



HAL
open science

Solution exacte du problème inverse de valorisation des options dans le cadre du modèle de Black et Scholes

Nikolay Sukhomlin, Philippe Jacquinot

► **To cite this version:**

Nikolay Sukhomlin, Philippe Jacquinot. Solution exacte du problème inverse de valorisation des options dans le cadre du modèle de Black et Scholes. 2007. hal-00144781

HAL Id: hal-00144781

<https://hal.science/hal-00144781>

Preprint submitted on 4 May 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SOLUTION EXACTE DU PROBLEME INVERSE DE VALORISATION DES OPTIONS DANS LE CADRE DU MODELE DE BLACK ET SCHOLES

NIKOLAY SUKHOMLIN^{1*}
PHILIPPE JACQUINOT²

Le résultat principal de cette étude réside dans l'expression de la volatilité d'une option en fonction des autres paramètres intervenant dans le modèle classique de Black et Scholes. Cette expression, exacte, est déduite de manière analytique puis vérifiée de manière numérique.

Mots clés : Modèle de Black et Scholes, volatilité implicite, problème inverse de valorisation des options.

EXACT SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF OPTION PRICING IN THE BLACK-SCHOLES MODEL
The main result of this study concerns the expression of the volatility of an option as a function of the other parameters intervening in the traditional Black-Scholes model. This expression, exact, is firstly deduced in an analytical way and secondly verified with simulated data.

Key words : Black Scholes model, implied volatility, inverse problem of option pricing.

Classification JEL : G13, G15

INTRODUCTION

Le modèle formulé en 1973 par Black et Scholes est, depuis l'année de son invention, demeuré la pierre de touche de la théorie des options et de la pratique des marchés de produits dérivés. Il permet, dans des conditions strictes, de valoriser une option en fonction de paramètres dont les valeurs sont connues ou observables, tels que le taux d'intérêt, et d'un paramètre non observable : la volatilité. Très vite s'est posée la question du problème inverse visant à connaître le paramètre non observable en fonction des paramètres habituels, dont les valeurs sont connues ou observables, et de la valeur de l'option, également observable.

Un grand nombre d'auteurs, parmi lesquels Bouchoev et Isakov (1997), Chiarella et alii (2003), Cont et alii (2004), Egger et alii (2006) se sont penchés sur la résolution du problème inverse de valorisation des options. Ils se sont heurtés, dans leurs approches respectives, à des complications importantes. D'autres, tels que Hull (2006), ont estimé, de manière plus radicale, que cette inversion était impossible.

1 Department of Physics, the Autonomous University of Santo-Domingo; Department of Economy, the Pontifical Catholic University of Santo-Domingo, Dominican Republic,

2 Université Paris 1, Pantheon – Sorbonne, France. Chargé de cours vacataire dans les départements de Sciences Economiques, de Sciences de Gestion et à l'Institut d'Administration des Entreprises de Paris. ph.jacquino@laposte.net ; philippe.jacquino@univ-paris1.fr

* Auteur de correspondance : Nikolay Sukhomlin w17971865@gmail.com, ww17971865@yahoo.fr, Department of Economy, the Pontifical Catholic University of Santo-Domingo, Dominican Republic, Ave. Abraham Lincoln, Esq. Romulo Betancourt, Ap. 2748, Tel. 809 535 0111, ext 2144, Fax: 809 534 7060

Les développements qui suivent présentent la solution analytique au problème de l'inversion de la formule de Black et Scholes puis sa vérification numérique. Nous partons des résultats des études de symétries effectuées par Sukhomlin (2004, 2006) et des approches quantitatives sur lois de conservation proposées par Sukhomlin et Jacquinot (2006).

FORMULATION ANALYTIQUE EXPLICITE DE LA VOLATILITE

L'équation aux dérivées partielles de Black et Scholes est couramment exprimée de la manière suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

où V est la valeur de l'option, S la valeur du sous-jacent à l'instant t , r le taux d'intérêt sans risque (supposé constant) et σ la volatilité (supposée constante). La condition aux bornes est : $V = \max(S - K; 0)$ à l'échéance pour une option d'achat de style européen³ concernant un sous-jacent ne procurant pas de flux. Les constantes K et T représentent respectivement le prix d'exercice et l'échéance ($t \in [0, T]$).

La solution classique de Black et Scholes s'écrit :

$$V = S N(d_1) - F(t) N(d_2),$$

avec :

$$F(t) \equiv K e^{-r(T-t)},$$

$$N(d) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-u^2/2} du,$$

$$d_1 \equiv \frac{\ln S - \ln K}{\tau} + (1 - \beta) \tau,$$

$$d_2 \equiv \frac{\ln S - \ln K}{\tau} - \beta \tau,$$

$$\tau \equiv \sigma \sqrt{T-t}, \quad (1)$$

$$\beta \equiv \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}. \quad (2)$$

Etant donné que :

$$d_1 = d_2 + \tau,$$

³ Seule l'étude des options d'achat est présentée puisque tous les résultats peuvent être facilement étendus aux options de vente.

il est possible d'écrire⁴ : $S N'(d_1) = F(t) N'(d_2)$.

Soit par ailleurs la fonction ξ :

$$\xi \equiv V^{(2)} - V^{(1)}, \quad (3)$$

avec :

$$V^{(1)} \equiv \partial V / \partial (\ln S),$$

et

$$V^{(2)} \equiv \partial^2 V / \partial (\ln S)^2.$$

Compte tenu de la propriété de la loi normale : $N''(d) = -d N'(d)$,

il vient :

$$\xi = \frac{1}{\tau} S N'(d_1), \quad (4)$$

ou encore :

$$\xi = \frac{1}{\tau} F(t) N'(d_2).$$

Soit E_ξ l'élasticité de la fonction auxiliaire ξ par rapport à S :

$$E_\xi \equiv \frac{\partial \ln |\xi|}{\partial \ln S} = -\frac{1}{\tau^2} (\ln S - \ln K) + \beta,$$

et

$$\tau^2 (E_\xi - \beta) = \ln K - \ln S. \quad (5)$$

En remplaçant τ et β dans la relation (5) par leurs expressions dans (1) et (2), la volatilité peut alors directement être exprimée de la manière suivante :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\ln(K/S) - r(T-t)}{(T-t)(E_\xi - \frac{1}{2})}}. \quad (6)$$

Dans cette formule, la volatilité est ainsi écrite en fonction du quotient entre le prix du sous-jacent et le prix d'exercice, du taux d'intérêt sans risque, de la maturité et de l'élasticité de la fonction auxiliaire ξ . Cette dernière est une combinaison de dérivées première et seconde de la valeur de l'option par rapport au logarithme du sous-jacent. La volatilité est donc bien définie de manière exacte en fonction des autres paramètres du modèle. Les valeurs de ces dernières sont connues, observables ou calculables à partir de données de marché.

⁴ Voir par exemple Wilmott et alii (1995).

VERIFICATION NUMERIQUE

L'objectif des propos qui suivent est de vérifier de manière numérique l'expression directe de la volatilité formulée à la fin de la section précédente

La méthodologie employée repose sur la simulation de données. La valeur d'une option d'achat V_i est calculée à l'aide de la formule de Black et Scholes en utilisant une maturité (T-t), un prix d'exercice K , un taux d'intérêt sans risque r , une volatilité σ et un prix du sous-jacent S_i donnés. L'opération est répétée en donnant au sous-jacent des valeurs successives différentes.

On compare ensuite la volatilité calculée en se fondant sur la formule (6) avec celle qui a servi pour simuler les données.

De manière chiffrée, les valeurs choisies du sous-jacent vont de 95 à 105 par saut de 0,01, le prix d'exercice est égal à 100 (milieu de la plage des valeurs du sous-jacent), le taux d'intérêt est égal à 4%, la maturité est égale à 0,2 et la volatilité est égale à 20%.

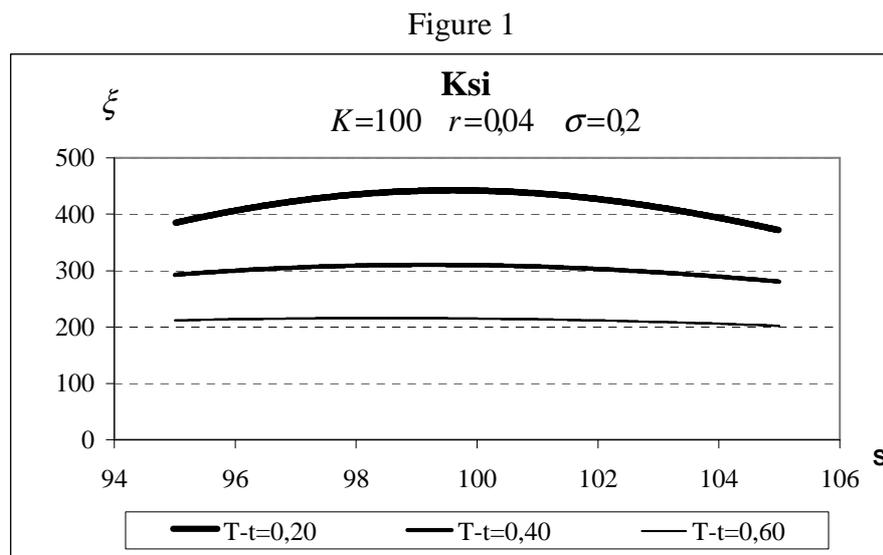
Pour chaque valeur S_i du sous-jacent, la valeur de ξ est calculée en utilisant la formule qui suit :

$$\xi_i = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} S_i e^{-\frac{\left(\frac{\ln S_i - \ln K}{\tau} + (1-\beta)\tau\right)^2}{2}},$$

où $i \in [0;1000]$, $i \in \mathbb{N}$, $S_0 = 95$; $S_{1000} = 105$ et $S_{i+1} - S_i = 0,01$.

Cette formule est l'expression discrète de l'égalité (4), après dérivation de la loi normale⁵.

La représentation graphique de ξ (figure 1) est une courbe concave.



⁵ Les calculs de ξ sur données discrètes en partant de la formule (3) aboutit à des données voisines au millionième de la valeur approchée près.

Pour des maturités plus importantes que 0,2, la courbe est moins élevée et plus aplatie⁶.

L'utilisation de la formule (6) nécessite le calcul l'élasticité de ξ . Ceci peut être fait, sur données discrètes, à l'aide de la formule suivante :

$$E_{\xi_i} = \frac{\ln(\xi_i) - \ln(\xi_{i-1})}{\ln(S_i) - \ln(S_{i-1})} \quad \forall i \in [1;1000].$$

Afin d'apprécier visuellement ξ , il est possible de reformuler l'expression (6) comme suit :

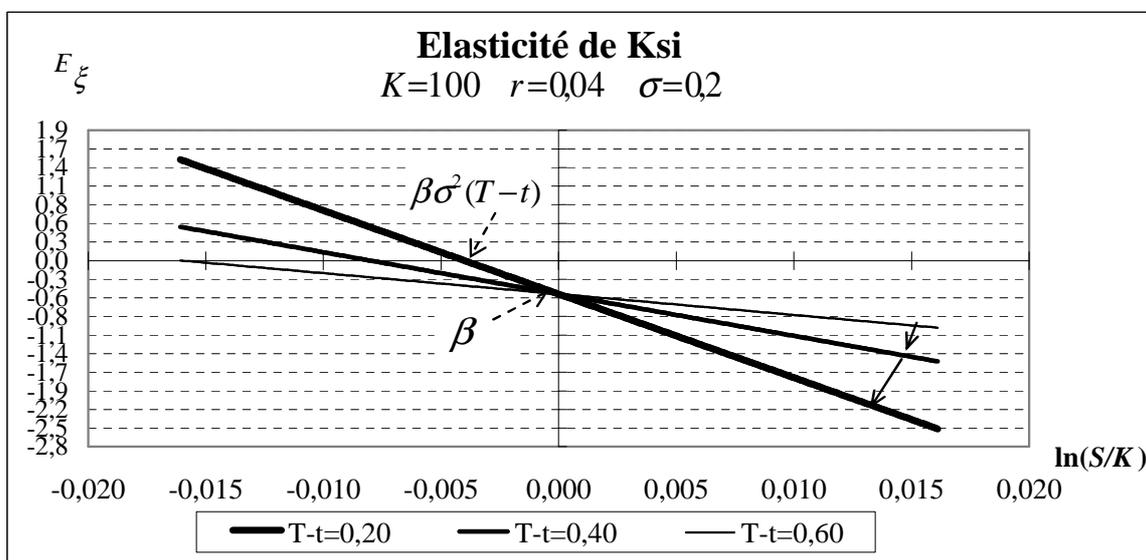
$$E_{\xi} = -\frac{\ln S - \ln K}{\tau^2} + \beta. \quad (7)$$

D'après cette relation, l'élasticité est une fonction linéaire décroissante de $\ln(S/K)$ avec pour coefficient directeur $-1/\tau^2$ et ordonnée à l'origine β .

L'élasticité étant un rapport de variations entre deux points, il est nécessaire pour représenter correctement l'élasticité de ξ d'associer, pour chaque i compris entre 1 et 1000, E_{ξ_i} à $\frac{\ln(S_i) + \ln(S_{i-1})}{2} - \ln K$.

Sur la figure 2, l'élasticité de ξ calculée sur données simulées semble apparemment bien être une fonction linéaire décroissante de $\ln(S/K)$.

Figure 2



⁶ La valeur du sous-jacent pour laquelle la valeur de Ksi est maximale peut être, selon la valeur de r , supérieure, égale ou inférieure au prix d'exercice.

En utilisant la même méthode et en donnant des valeurs de 0,40 puis de 0,60 à la maturité, les deux courbes supplémentaires obtenues sont visuellement des droites passant par la même ordonnée à l'origine et dont la pente est moins négative. Ceci semble conforter la validité de la relation (7).

D'un point de vue dynamique, la droite tourne avec le passage du temps autour du point fixe $(0, \beta)$, dans le sens des aiguilles d'une montre. La connaissance de β permet aisément de connaître la volatilité.

La validité expérimentale de la relation (6) peut être appréciée également en la réécrivant comme suit.

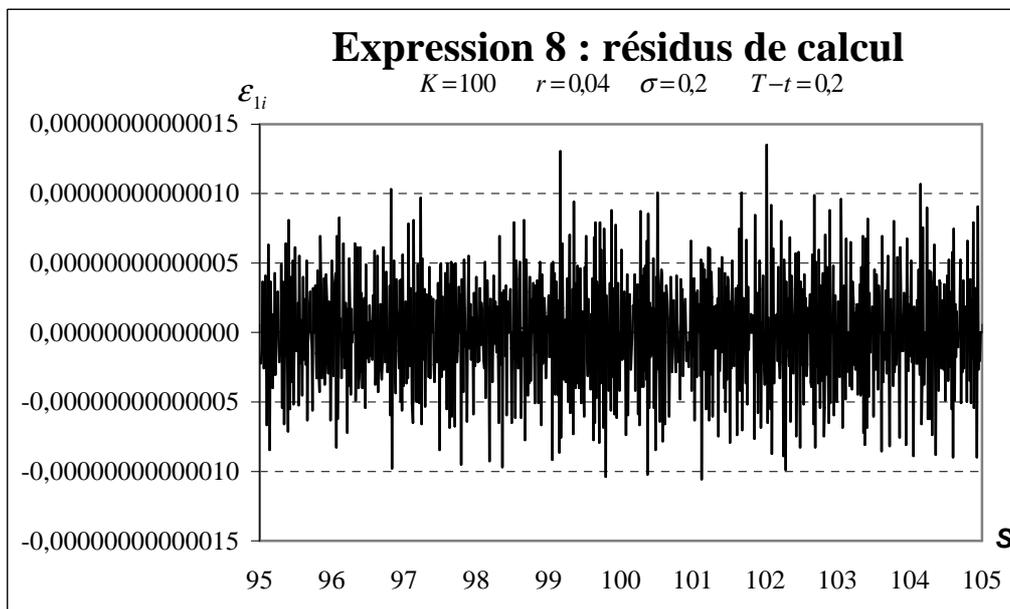
$$\tau^2(E_{\xi} - \beta) - (\ln K - \ln S) = 0. \quad (8)$$

En utilisant les données simulées, il est possible de calculer le résidu ε_i défini de la manière suivante :

$$\varepsilon_i = \tau^2(E_{\xi_i} - \beta) - \left(\ln K - \frac{\ln(S_i) + \ln(S_{i-1})}{2} \right).$$

Sur la représentation graphique de ε_i il n'apparaît visuellement aucune tendance.

Figure 3



Les valeurs de ε_i paraissent uniformément réparties de part et d'autre de l'axe des abscisses, sans évolution apparente de la dispersion.

Dès lors que ξ et son élasticité ont été calculés, il est possible de calculer la volatilité.

La relation (6) peut être transcrite de la manière suivante :

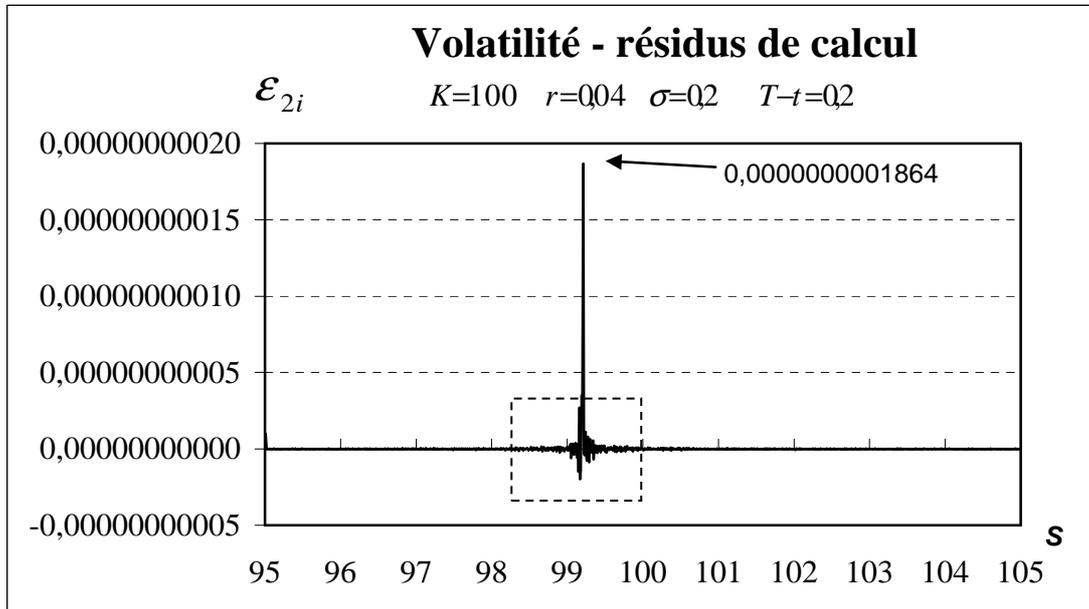
$$\sigma_{calc_i} = \sqrt{\frac{\ln K - \frac{\ln(S_i) + \ln(S_{i-1}))}{2} - r(T-t)}{(T-t)(E_{\xi_i} - \frac{1}{2})} \quad \forall i \in [1;1000] .$$

On peut alors déterminer l'écart entre la volatilité calculée et la volatilité ayant servi pour la simulation des données :

$$\mathcal{E}_{2_i} = \sigma - \sigma_{calc_i} .$$

Cet écart est représenté graphiquement sur la figure 4.

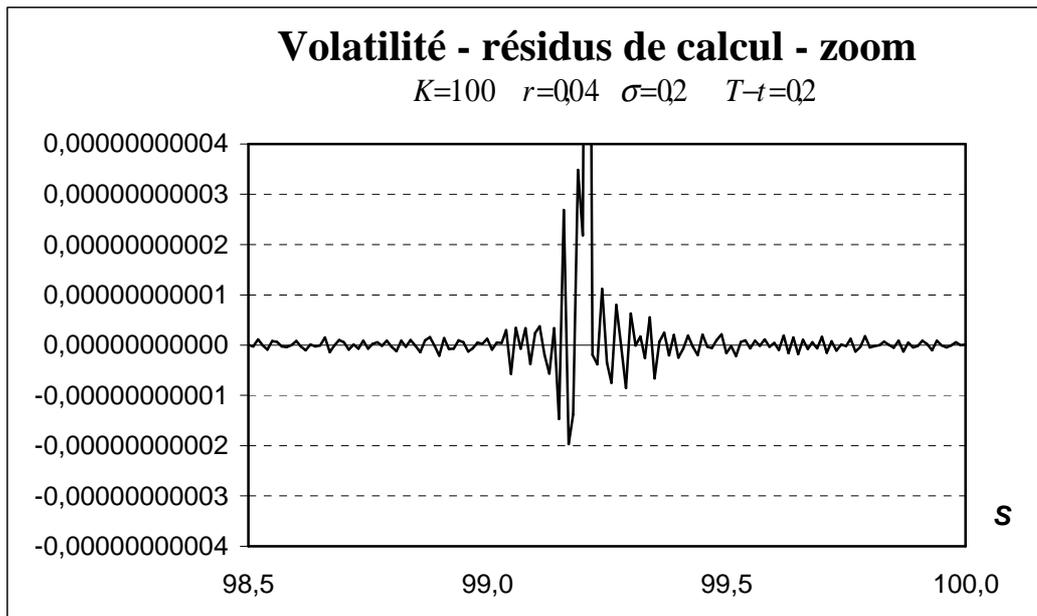
Figure 4



Les valeurs se partagent uniformément de part et d'autre de l'axe des abscisses, avec une dispersion plus forte autour de la valeur du spot égale 99,21 qui correspond à la valeur de l'élasticité de ξ proche de 0,5. La formule (6) montre la forte sensibilité au voisinage de cette valeur. L'approximation liée au calcul sur données discrètes a donc des effets amplifiés autour de ce point.

Un changement d'échelle permet d'observer de manière plus précise ce phénomène (voir figure 5).

Figure 5



L'écart maximal entre la valeur de la volatilité calculée à partir de la formule (6) et la valeur de la volatilité ayant servi à simuler les données est de l'ordre du milliardième de cette dernière. La formule (6) déduite de manière analytique semble ainsi, à des seuils acceptables, être corroborée par les chiffres.

CONCLUSION

Contrairement à un préjugé courant dans la littérature financière, le problème inverse de valorisation des options du modèle de Black et Scholes peut être résolu de manière exacte. Dans la première section de ce document, la solution analytique a été présentée. Dans la seconde section, elle a été vérifiée de manière numérique par la simulation de données.

Plus largement, le résultat ici obtenu a eu pour point de départ l'analyse de la symétrie spécifique de la solution classique de Black et Scholes trouvée par Sukhomlin (2006). La connaissance de cette symétrie cachée a permis la construction d'une expression de la volatilité implicite en fonction des paramètres observables sur le marché *via* l'introduction d'une nouvelle caractéristique « grecque » ξ . Cette approche peut s'avérer fructueuse pour le dégagement d'autres propriétés des systèmes dynamiques financiers.

Les débouchés futurs en matière de recherche théorique et appliquée sont multiples. D'un point de vue fondamental, les enchaînements analytiques de cet article peuvent par exemple être utilisés pour extérioriser la volatilité dans des modèles représentant des extensions du modèle classique de Black et Scholes. D'un point de vue pratique, les travaux peuvent porter sur l'application des formules théoriques aux données réelles pour tenter de capter avec plus d'acuité qu'actuellement la volatilité implicite historique.

Remerciements :

Philippe Jacquinot remercie vivement, de leur confiance et de leur soutien, les responsables des formations où il intervient. Nikolay Sukhomlin exprime sa gratitude à la fondation de SEESCyT, à M Roberto Reyna et au Département de Physique de la UASD pour leur coopération et l'aide apportée.

BIBLIOGRAPHIE :

Black F., Scholes M. (1973), "The pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81 (mai/juin), 637-659

Bouchouev I. and Isakov V. (1997), "The inverse problem of option pricing", *Inverse Problems*, v. 13, pp. 11-17

Chiarella C., Craddock M. and El-Hassan N., (2003), An Implementation of Bouchouev's Method for a Short Time Calibration of Option Pricing Models, *Computational Economics*, v. 22 , n. 2-3, pp. 113 – 138

Cont R., Tankov P., Voltchkova E. (2004), Option pricing models with jumps: integro-differential equations and inverse problems. Published in : P. Naitaanmäki, T. Rossi, S. Korotov, E. Onate, J. Périaux and D. Knorz (Eds.) *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences (ECCOMAS 2004)*, Jyväskylä.

Egger H., Hein T. and Hofmann B. (2006), "On decoupling of volatility smile and term structure in inverse option pricing", *Inverse Problems*, v. 22, 1247-1259

Hull J. (2006), *Options, Futures and Other Derivative Securities*, 6th edition, Upper Saddle River, N.J., Prentice Hall, 2006

Sukhomlin N. (2004), "Simetría y nuevas soluciones de la ecuación de Black Scholes", *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. XI, No. 2, pp. 175-189

Sukhomlin N. (2006), "Ley de conservación del precio final en el modelo de Black Scholes", *Economía*, Universidad de los Andes, Venezuela, n. 17-18, pp. 147-161

Sukhomlin N., Jacquinot Ph. (2006) "Lois de conservation et modèle de Black et Scholes: généralisation au cas du portefeuille multi-composants", Communication au XV^è *Symposium de Méthodes Mathématiques Appliquées aux Sciences (SIMMAC)*, Université d'Antilles Guyane, Guadeloupe, France, 18-21 avril 2006

Wilmott P., Howison S., Dewynne J. (1995), *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press. Cambridge