‘Umar al Khayyâm et l'anthyphérèse :

Étude du deuxième Livre de son commentaire

« *Sur certaines prémisses problématiques du Livre d'Euclide* »

Bernard VITRAC[1]

Introduction

Après la publication de mon article sur les antécédents grecs du troisième Livre du *Commentaire* de ‘Umar al Khayyâm consacré à la notion de « rapport composé de rapports » dans la précédente livraison de *Farhang*[2], plusieurs lecteurs et amis m'ont demandé une analyse analogue du deuxième Livre qui porte au demeurant sur un sujet connexe, à savoir les notions de « rapport » et de « proportionnalité » et qui contient la critique de l'exposé euclidien, tout particulièrement celle de certains principes du Livre V des *Éléments*[3]. J'ai hésité un certain temps avant de répondre positivement à leur demande car les données concernant les deux problématiques (rapport et proportionnalité d'une part — rapport composé de rapports d'autre part) sont tout à fait différentes, notamment la situation textuelle, et ce, dès le texte d'Euclide lui-même. Contrairement à la problématique Définition {VI. 5}, les Définitions V. 3, 4, 5, 6, 7 existent dans tous les manuscrits grecs et dans les traductions médiévales; elles ne soulèvent guère de doutes quant à leur authenticité sauf, peut-être, celle de la Définition V. 3 ("rapport")[4]. Le problème ici tient plutôt à leur interprétation et aux ajouts qu'on leur a accolés. Mais surtout, alors qu'avec Eutocius nous disposions d'un terme de comparaison pour le travail de Khayyâm dans son Livre III, rien de tel n'existe dans la tradition grecque pour les Définitions du Livre V.

C'est un fait trop rarement souligné mais, alors que ledit Livre a suscité une importante littérature exégétique dans la tradition médiévale puis renaissante, tout particulièrement chez les mathématiciens des Pays d'Islam[5], la tradition grecque, pour sa part, est restée à peu près

---

[1] CNRS, UMR 8567, Centre Louis Gernet, Paris.

[2] V. [Vitrac, 2000]; les références complètes des travaux cités sont indiquées dans la bibliographie insérée à la fin de cet article. Dans les notes infrapaginales, j'utilise l'abréviation constituée du nom de l'auteur et de l'année de publication quand il n'y a pas d'ambiguïté et sauf mention expresse du contraire (pour certaines éditions).

[3] Je remercie entre autres le Docteur Jafar Aghayani-Chavoshi pour son infatigable (mais amicale) insistance pour que le présent travail aboutisse.

[4] Sur ce point, v. [Eucl., *Él.,* II, 1994], p. 58, en particulier n. 9.

[5] On peut mentionner les monographies consacrées à cette question par : Ahmad ibn Yûsuf (trad. latine par Gérard de Crémone), v. [Schrader, 1961]; al-Mâhânî (édition et traduction française dans [Vahabzadeh, 1997]); al-Gayyânî (v. [Plooij, 1950] et [Vahabzadeh, 1997]. Il faut leur ajouter les commentaires à la totalité des *Éléments,* comme celui d'an-Nayrîzî. Sont conservés seulement les commentaires aux six premiers Livres mais la traduction latine, sans doute due à Gérard de Crémone, porte sur les dix premiers Livres; dans ce qui suit j'utilise l'abréviation [*Anar.*]. D'autres auteurs ont abordé la question dans des monographies consacrées aux principes des *Éléments* d'Euclide, par exemple celle d'Ibn al-Haytham (v. [Sude, 1974] et bien entendu le texte de ‘Umar al Khayyâm lui-même (v. [Djebbar, 1997 = 2002], [Vahabzadeh, 1999]). Dans [Sezgin, 1974] sont en outre mentionnés un travail d'al-Gauharî (p. 105, N°2a et p. 244, N°1; v. [De Young, 1997]) et le commentaire d'al-Fârâbî sur les obscurités des introductions des Livres I et V d'Euclide (p. 106, N°11 et p. 296, N°2; conservé en traduction hébraïque; v. [Freudenthal, 1988]). Il n'y a guère de doute que d'autres auteurs d'ouvrages sur les

muette sur ce point. Nous n'avons l'écho d'aucune critique des définitions eudoxo-euclidiennes (Df. V. 5, 7), d'aucun commentaire spécifiquement consacré à cette question. La comparaison avec le cas du postulat des parallèles ou la définition des rapports composés de rapports — les deux autres thématiques de Khayyâm —, mais aussi avec la théorie euclidienne de l'irrationalité du Livre X, est donc tout à fait frappante et l'on ne peut que s'étonner de cette différence de réception. Ce silence n'est peut-être qu'une illusion, causée par l'état lacunaire de nos sources et dans le cas de l'Antiquité les arguments *a silentio* ne doivent être utilisés qu'avec la plus extrême circonspection.

Il n'empêche que si l'on examine les variantes textuelles que présentent les différentes versions des *Éléments* qui nous sont parvenues, y compris celles des traductions médiévales, lesquelles sont parfois très importantes et très révélatrices[6], nous ne trouvons rien de tel pour les célèbres Définitions V. 5, 7. Ces mêmes énoncés sont également reproduits (avec de faibles variantes mais sans commentaires particuliers) dans la collection attribuée à Héron d'Alexandrie (I^{e} siècle de notre ère)[7]. Enfin nous savons que les commentaires aujourd'hui perdus ont souvent laissé des traces dans les abondantes scholies (annotations marginales) que contiennent les manuscrits des *Éléments*. Celles qui portent sur le Livre V sont assez peu nombreuses; certaines sont intéressantes, en particulier pour les problèmes de terminologie et quant à la confrontation Euclide / Nicomaque pour la description des rapports[8]. Mais aucune ne mentionne quoi que ce soit concernant d'éventuelles difficultés liées aux Définitions 5, 7. Il me semble qu'il y a donc une notable différence d'attitude entre les traditions ancienne et médiévale. J'en ai proposé ailleurs[9] une explication (partielle), essentiellement textuelle qui ne contredit cependant pas ce qui précède dans la mesure où ma reconstruction fait jouer un rôle important, non pas aux Df. V. 5, 7, mais aux Df. V. 3-4, 8 et à leurs ajouts[10].

Quoi qu'il en soit, le silence des sources grecques ne m'a guère encouragé à entreprendre ce travail. Si j'ajoute que le Livre II du *Commentaire* de Khayyâm me paraît globalement satisfaisant du point de vue mathématique, qu'il ne semble pas poser de délicats problèmes d'interprétation — à la différence des deux autres Livres —, on peut même

---

difficultés dans le Livre d'Euclide aient consacré quelques pages aux Définitions du L. V. La liste ci-dessus est donc selon toute vraisemblance incomplète.

[6] Sur ce point je me permets de renvoyer à l'important article [Knorr, 1996] et à mes récents travaux, publiés ou en cours de publication : [Eucl., *Él.,* III, 1998], notice *Sur les problèmes textuels du Livre X,* pp. 381-399, [Djebbar, Rommevaux, Vitrac, 2001], [Vitrac, B., 2001] et [Eucl., *Él.,* IV, 2001], notice *Sur les problèmes textuels des Livres stéréométriques,* pp. 32-71.

[7] Traditionnellement intitulée *Definitiones* ; v. [Hero, IV], pp. 2-169. L'authenticité héronienne de la totalité du recueil ne va pas de soi, mais on estime qu'une partie (en particulier les N°1-129) dérive certainement des commentaires que Héron avait consacrés aux *Éléments*. Pour les Df. Eucl. V. 5, 7, v. en particulier les N° 124-125, p. 78, l. 21—p. 82, l. 14 et Annexes, I. Le lecteur comparera les *Deff.* N°120, 123, 125.1 (qui rapportent et commentent les Df. euclidiennes V. 1, 4, 9 avec les *Deff.* N°124ab, 125.2a, 127 relatives aux Df. eucl. V. 5, 6, 7, 3. Des Df. eudoxo-euclidiennes, seule la 7 bénéficie d'un petit commentaire (*Deff.* N°125.2bc) au demeurant très anodin.

[8] V. *infra,* Annexes II.

[9] Dans [Vitrac, 1996].

[10] Je la résume *infra,* I, §§ 3-4.

raisonnablement douter qu'il faille encore revenir sur ce sujet. Finalement, lorsqu'on examine la littérature secondaire consacrée à la question, on voit que les problèmes sont essentiellement d'ordre contextuel et portent sur :

• les relations entre al Khayyâm et ses prédécesseurs, notamment avec les mathématiciens des Pays d'Islam qui, avant lui, ont discuté la théorie euclidienne des rapports et des proportions. C'est donc l'originalité du mathématicien persan qu'on interroge alors, la mesure de son apport personnel, son inscription dans une tradition antérieure. Pour certains historiens, cette tradition remonte même aux anciens Grecs lesquels, avant, en concurrence avec, ou après, la théorie eudoxo-euclidienne du Livre V, auraient développé des traitements alternatifs de la proportionnalité et en particulier une théorie anthyphérétique des proportions.

• Les motivations du Commentateur qui, au-delà de son insatisfaction du traitement euclidien, le portent à préférer la démarche anthyphérétique. Dans ce cas, ce sont les liens entre les Livres II et III que l'on cherche à circonscrire, ce qu'ils révèlent de l'évolution historique du concept de « rapport », de la différence qu'ils manifestent entre les approches ancienne et médiévale.

Ce sont donc ces points que je me propose de reprendre, après avoir résumé l'état des deux textes en cause dans cette affaire : les premières Définitions du Livre V des *Éléments,* le Livre II du *Commentaire*.

I. Les premières Définitions du Livre V d'Euclide[11]

1. Les Définitions V. 1-10 se répartissent assez naturellement en quatre groupes :

• Le premier (Df. V. 1-2) introduit deux cas particuliers très simples, mais fondamentaux, de rapport, à savoir les relations « être partie de … », « être multiple de … », réciproques l'une de l'autre. Autrement dit « être partie de … » signifie « être sous-multiple de … », ce qui définit un sens de "partie" (μέρος) plus étroit que celui qui est utilisé dans les quatre premiers Livres, c'est-à-dire « être inclus dans … ».

• Le deuxième groupe introduit la notion-clé de "rapport" (λόγος) en en donnant d'abord une description très générale (Df. V. 3) mais fondamentale : ce n'est pas un *objet* mathématique, comme le nombre ou la grandeur (ou la figure …) mais une *relation* entre objets. L'autre élément du groupe, la Df. V. 4, précise quelles grandeurs sont dites « avoir un rapport mutuel ». Elle est opératoire et donc, à première vue, beaucoup plus claire que la précédente. Dans plusieurs manuscrits grecs on a inséré une définition de la "proportion" (ἀναλογία) entre les Définitions V. 3 et 4; je la noterai Df. V. 3bis :

« Et une proportion est l'identité des rapports »[12],

[11] Pour le texte grec (en particulier pour la numérotation) je me réfère, sauf mention explicite du contraire, à celui édité par J. L. Heiberg et révisé par E. S. Stamatis, [*EHS*]. Cette première partie résume les commentaires que j'ai proposés à différentes reprises. Pour davantage de détails, v. [Vitrac., 1993], en particulier pp. 1-28, 82-119, 146-224; [Eucl., *Él.,* II, 1994], en particulier pp. 13-19, 35-49, 56-63, 127-141, 507-508, 532-534 et [Vitrac, 1996].

que l'on trouve également dans la version gréco-latine[13] ainsi que dans la traduction arabe attribuée à Ishâq-Thâbit[14] et les traductions arabo-latines d'Adélard de Bath et de Gérard de Crémone[15], entre autres, mais sous la forme :

« Et une proportion est la similitude des rapports »[16].

Cette place d'insertion fait d'ailleurs problème puisque la Df. V. 3bis sépare ainsi les deux assertions relatives au rapport[17].

• Les célèbres Définitions V. 5 (avec 6) et 7 disent quand quatre grandeurs « sont dans le même rapport » (ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἶναι) — on dit alors aussi qu'elles sont « en proportion » (ἀνάλογον) — ou quand la première, relativement à la deuxième, « a un rapport plus grand » (μείζονα λόγον ἔχειν) que celui de la troisième à la quatrième. Dans les deux cas, on compare simultanément la série des multiples de la première grandeur à celle des multiples de la deuxième et la série des mêmes (que la 1e) multiples de la troisième à celle des mêmes (que la 2e) multiples de la quatrième[18]. Ces Définitions sont attribuées à Eudoxe de Cnide et souvent comparées — abusivement — à la construction des nombres réels par la méthode des coupures de R. Dedekind[19]. Ce sont elles que les Médiévaux ont eues du mal à recevoir.

• Enfin le quatrième groupe est composé de la pseudo-Définition V. 8 [en fait elle ne définit rien mais glose le terme "proportion" (ἀναλογία)] et des Définitions V. 9-10 introduisant les notions de « rapport doublé (resp. triplé) d'un rapport », ce qui suppose implicitement une situation de « proportion continue »[20].

2. Chaque groupe pose des problèmes qu'il n'est pas possible de passer ici en revue de manière exhaustive. Je me contenterai de relever quelques points particulièrement importants :

• Ces Définitions concernent les *grandeurs* (μεγέθη); le terme n'est pas défini dans les *Éléments* et est d'ailleurs un peu ambigu. Dans les textes grecs, il a parfois le sens physique de

---

[12] V. [*EHS,* II], p. 1, l. 7 et p. 2, l. 8 (apparat critique). Cette Df. n'existe pas dans le texte proprement dit du célèbre manuscrit *Vatic. gr*. 190 (***P*** dans le conspectus siglorum de Heiberg), mais seulement en marge par une main tardive. Dans d'autres manuscrits, elle est insérée entre les Df. 7 et 8 avec la formulation « Et une proportion est la similitude des rapports » (je la noterai Df. V. 7bis); dans le *Parisin. gr*. 2466 on trouve les deux ajouts 3bis et 7bis !

[13] V. [Busard, 1987], p. 109, l. 7.

[14] V. [Engroff, 1980], p. 61, l. 13; p. 166, l. 12. La Df. supplémentaire existe aussi dans les manuscrits Téhéran Malik 3586 (AH 343 = 954-955), Pétersbourg, C. 2145 (AH 584 = 1188), Rabat, Hasaniyya 1101 (AH 683 =1284) et Rabat, Hasaniyya 53. 17 (AH 1016 = 1605) non utilisés par Engroff, ainsi que dans les recensions d'Ibn Sinâ et d'at-Tûsî. Je dois ces informations à la courtoisie d'A. Djebbar et je l'en remercie. Nous préparons ensemble un travail dans lequel nous revenons sur la comparaison des Df. des Livres V-VI dans les traditions grecque et arabe.

[15] V. resp. [Busard, 1983], p. 145, l. 9 et [Busard, 1984], p. 117, l. 21.

[16] Autrement dit avec le libellé de la Df. V. 7bis, mais à la place de la Df. V. 3bis.

[17] Sauf dans l'un des manuscrits arabes, Uppsala 321, dans lequel elle est insérée, plus logiquement, entre les Df. V. 4 et 5 (v. [Engroff, 1980], p. 278). Il s'agit sans doute d'une amélioration ultérieure pour remédier à l'inconvénient signalé.

[18] V. [Eucl., *Él.,* II, 1994], pp. 41-47.

[19] *Ibid.,* pp. 548-551.

[20] C'est sans doute ce qui a provoqué l'insertion de ce que j'ai appelé (*supra,* n. 12) la Df. V. 7bis.

« grandeur sensible » : la taille d'un objet, le poids, le temps, la vitesse … ou le sens mathématique de « grandeur abstraite[21] » : les grandeurs géométriques (ligne, surface, volume) mais aussi, du moins chez Euclide, les angles rectilignes. La seule chose qui soit claire chez les différents auteurs[22], c'est que la grandeur représente la quantité *continue,* c'est-à-dire *divisible en parties indéfiniment divisibles,* par opposition à la quantité discrète, c'est-à-dire *non indéfiniment divisible,* dont fait partie le nombre entier.

• Par conséquent un Grec, à la différence de certains Médiévaux, ne considérera pas le nombre comme une espèce de la grandeur. Aristote subsumera ces deux "genres" dans la catégorie de la quantité (τὸ ποσόν), mais le terme n'apparaît guère dans les textes mathématiques à l'exception de la tradition néo-pythagoricienne de Nicomaque de Gérase. Cette opposition fondamentale "grandeur" (μέγεθος) / "nombre entier[23]" (ἀριθμός) explique qu'il y a deux exposés de théorie des proportions chez Euclide, l'un au Livre V pour les grandeurs, l'autre au Livre VII pour les nombres dans lequel les relations « être partie de … », « être multiple de … » seront à nouveau introduites (Df. VII. 3 et 5) de manière analogue[24].

• Autre trait curieux aux yeux d'un Moderne mais très important : la nature *relationnelle* du rapport. Précisément c'est *la* relation (ἡ σχέσις) qu'il y a entre deux grandeurs, à condition qu'elles soient de même genre, par exemple deux lignes, deux surfaces, deux volumes ou deux angles, quand on les considère du point de vue de la taille (κατὰ πηλικότητα). On retrouve ici le mot un peu mystérieux "πηλικότης" dont j'ai beaucoup parlé à propos d'Eutocius[25], qui est une sorte de synonyme de "μέγεθος", et qui a sans doute été utilisé précisément pour éviter de dire « rapport de deux grandeurs quant à la grandeur »[26]. Le texte grec parle en fait de « *la* relation *telle ou telle* » (ἡ *ποια* σχέσις) et, comme nous le verrons, la présence quelque peu paradoxale de l'adjectif indéfini "ποια" suscitera d'abondants commentaires de la

---

[21] Au sens où on utilise le mot "μέγεθος" quand elle est considérée indépendamment de son espèce et donc de sa "dimension". C'est obligatoire dans la théorie des proportions dès que l'on considère deux couples d'espèces différentes, chacun composé de grandeurs homogènes, comme par exemple lorsqu'on compare le rapport de deux droites avec celui de deux surfaces; le terme générique le plus simple en grec est alors "grandeur".

[22] V. par exemple, Annexes, I, *Deff.* N°119a.

[23] Chez les Anciens — en particulier chez Euclide — le mot "nombre" est réservé à ce que nous appelons aujourd'hui "entier naturel" car c'est le résultat d'un dénombrement d'"unités" ou, pour le dire autrement, un nombre cardinal. Il est d'ailleurs nécessairement supérieur ou égal à 2, sinon on ne dénombre pas ! L'unité est le *principe* du nombre mais n'est pas elle-même un nombre. Il n'y a pas non plus de nombres fractionnaires ou rationnels positifs, contrairement à ce que l'on dit souvent. Les mathématiciens utilisent les rapports d'entiers définis comme des *relations* : non pas la fraction 4 / 3, mais le rapport du nombre 4 au nombre 3 (celui-ci est appelé *épitrite*). Chez les calculateurs, on trouve un système de parts (la moitié, le tiers, les deux-tiers, le quart…) sans doute d'inspiration égyptienne qui ne correspond que très imparfaitement avec nos fractions à "numérateur 1" (1/2, 1/3, 2/3, 1/4, (1/2) + (1/4) pour 3/4, …) puisqu'en réalité il n'y a ni numérateur, ni dénominateur.

[24] Sur ce double traitement de la proportionnalité chez Euclide v. [Vitrac, 1993], pp. 13-28, pp. 200-224 ou [Eucl., *Él.,* II, 1994], pp. 507-508.

[25] V. [Vitrac, 2000], pp. 68-82.

[26] Les commentateurs, gênés par cette quasi synonymie, utilisent une distinction de Nicomaque : "μέγεθος" et "πηλικότης" s'opposent comme les quantités continues *indéterminée* et *déterminée*. V. [Vitrac, 2000], pp. 68-69 et, par exemple, la scholie V, N°13, [*EHS,* V, 2], p. 215, l. 12-15 ou Annexes, II, texte 2, § e. Les traducteurs arabes ont également été embarrassés par la proximité des deux termes; v. [Vitrac, 2000], pp. 67-68, n. 55.

part des Médiévaux. Il faut sans doute comprendre que deux grandeurs étant données, il y a une relation quantitative déterminée — d'où l'article défini "la" — et que celle-ci est d'une *certaine* qualité — d'où l'indéfini "ποια" (telle ou telle)[27].

• Certains ont considéré que la Définition V. 4 faisait double emploi avec la spécification « entre deux grandeurs *homogènes* » de la Définition précédente et ont donc considéré que l'une ou l'autre devait être inauthentique (généralement ils ont préféré conserver la Df. V. 4).

Quoi qu'il en soit, le rapprochement entre le *definiens* de la Df. V. 4 et la notion de grandeurs homogènes est ancien puisque, selon an-Nayrîzî, c'est de cette manière que Héron interprétait notre présente Définition[28]. Le même an-Nayrîzî ajoute d'ailleurs à la suite ce qu'il présente comme une Définition euclidienne des *quantités homogènes,* sans doute une interpolation provoquée par la remarque de Héron[29]. On n'en trouve pas trace dans le grec et une Définition des grandeurs homogènes suppose auparavant une définition de la grandeur et devrait être placée, avec celle-ci, en tête des Définitions du Livre V. Le commentateur arabe ajoute qu'Archimède (Asamithes) appelle ces quantités « celles qui sont mutuellement comparables », une évidente allusion au cinquième postulat (appelé aussi axiome d'Archimède) du traité *Sur la sphère et le cylindre*[30].

D'autres solutions ont été proposées, par exemple que la distinction des Df. V. 3-4 fait (implicitement) allusion à la distinction des grandeurs commensurables — objet de la Df. V. 3 — et des grandeurs incommensurables — objet de la Df. V. 4[31]. Cette lecture suppose une interprétation très particulière (et sans doute inadéquate) de la Définition V. 3 et en particulier de l'adjectif indéfini "ποια" dont j'ai déjà parlé : celui-ci constituerait un renvoi aux 10 classes de rapports numériques définies par Nicomaque[32] que l'on peut sans doute appliquer aussi aux grandeurs commensurables (puisque leur rapport mutuel est celui d'un nombre à un nombre d'après X. 5), mais pas aux incommensurables.

3. Selon la reconstruction que je propose, une des raisons de l'insatisfaction que les Médiévaux ont éprouvée à l'égard des Définitions euclidiennes est d'ordre textuel, ce qui se manifeste, dans les versions qui nous sont parvenues, par la présence des Définitions V. 3bis,

---

[27] A cet égard, la traduction de Heath (« *a certain* relation ») n'est pas très satisfaisante.

[28] [*Anar.*], p. 162, l. 13-19 : « C'est pourquoi Héron a dit, des choses dont il est possible, quand elles sont multipliées, que les unes soient plus grandes que les autres : "il (Euclide) a voulu qu'elles soient d'un seul genre. Les lignes, en effet, même multipliées à l'infini, ne seront cependant jamais plus grandes qu'une surface; et pareillement pour les choses qui ne sont pas homogènes. Sont "homogènes" les espèces dans lesquelles il est possible de comparer une chose à une autre chose, comme une ligne à une ligne, un angle à un angle, un solide à un solide" ».

[29] *Ibid.,* l. 20-22 : « Euclide a dit (Dixit Euclides : Des quantités sont dites "homogènes" (*quantitates dicuntur homogenee*), celles pour lesquelles — ayant été multipliées — il est possible que certains de leurs multiples soient plus grands que d'autres ».

[30] V. [Arch., I], p. 11, l. 16-20.

[31] V. scholie V, N°14, [*EHS,* V, 2], p. 215, l. 18—p. 216, l. 9 (ou Annexes, II, texte 3, § d) et scholie V, N°22, *Ibid.,* p. 218, l. 1-9.

[32] V. [Nic. Ar.], L. I, Ch. XVII-XXIII et L. II, Ch. I-V, pp. 44, l. 8—p. 82, l. 9; [Bertier, 1978], pp. 78-101. V. aussi scholie V, N°13, [*EHS,* V, 2], p. 215, l. 16-17 (ou Annexes, II, texte 2, § f) et [Eucl., *Él.,* II, 1994], pp. 483-487.

V. 7bis, V. 8. Leur insertion a été motivée par la volonté d'introduire et de définir le terme "proportion" (ἀναλογία) originellement absent des Définitions liminaires du Livre V. Celui-ci utilisait seulement des formulations du premier ordre : « avoir un rapport » [(λόγος); Df. V. 4], « être dans le même rapport » ou « en proportion » [(ἀνάλογον); Df. V. 6)], … , faisant intervenir l'objet "grandeur" plutôt que de "substantifier" les relations (objet de deuxième ordre), et *a fortiori* les relations de relations (troisième ordre)[33]. De ce fait l'Auteur des *Éléments* n'introduisait pas la notion de "proportion" — au sens d'une identité ou d'une similitude de rapports[34], donc un objet de troisième ordre — alors que c'est un concept-clé de l'épistémologie platonicienne. La comparaison avec la tradition néo-pythagoricienne (Théon de Smyrne, Nicomaque de Gérase, Jamblique de Chalchis), mais aussi avec Aristote et Héron[35], suggère fortement que l'absence d'une Définition de l'"ἀναλογία" a entraîné l'insertion d'un commentaire marginal, sans doute en relation avec la Définition V. 9, lequel commentaire mentionnait (**i**) le fait qu'une proportion est une identité ou une similitude de rapports; (**ii**) qu'elle peut être continue ou disjointe; (**iii**) qu'elle comporte au moins trois termes dans le premier cas, quatre dans le second. Cet ajout a été ensuite disloqué et (**i**) est devenu la Df. supplémentaire V. 3bis ou V. 7bis selon les versions, (**iii**) est à l'origine de la pseudo-Définition V. 8, (**ii**) n'a pas laissé de trace dans la tradition grecque des *Éléments* mais n'est peut-être pas étranger à l'état du texte plutôt curieux de la version arabo-latine adélardienne[36].

4. Cette très plausible reconstruction explique au moins partiellement la différence que j'ai relevée, en commençant, entre traditions grecque et médiévale : les ajouts grecs aux premières Définitions du Livre V témoignent d'une volonté de combler ce qui a été perçue comme une lacune terminologique, et ce, sans doute, à cause des divergences lexicales qui existent entre Euclide et la tradition néo-pythagoricienne. Au départ il ne s'agit pas vraiment d'une incompréhension des Définitions V. 4, 5, 6, 7, d'où l'absence de commentaires spécifiques. La dislocation de l'ajout initial que je postule, et en conséquence, l'insertion, avant la Df. V. 4, d'une définition de la proportion n'a peut-être été qu'une initiative de « logique éditoriale », mais elle a certainement été lourde de conséquences pour la compréhension ultérieure de la Df. V. 5. Le statut de Définition de celle-ci — comme on le voit chez Khayyâm lui-même[37] — est devenu difficile à saisir, d'autant que son libellé est long (comme celui de l'énoncé d'un théorème) et complexe. Or cette altération du texte a été consommée avant la transmission du

---

[33] Ce dont ne se privent ni les auteurs néo-pythagoriciens comme Nicomaque (v. *ibid.*, pp. 98-100), ni les scholiastes (v. la scholie V, N°1, [*EHS,* V, 2], p. 211, l. 9, l. 14-19, p. 212, l. 5-6 (ou Annexes, II, texte 1, §§ cd) et la scholie V, N°17, *ibid.,* p. 216, l. 20-24.

[34] Euclide utilise le terme "ἀναλογία" seulement dans l'expression composée « τεταργμένη ἀναλογία » (« proportion perturbée », qui n'est pas à proprement parler une proportion; v. Df. V. 18) et, dans les Livres arithmétiques, quand il s'agit d'une proportion continue dans un rapport spécifié. V. [Vitrac, 1996], en particulier pp. 101-104.

[35] *Ibid.,* pp. 104-110. Cf. Annexes, I, *Deff.,* N°124c, 127b.

[36] *Ibid.,* pp. 112-114.

[37] V. *infra,* II, § 5.

texte aux mathématiciens des Pays d'Islam car toutes les traductions possèdent les ajouts en question.

5. Ce scénario d'histoire textuelle n'explique que partiellement le phénomène car, après tout, rien n'empêchait les Médiévaux de faire le même raisonnement que celui que je viens de présenter[38]. D'autres facteurs ont donc dû jouer un rôle[39] :

• Éliminer les ajouts — peut-être faut-il leur adjoindre la Définition V. 3 — revenait à ne garder en tête du Livre V pour l'essentiel que des énoncés du "premier ordre" (Df. V. 1, 2, 3 (?), 4, 5, 6, 7, 9, 10). Mais les Médiévaux, surtout les commentateurs, n'ont pas les mêmes préventions que les auteurs hellénistiques quant aux affirmations métamathématiques. Le développement de la dimension livresque des mathématiques, dès les débuts de l'ère chrétienne, y est sans doute pour quelque chose. Leur défiance vis-à-vis d'énoncés comme les Définitions V. 3bis, V. 7bis, V. 8 ne s'est guère manifestée.

• La manipulation des rapports, fractions et autres proportions que les Médiévaux avaient pratiquée sans doute bien avant de rencontrer le texte d'Euclide ne les incitait peut-être pas à reconnaître dans les définitions V. 3, 5-7 les notions qui leur étaient familières.

• Tout dépend aussi de la destination pédagogique qu'ils reconnaissaient aux *Éléments*. A quel lecteur est adressé le Livre V ? Certainement pas aux débutants en mathématiques !

Bref, plusieurs éléments, dont certains d'ordre textuel, ont concouru au même résultat : les Définitions euclidiennes du rapport et de la proportionnalité n'ont guère satisfait la grande majorité des savants médiévaux.

II. Le deuxième Livre du *Commentaire* de ‘Umar al Khayyâm

1. Le deuxième Livre de Khayyâm se divise en trois parties :

• Le commentaire critique des Définitions euclidiennes V. 3, 4; 3bis, 5, 7[40].

• Les définitions de la proportionnalité et de « avoir un rapport plus grand » au sens *véritable,* (c'est-à-dire au sens de Khayyâm), par opposition au sens euclidien (dit "connu" [Dj., 2001] ou "usuel" [Vahab., 1999])[41]. Khayyâm distingue le cas où les rapports sont numériques de celui où ils ne le sont pas (cas dit « de type géométrique »).

• Les preuves d'équivalence des deux systèmes de Définitions :

A. Les prémisses, constituées de la règle de la grandeur quatrième proportionnelle et de la Proposition X. 1 des *Éléments* d'Euclide[42].

---

[38] D'ailleurs Euclide a aussi eu ses défenseurs, par exemple, al-Gayyânî; v. [Eucl., *Él.,* II, 1994], pp. 510-511, 543-545 et [Vitrac, 1996], pp. 115-116.

[39] V. aussi *infra,* V, § 2, n. 116.

[40] [Djebbar, 2002], pp. 106--110; [Vahabzadeh, 1999], pp. 340-345.

[41] [Djebbar, 2002], pp. 110-112; [Vahabzadeh, 1999], pp. 346-349. Dans la suite j'utilise les notations (Kh) et (E) pour désigner respectivement les définitions "véritable" (al Khayyâm) et euclidienne de la proportionnalité.

[42] [Djebbar, 2002], pp. 113-115; [Vahabzadeh, 1999], pp. 350-353. Pour la prémisse de la grandeur quatrième proportionnelle à trois grandeurs données, prémisse qualifiée de "philosophique" par Khayyâm qui en fait aussi

B. L'équivalence a : b :: c : d (Kh) ⇔ a : b :: c : d (E), à l'aide de 4 Propositions et deux Lemmes, en distinguant le cas où l'un des rapports est numérique[43].
C. L'équivalence a : b > c : d (Kh) ⇔ a : b > c : d (E), à l'aide de 2 Propositions et d'un Lemme[44].
• La conclusion souligne que les principaux résultats euclidiens concernant la proportionnalité et les manipulations de rapports (Propositions V. 12, 16-19, 22, 23), correctement établis par Euclide à partir de ses Définitions, seront donc aussi des conséquences des définitions véritables puisque celles-ci sont équivalentes à celles-là[45]. Il n'est donc pas nécessaire de les démontrer à nouveau. Ceci permet à Khayyâm de ne pas avoir à affronter les difficultés que l'on rencontre pour établir lesdits théorèmes à partir des définitions "véritables" et, plus généralement, de ne pas s'interroger sur la portée et l'effectivité de la théorie anthyphérétique[46].

2. Un commentaire détaillé des preuves[47] de Khayyâm par quelqu'un qui n'a qu'un accès indirect au texte par le biais de traductions, si précises qu'elles soient, est hors de propos. Je me contenterai donc de quelques remarques assez générales.

Al-Khayyâm commence son Livre II en citant la Définition V. 3 sous la forme « le rapport est l'"ayyiyya" (quiddité dans [Vahab. 1999], p. 340) de la mesure de deux grandeurs homogènes, de l'une des deux relativement à l'autre ». Ce n'est pas tout-à-fait celle que l'on connaît par la traduction d'Ishâq-Thâbit, mais cette variante est bien attestée et se trouve aussi dans la recension d'Ibn Sînâ, ce qui n'est pas incompatible avec l'hypothèse que j'avais

---

un usage fondamental dans son L. III, v. mon commentaire dans [Vitrac, 2000], p. 89 (avec la note 134). Il faut d'ailleurs remarquer que dans ses Prop. 2 et 5, il utilise une quatrième proportionnelle au sens (Kh), dans ses Prop. 4 et 6, il l'utilise au sens (E). Quant à la Prop. X. 1, elle est ici légèrement modifiée car le Persan, à chaque étape, retranche la moitié de la grandeur ou plus que sa moitié. Il faut se rappeler que ce que l'on appelle improprement le "Porisme" à X. 1 (principe de dichotomie quand on retranche exactement la moitié de la grandeur à chaque étape) n'existait pas dans les traductions arabes (v. [Eucl., *Él.,* III, 1998], pp. 88-89, nn. 3 et 4), bien qu'il soit utilisé dans la Prop. XII. 13 (numérotation médiévale = Heib. XII. 16), ainsi que Khayyâm le remarque d'ailleurs.

[43] [Djebbar, 2002], pp. 115-123; [Vahabzadeh, 1999], pp. 353-362. Djebbar numérote les Prop. continûment (de 1 à 6) sans nécessairement introduire de distinction entre Prop. et Lemmes. Je propose le découpage suivant :
Prop. 1 : a : b :: c : d (Kh) et a : b rapport numérique ⇒ a : b :: c : d (E);
Prop. 2 : a : b :: c : d) (E) et a : b rapport numérique ⇒ a : b :: c : d (Kh);
Lemme 2 / 3 (une proportionnalité élémentaire au sens (E), non démontrée dans les *Éléments*).
Prop. 3 : a : b :: c : d (E) et a : b rapport non numérique ⇒ a : b :: c : d (Kh);
Lemme 3 / 4 : établit le résultat de V. 9 (a : b :: a : c ⇒ b = c) mais pour la proportionnalité au sens (Kh);
Prop. 4 : a : b :: c : d (Kh) et a : b rapport non numérique ⇒ a : b :: c : d (E).

[44] [Djebbar, 2002], pp. 123-127; [Vahabzadeh, 1999], pp. 362-370. Djebbar numérote les Prop. continûment de 6 à 8. Je propose le découpage suivant :
Lemme 4 / 5 : établit le résultat de V. 10 (a : b > a : c ⇒ b < c) mais pour la proportionnalité au sens (Kh);
Prop. 5 : a : b > c : d (E) ⇒ a : b > c : d (Kh);
Prop. 6 : a : b > c : d (Kh) ⇒ a : b > c : d (E).

[45] [Djebbar, 2002], pp. 127-128; [Vahabzadeh, 1999], p. 370.

[46] Je reviens *infra,* IV, B, § 6 sur ces deux points dans la discussion d'une hypothétique théorie anthyphérétique pré-eudoxienne.

[47] Le lecteur en trouvera une transcription moderne dans [Vahabzadeh, 1999], pp. 290-298.

formulée précédemment selon laquelle Khayyâm avait accès aux *Éléments* par le biais de ladite recension[48].

3. Comme an-Nayrîzî, il glose la notion de « grandeurs homogènes » à l'aide de la Df. V. 4 pour expliquer que de telles grandeurs sont celles qui ont une *différence* mutuelle assignable. Cette transition lui permet de commenter la notion de "rapport" en termes d'égalité et de différence (comme forme particulière de l'altérité) et de distinguer les espèces de la différence comme « être une partie » ou « être des parties ». Ici Khayyâm explique que le rapport est une notion primitivement arithmétique, ce qui lui permet d'introduire quelques exemples (3 : 9; 2 : 7) et d'affirmer que pour les nombres inégaux le rapport ne connaît que deux espèces : le plus petit est *une partie* ou *des parties* du plus grand, ce qui n'est rien d'autre que l'énoncé de la Proposition VII. 4 d'Euclide. Il poursuit son "archéologie" fictive de la notion de rapport en disant que celle-ci a été ensuite cherchée dans les grandeurs. Mais, comme il n'existe pas de grandeur minimale qui puisse servir de mesure universelle à l'instar de la monade pour les nombres — car les grandeurs sont indéfiniment divisibles —, ceux qui entreprenaient ces recherches ont donc trouvé un autre type de rapport.

4. Ici le Commentateur persan, comme an-Nayrîzî[49], caractérise la différence en termes de soustractions réciproques répétées (ce qu'on appelle "anthyphérèse" ou algorithme d'Euclide), lesquelles, dans le cas de deux nombres constituent une procédure finie qui détermine la plus grande mesure commune (PGCD) de ces nombres (Cf. Eucl. Prop. VII. 2) et qui, dans le "pire" des cas (s'ils sont premiers entre eux), aboutit à l'unité (Cf. Eucl. Prop. VII. 1), tandis que, dans les grandeurs, s'il n'y a pas de mesure commune, le processus se poursuivra indéfiniment. Khayyâm se réfère explicitement au début du X^{e} Livre des *Éléments* et en effet, dans la Proposition X. 2, Euclide établit que deux grandeurs telles que la procédure ne s'arrête jamais sont incommensurables; ce qu'il utilise sous forme contraposée (comme "critère" de non-incommensurabilité) dans la Proposition suivante : si des grandeurs sont (par hypothèse) commensurables, la procédure s'arrêtera *nécessairement* à une certaine étape.

Dans sa présentation Khayyâm aurait plutôt besoin du contraire, à savoir qu'il existe effectivement des anthyphérèses infinies; sur ce point, il demande à son lecteur de lui faire crédit pour le moment. Fait remarquable, il sait bien que la rencontre avec ces « anthyphérèses du troisième type »[50] tient à l'existence de couples de grandeurs incommensurables, mais il ne mentionne pas ce point ici car il ne veut sans doute pas bouleverser l'économie globale de l'exposé euclidien en faisant intervenir la distinction

[48] V. [Vitrac, 2000], p. 86. Pour davantage de détails concernant les variantes des Df. du L. V, outre [Engroff, 1980] je me permets de renvoyer le lecteur au travail en préparation mentionné *supra,* n. 14.

[49] V. [*Anar.*], p. 157, l. 1-27.

[50] Si l'on se place du point de vue des Anciens il s'agit en fait de *rapports* du troisième type car si la soustraction des multiples de la plus petite des deux grandeurs épuise la plus grande (mesure exacte simple donnant le rapport "partie"), on ne parlera pas d'anthyphérèse puisqu'il n'y a même pas réciprocité. V. [Eucl., *Él.,* II, 1994], pp. 293-295. Il n'y a donc que *deux* types d'anthyphérèse : finie ou infinie.

"commensurables" / "incommensurables" dès le Livre V. Le commentaire d'an-Nayrîzî, pourtant très proche dans cette partie, n'avait pas ces scrupules[51].

5. Quand il en vient à la Définition de la proportionnalité, il cite ce que j'ai appelé la Df. V. 3bis (sous la forme « similitude ») et considère la Df. V. 5 comme une sorte de commentaire explicitant comment reconnaître cette « similitude » des rapports. Sans entrer dans les détails, Khayyâm affirme que le critère euclidien des équimultiples n'explicite pas la vraie nature de la proportionnalité. Il suggère en particulier, avec l'exemple qu'il donne, que ledit critère ne permet même pas de reconnaître les proportions arithmétiques les plus simples, ce qui est quand même un peu exagéré[52].

6. Des Définitions véritables de la proportionnalité il y a peu à dire car elles ont été bien préparées par ce qui précède : il y aura proportionnalité entre quatre grandeurs (G_1, G_2, G_3, G_4), soit si $G_1 = G_2$ et $G_3 = G_4$, soit si G_1 est une partie (resp. des parties) de G_2 et G_3 est la même partie (resp. les mêmes parties) de G_4. Le rapport est alors numérique. Le recours à l'anthyphérèse est implicite — on peut donc reprocher à la présentation de Khayyâm de ne pas être totalement unifiée — mais ce recours est évident pour qui connaît la Proposition VII. 4 d'Euclide à laquelle il a été fait allusion plus haut. Il est en revanche complètement explicité dans le quatrième cas de figure : le Commentateur explique alors l'identité des quotients partiels sur les trois premières étapes de l'algorithme et exige, par induction informelle, que l'identité des quotients partiels se poursuive indéfiniment afin que l'on puisse parler d'identité de rapports en ce sens propre à la géométrie.

7. Les définitions véritables de « rapport plus grand » et « rapport plus petit » procèdent de la même manière, en distinguant le cas des rapports numériques de celui propre à la géométrie. Ici l'énumération des sous-cas possibles s'avère assez fastidieuse et Khayyâm se limite à certains d'entre eux. Pour les rapports de type géométrique, la distinction des sous-cas est plus compliquée encore et le Commentateur n'en expose qu'un, et sur trois étapes. En utilisant des notations modernes pour faire bref, il dit que :

— si $G_2 = m_1.G_1 + R_1$ (avec $R_1 < G_1$) et $G_4 = n_1.G_3 + S_1$ (avec $S_1 < G_3$) et si $m_1 < n_1$,

alors $G_1 : G_2 > G_3 : G_4$.

— mais si $m_1 = n_1$ et que $G_1 = m_2.R_1 + R_2$ (avec $R_2 < R_1$) et $G_3 = n_2.S_1 + S_2$ (avec $S_2 < S_1$) et si cette fois $m_2 > n_2$, alors on a également $G_1 : G_2 > G_3 : G_4$.

— Mais si $m_2 = n_2$ et que $R_1 = m_3.R_2 + R_3$ (avec $R_3 < R_2$) et $S_1 = n_3.S_2 + S_3$ (avec $S_3 < S_2$) et si, à nouveau, $m_3 < n_3$, alors on a également $G_1 : G_2 > G_3 : G_4$ …

---

[51] Dès le début de son commentaire, il dit des quantités : « Mais elles ont tantôt une relation de commensurabilité, tantôt une relation d'incommensurabilité » (Hoc autem habitudo communicationis, et aliud habitudo seiunctionis), [*Anar.*], p. 156, l. 22-23. Un peu plus loin (*ibid.,* p. 157, l. 25-27) il identifie le second cas avec l'anthyphérèse interminable.

[52] Ainsi, pour reprendre son exemple, si $G_1 = (1/2)$. G_2 et $G_1 : G_2 :: G_3 : G_4$ (E), alors un multiple (le double) de G_1 est égal à G_2, donc l'équimultiple (double) de G_3 est égal à G_4 d'après le critère, et donc $G_3 = (1/2)$. G_4 ! Pour un autre argument de Khayyâm, v. *infra,* la fin du § 8.

Les choses se compliquent parce que les restes (R_i) ou (S_i) peuvent disparaître à un certain rang dans l'une des deux séries si l'on compare un rapport de type géométrique à un rapport numérique. Quoi qu'il en soit, Khayyâm a parfaitement compris que dans le cas de deux anthyphérèses infinies il faut déterminer le *premier* rang **i** pour lequel les quotients partiels (m_i, n_i) sont différents et, ceci fait, vérifier que l'on a $m_i < n_i$ si **i** est impair, $m_i > n_i$ si **i** est pair. Il met effectivement cette distinction en œuvre sur les premières étapes de la procédure[53] (sans toutefois mentionner explicitement et en toute généralité la *parité* du rang considéré). Il me semble que c'est un progrès évident sur les traitements proposés par certains de ses prédécesseurs[54].

8. Dernière remarque concernant le traitement mathématique de Khayyâm, il utilise sans état d'âme un certain nombre de résultats du Livre V, en particulier les Propositions V. 7, 9, 11 dans sa partie III. B, les Propositions V. 10, 13 dans sa partie III. C[55].

On peut en effet répartir les résultats du Livre V en trois groupes principaux :

• Les Propositions V. 1-6 sont des sortes de Lemmes concernant l'équimultiplicité et la notion de multitude[56]. Khayyâm, à la différence de son prédécesseur al-Mâhânî[57], ne les a pas utilisées.

• V. 7-11 + 13[58] énoncent les propriétés fondamentales de la proportionnalité. En écritures modernisées on a :

V. 7, $A = B \Rightarrow \forall C$, $A : C :: B : C$ et $C : A :: C : B$

V. 8, $A > B \Rightarrow \forall C$, $A : C > B : C$ et $C : B > C : A$

V. 9, S'il existe C telle que $A : C :: B : C$ alors $A = B$ ou si $C : A :: C : B$, alors $A = B$

V. 10, S'il existe C telle que $A : C > B : C$ alors $A > B$ ou si $C : B > C : A$, alors $B < A$.

V. 11, $A : B :: C : D$ et $E : F :: C : D \Rightarrow A : B :: E : F$

V. 13, $A : B :: C : D$ et $C : D > E : F \Rightarrow A : B > E : F$.

• Le reste du Livre V établit les principaux résultats, en particulier la compatibilité des manipulations de rapports comme la permutation, la séparation, la composition, la conversion, le rapport pris à égalité de rang (δι᾽ ἴσου ou *ex æquo*) avec la proportionnalité.

---

[53] Dans sa Prop. 3 ([Djebbar, 2002], pp. 119-120; [Vahabzadeh, 1999], pp. 358-359) et son Lemme 4/5 ([Djebbar, 2002], pp. 123-126 (Prop. 6); [Vahabzadeh, 1999], pp. 364-367).

[54] Les descriptions de « avoir un rapport plus grand (ou plus petit) » données par an-Nayrîzî ([*Anar.*], p. 160, l. 20—p. 161, l. 18) ne font aucune mention de l'alternance du sens des inégalités entre les première et deuxième étapes de la procédure.

[55] Il utilise même des résultats moins "fondationnels" comme V. 7 Por., V. 19 Por., V. 22, mais uniquement dans la preuve du Lemme 2/3 qui concerne la proportionnalité au sens (E) et qui comble en quelque sorte une "lacune" de l'exposé euclidien.

[56] Sur cette notion, v. [Vitrac, 1993], pp. 71-73, 108-119, 167-183 202-203 ou [Eucl., *Él.,* II, 1994], pp. 128-129, 249-250, 532 et [Eucl., *Él.,* III, 1998], 121-122.

[57] V. *infra,* III, § 6.

[58] Dans la numérotation de Heiberg, car dans les traductions arabes et arabo-latines, les Prop. V. 12-13 sont inversées, ce qui renforce la cohérence du groupe. Cette inversion est sans conséquence sur la structure déductive.

Les commentateurs ont généralement reproché à l'exposé euclidien son artificialité qui lui fait dériver des résultats aussi intuitivement évidents que V. 7-11 + 13 de Définitions aussi complexes que le sont les Df. V. 5, 7 et leurs critères en termes d'équimultiples. Or, en bonne doctrine aristotélicienne, les principes doivent être plus simples que les résultats qu'on en dérive[59]. L'attitude de Khayyâm à cet égard est plutôt pragmatique : d'une part, il signale qu'Euclide, dans le Livre V, a démontré un certain nombre de choses qui ne le réclamaient pas, et ce, à cause de son mauvais choix définitionnel. C'est selon lui le cas de V. 7, 11, 8, 13[60]. Avec les définitions anthyphérétiques, ces propriétés, du moins celles contenues dans V. 7, 11, 13[61], sont effectivement immédiates, car substituer des égaux dans des égalités ou des inégalités n'y changent rien. D'autre part, il souligne que les propriétés établies dans V. 9-10, à l'inverse, réclament une démonstration, ce dont il s'acquitte dans ses deux Lemmes fondamentaux (3/4, 4/5). La preuve du second possède de nombreux cas de figures dont un seul, le plus complexe selon Khayyâm, est examiné.

III. Les prédécesseurs de al Khayyâm en Pays d'Islam

1. A deux reprises dans ce qui précède j'ai mentionné un rapprochement possible entre al-Khayyâm et an-Nayrîzî, en particulier dans la manière dont l'un et l'autre commentent la Définition euclidienne du rapport (Df. V. 3). Cela n'est pas insignifiant puisque c'est précisément l'occasion pour eux d'en introduire l'interprétation anthyphérétique. Ce n'est pas non plus arbitraire. Dans l'introduction de son *Commentaire,* Khayyâm indique qu'il a consulté la littérature consacrée aux problèmes posés par le Livre d'Euclide, celle des Anciens comme celle des "Modernes"[62]. Aucun, dit-il, n'a exposé de manière convaincante et philosophique ce qu'il en est de la proportionnalité; an-Nayrîzî seul est mentionné même si, après réflexion, son exposé est insuffisant, voire tronqué. Khayyâm n'accable d'ailleurs pas son prédécesseur et envisage la possibilité d'un problème de transmission textuelle[63].
2. Quoi qu'il en soit, Khayyâm ne prétend nullement être le premier à aborder la question mais "seulement" être le premier à l'avoir résolue correctement. Nous savons d'ailleurs qu'il a également consulté les commentaires d'Ibn al-Haytham aux *Éléments* et que la manière dont

---

[59] Khayyâm lui-même a formulé une critique de ce genre dans son premier Livre, à propos du postulat des parallèles (v. ([Djebbar, 2002], p. 91; [Vahabzadeh, 1999], pp. 318-319). Il cite précisément la Prop. V. 7 comme exemple de résultat qui devrait être considéré comme une conséquence triviale de la Df. du rapport.

[60] Pour V. 7, 11, v. ([Djebbar, 2002], p. 118; [Vahabzadeh, 1999], pp. 356-357. Pour V. 8, 13, v. ([Djebbar, 2002], p. 123; [Vahabzadeh, 1999], pp. 362-365.

[61] Pour V. 8 Khayyâm est un peu rapide; il ne donne d'ailleurs aucun argument.
Si l'on a A > B mais pas A : C > B : C (Kh), alors on a A : C :: B : C ou A : C < B : C (Khayyâm, dans sa Prop. 3, admet que l'ordre sur les rapports est total). Mais :
• si A : C :: B : C (Kh), on a A = B (d'après V. 9 (Kh) = Lemme 3/4) ce qui n'est pas l'hypothèse.
• Si A : C < B : C (Kh), on a donc A < B (d'après V. 10 (Kh) = Lemme 4/5) ce qui n'est pas l'hypothèse non plus.

[62] V. [Djebbar, 2002], p. 88; [Vahabzadeh, 1999], pp. 308-313. Voir aussi l'aparté qu'il insère dans l'introduction de son premier Livre ([Djebbar, 2002], p. 91; [Vahabzadeh, 1999], pp. 318-321).

[63] V. [Djebbar, 2002], p. 88; [Vahabzadeh, 1999], pp. 312-313.

ce dernier abordait le problème du postulat des parallèles l'a particulièrement fait réagir. Peut-être n'en a t-il pas poursuivi la lecture; mais s'il l'a fait, il n'a pas pu ne pas voir que l'auteur des *Sharh musâdarât Uqlîdis* n'était pas non plus satisfait par l'exposé euclidien et consacrait de nombreuses pages aux premières Définitions du Livre V[64]. Dans sa présentation générale de la théorie des proportions Ibn al-Haytham mentionne lui aussi la distinction « grandeurs commensurables / grandeurs incommensurables », celle des « rapports numériques / rapports non numériques » ainsi que la procédure d'anthyphérèse en relation avec le début du Livre X. Il considère également que les Définitions V. 5 et 7 contiennent des assertions vraies mais qui doivent être *démontrées*. Cela dit, les preuves qu'il propose n'utilisent pas la démarche anthyphérétique[65]. Au demeurant, si les *Commentaires* d'an-Nayrîzî auquel Khayyâm fait allusion sont ceux qui nous sont parvenus, il pouvait deviner que d'autres avant lui (mais aussi avant Ibn al-Haytham) avaient prétendu démontrer la Définition V. 5[66], même si an-Nayrîzî reste allusif sur cette entreprise qu'il n'approuve pas. A quel(s) auteur(s) an-Nayrîzî fait-il allusion ? Sans doute à l'un ou l'autre de ses contemporains pour le(s)quel(s) une telle entreprise est attestée, comme Ahmad ibn Yûsuf ou Abû ‘Abdallâh Muhammad ibn ‘Isâ al-Mâhânî[67].

3. Le cas de ce dernier auteur est particulièrement délicat à traiter. Ce mathématicien et astronome persan, actif dans la seconde moitié du IX^{e} siècle (il serait mort vers 880), a consacré une monographie aux difficultés relatives à la question du rapport qui semble être la plus ancienne du genre qui soit conservée. Malheureusement ce texte connu par huit manuscrits est pour l'instant inédit. Monsieur Vahabzadeh en a proposé une édition dans sa thèse qu'il qualifie lui-même de provisoire dans la mesure où il n'a pu consulter que trois copies alors que le texte semble avoir souffert diverses corruptions. Il prépare une édition revue et corrigée, basée sur davantage de manuscrits, qui devrait paraître bientôt. Le professeur Jan P. Hogendijk prépare une édition des œuvres d'al-Mâhânî qui inclura ladite monographie sur la question du rapport. Pour ma part j'ai seulement consulté l'édition provisoire (mais très utile) de Monsieur Vahabzadeh. Il se pourrait donc qu'une grande partie de ce que je vais dire ici — qui plus est de "deuxième main" — se trouve invalidée lorsque nous aurons une meilleure connaissance de ce traité. Ces précautions oratoires sont indispensables pour mon propos car, manifestement, l'intention d'al-Mâhânî est très proche de celle de Khayyâm dans son Livre II, même si celui-ci ne cite pas (et ne semble pas connaître) celui-là.

---

64 V. [Sude, 1974], pp. 168-174 (présentation générale), pp. 175-185 (comm. aux Df. V. 1-10).

65 V. *ibid.,* pp. 188-214.

66 V. [*Anar.*], p. 163, l. 18-21 : « Si quelqu'un se donne comme tâche, de produire des preuves, pour ce point et pour d'autres, il se donnera de la peine pour rien puisqu'il lui faudra établir d'autres théorèmes qui en découlent ». La suite immédiate du texte latin (*ibid.,* l. 21-24) n'est pas très claire.

67 Les "preuves" de Ahmad ibn Yûsuf ne sont pas non plus anthyphérétiques.

4. Al-Mâhânî en effet définit le rapport de deux grandeurs homogènes quelconques comme l'« état de la mesure » de l'une d'entre d'elles par l'autre et décrit cet état en termes de mesure exacte et d'anthyphérèse, finie ou infinie, ce dernier cas, remarque-t-il, se produisant uniquement dans les grandeurs. Il définit donc la proportionnalité soit comme l'identité des mesures exactes (cas "partie ou multiple"), soit comme l'identité (éventuellement indéfinie) des quotients partiels (il les désigne comme « nombre de fois dans les deux mesures de même rang »), puis décrit les conditions pour qu'on puisse dire qu'un rapport est plus grand qu'un autre. C'est en ce point que les problèmes, textuels et/ou mathématiques, commencent car cette Définition, telle qu'elle est transmise[68], n'a guère de sens[69].

5. Quoi qu'il en soit, al-Mâhânî entreprend ensuite de démontrer successivement :

• que si quatre grandeurs vérifient la condition du *définiens* de la Df. V. 5, elles sont en proportion (au sens anthyphérétique du terme).

• que si quatre grandeurs vérifient la condition du *définiens* de la Df. V. 7, le rapport (au sens de la problématique Df. d'al-Mâhânî) de la première à la deuxième est plus grand que celui de la troisième à la quatrième.

• que si quatre grandeurs sont en proportion (au sens anthyphérétique du terme), elles vérifient la condition du *définiens* de la Df. V. 5.

• que si le rapport (au sens de la Df. d'al-Mâhânî) d'une première grandeur à une deuxième est plus grand que celui d'une troisième à une quatrième, elles vérifient la condition du *définiens* de la Df. V. 7.

Les deux dernières assertions sont établies de manière indirecte et purement logique à partir des deux premières; c'est pourquoi al-Mâhânî, dans une sorte de preuve alternative partielle, montre comment déterminer de manière *effective* les équimultiples satisfaisant la condition de la définition euclidienne V. 7. La deuxième Proposition, la plus subtile, est particulièrement difficile à juger à cause de la corruption de la Définition de « avoir un rapport plus grand » et, en outre, parce qu'on sait que cette situation présente de nombreux cas de figures. Il est donc difficile de faire la part des choses entre l'insuffisance mathématique, l'abrègement inévitable de la rédaction à cause de ces cas et de l'absence de notation symbolique, en particulier indicielle, et l'altération du texte. La maîtrise technique de l'Auteur paraît considérable et plaide en faveur des deux dernières hypothèses, mais au demeurant, al-Mâhânî (comme Khayyâm d'ailleurs) est contraint de raisonner par induction informelle.

6. Quoi qu'il en soit, sur différents points pour lesquels son texte est bien établi, il me semble que son approche ne coïncide pas avec celle de Khayyâm ce qui pourrait confirmer que ce

[68] V. [Vahabzadeh, 1997], p. 5 (traduction) et ses commentaires, pp. XXV-XXVII.

[69] Je ne partage pas l'optimisme de Monsieur Vahabzadeh qui pense pouvoir rétablir l'énoncé de la définition corrompue à partir des usages qui en sont faits dans les Prop. 2 et 4. Si al-Mâhânî y applique sa définition, il ne la cite pas explicitement et la situation de « rapport plus grand », lorsqu'on cherche à la définir en comparant les résultats partiels des soustractions alternées, comporte beaucoup de cas de figures difficiles à englober dans un seul énoncé rédigé en langue naturelle.

dernier ignorait la tentative de son prédécesseur. Déjà les Définitions du rapport et de la proportionnalité ne sont pas tout à fait les mêmes : al-Mâhânî distingue seulement deux cas de figures, la mesure exacte ("partie") et l'anthyphérèse, là où Khayyâm, plus proche du Livre VII d'Euclide, en distingue trois (et même quatre avec l'égalité) : le rapport de "partie", de "parties" et celui défini par l'anthyphérèse, réservé au cas dit de type géométrique. Khayyâm raisonne de manière indirecte, en adoptant la prémisse de la grandeur quatrième proportionnelle, tandis que dans ses deux premières Propositions, al-Mâhânî s'en dispense, procède de manière directe, mais utilise explicitement les Propositions V. 1, 2, 3, 5, 6 des *Éléments*[70], ce que ne fait pas son successeur. La différence la plus nette entre nos deux auteurs réside dans la manière d'établir que si quatre grandeurs (AB, CD, EF, GH) vérifient la condition de la Df. V. 7 — il existe des entiers (m, n) tels que m.AB > n.CD et m.EF ≤ n.GH — alors AB : CD > EF : GH (*). Khayyâm utilise la définition anthyphérétique du rapport plus grand en comparant les quotients partiels obtenus pour chacun des couples. D'où la nécessité de distinguer selon la parité du premier rang pour lequel ces quotients diffèrent. Al-Mâhânî fonde lui aussi sa démarche sur les soustractions alternées, mais *il ne fait pas vraiment usage de la définition anthyphérétique* et il n'a pas besoin de recourir à la distinction selon la parité. Ses cas et sous-cas de figures sont autres[71]. Pour résumer, il me semble que, du point de vue technique, nos deux textes sont indépendants[72].

7. Mais du point de vue de l'inspiration générale il paraît indéniable que nos deux auteurs s'inscrivent dans la même démarche et al-Mâhânî bénéficie évidemment de l'antériorité chronologique. Cela veut-il dire qu'il en est l'initiateur ? Il ne semble pas. Dans l'introduction de son ouvrage il indique lui-même qu'il a suivi les indications qu'avait données Thâbit Ibn Qurra, à savoir que l'on doit concevoir le rapport et la proportionnalité dans les grandeurs d'une manière numérique et en partant des Propositions qui se trouvent au début du dixième Livre des *Éléments*[73]. L'impulsion initiale, dans l'interprétation anthyphérétique de la notion de « rapport de grandeurs », pourrait donc venir du célèbre Réviseur. Rien d'étonnant donc à ce que l'on en trouve l'écho chez al-Mâhânî, an-Nayrîzî et al-Khayyâm[74]. Faut-il poursuivre cette quête régressive ? Thâbit, a-t-il fait cette suggestion en s'appuyant sur sa connaissance

---

[70] V. [Vahabzadeh, 1997], p. 5.

[71] Dans la Prop. 2 (v. [Vahabzadeh, 1997], p. 7-9) sa démarche est schématiquement la suivante : les grandeurs (AB, EF) mesurent respectivement (CD, GH) en laissant les restes (CP, GU). Al-Mâhânî suppose que l'une *ou* l'autre des deux conditions : CP ≤ AB, GU ≤ EF est vérifiée. Autrement dit, il s'agit bien d'une étape d'anthyphérèse pour l'un des couples, mais *pas nécessairement* pour l'autre. Il examine alors chaque possibilité : (**i**) si ce n'est pas le cas, il montre, en manipulant les multitudes, que l'inégalité (*) est vérifiée; (**ii**) si c'est le cas — les deux couples ont donc même anthyphérèse jusqu'à cette étape — il établit que l'on peut itérer le raisonnement car (CP, AB, GU, EF) vérifient les "mêmes" conditions que les grandeurs initiales avec un couple d'entiers (m', n') tel que m' < m; ce qui suffit à garantir que le cas (**ii**) ne peut pas se produire indéfiniment.

[72] Approfondir cette comparaison exigerait de confronter les terminologies respectives des deux auteurs, de faire intervenir le texte d'an-Nayrîzî qui a pu servir de source intermédiaire, investigations qui dépassent largement mes compétences.

[73] V. [Vahabzadeh, 1997], p. 3.

[74] Et aussi chez Ibn al-Haytham, v. [Sude, 1974], p. 172.

très approfondie des *Éléments* ou parce qu'il avait accès à d'autres sources, par exemple des textes grecs attestant d'une théorie anthyphérétique en usage dans l'Antiquité ? C'est ce que je voudrais examiner maintenant.

IV. A-t-il existé une théorie anthyphérétique grecque ?

En fait la question est débattue et pour dissiper tout malentendu il convient d'en expliciter les termes. Beaucoup d'historiens — y compris des mathématiques médiévales d'expression arabe — répondent OUI : il a existé une théorie anthyphérétique des proportions chez les Grecs, développée avant (ou en concurrence avec) celle d'Eudoxe de Cnide (c'est-à-dire celle du Livre V d'Euclide)[75]. Elle était anthyphérétique au sens où la proportionnalité de quatre grandeurs $G_1 : G_2 :: G_3 : G_4$ y était définie par l'identité des anthyphérèses (*i.e.* des quotients partiels successifs) pour chacun des deux couples (G_1, G_2), (G_3, G_4), comme nous l'avons vu chez al-Mâhânî ou al-Khayyâm. Le fait de savoir si les Grecs définissaient également le *rapport* de cette manière divisent les partisans de cette théorie. Pour eux, elle peut être mise en concurrence avec celle d'Eudoxe, puisque, comme cette dernière, elle s'appliquait aussi bien aux grandeurs commensurables qu'incommensurables (anthyphérèses finie / infinie).

Cette thèse a semble-t-il été avancée pour la première fois (parmi les Modernes) par H. G. Zeuthen, en 1917, dans un traité publié en danois et, de ce fait, passé quasiment inaperçu. Elle fut reprise et développée par différents auteurs avant qu'en 1933, Oskar Becker ne propose ce qui, depuis, constitue l'exposé de référence[76] de ce que j'appellerai *l'hypothèse anthyphérétique forte*. Quoique contestée, cette reconstruction a fini par s'imposer et a été vulgarisée par des spécialistes comme B. L. Van der Waerden[77], W. R. Knorr[78], et récemment, par D. H. Fowler[79] et J. L. Gardies[80].

Comme le lecteur l'aura sans doute deviné, je n'adhère pas à *l'hypothèse anthyphérétique forte*. Je me propose donc de résumer la reconstruction de Becker puis d'exposer mon interprétation que l'on peut, par contraste, qualifier de *minimaliste*.

A. La thèse de Becker

1. Le point de départ de la reconstruction anthyphérétique est un témoignage d'Aristote dont la signification avait semble-t-il échappé à Heath :

---

[75] V. par exemple, [Plooij, 1950], pp. 58-59 ou [Youschkevitch, 1976], p. 84.

[76] [Becker, 1933], pp. 311-33. Dans sa note 2ª, p. 313 Becker explique qu'il a pris connaissance de l'existence du travail de Zeuthen seulement après qu'il eut achevé son propre article.

[77] V. [Van der Waerden, 1947/1949], en particulier pp. 243-245 et [Van der Waerden, 1954], pp. 175-179.

[78] V. [Knorr, 1975], pp. 255-273 et appendice B, pp. 332-344.

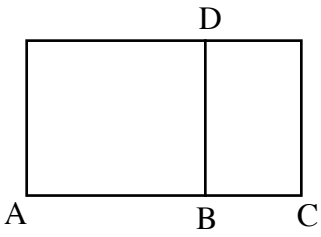
[79] V. [Fowler, 1979], [Fowler, 1981], et sa synthèse, [Fowler, 1987].

[80] V. [Gardies, 1988], pp. 31-43

« Et même en mathématiques, certaines choses ne semblent pas faciles à démontrer, à cause d'un défaut de définition, par exemple qu'une droite sécante à une surface, parallèle au côté, divise semblablement et la ligne et l'aire. Or la définition étant énoncée, la proposition devient immédiatement claire; car les aires et les lignes ont la même "antanérèse", et ceci est une définition du même rapport »[81].

Dans son *Commentaire aux* Topiques, Alexandre d'Aphrodise (II^e^ s. de notre ère) explique que "surface" désigne ici un parallélogramme.

La situation géométrique correspond donc à celle décrite par une partie de la Proposition VI. 1 et fréquente dans le Livre X : la division "semblable" de la ligne et de l'aire signifie l'identité de rapports AD : DC :: AB : BC entre les portions de l'aire et celles de la droite.



Quant au terme "antanérèse" Alexandre dit ceci :

« Et une définition des [grandeurs] proportionnelles que les Anciens utilisaient est celle-ci; [sont] en proportion l'une par rapport à l'autre des grandeurs qui ont la même anthyphérèse; et il (Aristote) appelle l'anthyphérèse : "antanérèse" »[82].

Il n'y a guère de doutes que, comme le dit Alexandre, le processus appelé "antanérèse" par Aristote corresponde à l'"anthyphérèse" euclidienne. Nicomaque utilise le verbe "ἀνταφαιρεῖν" et le substantif "ἀνταφαίρεσις" pour décrire l'algorithme d'Euclide appliqué à des nombres[83]. Il y avait donc une certaine latitude dans la terminologie[84].

2. Indubitablement Aristote envisage la possibilité de définir la proportionnalité par l'identité des anthyphérèses. S'agit-il d'une Définition courante à son époque, proposée comme telle dans un traité mathématique ? Nous l'ignorons, mais c'est ce que suggère le témoignage d'Alexandre. Celui-ci s'appuie-t-il sur une source historique définie quand il prétend rapporter l'usage des Anciens ou son affirmation n'est-elle que le résultat de sa reconstruction personnelle à partir des propos d'Aristote ?

Quoi qu'il en soit des réponses à ces différentes questions, Becker reconstruisit toute une théorie des proportions fondée sur la Définition anthyphérétique et, à partir d'elle, démontra les principaux résultats contenus dans le Livre V répartis par lui en deux groupes : A (V. 12, 15, 17, 18, 19) et B (V. 16, 22, 23)[85]. Il est remarquable que certaines de ces démonstrations soient laborieuses, en particulier celles correspondant aux Propositions V. 9 et 16 ($G_1 : G_2 :: G_3 : G_4 \Rightarrow G_1 : G_3 :: G_2 : G_4$). La démonstration du théorème de permutation que propose Becker devait distinguer plusieurs cas de figure selon les espèces de grandeurs

[81] *Topiques,* VIII, 158 b 29-35.
[82] V. [Alex. *in Top.*], p. 545, l. 12-17.
[83] V. [Nic. Ar.], L. I, XIII, §§ 11-13, p. 34, l. 23; p. 35, l. 1, l. 11-12, l. 19; [Bertier, 1978], p. 73.
[84] Sur la signification du terme euclidien, v. [Eucl., *Él.,* II, 1994], p. 290, n. 1.
[85] V. [Becker, 1933], pp. 316-325.

géométriques concernées[86], alors que celle du Livre V est indépendante de la dimension particulière desdites grandeurs.

3. C'est à ce point de la reconstruction[87] qu'un autre témoignage aristotélicien était mobilisé pour confirmer l'existence d'une théorie anthyphérétique pleinement constituée. Dans les *Seconds Analytiques,* le Stagirite écrit :

> « Et qu'[il y ait] proportion aussi par permutation était autrefois démontré séparément pour les nombres, les lignes, les solides et les temps bien qu'il fût possible de le démontrer pour toutes ces choses par une seule démonstration. Mais parce qu'il n'y avait pas de nom pour désigner ce en quoi toutes ces choses sont une : nombres, longueurs, temps, solides, et qu'elles diffèrent les unes des autres en espèce, on traitait [cette propriété] séparément. Maintenant, elle est démontrée de manière universelle, car elle leur appartient, non pas en tant que lignes, ou en tant que nombres, mais en tant qu'ayant ce [caractère] qu'elles sont supposées posséder universellement »[88].

Pour Becker, ce témoignage d'Aristote confirme que l'histoire des proportions connut un tournant décisif au cours du IV^e^ siècle : la « nouvelle » théorie évoquée par le Stagirite, universelle, est certainement celle d'Eudoxe. Quant à celle d'«autrefois », dans laquelle il fallait distinguer des cas, c'est — comme le confirme l'étude mathématique préalable de Becker — la théorie anthyphérétique. Celle-ci acquiert ainsi une réalité historique avérée. La reconstruction proposée est brillante et ne manque pas de vraisemblance. Pourtant je ne suis pas complètement convaincu.

B. Objections

1. Le point le plus faible de la reconstruction elle-même réside dans l'interprétation du deuxième texte aristotélicien, celui des *Seconds Analytiques*. Rien dans le texte ne suggère que le Stagirite envisage un changement de technique mathématique à l'œuvre dans la théorie des proportions comme ce serait le cas s'il s'agissait de décrire l'abandon de la théorie anthyphérétique pour celle d'Eudoxe[89]. D'ailleurs Aristote montre assez peu d'intérêt pour l'histoire des mathématiques en tant que telle. En revanche celles-ci l'intéressent quand elles peuvent nourrir sa réflexion philosophique ou logique. Ce que le texte semble retenir c'est le rôle de concepts généraux qui, subsumant un ensemble d'espèces particulières, permet

[86] V. [Becker, 1933], pp. 322-324 ou [Knorr, 1975], pp. 337-338.
[87] V. [Becker, 1933], pp. 329-331.
[88] *An. Post.,* I, 5, 74 a 18-25.
[89] Le Stagirite ne mentionne même pas que l'un des avantages de la nouvelle théorie (avec les identifications de Becker) est de ne plus obliger à traiter séparément les cas "commensurables" et "incommensurables". On peut le lui faire dire (v. [Eucl., *Él.,* II, 1994], 513-514) mais il faut bien reconnaître que le Commentateur doit déployer beaucoup d'ingéniosité pour faire dire maladroitement à l'Auteur ce que celui-ci pouvait, avec ses connaissances et sa terminologie, exprimer d'une manière beaucoup plus expédiente.

d'unifier les preuves. Cette synthèse ne pouvait laisser Aristote indifférent, lui qui est si attentif à la question des genres et des espèces, à la problématique de l'incommunicabilité des genres … Malheureusement il ne précise pas quel est le terme universel en cause ici; certains interprètes pensent qu'il s'agit de la grandeur eudoxéenne (τὸ μέγεθος), d'autres la quantité (τὸ ποσόν) générale en tant qu'elle est susceptible d'une augmentation déterminée[90], ce qui vaut effectivement aussi bien pour la grandeur géométrique que pour le nombre. Si tel est le cas, il ne s'agit donc pas de la théorie du Livre V, laquelle s'applique aux grandeurs, sans doute susceptibles d'augmentation déterminée et même de multiplication quelconque, mais aussi de division indéfinie, ce qui les distingue des nombres entiers. Les identifications proposées par Becker ne s'imposent donc pas[91] et le fait qu'il faille distinguer des cas de figure dans la preuve anthyphérétique que lui-même a proposée pour le théorème de permutation et le fait qu'Aristote évoque un phénomène de ce genre (mais ce ne sont pas forcément les mêmes) est peut-être une simple coïncidence. D'autant que, depuis, d'autres spécialistes se sont attachés à montrer que l'on pouvait établir ledit théorème sans distinguer des cas de figure[92] !

2. Le dossier se réduit donc au témoignage des *Topiques* accompagné du *Commentaire* d'Alexandre. Selon Knorr (suivi par Fowler), le Commentateur ne pouvait que citer l'historien Eudème de Rhodes[93], disciple et contemporain d'Aristote, la plus importante autorité quant aux mathématiques préeuclidiennes. Ceci est une pure conjecture.

Pour Alexandre il s'agit d'expliquer la terminologie d'Aristote qui ne correspond pas à celle de ses contemporains mathématiciens. Il fait le rapprochement avec la terminologie d'Euclide qu'il connaît bien (il cite les *Éléments* à plusieurs reprises). Ainsi la "définition" qu'il propose peut aussi bien être le fruit de sa réflexion, plutôt que la citation d'une source historique indépendante laquelle aurait valeur de confirmation. Si tel est le cas, il n'y a plus de raisons fortes d'interpréter le texte des *Topiques* dans le sens d'un témoignage *historique* sur la pratique des mathématiques de l'époque classique. Il peut s'agir d'une remarque épistémologique que l'on peut rapprocher d'une autre discussion aristotélicienne concernant, elle aussi, les défauts dans les Définitions.

---

[90] En rapprochant notre témoignage d'une autre discussion du théorème de permutation (*An. Post.*, II, 17, 99 a8-10).

[91] V. aussi [Vitrac, 1993], pp. 576-582, résumé dans [Eucl., *Él.*, II, 1994], p. 511-514 et 523 (conclusion) : il me semble que la théorie "moderne" à laquelle se réfère le Stagirite pourrait être celle d'Eudoxe, mais que celle-ci, dans son exposé original, différait de celle que nous connaissons par le L. V. Si son projet ne concernait pas l'étude des rapports arithmétiques pour eux-mêmes (Cf. Eucl., Livres VII-VIII) Eudoxe pouvait avoir conçu une théorie générale des proportions entre "quantités" (comme « ce qui est susceptible d'augmentation déterminée ») englobant grandeurs et nombres. La version du L. V serait alors le résultat d'un remaniement, au demeurant probable, lors de la reprise par Euclide des résultats d'Eudoxe, avec réintroduction d'une distinction marquée entre grandeurs et nombres, distinction nécessaire de son point de vue pour l'étude des rapports numériques (par exemple ceux d'un nombre carré à un nombre carré), puis pour celle des irrationnelles du L. X.

[92] V. [Larsen, 1984]; [Gardies, 1988], pp. 33-37; [Thorup, 1992]. Seule cette dernière tentative correspond à un traitement du genre de celui que l'on pourrait prêter aux Anciens. V. cependant [Vitrac, 1993], pp. 590-593.

[93] V. [Knorr, 1975], p. 258 ou [Fowler, 1979], p. 821.

3. Au Livre II du *De anima,* le Stagirite indique : « Il ne faut pas se contenter, dans l'énoncé d'une définition, d'exprimer un fait comme c'est le cas dans la plupart des définitions : il faut aussi que la cause y soit présente et rendue manifeste; en réalité les énoncés de définitions se présentent comme des conclusions. Un exemple : "qu'est-ce qu'une quadrature ?", on répondra : "c'est trouver le rectangle équilatéral égal à un barlong". Or une telle définition est l'énoncé d'une conclusion. En disant que la quadrature est la découverte d'une moyenne, on exprime la cause de la chose »[94].

Or il est vraisemblable que la définition mathématique de la quadrature d'une aire est certainement celle qu'Aristote critique, lui reprochant de ne pas indiquer la cause, plutôt que celle qu'il suggère lui-même, qui paraît être élaborée à partir d'un cas particulier, la quadrature d'une aire rectangulaire. Mais cette dernière caractéristique, un défaut de notre point de vue, n'a guère d'importance pour Aristote : ce qu'il discute, avec cet exemple, ce n'est pas la quadrature des aires, c'est la manière de définir.

On peut donc imaginer qu'il en allait de même dans la théorie des proportions à l'époque où il rédigeait les *Topiques*. La définition de la proportionnalité pouvait être quelque chose de très clair, mais aussi de très flou, du genre : « c'est l'identité des rapports » ou « (A, B, C, D sont en proportion si A est à B comme C est à D ». Ainsi Archytas, ami de Platon, dans son célèbre fragment sur les trois médiétés en musique, définit la « moyenne géométrique » de la manière suivante :

> « [Il y a moyenne] géométrique quand [les trois termes] sont tels que le premier est relativement au deuxième comme le deuxième relativement au troisième »[95].

Ces affirmations sont certes claires, mais n'expliquent pas comment, dans un exemple précis, par exemple dans la situation que décrit Aristote, on établit précisément l'identité des rapports. A partir d'un cas particulier là aussi — le maniement des rapports numériques, j'y reviendrai[96] — le Stagirite pouvait faire la suggestion que la cause est ici l'identité des anthyphérèses. Il est difficile d'aller plus loin pour soutenir l'interprétation alternative et plutôt minimale des témoignages aristotéliciens que je viens de reprendre ici, mais il semble qu'elle n'est ni plus sûre, ni plus improbable que celle de Becker.

Pour le dire autrement, l'hypothèse d'une théorie anthyphérétique avec définitions explicites, appliquée aussi bien aux grandeurs commensurables qu'incommensurables dans des preuves par distinction de cas, en particulier pour le théorème de permutation, ne me paraît nullement s'imposer à partir de ces seuls témoignages. *A contrario,* une telle hypothèse entraîne plusieurs difficultés qu'on a tendance, me semble-t-il, à sous-estimer[97].

4. Une telle théorie suppose une importante thématisation des *multitudes* : le nombre de fois que la plus petite grandeur (resp. un des restes produits) mesure la plus grande (resp. le reste

---

[94] *De anima*, II, 2, 413 a13-20. Trad. E. Barbotin légèrement modifiée. Paris, Belles-Lettres, 1966, p. 32.
[95] V. [Vors.], DK 47 B2, t. I, p. 436, l. 5-7; [Dumont, 1988], p. 536.
[96] V. *infra,* C, en particulier la fin du § 7.
[97] Dans ce qui suit je me contente de résumer [Eucl., *Él.,* II, 1994], pp. 519-521.

précédent) pour suppléer l'absence de notation indicielle. Comme on le voit dans les preuves de al-Mâhânî ou de al-Khayyâm, les démonstrations anthyphérétiques portent seulement sur les (deux ou trois) premières étapes de la procédure, suivies d'une induction informelle qu'indiquent des marqueurs comme « et ainsi de suite », « et cela étant indéfiniment poursuivi » … Ainsi un résultat comme celui que mentionnent les *Topiques* devient intuitivement très clair une fois introduite la définition anthyphérétique, mais pas vraiment démontré surtout si le rapport n'est pas numérique. Cette intervention d'un « infini en acte » apparente l'affirmation du Stagirite à une remarque de portée heuristique plutôt qu'à une référence historique renvoyant à une preuve complètement développée dans un traité mathématique de type *Éléments* par exemple.

5. On ne doit pas perdre de vue que les mathématiciens des pays d'Islam partisans de la théorie anthyphérétique n'établissent pas la totalité de la théorie des proportions sur cette base. Ils se contentent de montrer l'équivalence de leurs Définitions avec celles d'Euclide et donc d'en déduire que les choses démontrables à partir des unes ou des autres sont les mêmes. Mais une telle démarche de réduction n'est pas envisageable si l'on croit que cette théorie anthyphérétique a été développée (par Théétète par exemple[98]) avant celle du Livre V. Il aurait alors fallu établir les principaux résultats concernant les proportions à partir des définitions anthyphérétiques ce qui, comme on le voit dans la reconstruction de Becker elle-même, peut s'avérer passablement laborieux.

6. De plus, si l'on définit le rapport comme le "résultat" de la procédure d'anthyphérèse, encore faut-il que celle-ci soit effective. Ce point est rarement évoqué car les partisans de la théorie anthyphérétique raisonnent plus ou moins explicitement (même lorsqu'ils affirment le contraire) dans un cadre théorique qui est celui des nombres réels (positifs) et de leur développement en fractions continues. Comment définir le rapport (historiquement très important) entre un cercle et le carré décrit sur son diamètre en termes d'anthyphérèse ? Dans ce cas, celle-ci n'est guère praticable au-delà de la première étape. De fait, elle n'est effective qu'avec des nombres et des segments de droites. A partir de là, on peut l'étendre, de manière indirecte, grâce à l'application des aires, aux aires (resp. aux volumes) dont on sait faire la quadrature (resp. la cubature), mais c'est plutôt limité.

7. Dans le même ordre d'idées comment établir effectivement l'identité de deux anthyphérèses dans le cas de rapports non numériques, autrement dit dans le cas où la procédure ne s'arrête jamais ? Il faudra prouver que la suite des quotients partiels successifs est périodique, ce qui d'après un résultat de Lagrange (1770) ne vaut que pour des irrationnels quadratiques. C'est pour cette raison que Fowler les privilégie dans son étude, mais les mathématiciens grecs ont bien vite rencontré d'autres types de rapports numériquement non exprimables, par exemple en stéréométrie ou dans le traitement des figures à éléments courbes.

[98] C'est ce que suggère Becker. Van der Waerden et Knorr sont encore plus affirmatifs.

Même si le rapport, défini par la procédure, correspond à une suite périodique, comment le démontrer : partant de deux grandeurs (G_1, G_2) et ayant abouti, après un certain nombre de retranchements réciproques, à un couple de restes (R_n, R_{n+1}) on devra établir, sans pétition de principe, la proportion $G_1 : G_2 :: R_n : R_{n+1}$. Les partisans de la théorie anthyphérétique la justifient généralement en remarquant que la « même situation géométrique » se reproduit à l'identique, autrement dit que les couples (G_1, G_2) et (R_n, R_{n+1}) s'interprètent de la même manière dans deux figures semblables, par exemple respectivement comme côté et diagonale de carrés ou de pentagones réguliers[99].

Cela revient à postuler la proportionnalité des côtés correspondants dans les figures semblables. Intuitivement cela n'a rien de surprenant, mais il est difficile de fonder correctement la théorie des proportions sur une propriété qui devrait en être déduite. La "répétition géométrique" apparaît au mieux comme un élément heuristique.

8. Il faut donc distinguer la manipulation des rapports, les procédures de calcul ou d'approximations, les considérations heuristiques d'une part et l'élaboration d'une théorie procédant par définition et déduction à partir des principes d'autre part. L'anthyphérèse est en usage chez les mathématiciens grecs, c'est lisible chez Euclide. Aristarque de Samos et Archimède l'ont très certainement utilisée comme procédé de troncature pour fournir des approximations de rapports entre grands nombres[100]. Il est possible qu'elle ait joué un rôle dans l'approximation de rapports non numériques, mais même ce point n'est pas totalement assuré.

Nous n'avons l'écho d'aucune démonstration d'irrationalité par anthyphérèse (infinie) dans les mathématiques grecques. C'est un argument *a silentio* mais il ne sert à rien d'accabler Euclide, puis les commentateurs, comme le fait D. Fowler, en leur reprochant d'avoir fait "disparaître" l'anthyphérèse des mathématiques grecques. A strictement parler, c'est faux : l'anthyphérèse est utilisée dans les *Éléments*; elle est connue de plusieurs auteurs hellénistiques (Aristarque de Samos, Archimède, Ératosthène de Cyrène). Plus tard, nous la retrouverons chez le péripatéticien Adraste et les auteurs néo-pythagoriciens Théon de Smyrne et Nicomaque et, d'une certaine manière, chez Pappus. Aucun ne mentionne une hypothétique théorie anthyphérétique des rapports au sens de Becker. Mais doit-on leur reprocher de dissimuler quelque chose qui n'a peut-être jamais existé ?

9. J'ajouterai un dernier point qu'il est impossible de développer ici, mais qui explique aussi bien le succès de la thèse de Becker que mon scepticisme. La reconstruction de l'histoire de la théorie des proportions est, avec celle de la découverte puis de l'étude des irrationnelles, la

---

[99] Ce sont les deux exemples les plus souvent mentionnés. Ils correspondent aux nombres irrationnels $\sqrt{2}$ et $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ dont les développements en fraction continue sont effectivement de périodes très courtes :

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots], \phi = [1, 1, 1, 1, \ldots],$$

peut-être même trop courtes pour que le phénomène de périodicité soit perceptible.

[100] V. Itard, J., *Les livres arithmétiques d'Euclide*. Paris, Hermann, collection Histoire de la pensée, X, 1961, pp. 26-32.

pièce maîtresse d'un certain mode de lecture du traité d'Euclide que j'appelle *archéologique* et qui, à partir des *Éléments* (en s'appuyant sur ce que sont censées être leurs « anomalies), vise à reconstituer l'histoire des mathématiques grecques préeuclidiennes. Cette entreprise est au moins aussi ancienne que Paul Tannery et doit beaucoup à Oskar Becker. Mais j'ai consacré une bonne partie de ma thèse ([Vitrac, 1993]) à montrer que ce mode d'interprétation, au demeurant stimulant, n'est pas nécessaire pour rendre compte des particularités du texte euclidien. Dès lors, je ne vois pas non plus la nécessité d'en maintenir l'une des composantes essentielles, l'hypothétique théorie anthyphérétique préeudoxienne proposée par Becker.

C. Anthyphérèse et rapports dans les mathématiques grecques

1. Pour achever cette analyse, et par contraste avec les incertaines reconstructions des mathématiques de l'époque préeuclidienne, il convient de rappeler la place de l'anthyphérèse dans les textes mathématiques grecques *conservés* qui me paraît, elle aussi, sous-estimée ou mal interprétée. Deux pièces essentielles constituent ce dossier : **1**. Les usages de l'anthyphérèse dans les *Éléments*; **2**. Les liens entre l'anthyphérèse et la classification des rapports telle qu'elle est présentée chez Nicomaque. Leur conjonction suggère l'idée que la procédure fonde, d'une certaine manière l'arithmétique euclidienne, et la théorie des rapports numériques; elle montre aussi pourquoi la proportionnalité ne peut pas être définie comme identité des anthyphérèses dans une approche réductionniste comme l'est celle des *Éléments*. Reprenons chacun de ces points en commençant par le second.

2. Le schéma ci-dessous illustre les différentes façons de comparer deux nombres telles que Nicomaque de Gérase les distingue, ce que l'on retrouve dans certaines scholies du Livre V et chez plusieurs de nos commentateurs médiévaux.

Si deux nombres (A, B) ne sont pas égaux et si ce n'est pas le cas que l'un mesure des deux mesure l'autre, ils vérifient (selon que A > B ou B > A) l'une des égalités suivantes :

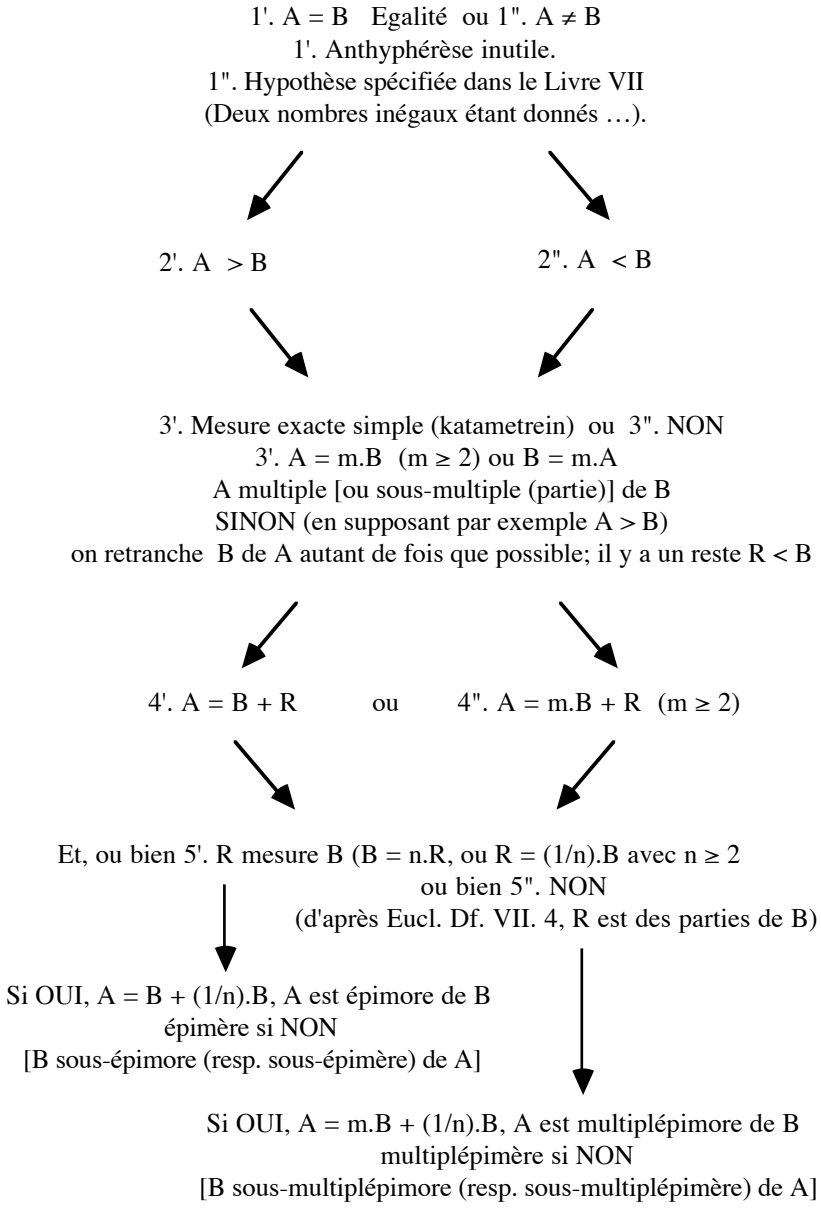
(**i**) $A = B + R$ ou $A = m.B + R$ avec $R < B$ ou

(**ii**) $B = A + R'$ ou $B = m.A + R'$ avec $R' < A$.

Supposons (**i**). Puisque R < B c'en est une ou des parties selon que R mesure B ou non.
Et pour exprimer A en fonction du seul B, il faut exprimer R en fonction de B, autrement dit savoir quelle(s) partie(s) R est de B. D'où la réciprocité caractéristique de l'anthyphérèse. On mesure le plus petit nombre (ou la plus petite des grandeurs), B, par le premier reste, R. On constate immédiatement qu'en considérant seulement les deux premières étapes de l'anthyphérèse, tenant compte de ce que $m = 1$ ou $m \geq 2$, et en distinguant les cas où B (resp. R) mesure ou ne mesure pas A (resp. B), nous obtenons les catégories fondamentales de la classification des rapports numériques de Nicomaque.

3. Les rapports numériques (A : B) dont l'anthyphérèse ne comporte que trois étapes sont encore assez simples : si $A = m.B + R$ il suffit, pour que cela se produise, que le rapport (B :

R) soit épimore, par exemple de la forme (n : n - 1) et, dans ce cas, A = [(m + 1) - (1/n)].B. Il s'agit des compléments de parties aliquotes par rapport à un entier, comme 5 : 3 (= 2 - (1/3)), 7 : 4 (= 2 - (1/4)) … La plupart des exemples donnés par Nicomaque pour illustrer les espèces "épimère" ou "multiplépimère" sont de cette sorte.



4. Cette réflexion sur les liens entre anthyphérèse et engendrement des différentes espèces de rapports numériques a été poussée assez loin comme on le voit avec les règles d'Adraste[101]. Pour fixer les idées, prenons par exemple le rapport (375 : 23) et, pour le classer, appliquons lui l'algorithme d'anthyphérèse. Libellées en termes modernes, nous obtenons une suite d'opérations arithmétiques :

a) 375 : 23 = **16** + (7 : 23);

b) 23 : 7 = **3** + (2 : 7);

[101] V. *infra,* § 5 et aussi [Eucl., *Él.,* II, 1994], pp. 492-493.

c) 7 : 2 = **3** + (1 : 2);

d) 2 : 1 = **2**.

Soit, dans la notation des fractions continues 375 : 23 = [16, 3, 3, 2]. Mais si l'on veut conserver les formulations anciennes, nous introduirons la séparation et l'inversion d'un rapport, manipulations des termes définies au début du Livre V des *Éléments* (Df. V. 15 et 13 respectivement) lesquelles, au rapport (A : B), associent respectivement les rapports (A - B : B) et (B : A). Partant de (375 : 23) on le séparera autant de fois que possible soit 16 fois :

$$(375 : 23) \xrightarrow{\text{sép.}} (352 : 23) \xrightarrow{\text{sép.}} (\ldots) \cdots \ldots (30 : 23) \xrightarrow{\text{sép.}} (7 : 23)$$

16 séparations de rapport

Un reste (R = 7), inférieur à B (= 23) étant atteint, on appliquera l'inversion du rapport :

$$(7 : 23) \xrightarrow{\text{inv.}} (23 : 7)$$

On procédera de même avec le rapport (23 : 7) et 3 séparations seront possibles qui conduisent au rapport (2 : 7), lequel inversé à son tour donne (7 : 2) lequel, après 3 séparations et inversion donne le rapport (2 : 1) lequel, enfin, après séparation, donne le rapport identique (1 : 1). Le lecteur, sur cet exemple, se convaincra facilement de deux choses :

• Toute anthyphérèse numérique se laisse décrire comme une série de manipulations successives, d'abord une ou des séparations, puis une inversion, puis une ou des séparations, puis une inversion … jusqu'à parvenir au rapport identique (a : a).

• Inversement, en partant du rapport identique, on pourra engendrer, par une suite de compositions de rapport (l'opération inverse de la séparation[102]) et d'inversions, n'importe quel rapport numérique. Par exemple en partant de (1 : 1) et en faisant une composition, puis une inversion, puis trois compositions, puis une inversion, puis trois compositions, puis une inversion, puis seize compositions, on retrouve le rapport (375 : 23).

5. Comme le disent Nicomaque, Théon de Smyrne et Pappus, mais aussi Ibn al-Haytham[103], le *rapport identique* est l'*élément* des rapports numériques au sens où tout rapport est engendré à partir de lui selon une loi de production simple (qui n'est autre que l'inversion de l'anthyphérèse appliquée à ses deux termes. Il n'y a guère de doute que l'analyse précédente, faisant le lien entre les différentes espèces de rapports, leur engendrement, et la procédure d'anthyphérèse, ait été faite dans l'Antiquité. Elle est à la base de ce que, à la suite de Théon, j'appellerai les règles d'Adraste. Étant donnés trois termes (A < B < C) en progression continue A : B :: B : C, on en forme trois autres (D, E, F) en posant :

$$D = A; \qquad E = A + B; \qquad F = A + 2B + C.$$

---

[102] A ne pas confondre avec la notion de « rapport composé de rapports » qui correspond à ce qu'un moderne considère comme une opération binaire ($r_1 * r_2 \rightarrow R$], alors que la composition d'un rapport porte sur les termes d'un seul et même rapport. Euclide l'introduit dans la Df. V. 14.

[103] Pour les 3 auteurs grecs, v. les références *infra,* dans les notes 105 et 108. Pour Ibn al-Haytham, v. [Sude, 1974], p. 170, l. 19-20 et p. 173, l. 17-18; p. 173, l. 26—p. 174, l. 2.

On vérifie très facilement que (D, E, F) sont eux aussi en proportion continue[104] et, par définition, le rapport de E à D est le rapport composé de celui de B à A. Nicomaque et Théon exposent avec force détails comment ces règles permettent d'engendrer tous les rapports numériques d'une manière ordonnée : d'abord les rapports multiples (dans l'ordre : double, triple, quadruple …) puis les épimores, les multiplépimores[105] … On ne voit pas bien pourquoi ces auteurs raisonnent avec trois termes plutôt que deux seulement. Sans doute s'inspirent-ils d'une source qui s'intéressait à l'engendrement des différentes médiétés, y compris les médiétés géométriques dans n'importe quel rapport donné. Nicomaque n'indique aucune source. C'est grâce à Théon que nous savons que ces questions avaient été traitées par le péripatéticien Adraste d'Aphrodise[106], lui-même développant des considérations sur les médiétés dues à Ératosthène de Cyrène[107], le célèbre savant-bibliothécaire à Alexandrie et correspondant d'Archimède, dans la seconde moitié du III^{e} siècle avant notre ère. C'est aussi clairement ce que suggère l'exposé de Pappus, moins détaillé quant à l'engendrement des espèces de rapports, mais qui a conservé ce cadre initial de la théorie des médiétés[108]. Le contexte, tant pour Adraste que pour Ératosthène, semble avoir été l'exégèse ou le commentaire du *Timée* de Platon.

6. Cette analyse de la procédure d'anthyphérèse était-elle connue dès avant Ératosthène, à l'époque d'Euclide par exemple ? Pour ma part je crois que oui et ceci explique certaines particularités du Livre VII des *Éléments*. La définition euclidienne de la proportionnalité numérique (Df. VII. 21) ne fait pas appel à l'anthyphérèse mais aux notions de "multiple", "partie", et "parties", introduites précédemment dans les Définitions VII. 3, 4, 5 :

> N°21 : « Des nombres sont en proportion quand le premier, du deuxième et le troisième, du quatrième, sont équimultiples, ou la même partie, ou les mêmes parties ».
> N°3 : « Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, quand il mesure le plus grand ».
> N°4 : « Et des parties, quand il ne le mesure pas ».
> N°5 : « Et un multiple, le plus grand du plus petit, quand il est mesuré par le plus petit ».

Ces énoncés soulèvent de nombreux problèmes[109] mais je me contenterai ici de faire remarquer qu'Euclide a retenu les trois cas particuliers de « rapport » qui sont les « éléments »

---

104 V. [Eucl., *Él.,* II, 1994], p. 492.
105 V. [Nic. Ar.], L. I, Ch. XXIII, §§ 8-17, p. 66, l. 15—p. 70, l. 15 et L. II, Ch. I-V, p. 73, l. 1—p. 82, l. 1 et [Bertier, 1978], pp. 91-101; [Theo Exp.], L. II, §§ LI-LII, p. 107, l. 10—p. 111, l. 13 et [Dupuis, 1966], pp. 177-183.
106 V. [Theo Exp.], p. 106, l. 16, p. 107, l. 24) et [Dupuis, 1966], p. 175, p. 177.
107 [Theo Exp.], p. 107, l. 15, l. 23; p. 111, l. 10 et [Dupuis, 1966], p. 177, p. 183.
108 V. [Papp., III], p. 88, l. 5—p. 104, l. 13 et [Ver Eecke, 1982], pp. 65-80.
109 V. [Eucl., *Él.,* II, 1994], pp. 251-254 et pp. 262-267.

de tous les autres dans la classification de Nicomaque, soit en reprenant les termes de la description précédente : le "multiple" quand m ≥ 2; la "partie" et les "parties" (resp. "μέροϛ", "μέρη" chez Euclide) qui correspondent respectivement aux suffixes "-more" (-μόριοϛ) des rapports "épi-mores" ou "multipliépi-mores" et "-mère" (-μερέϛ) des rapports "épi-mères" ou"multipliépi-mères" selon que R mesure (resp. ne mesure pas) B. Leurs combinaisons couvrent donc les 10 catégories de la classification.

7. Par ailleurs nous avons vu que la procédure d'anthyphérèse se laisse décomposer en une suite alternée de séparations et d'inversions de rapports, manipulations introduites par Euclide dans le cadre (des grandeurs) du Livre V mais aussi utilisées de manière analogique pour les nombres dans les Livres IX et X. Comme tout rapport se laisse engendrer à partir du rapport identique en inversant la procédure (c'est-à-dire en faisant autant de compositions de rapport qu'il y avait de séparations) il est clair que si deux rapports (A, B), (C, D) donnent lieu à la même anthyphérèse, ils seront engendrés de la même manière à partir de deux expressions du rapport identique [par exemple (1, 1) et (2, 2)] et, puisque la proportionnalité est compatible avec la composition et l'inversion, ces rapports seront les mêmes (A : B :: C : D). Autre façon de le dire : la condition proposée comme définition par Aristote dans le témoignage des *Topiques* est clairement nécessaire, déjà en se limitant aux rapports numériques.

8. Les deux précédentes remarques expliquent pourquoi Euclide n'a pas introduit les 10 espèces de rapports numériques, et n'a pas non plus défini la proportionnalité numérique par l'identité des anthyphérèses : c'est que sa démarche opère une réduction maximale, que les 10 espèces se ramènent par combinaison à trois d'entre elles : "multiple", "partie", "parties" et que l'anthyphérèse se laisse décomposer en opérations plus élémentaires : la séparation et l'inversion d'un rapport. C'est également ce qui l'oblige à distinguer deux cas de figures dans les Propositions VII. 2 et X. 3 selon que le plus petit terme mesure exactement le plus grand ou non. La mesure simple n'est qu'une succession simple de séparations; il n'y a pas réciprocité. Le rapport engendré est de type "multiple" ou partie". Les commentateurs médiévaux (an-Nayrîzî, al-Mâhânî, Ibn al-Haytham, al-Khayyâm) maintiennent tous la distinction de ce cas particulier, inutile aux yeux d'un Moderne parce qu'il utilise une écriture symbolique et non plus une langue naturelle.

9. Malgré les choix euclidiens, deux indices indiquent clairement l'importance de la procédure d'anthyphérèse pour l'arithmétique des *Éléments* :

• la place initiale des Propositions VII. 1-3 en tête des Livres arithmétiques (sans oublier le caractère également liminaire des Propositions X. 2-4, complètement parallèles du point de vue opératoire[110], mais portant sur les grandeurs).

• La curieuse structure de la preuve de la Proposition VII. 4 :

« Tout nombre est soit une partie soit des parties de tout nombre, le plus petit du plus grand »,

[110] V. [Eucl., *Él.,* III, 1998], p. 97.

étonnante dès son énoncé puisqu'il semble que la conjonction des Définitions VII. 3-4 suffise à justifier cette affirmation.

Le schéma de preuve mérite qu'on s'y attarde un peu. Étant donnés deux nombres A, BC, avec A > BC, on examine successivement et dans cet ordre les cas suivants :
(**i**) (A, BC) premiers entre eux
(**ii**) ou bien (A, BC) non premiers entre eux et A mesure BC
(**iii**) ou bien A ne mesure pas BC et ils ont alors un PGCD, soit le nombre D, plus petit que A.
La conclusion est que A est une partie de BC dans le cas (**ii**), des parties, dans les cas (**i**) et (**iii**), ce qui n'est pas en conformité avec l'ordre de l'énoncé. Pour cela il aurait fallu distinguer les cas de figure d'abord selon que A mesure B ou non, puis introduire le fait qu'ils sont premiers entre eux seulement dans cette deuxième éventualité. Mais il n'est pas difficile de voir que la preuve de la Proposition VII. 4 est calquée sur le schéma présenté dans les Propositions anthyphérétiques VII. 1-2 : le cas (**i**) correspond à la situation de VII. 1, le cas (**ii**) à celle de la mesure simple examinée en premier lieu dans VII. 2 et le cas (**iii**) est bien entendu celui dans lequel existe un PGCD déterminé par la procédure générale de VII. 2.

Pour résumer, c'est le déroulement de la procédure d'anthyphérèse qui conditionne celui de la preuve de VII. 4. Or, dans l'économie du Livre VII, celle-ci est parallèle aux importantes Propositions X. 5-6. Ces dernières indiquent à quelle condition (nécessaire et suffisante) deux grandeurs ont comme rapport mutuel celui d'un nombre à un nombre. La Proposition VII. 4, de son côté, précise le caractère élémentaire, au sens fort du terme (*i.e.* fondationnel), des relations "partie" et "parties" au sein des rapports numériques dits de plus petite inégalité (*i. e*. de type A : B quand A < B). C'est d'ailleurs ce qu'a bien compris Khayyâm[111].

10. De ces indications quelque peu impressionnistes je crois pouvoir en tirer la conclusion que l'anthyphérèse n'est pas méconnue par l'auteur des *Éléments,* qu'elle lui sert non seulement à déterminer le PGCD (resp. la plus grande commune mesure) d'une famille finie de nombres (resp. de grandeurs commensurables) et à tester la coprimarité (resp. la commensurabilité) de deux nombres (resp. grandeurs), mais qu'elle participe pleinement aux fondements de sa théorie des rapports numériques. Qu'en revanche le fait qu'elle se laisse elle-même décomposer en manipulations plus simples lui interdit de figurer explicitement dans la Définition de la proportionnalité. Je ne crois pas pour autant qu'il s'agisse là de traces fossiles d'une théorie antérieure à reconstruire.

11. Même si l'on n'accepte pas ma lecture des Livres arithmétiques, qu'on lui reproche d'être conditionnée par une confrontation avec les indications des auteurs néo-pythagoriciens et que rien ne permet, de manière indiscutable, de faire remonter celles-ci au-delà d'Ératosthène,

[111] V. *supra,* II, § 3.

reste que ladite lecture est parfaitement faisable par n'importe quel lecteur mathématicien qui connaît les deux traditions, celles d'Euclide et de Nicomaque.

Il me semble que Thâbit Ibn Qurra, réviseur de la traduction des *Éléments* par Ishâq ibn Hunayn, et lui-même traducteur de Nicomaque[112] était très bien placé pour la faire. En conséquence cette double connaissance peut amplement justifier, à elle seule, l'indication que lui prête al-Mâhânî[113], sans qu'il soit nécessaire de postuler un hypothétique traité ou commentaire grec traitant de la théorie anthyphérétique des rapports auquel Thâbit aurait eu accès. Certes la chose n'est pas impossible. On peut même se demander s'il avait eu l'occasion d'étudier le Livre VIII des *Topiques* d'Aristote[114]. Le cas échéant, il a pu y trouver un élément supplémentaire d'inspiration pour recommander le développement d'une telle théorie. Je laisse à d'autres le soin d'explorer cette piste : mon propos ici visait simplement à montrer que, même en l'absence d'autres sources que les classiques mathématiques grecs tels qu'Euclide et Nicomaque, il n'y a rien d'extravagant à ce que l'approche anthyphérétique, déjà présente selon moi dans la théorie grecque des rapports numériques, soit étendue au cas des rapports de grandeurs incommensurables, surtout dans un contexte savant où l'on n'est pas satisfait des Définitions eudoxo-euclidiennes V. 5, 7.

V. Conclusions : les motivations de al Khayyâm

1. La littérature moderne consacrée à la théorie anthyphérétique de la proportionnalité chez les mathématiciens des Pays d'Islam décrit la situation d'une manière un peu simplificatrice : les Médiévaux auraient été globalement non satisfaits par la présentation euclidienne et lui auraient préféré l'approche anthyphérétique. Dans cette opposition et cette adhésion on aurait en quelque sorte les faces négative et positive d'une position caractéristique de la tradition médiévale d'expression arabe. Certes on sait qu'il y eut des exceptions, comme al-Gayyânî, mais cette position aurait été celle d'al-Mâhânî, an-Nayrîzî, Ibn al-Haytham et al-Khayyâm[115]. Une pareille unanimité — par contraste avec la tradition grecque — réclame une explication et il faut donc mettre en évidence l'intérêt des définitions anthyphérétiques du rapport et de la proportion et trouver des motifs à une telle adoption générale.

---

[112] V. [Sezgin, 1974], p. 272, N°31 et p. 165.

[113] V. *supra,* III, § 7

[114] Ce traité a été traduit du grec en syriaque par Ishâq ibn Hunayn, cette version servant de base à une traduction arabe, exécutée par Yahya ibn ‘Adî († 974). Deux autres traductions arabes du même traité sont également attestées par les sources bibliographiques dont une au IX^{e} s. Yahya ibn ‘Adî a même utilisé une partie du *Commentaire* d'Alexandre d'Aphrodise, en particulier sur les L. V à VIII. Selon M^{r}. A. Elamrani-Jamal, ces extraits de commentaires grecs ont eux aussi été traduits (en syriaque par Ishâq ibn Hunayn, en arabe par Abû Uthmân al-Dimashqî). V. la notice qu'il a consacrée aux *Topiques* dans la portion « L'*Organon*. Tradition syriaque et arabe » de l'article “Aristote de Stagire” dans [DPhA, I], pp. 525-526. Il n'est donc pas impossible que Thâbit ait connu notre célèbre témoignage des *Topiques,* voire l'interprétation qu'en donnait Alexandre (Cf. *supra,* IV, A, § 1).

[115] L'origine de cette description semble être le travail pionnier de Plooij ([Plooij, 1950], p. 57). On la retrouve sans grandes modifications dans [Vahabzadeh, 1999], pp. 275-277.

2. La description me paraît simplificatrice : elle correspond assez bien à ce que nous pouvons percevoir des attitudes d'al-Mâhânî et d'al-Khayyâm mais, si an-Nayrîzî et Ibn al-Haytham interprètent la Définition euclidienne du rapport en termes anthyphérétiques, le second ne la développe pas en théorie. Il préfère démontrer autrement les assertions contenues dans les Définitions V. 5, 7, ce qu'an-Nayrîzî a réprouvé (par anticipation). Bref l'unanimité n'est pas si évidente, sauf peut-être à trouver l'exposé euclidien inadéquat, mais j'ai essayé de montrer qu'il y avait de bonnes raisons à cela, en particulier textuelles. Cela dit, même sans les ajouts qu'elle a subis, la présentation euclidienne a manifestement paru artificielle aux Médiévaux. Nos commentateurs soulignent d'emblée que les rapports sont exprimables ou non exprimables et que ce second cas introduit des difficultés. Euclide a différé autant que faire se peut l'introduction de cette distinction; l'exposé général de la théorie géométrique des proportions précède l'arithmétique, la première des sciences du quadrivium … bref la structure globale du traité a paru particulièrement opaque[116].

Dans l'usage pédagogique qui semble avoir été de plus en plus celui des *Éléments,* l'introduction de la théorie anthyphérétique permettait d'anticiper un peu sur les théories des nombres et des irrationnelles, sans trop bouleverser l'architecture de l'ensemble. A cet égard al-Khayyâm est certainement le plus « conservateur »[117]. L'adoption d'une telle approche, comme j'ai essayé de l'expliquer, n'avait rien d'improbable, compte-tenu du rôle plus ou moins explicite joué par l'anthyphérèse dans les arithmétiques euclidienne et nicomaquéenne.

3. Du point de vue moderne, la définition anthyphérétique met immédiatement en évidence le fait qu'un rapport non exprimable $R = [m_1, m_2, \ldots, m_p, \ldots]$ est limite d'une suite de rapports exprimables ou rationnels, et même limite commune de deux suites adjacentes, respectivement croissante et décroissante, $(r_{2k+1} = [m_1, m_2, \ldots, m_{2k+1}])$, $(r_{2k} = [m_1, m_2, \ldots, m_{2k}])$ vérifiant :

$$\forall\, k : r_{2k+1} < R < r_{2k+2} \text{ et } \lim (r_{2k+2} - r_{2k+1}) = 0.$$

Cet aspect "approximation" a-t-il a joué un rôle dans l'adoption de la Définition anthyphérétique par les mathématiciens des pays d'Islam, comme on le dit quelquefois[118] ?

Rien ne me semble aller dans ce sens, en particulier dans le cas de al-Khayyâm : celui-ci réserve la définition anthyphérétique au cas dit « de type géométrique ». Pour les rapports numériques il adopte la théorie du Livre VII : si un rapport de deux grandeurs peut s'exprimer sous la forme M : N (avec M, N deux entiers), al-Khayyâm ne s'embarrassera pas de "fraction continue"; il privilégiera l'expression la plus simple du rapport[119]. De même dans son Livre III, quand il s'agira d'associer une certaine "quantité" ou "grandeur" à un rapport non

[116] V. aussi [Vitrac, 2000], p. 81, n. 99.

[117] V. *supra,* II, fin du § 4.

[118] V. [Youschkevitch, 1976], p. 84; [Vahabzadeh, 1997b], p. 254-255; [Vahabzadeh, 1999], p. 291.

[119] Ce privilège de l'expression sur l'approximation vaut peut-être moins pour al-Mâhânî qui envisage des anthyphérèses finies et ne fait un sort particulier qu'aux rapports issus de la mesure exacte simple. V. *supra,* III, §§ 4 et 6.

numérique[120], al-Khayyâm fera appel à un cas particulier du postulat de la quatrième proportionnelle et non pas à un argument élaboré à partir de la limite commune aux deux suites adjacentes des réduites d'ordres pair et impair. Compte-tenu de la manière dont il a justifié ledit postulat, c'est donc en s'appuyant sur l'indéfinie dichotomie de la grandeur — et donc sur une propriété de densité — qu'il croit pouvoir fonder cette association, pas sur un argument de complétude comme le ferait un Moderne. En fait, pour trancher la question du rôle des approximations, il faudrait savoir si les mathématiciens d'expression arabe ont effectivement engendré des valeurs approchées de nombres irrationnels ou de solutions d'équations par approximations anthyphérétiques ou non[121]. J'ignore si tel est le cas et si oui c'est évidemment un argument important. Mais je n'ai rien vu de tel dans la littérature secondaire.

4. Selon le dernier éditeur du *Commentaire,* l'une des raisons de l'adoption des Définitions anthyphérétiques réside dans le fait que celles-ci permettent de considérer le rapport entre deux grandeurs (y compris incommensurables) indépendamment de son implication dans une proportion (relation à 4 places au moins), contrairement à ce qui se passe avec la Définition V. 5 des *Éléments.* En conséquence le rapport n'est plus seulement une *relation,* comme chez Euclide, mais un objet mathématique « en soi », en fait une quantité numérique[122].

5. La formulation est un peu maladroite et sans doute hyperbolique : on ne doit pas comparer une définition (anthyphérétique) du *rapport* avec la Définition euclidienne de la *proportionnalité* (à l'aide des équimultiples). Chez les Grecs le premier désigne une relation à deux places, la deuxième décrit une situation mettant en cause 2n ($n \geq 2$) objets. Là encore, il faut souligner une légère différence entre al-Mâhânî et d'al-Khayyâm : le premier définit le rapport de manière anthyphérétique, le second pas vraiment : les définitions "véritables" portent sur la proportionnalité et le fait d'avoir un rapport plus grand. C'est en commentant la Définition euclidienne du rapport (Df. V. 3) que Khayyâm, à l'instar d'an-Nayrîzî et Ibn al-Haytham, introduit l'interprétation anthyphérétique de la notion de rapport (dans le cas dit "géométrique"). La différence entre les deux auteurs tient peut-être seulement à la différence des genres littéraires : le texte d'al-Khayyâm se présente explicitement comme un commentaire des prémisses euclidiennes, celui d'al-Mâhânî est plutôt une monographie consacrée à la notion de rapport, certes motivée par l'exposé non satisfaisant des *Éléments,* mais qui en est davantage indépendant.

---

120 V. [Vitrac, 2000], pp. 88-89, 91-92.

121 Les historiens soulignent, à juste titre, le maniement des quantités irrationnelles, la résolution approchée d'équations par les mathématiciens des pays d'Islam; v. [Youschkevitch, 1976], pp. 80-81, 83; [Vahabzadeh, 1997b], pp. 262-263. Mais la question est de savoir le rôle joué par les procédures anthyphérétiques d'approximations. Pour des exemples de tels usages à partir de la Renaissance [Schwenter (1618), Wallis (1658), Euler (1737), Lagrange (1770), Legendre (1785), Gauss …] on consultera le chapitre 9 de [Fowler, 1987]. Un autre problème qui m'est impossible d'aborder est de savoir si les travaux d'expression arabe ont influencé ou non les travaux occidentaux, par exemple à la Renaissance.

122 V. [Vahabzadeh, 1997b], pp. 255-257; [Vahabzadeh, 1999], p. 291; pp. 294-295.

Bijan Vahabzadeh s'exprime comme si la théorie grecque des proportions ignorait la notion de rapport, indépendamment de celle de proportion. Bien entendu il n'en est rien. La Définition V. 4 en témoigne; la Définition V. 5, ne l'oublions pas, dit à quelles conditions des grandeurs sont « dans le même *rapport* » … Il n'y a pas de Définition du rapport numérique dans le Livre VII car celle-ci constituerait une véritable tautologie : les nombres sont précisément ce avec quoi les mathématiciens grecs expriment les rapports, quand ils sont exprimables évidemment[123]. Et, parce qu'ils ne le sont pas toujours, Euclide, dans sa Définition V. 3, s'est contenté d'une caractérisation très générale, non opératoire[124].

C'est cette incertaine généralité et l'absence de connexion effective entre la Df. du rapport et celle d'« être dans le même rapport » que les mathématiciens des Pays d'Islam ont refusé, en explicitant la notion de rapport à l'aide de la procédure d'anthyphérèse. L'assertion selon laquelle cette explicitation fait du rapport une « quantité numérique » est sans doute aussi un peu hyperbolique car, comme j'avais essayé de le montrer en analysant le Livre III du *Commentaire,* al-Khayyâm reste très prudent quand il évoque le caractère quantitatif ou numérique des rapports[125]. Il se réfugie derrière l'idée que ceci est une question de nature philosophique et principielle plutôt que géométrique.

6. Malgré ces petites incertitudes ou légères exagérations, l'affirmation de Bijan Vahabzadeh contient certainement une grande part de vérité. L'aspect quantitatif du rapport existe chez les Grecs, y compris dans les *Éléments* qui, sur ce point, ne se montrent guère cohérents. Ne serait-ce que par l'inévitable[126] juxtaposition des relations « être dans le *même* rapport » (ou les relations de relations ajoutées au texte comme l'"identité" ou la "similitude" des rapports) et « avoir un rapport *plus grand* ». A cet égard, on ne peut que partager l'insatisfaction des Médiévaux. La prééminence de la nature relationnelle et qualitative du rapport sur son aspect quantitatif est encore trop forte chez Euclide[127], au moins au niveau de l'expression.

J'ai dit ailleurs que l'élaboration d'une nouvelle théorie des proportions suppose que « l'état de la science mathématique réclame une telle mise en forme, soit par suite de la prise en compte d'objets nouveaux de plus en plus complexes qui entraîne une élévation du niveau

---

123 V. [Eucl., *Él.,* II, 1994], pp. 262-263. Et, comme j'ai essayé de le montrer dans la partie IV, l'approche grecque des rapports numériques ne méconnaît pas l'anthyphérèse.

124 *Ibid.,* pp. 37-38.

125 V. [Vitrac, 2000], p. 89. L'appréciation de [Youschkevitch, 1976], pp. 87-88, me paraît plus raisonnable.

126 Au sens où il y a besoin de l'inégalité des rapports pour établir des résultats sophistiqués généraux de théorie des proportions comme le prouvent les Propositions fondatrices V. 8-10. V. [Vitrac, 1993], pp. 184-197.

127 Elle est encore considérable chez an-Nayrîzî. V. son commentaire à la Df. V. 3bis : « Donc quand il se trouve que la relation qui existe entre les deux premières est la même que celle qui existe entre les deux dernières, on dit alors qu'il y a une relation de similitude dans les rapports; et s'il n'en est pas ainsi, il n'y aura pas alors de relation de similitude dans les rapports; et celle-ci est une qualité et non une quantité »; *Anar.,* p. 158, l. 4-8. Le texte latin, à cet endroit, dit exactement le contraire (« hec est quantitas et non qualitas »), mais ce n'est le cas ni dans le texte arabe (v. [*an-N.,* III, 2], p. 7), ni dans la traduction latine un peu plus bas, après qu'an-Nayrîzî ait donné quelques détails (v. *Anar.,* p. 158, l. 14 : « hec sunt qualitates et non quantitates »). Peut-être s'agit-il d'un lapsus — significatif — de la part de Gérard de Crémone ou de l'un de ses copistes.

d'abstraction[128], soit — et ce n'est évidemment pas contradictoire — qu'il y ait des changements dans les conceptions dominant en matière de preuve et de rigueur »[129]. Il me semble que c'est précisément ce que l'on observe chez nos commentateurs d'expression arabe. En particulier trois oppositions polaires passablement rigides mais constitutives de la tradition grecque des *Éléments* : celle de l'objet (mathématique) et de la relation, celle du nombre (discret) et de la grandeur (continue) et celle du déterminé et de l'indéterminé (au moins sous la forme de l'opposition fini / infini), s'y affaiblissent ou s'articulent autrement avec l'émergence d'une catégorie (mathématique et pas seulement philosophique) générale de la quantité, l'absorption progressive du rapport dans ladite catégorie, l'acceptation de quantité indéterminée ou « infinie en acte »[130], au moins d'un certain point de vue, comme le sont les développements anthyphérétiques. Ceux-ci en sont sans doute moins la cause que la manifestation. Ils témoignent aussi du primat de l'approche arithmétique des rapports déjà perceptible dans l'Antiquité tardive, en particulier dans les scholies anciennes au Livre V ou dans les considérations d'Eutocius sur la notion de « rapport composé de rapports »[131]. C'est en effet d'un Euclide partiellement réinterprété de cette manière dont ont hérité les savants des Pays d'Islam, et non de l'Euclide hellénistique "originel" que la philologie classique essaie de reconstituer. Il ne faut jamais le perdre de vue.

Bibliographie et abréviations

A. Éditions et traductions

1. Euclide

Euclidis Elementa, post Heiberg ed. E. S. Stamatis. Leipzig, Teubner, [*EHS*] :
I. El. I-IV (1969); II. El. V-IX (1970); III. El. X (1972); IV. El. XI-XIII (1973);
V, 1. El. XIV-XV, Scholia in lib. I-V (1977); V, 2. Scholia in lib.VI-XIII (1977).

The Arabic Tradition of Euclid's Elements : *Book V.* Ed. et trad. angl. par J. W. Engroff.
Cambridge Mass., Harvard University PhD. Dissertation, non publiée, 1980, [Engroff, 1980].

The first Latin Translation of Euclid's Elements commonly ascribed to Adelard of Bath.
Ed. H. L. L. Busard. Toronto, Pontifical Institute of Mediaeval Studies, 1983, [Busard, 1983].

The Latin translation of the Arabic version of Euclid's Elements commonly ascribed to Gerard of Cremona.
Ed. H. L. L. Busard. Leiden, E. J. Brill, 1984, [Busard, 1984].

The Mediaeval Latin Translation of Euclid's Elements *made directly from the Greek.*
Ed. H. L. L. Busard. Stuttgart, Franz Steiner, 1987, [Busard, 1987].

---

[128] Pensons aux grandeurs « doublement abstraites » d'al-Khayyâm; v. [Vitrac, 2000], pp. 92-93.
[129] V. [Eucl., *Él.,* II, 1994], pp. 521-522.
[130] Qu'il faille admettre des nombres infinis en acte était admis par Thâbit Ibn Qurra; v. [Pines, 1986], p. 426. Pour une première approche le lecteur peut se reporter au bel article sde vulgarisation de T. Lévy « Thâbit ibn Qurra et l'infini numérique » dans *Pour la Science,* N° Spécial *Les infinis,* Décembre 2000, pp. 48-52.
[131] V. [Vitrac, 2000], pp. 81-82, 94.

Les Éléments. Introduction générale par M. Caveing. Traduction et commentaires par Bernard Vitrac.
Collection Bibliothèque d'histoire des sciences. Paris, P. U. F. :
Vol. I : Introduction générale; Livres I à IV, [Eucl., *Él.,* I, 1990].
Vol. II : Livres V à IX, 1994, [Eucl., *Él.,* II, 1994].
Vol. III : Livre X, 1998, [Eucl., *Él.,* III, 1998].
Vol. IV : Livres XI-XIII, sous presse (publication fin 2001), [Eucl., *Él.,* IV, 2001].

2. Autres textes grecs anciens

Alexandre d'Aphrodise, *In Aristotelis Topicorum Libros Octo Commentaria,* ed. M. Wallies.
CAG 2_2, Berlin, 1891, [Alex. *in Top*.]

Archimède, *Œuvres,* éd. et trad. franç. par Ch. Mugler, 4 vol.
Collection des Universités de France, Paris, Belles-Lettres, 1970-1974, [Arch.].

Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia, vol. IV. Ed. J. L. Heiberg.
Leipzig, Teubner, 1912, [Hero, IV].

Nicomachi Gerasini Introductionis Arithmeticæ Libri II, Ed. R. Hoche.
Leipzig, Teubner, 1866, [Nic. Ar.]
Trad. française : *Introduction arithmérique*, par J. Bertier. Paris, Vrin, 1978

Pappi alexandrini collectionis quae supersunt, ed. F. Hultsch, Berlin, Weidmann, 1876-78 :
I. Libr. ii, iii, iv, v, rel. ; II. Libr. vi, vii, rel. ; III. 1. Libr. viii, rel., schol., suppl.; III. 2. indices ;
(réimpr. Amsterdam, A. M. Hakkert, 1965), [Papp.].
Trad. française : *La Collection mathématique,* par P. Ver Eecke. 2 vol. Bruges, Desclée de Brouwer.
Réimp. Paris, A. Blanchard, 1982.

Theonis Smyrnaei Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium.
Ed. E. Hiller. Lipsiae, in aed. B. G. Teubner, 1878, [Theo Exp.]
Trad. française : *Exposition des connaissances mathématiques utiles à la lecture de Platon,* par J. Dupuis.
Paris, 1892. Réimp. Bruxelles, Culture et Civilisation, 1966.

Die Fragmente der Vorsokratiker, Ed. Diels, H. & Kranz, W., 6e éd., Berlin.
Weidmann, 1951 (réimpr. Dublin / Zürich, 1968, 3 vol., [Vors.].
Trad. française : *Les Présocratiques,* J.P. Dumont (dir.). Bibliothèque de la Pléiade. Paris, Gallimard, 1988.

3. Commentateurs arabes

Al-'Abbâs ibn Sa'îd al-Gauharî, *Ziyadat fil-maqâla al-Hâmisa min kitâb Uqlîdis*.
Édition et traduction anglaise par G. De Young dans « Al-Jawharî's Additions to Book V of Euclid's *Elements* »,
Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften, Band 11, 1997, pp. 153-178.

Abû 'Abdallâh Muhammad ibn 'Isâ al-Mâhânî, *Sharh al-maqâla al-Hâmisa min kitâb Uqlîdis*.
Édition et traduction française dans
Vahabzadeh, B., *Trois commentaires arabes sur les concepts de rapport et de proportionnalité.*
Thèse de doctorat, sous la direction de R. Rashed, Université de Paris VII, 1997, non publiée.

Abû l-'Abbâs al-Fadl ibn Hâtim an-Nayrîzî, *Sharh kitâb Uqlîdis fi l-Usûl.*
Edité par R. O. Besthorn , J. L. Heiberg, puis G. Junge, J. Raeder et W. Thomson (Texte arabe et trad. latine) :
Euclidis Elementa ex interpretatione al'Hadschdschaschii cum Commentariis al' Nayrizii.
Hauniae, Lib. Gyldendaliana : I, 1 et 2 (= L. I), 1893-1897; II, 1 et 2 (= L. II et III), 1900-1905;
III, 1, 2 et 3 (=L. IV, V, VI), 1910-1932), [*an-N.*].

Trad. latine par Gérard de Crémone.
Editée par M. Curtze, *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii*
(in *Euclidis Opera omnia,* ed. I. L. Heiberg & H. Menge, Leipzig, Teubner, IX. *Supplementum,* 1899, [*Anar.*].

Nouvelle édition en cours :
Tummers, P. M. J. E., *Anaritius' Commentary on Euclid*. The Latin translation I-IV.
Artistarium Supplementa IX. Nijmegen, Ingenium Publishers, 1994.

Ahmad ibn Yûsuf ibn Ibrâhîm ibn ad-Dâya al-Misrî, *Kitâb fi n-Nisba wa-t-tanâsub*.
Trad. latine par Gérard de Crémone, *Liber Hameti de proportione et proportionalitate*. Édition, trad. angl. et comm. par O. P. Schrader dans *The 'Epistola De Proportione et Proportionalitate' of Ametus Filius Iosephi*. The University of Wisconsin, Ph. D., 1961.

Abû Nasr Muhammad ibn Muhammad ibn Tarhân al-Fârâbî, *Sharh al-mustaglaq min musâdarât al-maqâla al-ûlâ wa-l-hâmisa min Uqlîdis*. Trad. hébraïque par Moses ibn Tibbon dans Freudenthal, G., La philosophie de la géométrie d'al-Fârâbî : son commentaire sur le début du I^{e} livre et le début du 5^{e} livre des *Eléments* d'Euclide. *Jerusalem Studies in Arabic and Islam,* 11, 1988, pp. 104-219.

Abû 'Alî al-Hasan ibn al-Hasan Ibn al-Haytham, *Sharh musâdarât Uqlîdis*. Édition partielle, trad. angl. et comm. par B. H. Sude dans *Ibn al-Haytham's Commentary on the Premises of Euclid's* Elements : Books I-VI. Princeton University, Ph. D, 1974, [Sude, 1974].

Abû 'Abdallâh Muhammad ibn Mu'âd al-Gayyânî al-Qâdî, *Commentaire au Livre V des* Éléments.
Fac-similé du manuscrit Algier 1466/3, f°74^{r}-82^{r} et trad. angl. dans [Plooij, 1950].
Édition et trad. franç. dans [Vahabzadeh, 1997].

'Umar al Khayyâm, *Risâla fî Sharh mâ ashkala min musâdarât Kitâb Uqlîdis*. Trad. franç. dans
Djebbar, A., *L'émergence du concept de nombre réel positif dans l'Épître d'al-Khayyâm (1048-1131)*
Sur l'explication des prémisses problématiques du Livre d'Euclide. Orsay, Université de Paris-Sud. Mathématiques. Prépublications 97—39, 1997. Rééditée avec corrections dans la présente livraison de *Fahrang,* pp. 83-136, [Djebbar, 2002].

Édition du texte arabe avec trad. franç. par B. Vahabzadeh dans
Rashed R. & Vahabzadeh, B., *Al-Khayyâm mathématicien,* Paris, Blanchard, 1999, [Vahabzadeh, 1999].

B. Littérature secondaire

1. Ouvrages de référence. Ouvrages généraux sur l'histoire des mathématiques

Goulet, R. (dir.), *Dictionnaire des Philosophes Antiques*. Paris, Éditions du CNRS, Vol. I, 1989, [DPhA].

Itard, J., *Les livres arithmétiques d'Euclide*. Paris, Hermann, coll. Histoire de la pensée, X, 1961.

Knorr, W. R., *The Evolution of the Euclidean Elements*. Dordrecht/ Boston. D. Reidel, 1975.

Knorr, W. R., The Wrong Text of Euclid : On Heiberg's Text and its Alternatives.
Centaurus, 36, n°2-3, 1996, pp. 208-276.

Pines, S., (*The Collected Works of*), Vol. II : *Studies in Arabic versions of Greek Texts and in Mediæval Science*. Jerusalem, The Magnes Press. The Hebrew University, 1986. Distribué par Brill, Leiden.

Sezgin, F., *Geschichte des arabischen Schrifttums,* Band V, Leiden, E. J. Brill, 1974.

Van der Waerden, B. L., 'Die Arithmetik der Pythagoreer, (1947/1949) reproduit dans
Zur Geschichte der griechischen Mathematik. O. Becker (ed.).
Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1965, pp. 203-254, [Van der Waerden, 1947/1949]

Van der Waerden, B. L., *Ontwakende Wetenschap,* 1950.
Trad. angl. *Science Awakening,* A. Dresden. Groningen, P. Noordhoff, 1954,

Vitrac, B., (en collaboration avec S. Rommevaux, A. Djebbar), 'Remarques sur l'histoire du texte des *Éléments* d'Euclide'. *Archive for History of Exact Sciences,* **55**, 2001, pp. 221-295.

Vitrac, B., 'La transmission des textes mathématiques : l'exemple des *Éléments* d'Euclide'
dans les actes du Colloque international *Des Alexandries,* Paris, BNF, 23-25 / 06 / 99. L. Giard, Ch. Jacob (éds). Paris, sous presse (à paraître 2001).

Youschkevitch, A. P., *Les mathématiques arabes (VIII^e-XV^e siècles).*
Trad. franç. M. Cazenave et K. Jaouiche. Paris, Vrin, 1976.

2. Travaux sur la théorie des proportions

Becker, O., Eudoxus-Studien I. Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euclid. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie, und Physik*. Abteilung B, 2 , 1933, pp. 311-333.

Fowler, D. H., 'Ratio in early Greek mathematics'.
Bulletin of the American Mathematical Society (New Series), 1979, pp. 807-846.

Fowler, D. H., 'Anthyphairetic ratio and Eudoxan proportion'.
Archive for History of exact Sciences, 24, 1981, pp. 69-72

Fowler, D. H., *The Mathematics of Plato's Academy ; A New Reconstruction.*
Oxford, at the Clarendon Press, 1987.

Gardies, J. L., *L'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide*. Paris, Vrin 1988.

Larsen, M. E., On the Possibility of a Pre-Euclidean Theory of Proportions. *Centaurus,* XXVII, 1984, pp. 1-25.

Plooij, E. B., *Euclid's Conception of Ratio and his Definition of Proportional Magnitudes as Criticised by Arabian Commentators*. Rotterdam 1950.

Thorup, A., A Pre-Euclidean Theory of Proportions.
Archive for History of Exact Sciences, n°45, 1992, pp. 1-15.

Vahabzadeh, B., "Al-Khayyâm's conception of ratio and proportionnality".
Arabic Sciences and Philosophy, vol. 7, 1997, pp. 247-263, [Vahabzadeh, 1997b].

Vitrac., B., *De quelques questions touchant au traitement de la proportionnalité dans les* Eléments *d'Euclide*.
Thèse de doctorat de l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences sociales (dir. J. Dhombres). Paris, 1993, non publiée.

Vitrac, B., "La Définition V. 8 des *Eléments* d'Euclide". *Centaurus,* XXXVIII, 2-3, 1996, pp. 97-121.

Vitrac, B., *'Umar al Khayyâm et Eutocius : Les antécédents grecs du troisième chapitre du commentaire* Sur certaines prémisses problématiques du Livre d'Euclide. Téhéran, *Farhang. Quaterly Journal of Humanities & Cultural Studies,* Vol. 12, n°29-32, Spring 2000, pp. 51-105.

Annexes[132]

I. Héron, *Definitiones,* n°119-120, 122-125, 127 (extraits)[133]

119 [Περὶ τοῦ ἐν μεγέθεσιν ἀπείρου.]	Au sujet de l'infini dans les grandeurs
Μέγεθός ἐστι τὸ αὐξανόμενον καὶ τεμνόμενον εἰς ἄπειρον·	a. Une grandeur est ce qui est augmentable et divisible à l'infini.
εἴδη δὲ αὐτοῦ γ, γραμμή, ἐπιφάνεια, στερεόν.	b. Et ses espèces sont 3 : ligne, surface, solide.
ἄπειρον δέ ἐστι μέγεθος, οὗ μεῖζον οὐθὲν νοεῖται καθ' ὑπόστασιν ἡλικηνδήποτε, ὥστε μηδὲν εἶναι αὐτοῦ πέρας.	c. Et une grandeur infinie est celle dont on ne conçoit rien de plus grand, aussi grand qu'on le suppose; de sorte qu'il n'en existe aucune limite.

120 [Περὶ τοῦ ἐν μεγέθεσι μέρους]	Au sujet de la partie dans les grandeurs
Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλαττον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῆται τὸ μεῖζον εἰς ἴσα.	a. Une grandeur est une partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand elle mesure exactement la plus grande en [parties] égales.
εἴρηται δὲ τὸ μέρος νῦν οὔτε ὡς κόσμου μέρος ἡ γῆ οὔτε ὡς ἀνθρώπου κεφαλή, ἀλλὰ μὴν οὐδὲ ὡς τῆς πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου ἀπ' ἄκρας ἀγομένης λέγομεν μέρος εἶναι τὴν ἐκτὸς τοῦ ἡμικυκλίου λαμβανομένην γωνίαν τῆς ὑπὸ τῆς πρὸς ὀρθάς· ἀδύνατον γάρ ἐστιν ὑπὸ ταύτης τῆς γωνίας, ἥτις κερατοειδὴς καλεῖται, καταμετρηθῆναι τὴν ὀρθήν, πάσης γωνίας εὐθυγράμμου ἐλάττονος οὔσης τῆς κερατοειδοῦς.	b. Mais, à ce moment, on ne dit pas "la partie" comme quand on dit que la Terre est partie du cosmos, ni la tête, partie d'un homme, ni même comme lorsque — la droite à angles droits à l'extrémité du diamètre d'un cercle ayant été menée —, nous disons que l'angle pris à l'extérieur du demi-cercle est une partie de celui sous-tendu par la perpendiculaire; car il est impossible que l'angle droit soit mesuré exactement par ce même angle — lequel est appelé corniculaire — l'angle corniculaire étant plus petit que tout angle rectiligne.
μᾶλλον οὖν τὸ ἐν μεγέθεσι μέρος ἐπὶ τῶν ὁμοιογενῶν ληψόμεθα καὶ οὕτως ἐροῦμεν τὸ ἐν μεγέθεσι μέρος, ὡς τὴν τοῦ τρίτου ὀρθῆς γωνίαν λέγομεν τῆς ὀρθῆς μέρος εἶναι.	c. Mais la partie dans les grandeurs, sera prise par nous effectivement plutôt pour celles de même genre, et ainsi [seulement] parlerons-nous de partie dans les grandeurs, comme lorsque nous disons que le tiers de l'angle droit est une partie de l'angle droit.
τὸ γὰρ σοφισμάτιον ἐκεῖνο παρα-λειπτέον τὸ λεγόμενον, ὅτι· εἰ τὸ μέρος ἐστὶ τὸ καταμετροῦν, καὶ τὸ καταμετροῦν ἐστι μέρος, καταμετρεῖται δὲ τὸ στερεὸν ὑπὸ ποδιαίας εὐθείας, μέρος ἄρα ἡ ποδιαία εὐθεῖα τοῦ στερεοῦ, ὅπερ ἄτοπον.	d. Car on doit écarter ce sophisme-là qui dit que : si la partie est la mesure exacte et si la mesure exacte est une partie, puisque le solide est mesuré par des droites d'un pied, la droite d'un pied est donc une partie du solide, ce qui est absurde.
ποδιαία εὐθεῖα τὸ μῆκος καταμετρεῖ τοῦ στερεοῦ καὶ τὸ βάθος καὶ τὸ πλάτος, ἅπερ εἰσὶν ὁμογενῆ αὐτῇ τῇ εὐθείᾳ, οὐ μὴν τὸ στερεόν.	e. La droite d'un pied mesure exactement la longueur du solide et la profondeur et la largeur, lesquelles sont homogènes à cette même droite, en aucun cas le solide.

122 [Περὶ τῆς κατὰ μεγέθη ἀναλογίας.]	Au sujet de la proportion selon les grandeurs
Τί μέρος μὲν οὖν ἐστι καὶ λόγος, καὶ τίνα ὁμογενῆ ἅμα καὶ τί ἀναλογία, εἴρηται μὲν ἀκριβέστερον ἐν τοῖς πρὸ τῆς ἀριθμητικῆς στοιχειώσεως,	a. Effectivement, ce qu'est une partie, et un rapport et quelles [sont les grandeurs] simultanément homogènes et ce qu'est une proportion, cela a été dit plus précisément dans ce qui précède les *Éléments* arithmétiques;
νυνὶ δὲ λέγομεν, ὅτι, ὡς ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοιογενῶν ἡ ἀναλογία ἐφαρμόζει, οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν ἐν τοῖς μεγέθεσιν ὁμοιογενῶν.	b. aussi, pour l'instant, disons-nous que de même que la proportion s'applique aux autres choses homogènes, elle s'applique aussi, dans les grandeurs, à celles qui sont homogènes.

[132] Les traductions proposées ici sont des traductions "de travail", sans aucune prétention littéraire, mais qui montrent simplement comment je comprends ces textes dont certains, à ma connaissance, n'ont jamais été traduits en français.

[133] Texte grec établi par Heiberg dans *Hero,* IV, p. 74, l. 16—p. 76, l. 16; p. 76, l. 20; p. 80, l. 16; p. 80, l. 27—p. 82, l. 14; p. 82, l. 18-23. J'ai écarté les Df. N°121, 126 qui correspondent aux Df. V. 2 et 11 d'Euclide. La numérotation est due à l'éditeur. Pour faciliter les renvois j'ai inséré des lettres minuscules pour désigner les principaux alinéas.

123 [Τίνα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη;]	Quelles grandeurs ont un rapport l'une relativement à l'autre ?
Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη λέγεται, ἃ δύνανται πολυπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.	a. Sont dites « avoir un rapport l'une relativement à l'autre » les grandeurs qui, multipliées, sont capables de se dépasser l'une l'autre.
πρὸς δὲ τοὺς ἀντιθέντας τῷ ὅρῳ τούτῳ καὶ λέγοντας, ὅτι μόνα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ἃ δύνανται πολυπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν, οὐδὲν δὲ οὕτως ὁμογενὲς ὡς σημεῖον σημείῳ, δῆλον ἄρα, ὅτι πολυπλασιαζόμενον τὸ σημεῖον ὑπερέξει τοῦ σημείου, πρὸς δὲ τούτους ῥητέον, ὅτι τὸν κατὰ μεγέθη προσπολυπλασιασμὸν οὐκ ἐπιδέχεται σημεῖον· ὃ γὰρ ἀτευκτεῖ μεγέθους, τοῦτο ἀτευκτεῖ καὶ τοῦ κατὰ μέγεθος πολυπλασιασθῆναι, μόνως δὲ ἐπιδέξεται πολυπλασιασμὸν κατ' ἀριθμόν· οὕτως ἐπειδὴ τῇ εὐθείᾳ ἄπειρά εἰσι σημεῖα, τὰ τοσάδε τοσῶνδέ ἐστι πολυπλάσια ...	b. Et contre les opposants à cette Définition qui, en disant aussi que seules ont un rapport l'une relativement à l'autre celles qui, multipliées, sont capables de se dépasser l'une l'autre et que — rien n'étant homogène à un point autant qu'un point —, il est donc évident que le point, multiplié, dépassera le point, contre ceux-ci donc, il faut dire que le point n'admet pas la multiplication selon la grandeur; car ce qui n'engendre pas de grandeur n'engendre pas non plus ce qui peut être multiplié selon la grandeur, mais il admettra seulement la multiplication selon le nombre; ainsi puisque dans la droite les points sont infinis, tout autant que ceux-ci, tout autant sont les multiples …

124 [Τίνα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη ἐστίν;]	Quelles sont les grandeurs dans le même rapport ?
Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγονται πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου ἰσάκις πολυπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἄλλων, ὧν ἔτυχεν, ἰσάκις πολυπλασίων ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.	a. Des grandeurs sont dites dans le même rapport, une première relativement à une deuxième et une troisième relativement à une quatrième quand les équimultiples de la première et de la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux, ou simultanément inférieurs à d'autres équimultiples, [pris] au hasard, de la deuxième et de la quatrième, pris de manière correspondante.
Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα ἀνάλογον καλείσθω.	b. Et que celles qui ont le même rapport soient appelées « en proportion ».
Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν, ἐνταῦθα ὅρων λαμβανομένων ἤτοι τῶν μεγεθῶν ἢ τῶν ἐπικειμένων αὐτοῖς ἀριθμῶν·	c. Et une proportion en trois termes est la plus petite, dans laquelle les termes pris sont soit les grandeurs, soit les nombres placées au-dessus d'elles;
ὡς γὰρ κύκλου ὅρος ἐστὶν ἡ περιφέρεια, καὶ τριγώνων αἱ πλευραί, οὕτω τοῦ τοῦ θ πρὸς τὸν ϛ λόγου ὅροι εἰσὶν οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί.	d. de même en effet que du cercle, la circonférence est le "terme", et des triangles les côtés, ainsi, [les] termes du rappport de 9 à 6 sont ces mêmes nombres.

125 [Διάφοροι μεγεθῶν ἀναλογίαι.]	Proportions différentes entre grandeurs
Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ α′ πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἢ πρὸς τὸ β′.	1.a. Et quand trois grandeurs sont en proportion, la 1e, relativement à la troisième, est dite avoir un rapport doublé de [celui qu'elle a] par rapport à la 2e.
φησὶ γοῦν Ἐρατοσθένης, ὅτι, ὥσπερ ἐπὶ τῶν διαστημάτων ἴσων καὶ κατ' εὐθεῖαν κειμένων τὰ διαστήματα διπλασιάζεται, οὕτως ἐπὶ τῶν λόγων ὡσανεὶ κατ' εὐθεῖαν κειμένων τὸ α′ πρὸς τὸ γ′ διπλάσιον λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ δεύτερον.	b. Effectivement Eratosthène dit que, de même que pour les intervalles égaux et placés en alignement, les intervalles sont dupliqués, de la même manière pour les rapports, pour ainsi dire placé en alignement : le 1e, relativement au 3e, est dit avoir un rapport doublé de [celui qu'il a] relativement au deuxième.
...	…
Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολυπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δ′ πολλαπλασίου, τότε τὸ πρώτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται ἢ τὸ γ′ πρὸς τὸ δ′.	2. a. Et quand parmi les équimultiples, le multiple de la première dépasse le multiple de la deuxième tandis que le multiple de la troisième ne dépasse pas le multiple de la 4e, alors la première [grandeur], relativement à la deuxième, est dite avoir un plus grand rapport que celui de la 3e relativement à la 4e.
ἐν δὲ ταύτῃ τῇ ὑπογραφῇ τοῦ ὅρου βεβούληται ὁ Εὐκλείδης εἰς ὑπόνοιαν ἡμᾶς ἀγαγεῖν καὶ παραστῆσαι, ἐν τίσιν εὑρίσκεσθαι δεῖ μείζονα λόγον λόγου· καὶ ἐπεὶ τὰ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ κεχαρακτηρίσθαι ἀπὸ τῶν ἰσάκις πολυπλασίων ἤτοι ἅμα ὑπερεχόντων ἢ ἅμα ἴσων ὄντων ἢ ἅμα ἐλλειπόντων, τὰ ἐν μείζονι λόγῳ ὄντα ἐκεῖνα ἔχειν τὴν ὑπεροχήν.	b. Et en rédigeant cette Définition Euclide voulait nous amener à conjecturer et nous faire voir dans quelles [grandeurs] il faut trouver un rapport plus grand qu'un rapport; et puisque les [grandeurs] dans le même rapport sont caractérisées à partir des équimultiples, qui soit simultanément dépassent, soit sont simultanément égaux, soit simultanément en défaut, celles qui sont dans un rapport plus grand, celles-là ont un dépassement.

ὅπως δὲ γίνεται ὑπεροχή, αὐτὸς ἐν τῷ ε΄ τῆς καθόλου λόγων στοιχειώσεως ἐν τῷ θεωρήματι τῶν ἀνίσων μεγεθῶν ἐπέδειξεν.	c. Et comment le dépassement est produit, lui-même l'a démontré dans le 5e Livre (des rapports, en général) de l'*Arrangement des Éléments* dans le théorème des grandeurs inégales.

127 [Περὶ τῆς ἐν τοῖς μεγέθεσι τῶν λόγων διαφορᾶς.]	Au sujet de la différence des rapports dans les grandeurs
Λόγος μὲν εἴρηται ὅτι β ὁμογενῶν ἐστιν ἡ πρὸς ἄλληλα σχέσις.	a. Il est dit qu'un rapport est la relation de 2 [choses] homogènes, l'une relativement à l'autre.
ἐπὶ δὲ τῶν μεγεθῶν λέξωμεν ἰδίως ὅτι λόγος ἐστὶν δύο μεγεθῶν ὁμοιογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά σχέσις ὡς εἶναι καὶ ἐπ᾽ αὐτῶν ἀναλογίαν τὴν τοίουτων λόγων ὁμοιότητα...	b. Et pour les grandeurs nous dirons plus particulièrement qu'un rapport est la relation selon la taille [qu'il y a] entre deux grandeurs du même genre, de sorte que pour elles aussi la proportion est la similitude de ces rapports …

II. Trois scholies anciennes au Livre V[134]

1. Scholie liminaire au Livre V, N°1 (Extraits)[135]

Σκοπὸς τῷ πέμπτῳ βιβλίῳ περὶ ἀναλογιῶν διαλαβεῖν· κοινὸν γὰρ τοῦτο τὸ βιβλίον γεωμετρίας τε καὶ ἀριθμητικῆς καὶ μουσικῆς καὶ πάσης ἁπλῶς τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. τὰ γὰρ ἐν αὐτῷ ἀποδεικνύμενα οὐ μόνον γεωμετρικοῖς ἁρμόζει θεωρήμασιν, ἀλλὰ καὶ πᾶσι τοῖς ὑπὸ μαθηματικὴν τεταγμένοις, ὡς προείρηται, ἐπιστήμην.	a. L'objectif, dans ce cinquième Livre, est d'expliquer ce qu'il en est des proportions; car ce Livre est commun à la géométrie et à l'arithmétique et à la musique et, tout simplement, à l'ensemble de la science mathématique. Car les choses qui y sont démontrées s'appliquent non seulement aux théorèmes géométriques mais aussi à toutes les choses ordonnées par la science mathématique, comme cela a été annoncé.
ὁ μὲν οὖν σκοπὸς οὗτος, τὸ δὲ βιβλίον Εὐδόξου τινὲς εὕρεσιν εἶναι λέγουσι τοῦ Πλάτωνος διδασκάλου.	b. Tel est donc l'objectif, tandis que certains disent que la découverte de ce Livre est d'Eudoxe, le maître de Platon (?).
ἐπεὶ οὖν ὁ σκοπὸς περὶ ἀναλογιῶν, ἡ δὲ ἀναλογία λόγων τινῶν σχέσις, ἀναγκαῖον γνῶναι πρότερον, τίνες οἱ τοιοῦτοι λόγοι. δεῖ γὰρ τὰ ἁπλᾶ πρότερον γνῶναι τῶν συνθέτων.	c. Puis donc que l'objectif en est les proportions et que la proportion est une relation entre certains rapports, il est nécessaire d'abord de connaître ce que sont ces rapports. Car il faut connaître les choses simples avant les composées.
ἐὰν τοίνυν τινὰ συγκρίνηται πρὸς ἄλληλα, φέρε εἰπεῖν δύο μεγέθη, αὐτὰ μὲν ὅροι καλοῦνται, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἐπὶ τὸ ἕτερον μετάστασις διάστημα, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου πρὸς τὸ ἕτερον σύγκρισις σχέσις, ἣν ἐκάλεσαν οἱ παλαιοὶ λόγον, τὴν δὲ τούτο τοῦ λόγου πρὸς ἄλλον λόγον καθ᾽ ὁμοιότητα σύγκρισιν ἤτοι σχέσιν ἀναλογίαν προσηγόρευσαν, ἵνα μὴ ὡς τόδε τὸ μέγεθος συγκρίνηται, ἀλλ᾽ ὡς ὅδε ὁ λόγος πρὸς τόνδε τὸν λόγον. αὕτη δὲ ἡ σύγκρισις λόγος λέγεται λόγου ...	d. Si effectivement certaines choses sont comparées les unes aux autres, disons deux grandeurs, celles-ci seront dites "termes", le changement de l'une à l'autre, "intervalle", la comparaison de l'une relativement à l'autre, "relation", ce que les Anciens appelaient "rapport", tandis qu'ils appelaient "proportion" la comparaison ou relation de ce même rapport relativement à un autre rapport quant à la similitude, non pas afin de comparer cette grandeur-ci, mais ce rapport-ci à ce rapport-là. Et cette comparaison est appelée un « rapport de rapport » …
τοῦ δὲ κατὰ τὸ ποσὸν εἴδη ἐστὶ πέντε· ὁ μὲν γάρ ἐστι πολλαπλάσιος, ὡς τοῦ τρία ὁ ἕξ, ὁ δὲ ἐπιμόριος, ὡς τοῦ τρία ὁ τέσσαρα, ὁ δὲ ἐπιμερής, ὡς τοῦ τρία ὁ πέντε. καὶ οὗτοι μὲν ἁπλοῖ, τούτων δὲ ἔτι ἁπλούστερος ὁ πολλαπλάσιος.	e. Mais du [rapport] selon la quantité, il existe cinq espèces : l'une est le "multiple", comme six de trois, l'autre est l'"épimore", comme quatre de trois, l'autre l'"épimère", comme cinq de trois. Et ceux-ci sont simples, le multiple étant le plus simple d'entre eux.
ἕτεροι δὲ ἐκ τῆς τούτων συνθέσεως γίνονται δύο ὅ τε πολλαπλασι-επιμόριος, ὡς τοῦ τρία ὁ ἑπτά, καὶ ὁ πολλαπλασιεπιμερής, ὡς τοῦ τρία ὁ ὀκτώ.	Et deux autres sont engendrés à partir de la composition de ceux-ci, le "multiplépimore", comme sept de trois, et le "multiplépimère", comme huit de trois.
ὑπόλογοι δέ εἰσιν οἱ ἐλάσσονες τῶν μειζόνων, ὑποπολλαπλάσιος, ὑπεπιμόριος καὶ ἑξῆς ὁμοίως ...	Et les plus petits termes sont "sous-rapports" des plus grands : "sous-multiple", "sous-épimore", et ainsi de suite pareillement …

[134] Les scholies qui se trouvent dans les marges des manuscrits grecs des *Éléments* se répartissent en plusieurs groupes; v. [Eucl., *Él.*, I, 1990], pp. 55-59. J'en ai retenu trois qui appartiennent au groupe le plus ancien, remontant à l'Antiquité, celui des scholies dites "vaticanes" car elles ont été transmises indépendamment du texte d'Euclide dans le ms Vatican. gr. 204 (f°198-205).

[135] Texte grec, [*EHS*, V, 1], p. 211, l. 1-19; p. 212, l. 9-17.

2. Scholie N°13 à la Df. V. 3[136]

Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα ποιὰ σχέσις]	a. Un rapport est la relation, telle ou telle, selon la taille, [qu'il y a] entre deux grandeurs homogènes.
τὸ μὲν λόγος, ἵνα σημάνῃ τὴν σχέσιν,	b. Et [il y a] le terme "rapport" afin de signifier la "relation",
τὸ δὲ δύο μεγεθῶν, ἵνα χωρίσῃ τῶν ἄλλων εἰδῶν τοῦ ποσοῦ,	c. et l'expression « de deux grandeurs » pour écarter les autres espèces de la quantité,
τὸ δὲ ὁμογενῶν, ἵνα μὴ γραμμὴν πρὸς ἐπιφάνειαν συγκρίνῃ τις· ταῦτα γὰρ ἄλογα πρὸς ἄλληλα.	d. et "homogènes" afin que quelqu'un ne compare pas une ligne avec une surface; car celles-ci sont sans rapport mutuel.
τὸ δὲ κατὰ πηλικότητα, ἵνα χωρίσῃ τῶν ἀπείρων μεγεθῶν· πηλικότης γὰρ πέρας τοῦ ἀπείρου συνεχοῦς καὶ ποσότης τοῦ διωρισμένου· ἀλλὰ τὸ διωρισμένον οὐ μέγεθος· πλῆθος γάρ.	e. et « selon la taille » pour écarter les grandeurs infinies; car "taille" est limite du continu infini comme "quotité" l'est de la quantité discrète. Mais la quantité discrète n'est pas grandeur; car elle est multitude.
τὸ δὲ ποιὰ σχέσις, ὅτι πέντε τῶν σχέσεων, ὡς προείρηται, τὰ εἴδη.	f. Et l'expression « relation, telle ou telle » parce que, comme cela a été dit préalablement[137], il y a cinq espèces de relations.

3. Scholie N°14 aux Df. V. 3-4[138]

Ἐπὶ μὲν τῶν ἀριθμῶν πᾶς λόγος ῥητὴν ἔχει ποσότητα, ἐπὶ δὲ τῶν μεγεθῶν ἐστί τις λόγος, ὃς οὐ δύναται ῥηθῆναι ἀριθμῷ.	a. Et tout rapport portant sur les nombres a une quantité exprimable tandis qu'il peut y avoir un rapport, portant sur les grandeurs, qui ne peut pas s'exprimer en nombre.
ἔστι γάρ τινα, ὧν μόνη μὲν γιγνώσκεται ἡ πρὸς τὸ ἕτερον ὑπεροχή, ἡ δὲ ποσότης τῆς ὑπεροχῆς ἄγνωστός ἐστιν. ταῦτα τοίνυν λόγον ἔχειν λέγεται τὸν τῆς ὑπεροχῆς, οὐκέτι δὲ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, τουτέστι ῥητόν.	b. Car il existe certaines grandeurs dont on peut seulement connaître le fait que l'une excède l'autre, tandis que la quotité de l'excès est inconnue. Celles-ci sont effectivement dites avoir le rapport d'excès, mais ce n'est pas celui d'un nombre relativement à un nombre, c'est-à-dire exprimable.
καὶ διὰ τοῦτο προσέθηκεν ἐν τῷ ὁρισμῷ τοῦ λόγου τῶν μεγεθῶν τὸ κατὰ πηλικότητα. ὁ μὲν γὰρ ῥητὸς καὶ κατὰ πηλικότητά ἐστι καὶ κατὰ ποσότητα, οὐ πάντως δὲ ὁ κατὰ πηλικότητα καὶ ῥητός.	c. Et c'est à cause de cela que l'expression « selon la taille » a été ajoutée dans la définition du rapport des grandeurs. Car tel est exprimable à la fois selon la taille et selon la quotité, mais tel autre n'est pas toujours exprimable selon la taille.
καθολικώτερον οὖν ὁριζόμενος τὰ τῶν λόγων, τίνα ἐστίν, ἐπήγαγεν· ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλή-λων ὑπερέχειν· ἐφαρμόζει γὰρ καὶ τοῖς ῥητοῖς καὶ τοῖς μὴ ῥητοῖς, οἷον ἡ τοῦ τετραγώνου διαγώνιος ὡς μὲν ἐν ῥητοῖς λόγοις πρὸς τὴν πλευρὰν ἄλογος, ὡς δὲ ἐν ὑπεροχῇ λόγον ἔχει, ὃν μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον, καὶ δύναται ἡ πλευρὰ πολλαπλασιαζο-μένη ποτὲ τῆς διαγωνίου ὑπερέχειν.	d. Et, effectivement « ce que sont les [grandeurs, termes ?] des rapports » est défini de manière plus générale en introduisant : « celles qui, multipliées, sont capables de se dépasser l'une l'autre »; car ceci s'applique aussi bien aux rapports exprimables qu'aux non exprimables, comme par exemple la diagonale du carré, dans des rapports [non] exprimables, est irrationnelle relativement au côté, mais a un rapport, quant à l'excès, de plus grand à plus petit, et le côté, multiplié, est capable à un certain moment de dépasser la diagonale.

136 [*EHS,* V, 1], p. 215, l. 8-17.

137 Vraisemblablement une référence à la scholie n°1, autrement dit à une classification des rapports d'inspiration nicomaquéenne.

138 [*EHS,* V, 1], p. 215, l. 18—p. 21, l. 9.