme de porisme dans la version arabe.

¹⁰³ Ce résultat est utilisé par Héron dans ses *Mécaniques*, sous la forme : « et si le diamètre est double, le demi-périmètre sera double, ainsi que l'a démontré Archimède » ! *Méch.* I, 4, L. Nix (édit.), *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*, 5 vol. Bibliotheca scriptorum graecorum et romanorum Teubneriana, II (Leipzig, 1900), 10-11. V. aussi Héron d'Alexandrie, *Les Mécaniques ou l'élévateur des corps lourds*. Trad. franç. B. Carra de Vaux. Réimpr. Belles-Lettres, (Paris, 1988) avec une préface de D. Hill et une étude de A. G. Drachmann; voir

en particulier p. 65. Encore un exemple de la manière (plutôt approximative) dont les Anciens citent un auteur antérieur.

¹⁰⁴ Archimède a démontré le contraire : que 3 fois le diamètre et une 7^e partie est plus grand que le périmètre du cercle!

¹⁰⁵ Dans ce texte, comme dans la plupart des textes mathématiques grecs anciens, il n'y a pas de notation univoque pour les fractions ou parts [V. B. Vitrac, « Logistique et fractions dans le monde hellénistique » dans P. Benoit, K. Chemla, J. Ritter (édit.), *Histoire de fractions, fractions d'histoire, Science Networks 10* (Basel, Boston, Berlin, 1992), 149-72]. Dans mes traductions j'ai essayé de respecter les variations du texte grec, en particulier la notation alphabétique du système des parts (< désigne la moitié ou 1/2; je l'ai noté 2'. De même δ' désigne le quart ou 1/4; je l'ai noté 4'...)