



Modélisation Dynamique d'un Robot Parallèle à 3-DDL : l'Orthoglide

Sylvain Guegan, Wisama Khalil, Damien Chablat, Philippe Wenger

► To cite this version:

Sylvain Guegan, Wisama Khalil, Damien Chablat, Philippe Wenger. Modélisation Dynamique d'un Robot Parallèle à 3-DDL : l'Orthoglide. CIFA, Jul 2002, Nantes, France. pp.1-6. hal-00162630

HAL Id: hal-00162630

<https://hal.science/hal-00162630>

Submitted on 15 Jul 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation Dynamique d'un Robot Parallèle à 3-DDL : l'Orthoglide

Sylvain GUEGAN, Wisama KHALIL, Damien CHABLAT, Philippe WENGER

Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes
BP 92101 1, rue de la Noë, 44321 Nantes Cedex 03, France

wisama.khalil@irccyn.ec-nantes.fr
<http://www.irccyn.ec-nantes.fr>

Résumé — Dans cet article, nous proposons une méthode pour le calcul des modèles dynamiques inverse et direct de l'Orthoglide, un robot parallèle à trois degrés de liberté en translation. Ces modèles sont calculés à partir des éléments du modèle dynamique de la structure d'une chaîne cinématique et des équations de Newton-Euler appliquées à la plate-forme. Ces modèles sont obtenus sous forme explicite ayant une interprétation physique intéressante.

Mots clés — Robots parallèles, 3-DDL, dynamique, structures fermées, modèle dynamique inverse, modèle dynamique direct.

I. INTRODUCTION

Les robots parallèles sont des systèmes multi-corps complexes, qui sont parmi ceux les plus difficiles à modéliser, à cause de leur architecture parallèle qui comporte plusieurs boucles fermées. Suite à l'augmentation constante des performances attendues par ce type de machines, la conception de leur commande doit prendre en compte les forces d'interactions dynamiques. D'où l'intérêt d'avoir un modèle dynamique efficace pour la commande en ligne.

Afin d'obtenir le modèle dynamique des robots parallèles, beaucoup de méthodes calculent le modèle dynamique de la structure arborescente et utilisent les multiplicateurs de Lagrange afin d'obtenir le modèle dynamique complet du robot [1-5]. Le principe des travaux virtuels a été utilisé dans [6,7]. La formulation de Newton-Euler a aussi été utilisée, par exemple : Reboulet et al. [8] ont donné une forme matricielle pour les robots parallèles de type Stewart, cependant leur modèle n'est pas complet. Ils négligent notamment la masse des pistons et la rotation autour de l'axe principal de chaque chaîne. Gosselin [9] a proposé le modèle dynamique inverse du robot Stewart dans lequel toutes les masses et inerties sont prises en compte, le problème direct n'a pas été traité. Dasgupta et al. [10] ont appliqué cette méthode à plusieurs robots parallèles de type planaires et spatiaux [11]. Ji [12] a étudié l'influence de l'inertie des chaînes cinématiques dans le modèle dynamique.

Cet article propose une solution pour la formulation des modèles dynamiques complets inverse et direct des robots parallèles. Ces modèles sont obtenus en termes des éléments du modèle dynamique cartésien des chaînes cinématiques du robot perçues aux points de connexions des chaînes avec la plate-forme. Par conséquent, on peut appliquer les techniques développées pour les robots séries aux calculs de ces modèles.

Nous avons récemment proposé une nouvelle méthode pour la modélisation dynamique du robot à 6 degrés de liberté Gough-Stewart [13]. Dans cet article, nous considérons l'application de cette méthode au robot Orthoglide [14].

L'architecture de l'Orthoglide est donnée sur la figure 1. La description des chaînes cinématiques est présentée sur la figure 2. L'Orthoglide est une machine de type parallèle possédant 3 articulations prismatiques orthogonales. La plate-forme mobile est connectée aux articulations prismatiques par 3 parallélogrammes articulés et bouge dans l'espace cartésien x-y-z avec une orientation fixe.

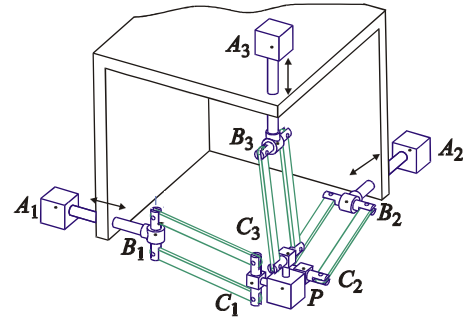


Fig. 1. : Architecture de l'Orthoglide

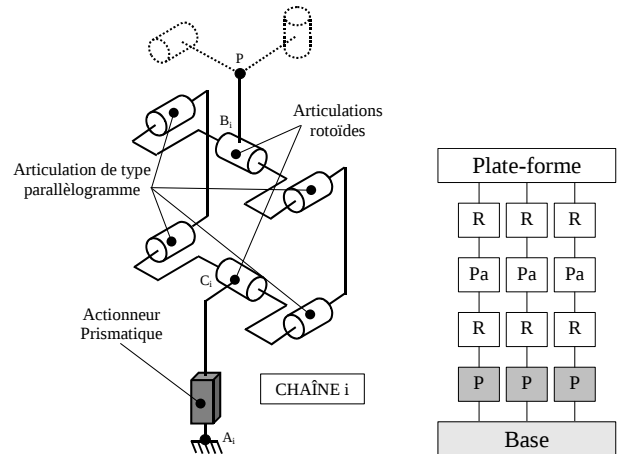


Fig. 2. : Description du robot Orthoglide

L'Orthoglide est dédié à l'usinage à grande vitesse, car son architecture se rapproche des machines standards d'architecture série PPP (espace de travail Cartésien régulier et performances uniformes) et avec, en plus, les propriétés des structures parallèles (inerties moins importantes et meilleures performances dynamiques). Son espace de travail est proche d'un cube et ne possède aucune singularité. Il existe une configuration où la matrice Jacobienne est isotrope avec tous ces facteurs d'amplification de vitesse égaux à 1. Ces facteurs restent bornés dans l'intervalle $[1/2 ; 2]$ dans le reste de l'espace de travail.

Le paragraphe suivant présente la description géométrique du robot. Le paragraphe trois traite de la modélisation cinématique du robot. Les paragraphes quatre et cinq donnent respectivement les modèles dynamiques inverse et direct du robot. Un paragraphe final permet de tirer les conclusions sur ce travail.

II. DESCRIPTION DU ROBOT

L'Orthoglide est un robot parallèle à trois degrés de liberté en translation. Il est composé d'une plate-forme mobile et de trois chaînes cinématiques identiques. Chaque chaîne est composée d'un actionneur prismatique (P) liant la base à la chaîne (point A_i pour $i = 1, 2, 3$) d'une articulation rotoïde (R), d'une articulation de type parallélogramme (Pa) et d'une articulation rotoïde liant la chaîne à la plate-forme (figure 2).

Le robot a une structure complexe avec 2 boucles spatiales et 3 boucles planaires. La structure arborescente équivalente est obtenue en isolant la plate-forme et en coupant les trois articulations passives q_{8i} ($i = 1, 2, 3$) (figure 3) :

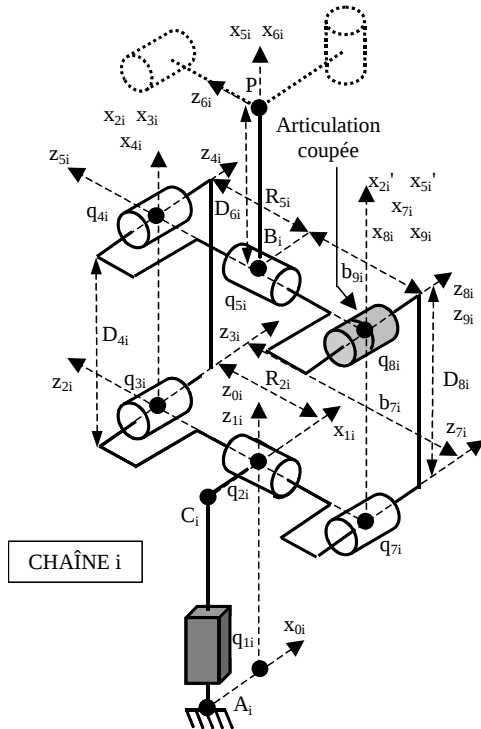


Fig. 3. : Placement des repères sur la chaîne i

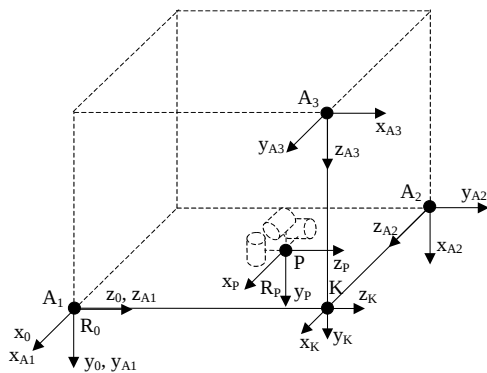


Fig. 4. : Repère de la base R_0 et repère de la plate-forme R_p

Les axes des trois actionneurs se coupent au point K. Le repère fixe R_K a pour origine le point K. Les axes x_K, y_K, z_K

sont définis par les axes des trois actionneurs (q_{1i}), respectivement q_{12}, q_{13}, q_{11} . Nous définissons également deux repères : le repère R_0 fixe par rapport à la base et le repère R_p fixe par rapport à la plate-forme, respectivement d'origine A_1 et P. Leurs axes, respectivement (x_0, y_0, z_0) et (x_p, y_p, z_p) , sont parallèles aux axes (x_k, y_k, z_k) . De plus, nous introduisons 3 repères R_{Ai} d'origine A_i . Leurs axes sont définis de la manière suivante : l'axe z_{Ai} est le long de l'axe de l'actionneur i et le plan (x_{Ai}, z_{Ai}) est défini pour $i = 1$ à 3 respectivement par : (A_1, K, A_2) , (A_2, K, A_3) , (A_3, K, A_2) . La figure 4 indique l'emplacement de ces repères.

La notation de Khalil et Kleinfinger [15] peut-être utilisée pour décrire la géométrie de la structure arborescente. Le placement des repères est indiqué sur la figure 3. On peut remarquer que l'on utilise deux repères R_{8i} et R_{9i} , pour l'articulation coupée q_{8i} [15]. Les paramètres géométriques nécessaires pour définir le repère du 1^{er} corps de chaque chaîne R_{1i} , dans le repère de base du robot R_0 , sont donnés dans le tableau 1. Le tableau 2 donne la description du reste de chaque chaîne :

j_i	$a(j_i)$	μ_{ji}	σ_{ji}	γ_{ji}	b_{ji}	α_{ji}	d_{ji}	θ_{ji}	r_{ji}
1_1	0	1	1	0	0	0	0	0	q_{11}
1_2	0	1	1	$\pi/2$	a	$\pi/2$	0	0	$-a+q_{12}$
1_3	0	1	1	0	a	$-\pi/2$	0	$-\pi/2$	$-a+q_{13}$

Tableau 1 : Paramètres géométriques du repère du 1^{er} corps de la chaîne i (pour $i = 1$ à 3)

j_i	$a(j_i)$	μ_{ji}	σ_{ji}	γ_{ji}	b_{ji}	α_{ji}	d_{ji}	θ_{ji}	r_{ji}
2_1	1_1	0	0	0	0	$-\pi/2$	0	q_{21}	r_{21}
3_1	2_1	0	0	0	0	$-\pi/2$	0	q_{31}	0
4_1	3_1	0	0	0	0	0	D_{41}	q_{41}	0
5_1	4_1	0	0	0	0	$\pi/2$	0	q_{51}	r_{51}
6_1	5_1	0	0	0	0	0	D_{61}	0	0
7_1	2_1	0	0	0	b_{71}	$-\pi/2$	0	q_{71}	0
8_1	7_1	0	0	0	0	0	D_{81}	q_{81}	0
9_1	5_1	0	0	0	b_{91}	$-\pi/2$	0	0	0

Remarque : $b_{71} = -2 r_{21}$, $b_{91} = -r_{21}$, $r_{51} = -r_{21}$, $D_{81} = D_{41}$
 $q_{71} = q_{31}$, $q_{81} = q_{41} = -q_{31}$, $q_{51} = -q_{21} - \pi/2$

Tableau 2 : Paramètres géométriques de la chaîne i

Les Paramètres des tableaux 1 et 2 sont :
 $a(j)$ qui donne le repère antécédent au repère j ,
 $\mu(j)$ et $\sigma(j)$ qui décrivent le type de l'articulation :
- $\mu(j) = 1$ si l'articulation j est motorisée et $\mu(j) = 0$ si elle est passive,
- $\sigma(j) = 1$ si l'articulation est prismatique et $\sigma(j) = 0$ si elle est rotoïde.

Les paramètres $(\gamma_j, b_j, \alpha_j, d_j, \theta_j, r_j)$ sont utilisés pour définir le repère R_j dans le repère de son antécédent R_i . La matrice de transformation composée de ces paramètres est notée :

$${}^i T_j = \begin{bmatrix} {}^i A_j & {}^i P_j \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

où :

${}^i A_j$ est la matrice (3×3) qui définit l'orientation du repère R_j dans le repère R_i .

${}^i P_j$ est la matrice de position (3×1) qui définit l'origine du repère R_j dans le repère R_i .

III. MODÉLISATION CINÉMATIQUE

Les notations suivantes sont utilisées :

- (X_p, Y_p, Z_p) coordonnées du point P exprimées dans le repère R_0
 (X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai}) coordonnées du point A_i exprimées dans le repère R_0
 L matrice composée des variables prismatiques du robot
 $L = [q_{11} \ q_{12} \ q_{13}]^T$
 $\dot{L}$ matrice composée des vitesses des articulations prismatiques du robot : $\dot{L} = [\dot{q}_{11} \ \dot{q}_{12} \ \dot{q}_{13}]^T$
 $\dot{q}_i$ matrice composée des vitesses des articulations indépendantes de la chaîne i : $\dot{q}_i = [\dot{q}_{1i} \ \dot{q}_{2i} \ \dot{q}_{3i}]^T$
 $\ddot{q}_i$ matrice composée des accélérations des articulations indépendantes de la chaîne i : $\ddot{q}_i = [\ddot{q}_{1i} \ \ddot{q}_{2i} \ \ddot{q}_{3i}]^T$
 0V_p vitesse linéaire de l'origine de la plate-forme,
 ${}^0\dot{V}_p$ accélération linéaire de l'origine de la plate-forme.

Les modèles suivants sont présentés dans [16,17] et ont une solution unique :

- i) Le modèle géométrique inverse du robot donne les variables prismatiques motorisées (q_{1i}) en fonction des coordonnées (X_p, Y_p, Z_p) exprimées dans le repère R_0 :
- $$L = F({}^0P_p) \quad (2)$$

avec ${}^0P_p = [X_p \ Y_p \ Z_p]^T$

Le modèle géométrique inverse est de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_p - \cos(q_{31})\cos(q_{21})D_{41} - D_{61} \\ X_p - X_{A2} - \cos(q_{32})\cos(q_{22})D_{42} - D_{62} \\ Y_p - Y_{A3} - \cos(q_{33})\cos(q_{23})D_{43} - D_{63} \end{bmatrix} \quad (3)$$

avec :

$$q_{31} = \sin^{-1}\left(\frac{-Y_p}{D_{41}}\right) \text{ et } q_{21} = -\left(\sin^{-1}\left(\frac{-X_p}{\cos(q_{31})D_{41}}\right) + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$q_{32} = \sin^{-1}\left(\frac{-Z_p + Z_{A2}}{D_{42}}\right) \text{ et } q_{22} = -\left(\sin^{-1}\left(\frac{-Y_p + Y_{A2}}{\cos(q_{32})D_{42}}\right) + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$q_{33} = \sin^{-1}\left(\frac{-X_p + X_{A3}}{D_{43}}\right) \text{ et } q_{23} = -\left(\sin^{-1}\left(\frac{-Z_p + Z_{A3}}{\cos(q_{33})D_{43}}\right) + \frac{\pi}{2}\right);$$

- ii) Le modèle cinématique inverse du robot donne la vitesse des variables prismatiques motorisées ($\dot{q}_{11}, \dot{q}_{12}, \dot{q}_{13}$) en fonction de la vitesse de la plate-forme :

$$\dot{L} = {}^0J_p^{-1} {}^0V_p \quad (4)$$

où ${}^0J_p^{-1}$ est la matrice Jacobienne inverse du robot :

$${}^0J_p^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_{21}} & \frac{T_{31}}{S_{21}} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{T_{22}} & \frac{T_{32}}{S_{22}} \\ \frac{T_{33}}{S_{23}} & 1 & -\frac{1}{T_{23}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

avec : $T_{21} = \tan(q_{21})$, $S_{31} = \sin(q_{31})$ et $T_{31} = \tan(q_{31})$.

- iii) Le modèle cinématique inverse de la chaîne i donne la vitesse des articulations de la chaîne i ($\dot{q}_{1i}, \dot{q}_{2i}, \dot{q}_{3i}$) en fonction de la vitesse du point P :

$$\dot{q}_i = {}^0J_i^{-1} {}^0V_p \quad (6)$$

où ${}^0J_i^{-1}$ est la matrice Jacobienne inverse de la chaîne i.

$${}^0J_1 = \begin{bmatrix} 0 & -D_{41}C_{31}S_{21} & -D_{41}S_{31}C_{21} \\ 0 & 0 & -D_{41}C_{31} \\ 1 & -D_{41}C_{31}C_{21} & D_{41}S_{31}S_{21} \end{bmatrix}, \quad {}^0J_2 = \begin{bmatrix} 1 & -D_{42}C_{32}C_{22} & D_{42}S_{32}S_{22} \\ 0 & -D_{42}C_{32}S_{22} & -D_{42}S_{32}C_{22} \\ 0 & 0 & -D_{42}C_{32} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$${}^0J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -D_{43}C_{33} \\ 1 & -D_{43}C_{33}C_{23} & D_{43}S_{33}S_{23} \\ 0 & -D_{43}C_{33}S_{23} & -D_{43}S_{33}C_{23} \end{bmatrix}$$

$${}^0J_1^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_{21}} & \frac{T_{31}}{S_{21}} & 1 \\ -\frac{1}{D_{41}C_{31}S_{21}} & \frac{T_{31}}{D_{41}C_{31}T_{21}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{D_{41}C_{31}} & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^0J_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{T_{22}} & \frac{T_{32}}{S_{22}} \\ 0 & -\frac{1}{D_{42}C_{32}S_{22}} & \frac{T_{31}}{D_{42}C_{32}T_{22}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{D_{42}C_{32}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$${}^0J_3^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{T_{33}}{S_{23}} & 1 & -\frac{1}{T_{23}} \\ \frac{T_{33}}{D_{43}C_{33}T_{23}} & 0 & -\frac{1}{D_{43}C_{33}S_{23}} \\ -\frac{1}{D_{43}C_{33}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- iv) Le modèle cinématique inverse du second ordre de la chaîne i donne l'accélération des articulations de la chaîne ($\ddot{q}_{1i}, \ddot{q}_{2i}, \ddot{q}_{3i}$) en fonction de l'accélération du point P :

$$\ddot{q}_i = {}^0J_i^{-1} ({}^0\ddot{V}_p - {}^0\dot{J}_i \dot{q}_i) \quad (9)$$

IV. MODÈLE DYNAMIQUE INVERSE

Le modèle dynamique inverse représente la relation entre les forces des articulations motorisées et les positions, vitesses, accélérations cartésiennes de la plate-forme. Il s'écrit $\Gamma = f({}^0P_p, {}^0V_p, {}^0\dot{V}_p)$.

En utilisant les modèles géométrique et cinématique inverse du robot et des chaînes on peut exprimer la position, la vitesse et l'accélération des articulations de chaque chaîne ($q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$) en fonction du mouvement de la plate-forme (${}^0P_p, {}^0V_p, {}^0\dot{V}_p$).

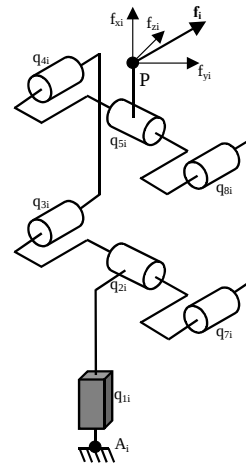


Fig. 5. : Force f_i

En représentant les réactions de la plate-forme sur la chaîne i par f_i (figure 5), les inconnues du modèle dynamique inverse sont les 9 composantes des forces $f_i = [f_{xi} \ f_{yi} \ f_{zi}]^T$ et les 3 forces des articulations indépendantes Γ_{1i} ($i = 1, 2, 3$). Le modèle dynamique inverse de chaque chaîne est composée de 3 équations indépendantes (cf : annexe) ce qui donne un total

de 9 équations. Les équations de Newton-Euler de la plate-forme donnent 3 équations supplémentaires. Le système est donc composé de 12 inconnues et de 12 équations, il est donc envisageable d'être résolu. Dans la suite, ce système d'équations sera résolu de façon séquentielle.

A. Calcul de ${}^0\mathbf{f}_i$ en utilisant le modèle dynamique de la chaîne i

La forme générale du modèle dynamique de la chaîne i , s'écrit :

$$\Gamma_i = \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i) + {}^0\mathbf{J}_i^T {}^0\mathbf{f}_i \quad (10)$$

où :

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i) = \mathbf{A}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{h}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \quad (11)$$

$\mathbf{A}_i$ est la matrice d'inertie (3×3) de la chaîne i et $\mathbf{h}_i$ est la matrice (3×1) contenant les forces de Coriolis, centrifuge et gravité. Γ_i est composé des couples/forces de la chaîne i , où Γ_{1i} et Γ_{2i} sont nuls :

$$\Gamma_i = [\Gamma_{1i} \quad \Gamma_{2i} \quad \Gamma_{3i}]^T = [\Gamma_{1i} \quad 0 \quad 0]^T \quad (12)$$

En utilisant l'équation (10), les forces de réaction ${}^0\mathbf{f}_i$ peuvent s'écrire :

$${}^0\mathbf{f}_i = {}^0\mathbf{J}_i^T (\Gamma_i - \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i)) \quad (13)$$

$${}^0\mathbf{f}_i = -{}^0\mathbf{J}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i) + {}^0\mathbf{J}_i^T \Gamma_i \quad (14)$$

En notant ${}^0\mathbf{J}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i)$ par $\mathbf{H}_{xi}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i)$, alors :

$${}^0\mathbf{f}_i = -\mathbf{H}_{xi}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i) + {}^0\mathbf{J}_i^T \Gamma_i \quad (15)$$

$\mathbf{H}_{xi}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i)$ exprime le vecteur $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i)$ dans l'espace cartésien de position au point P_i [18,19].

En utilisant l'équation (8), on obtient pour la chaîne 1 :

$${}^0\mathbf{f}_1 = -\mathbf{H}_{x1}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1, \ddot{\mathbf{q}}_1) + \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_{21}} \\ \frac{T_{31}}{S_{21}} \\ 1 \end{bmatrix} \Gamma_{11} \quad (16)$$

On peut observer que le coefficient de Γ_{11} dans l'équation (16) correspond à la première colonne de la matrice Jacobienne inverse transposée du robot (équation (5)). Il en est de même pour les chaînes 2 et 3, qui donne des matrices respectivement fonction de Γ_{12} et Γ_{13} , qui correspondent respectivement à la deuxième et la troisième colonne de la matrice Jacobienne inverse transposée du robot :

$${}^0\mathbf{f}_i = -\mathbf{H}_{xi}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i) + {}^0\mathbf{J}_p^T [{}_{:,i}] \Gamma_i \quad (17)$$

Où ${}^0\mathbf{J}_p^T [{}_{:,i}]$ représente la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice Jacobienne inverse transposée du robot.

B. Dynamique de la plate-forme

Les équations de Newton-Euler appliquées à l'origine de la plate-forme s'écrivent (pas de rotation) :

$${}^0\mathbf{F}_p = {}^0\dot{\mathbf{V}}_p M_p - M_p {}^0\mathbf{g} \quad (18)$$

Avec :

${}^0\mathbf{g}$ accélération de la pesanteur exprimée dans le repère R_0

M_p masse de la plate-forme

${}^0\mathbf{F}_p$ Force totale extérieure appliquée sur la plate-forme au point P. Puisque ${}^0\dot{\mathbf{V}}_p$ est connu, alors ${}^0\mathbf{F}_p$ peut-être calculé à partir de l'équation (18).

Les forces appliquées à la plate-forme dues aux forces de réaction de chaque chaîne (figure 6) sont calculées en utilisant l'équation suivante :

$${}^0\mathbf{F}_p = \sum_{i=1}^3 {}^0\mathbf{f}_i \quad (19)$$

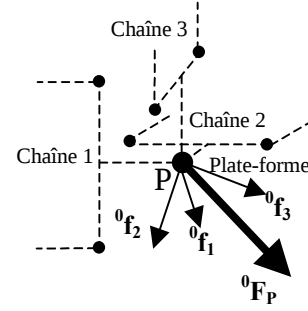


Fig. 6. : Forces extérieures appliquées au point P

En substituant l'équation (17) dans l'équation (19), on obtient :

$${}^0\mathbf{F}_p = \sum_{i=1}^3 \left[-\mathbf{H}_{xi}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i) + {}^0\mathbf{J}_p^T [{}_{:,i}] \Gamma_{ii} \right] \quad (20)$$

où :

$${}^0\mathbf{J}_p^T \Gamma_{\text{robot}} = {}^0\mathbf{F}_p + \sum_{i=1}^3 \left[\mathbf{H}_{xi}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i) \right] \quad (21)$$

On peut en déduire :

$$\Gamma_{\text{robot}} = {}^0\mathbf{J}_p^T \mathbf{H}_{\text{robot}} \quad (22)$$

avec :

$$\Gamma_{\text{robot}} = [\Gamma_{11} \quad \Gamma_{12} \quad \Gamma_{13}]^T$$

$$\mathbf{H}_{\text{robot}} = {}^0\mathbf{F}_p + \sum_{i=1}^3 \left[\mathbf{H}_{xi}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i) \right] \quad (23)$$

L'équation (22) représente le modèle dynamique inverse. Pour le calculer, en plus du calcul des matrices Jacobiennes, nous devons déterminer $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i)$ qui représente le modèle dynamique inverse de la chaîne i . Différentes méthodes peuvent être utilisées pour calculer ce vecteur numériquement ou symboliquement [20,21,22]. Afin de réduire les coûts du calcul, la méthode de Newton-Euler s'appuyant sur un calcul symbolique itératif et utilisant les paramètres inertiels de base du robot peut-être utilisée [17,23].

On peut remarquer que le modèle dynamique inverse, équation (22), ne possède pas de singularités dans l'espace accessible du robot.

C. Interprétation physique

i) On peut observer sur l'équation (23), que l'effet des chaînes cinématiques sur la plate-forme équivaut à appliquer une force égale à $\mathbf{H}_{xi}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i)$ au point P. La force totale correspondante est égale à $\sum \mathbf{H}_{xi}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i)$.

ii) Le membre à gauche de l'équation (21) représente les forces des actionneurs exprimées dans l'espace cartésien de la plate-forme.

V. MODÈLE DYNAMIQUE DIRECT

Le modèle dynamique direct exprime les accélérations cartésiennes de la plate-forme en fonction des positions et vitesses de la plate-forme et les forces des articulations motorisées. Il s'écrit : ${}^0\dot{\mathbf{V}}_p = \mathbf{f}({}^0\dot{\mathbf{V}}_p, {}^0\dot{\mathbf{V}}_p, \Gamma)$.

Les inconnues pour ce problème sont les 9 composantes des forces de réaction au point P sur chaque chaîne $\mathbf{f}_i = [f_{xi} \ f_{yi} \ f_{zi}]^T$ et les 3 composantes de l'accélération linéaire cartésienne de la plate-forme ${}^0\dot{\mathbf{V}}_p$. Comme pour le modèle dynamique inverse, on a 9 équations obtenues à partir des modèles dynamiques inverses des chaînes et 3 équations provenant de la plate-forme. Le système est donc composé également de 12 inconnues et de 12 équations. Ce système d'équations sera résolu de façon séquentielle.

A. Calcul de ${}^0\mathbf{f}_i$ en utilisant le modèle dynamique de la chaîne i.

Les forces de réaction de la chaîne, relation (14), doivent être exprimées en fonction des accélérations linéaires cartésiennes de la plate-forme. En utilisant les relations (11) et (17) de façon à séparer les forces d'inerties des forces de Coriolis, centrifuges et gravités, on obtient :

$${}^0\mathbf{f}_i = -{}^0\mathbf{J}_i^T \mathbf{A}_i \ddot{\mathbf{q}}_i - {}^0\mathbf{J}_i^T \mathbf{h}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) + {}^0\mathbf{J}_p^T \Gamma_i \quad (24)$$

En substituant l'équation (9) dans (24), on a :

$${}^0\mathbf{f}_i = -\mathbf{A}_{xi} {}^0\dot{\mathbf{V}}_p + \mathbf{A}_{xi} {}^0\mathbf{J}_i \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{h}_{xi}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) + {}^0\mathbf{J}_p^T \Gamma_i \quad (25)$$

Où $\mathbf{A}_{xi} = {}^0\mathbf{J}_i^T \mathbf{A}_i {}^0\mathbf{J}_i^{-1}$ est la matrice (3×3) d'inertie cartésienne de la chaîne i exprimée au point P_i , et $\mathbf{h}_{xi} = {}^0\mathbf{J}_i^T \mathbf{h}_i$ est la matrice (3×1) de Coriolis, centrifuge et gravité exprimée dans l'espace cartésien au point P_i [18,19].

En substituant l'équation (25) dans les équations de Newton-Euler de la plate-forme, relation (18), on obtient :

$${}^0\mathbf{F}_p = -\sum_{i=1}^3 [\mathbf{A}_{xi} {}^0\dot{\mathbf{V}}_p + \mathbf{A}_{xi} {}^0\mathbf{J}_i \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{h}_{xi}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)] + {}^0\mathbf{J}_p^T \Gamma_{robot} \quad (26)$$

Ce qui s'écrit :

$$\left(\sum_{i=1}^3 [\mathbf{A}_{xi}] + \mathbf{I}_3 M_p \right) {}^0\dot{\mathbf{V}}_p + \sum_{i=1}^3 [\mathbf{h}_{xi}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) - \mathbf{A}_{xi} {}^0\mathbf{J}_i \dot{\mathbf{q}}_i] - M_p \mathbf{g} = {}^0\mathbf{J}_p^T \Gamma_{robot} \quad (27)$$

Les accélérations cartésiennes de la plate-forme peuvent être calculées à partir de la relation suivante :

$${}^0\dot{\mathbf{V}}_p = \mathbf{A}_{robot}^{-1} ({}^0\mathbf{J}_p^T \Gamma_{robot} - \mathbf{h}_{robot}) \quad (28)$$

Avec :

$$\Gamma_{robot} = [\Gamma_{11} \ \Gamma_{12} \ \Gamma_{13}]^T$$

$$\mathbf{A}_{robot} = \sum_{i=1}^3 [\mathbf{A}_{xi}] + \mathbf{I}_3 M_p \quad (29)$$

$$\mathbf{h}_{robot} = \sum_{i=1}^3 [\mathbf{h}_{xi}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) - \mathbf{A}_{xi} {}^0\mathbf{J}_i \dot{\mathbf{q}}_i] - M_p \mathbf{g} \quad (30)$$

Les accélérations articulaires $\ddot{\mathbf{q}}_{1i}, \ddot{\mathbf{q}}_{2i}, \ddot{\mathbf{q}}_{3i}$ (pour $i = 1$ à 3) des trois chaînes cinématiques peuvent être obtenues en utilisant le modèle cinématique inverse du second ordre (relation (9)).

La matrice (3×3) $\mathbf{A}_{robot}$ correspond à la somme des matrices d'inerties spatiales des chaînes plus la matrice (3×3) diagonale dont les éléments sont égaux à M_p .

L'équation (28) représente le modèle dynamique direct du robot. Pour l'obtenir, on calcule les termes $\mathbf{A}_i$ et $\mathbf{h}_i$ de chaque chaîne :

- $\mathbf{h}_i$ peut être obtenu en utilisant la formulation de Newton-Euler dans le modèle dynamique inverse de chaque chaîne en considérant les accélérations $\ddot{\mathbf{q}}_i$ nulles : $\mathbf{h}_i = \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i = 0)$ [24,25].

- $\mathbf{A}_i$ peut être obtenu en utilisant la formulation de Newton-Euler [24,25] ou Lagrange [17].

Pour réduire les coûts de calcul, on peut utiliser une méthode de calcul symbolique itératif et les paramètres inertiels de base du robot pour $\mathbf{A}_i$ et $\mathbf{h}_i$ [25].

La relation (28) peut être aussi utiliser pour le calcul du modèle dynamique inverse, mais la relation (22) est plus efficace du point de vue coût de calcul.

B. Interprétation physique

i) La contribution de chaque chaîne sur la matrice d'inertie spatiale du robot $\mathbf{A}_{robot}$ est due à la matrice (3×3) d'inertie cartésienne de la chaîne exprimée au point P.

ii) La matrice (3×1) $\mathbf{h}_{xi}$ représente les forces de Coriolis, centrifuges et gravité exprimées dans l'espace cartésien au point P. Les forces totales correspondantes sont données par $\sum (\mathbf{h}_{xi}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) - \mathbf{A}_{xi} {}^0\mathbf{J}_i \dot{\mathbf{q}}_i)$.

VI. CONCLUSION

Dans cet article, nous présentons une forme intéressante des modèles dynamiques inverse et direct du robot Orthoglide. En effet, ces modèles prennent en compte toute la dynamique du robot sans simplification et permettent de déduire une interprétation physique du modèle dynamique du robot parallèle. Cette approche pourra être utilisée sur d'autres structures parallèles.

Ces modèles sont obtenus en termes des éléments du modèle dynamique cartésien des chaînes cinématiques du robot perçues aux points de connexions des chaînes avec la plate-forme. Par conséquent, on peut appliquer les techniques développées pour les robots séries, aux calculs de ces modèles.

RÉFÉRENCES

- [1] Nguyen C.C., Pooran F.J., "Dynamic analysis of a 6 d.o.f. CKCM robot end-effector for dual-arm telerobot systems", *Robotics and Autonomous Systems*, 1989, Vol. 5, p.377-394.
- [2] Ait-Ahmed M., "Contribution à la modélisation géométrique et dynamique des robots parallèles", *Thèse de doctorant*, 1993, LAAS, Toulouse.
- [3] Bhattacharya S., Hatwal H., Ghosh A., "An on-line estimation scheme for generalized Stewart platform type parallel manipulators", *Mechanism and Machine Theory*, Janvier 1997, Vol. 32(1), p.79-89.
- [4] Bhattacharya S., Nenchev D.N., Uchiyama M., "A recursive formula for the inverse of the inertia matrix of a parallel manipulator", *Mechanism and Machine Theory*, Octobre 1998, Vol. 33(7), p.957-964.
- [5] Liu M-J., Li C-X., Li C-N., "Dynamics analysis of the Gough-Stewart platform manipulator", *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, February 2000, Vol. 16(1), p.94-98.
- [6] Codourey A., Burdet E., "A body oriented method for finding a linear form of the dynamic equations of fully parallel robot", *In IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Albuquerque, New Mexico, U.S.*, 21-28 Avril 1997, p.1612-1618.
- [7] Tsai L-W, "Solving the inverse dynamics of a Stewart-Gough manipulator by the principle of virtual work", *Journal of Mechanical design*, March, 2000, Vol. 122, p.3-9.

- [8] Reboulet C., Berthomieu T., "Dynamic models of a six degree of freedom parallel manipulators", *ICAR, Pise, Italy, 19-22 juin 1991*, p.1153-1157.
- [9] Gosselin C. M., "Parallel computationnal algorithms for the kinematics and dynamics of parallel manipulators", *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, New York U.S., 1993, Vol.(1)*, p.883-889.
- [10] Dasgupta B., Mruthunjaya T.S., "A Newton-Euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator", *Mechanism and Machine Theory, Novembre 1998, Vol. 33(8)*, p.1135-1152.
- [11] Dasgupta B., Choudhury P., "A general strategy based on the Newton-Euler approach for the dynamic formulation of parallel manipulators", *Mechanism and Machine Theory, Août 1999, Vol. 34(6)*, p.801-824.
- [12] Ji Z., "Study of the effect of leg inertia in Stewart platform", *In IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Atlanta, 2-6 Mai 1993*, p.121-126.
- [13] Khalil W., Guegan S., "A novel solution for the dynamic modeling of Gough-Stewart manipulators", *Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation, Washington D.C., May 2002*.
- [14] Wenger P., Chablat D., "Kinematic analysis of a new parallel machine tool : the Orthoglide", *Advances in Robot Kinematic, Kluwer Academic Publishers, Juin 2000*, p.305-314.
- [15] Khalil W., Kleinfinger J.-F., "A new geometric notation for open and closed-loop robots", *Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation, San Francisco, April 1986*, p. 1174-1180.
- [16] Merlet J.-P., "Parallel robots", *Kluwer Academic Publ., Dordrecht, The Netherland, 2000*.
- [17] Khalil W., Dombre E., "Modélisation, identification et commande de robot", *2^{ème} édition, Hermès, 1999*.
- [18] Lilly K.W., Orin D.E., "Efficient O(N) computation of the operational space inertia matrix", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Cincinnati, USA, May 1990*, p. 1014-1019.
- [19] Khatib O., "A unified approach for motion and force control of robot manipulators: the operational space formulation", *IEEE J. of Robotics and Automation, Vol. RA-3(1), February 1987*, p. 43-53.
- [20] Kane T.R., Levinson D., "The use of Kane's dynamical equations in robotics", *The Int. J. of Robotics Research, Vol. 2(3), 1983*, p. 3-21.
- [21] Hollerbach J.M., "An iterative lagrangian formulation of manipulators dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity", *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. SMC-10(11), 1980*, p. 730-736.
- [22] Megahed S., Renaud M., "Minimization of the computation time necessary for the dynamic control", *Proc. 12th Int. Symp. on Industrial Robots, Paris, France, June 1982*, p. 469-478.
- [23] Khalil W., Kleinfinger J.-F., "Minimum operations and minimum parameters of the dynamic model of tree structure robots", *IEEE J. of Robotics and Automation, Vol. RA-3(6), December 1987*, p. 517-526.
- [24] Walker M.W., Orin D.E., "Efficient dynamic computer simulation of robotics mechanism", *Trans. of ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 104, 1982*, p. 205-211.
- [25] Khalil W., Creusot D., "SYMORO+: a system for the symbolic modelling of robots", *Robotica, Vol. 15, 1997*, p. 153-161.

ANNEXE

Calcul du modèle dynamique inverse de la chaîne i

Chaque chaîne du robot est composée d'une boucle planaire de type parallélogramme. On calcule le modèle dynamique de la structure arborescente équivalente en coupant l'articulation passive (q_{8i}) du parallélogramme (figure 3) :

$$\Gamma_{ar_i} = \mathbf{H}_{ar_i}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i) \quad (31)$$

$$\text{avec } \Gamma_{ar_i} = [\Gamma_{1i} \quad \Gamma_{2i} \quad \Gamma_{3i} \quad \Gamma_{4i} \quad \Gamma_{5i} \quad \Gamma_{7i}]^T$$

On calcule ensuite les équations de contrainte de fermeture de boucle pour exprimer les variables des articulations passives en fonction des variables des articulations actives. La chaîne i étant isolée de la plate-forme, on considère dans un premier temps que les articulations q_{1i} , q_{2i} et q_{3i} sont actives. Dans le modèle complet du robot, on rappelle que seule q_{1i} est motorisée et que l'on considère les couples Γ_{2i} et Γ_{3i} de valeurs nulles.

Soit $\mathbf{q}_{a_i}$ le vecteur contenant les articulations actives et $\mathbf{q}_{p_i}$ le vecteur contenant les articulations passives :

$$\mathbf{q}_{a_i} = [q_{1i} \quad q_{2i} \quad q_{3i}]^T \quad (32)$$

$$\mathbf{q}_{p_i} = [q_{4i} \quad q_{5i} \quad q_{7i}]^T \quad (33)$$

Les équations de fermeture de boucle sont les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} q_{4i} &= -q_{3i} \\ q_{5i} &= -q_{2i} - \frac{\pi}{2} \\ q_{7i} &= q_{3i} \\ q_{8i} &= -q_{3i} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Le modèle dynamique de la boucle fermée est obtenu à partir de Γ_{ar_i} et des équations de contraintes en utilisant la relation suivante [17] :

$$\Gamma_i = [\Gamma_{1i} \quad \Gamma_{2i} \quad \Gamma_{3i}]^T = \mathbf{G}_i^T \Gamma_{ar_i} \quad (35)$$

$$\Gamma_i = \mathbf{G}_i^T \mathbf{H}_{ar_i}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i) = \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i) \quad (36)$$

$$\text{avec : } \mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{q}_{ar_i}}{\partial \mathbf{q}_{a_i}} \text{ et } \mathbf{q}_{ar_i} = [\mathbf{q}_{a_i} \quad \mathbf{q}_{p_i}]$$

En utilisant les équations (34), on obtient :

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i)$ est le modèle dynamique de la chaîne i. Lorsque l'on prend en compte la force de réaction $\mathbf{f}_i$ sur le point terminal de chaque chaîne, la forme générale du modèle dynamique de la chaîne i, devient :

$$\Gamma_i = \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i) + {}^0\mathbf{J}_i^T {}^0\mathbf{f}_i \quad (38)$$