Transmission a travers un dioptre et reconstruction du signal source.

Ginette Saracco, Philippe Tchamitchian, Claude Gazahnes

COLLOQUE DE PHYSIQUE
Colloque C2, supplément au n°2, Tome 51, Février 1990

1er Congrès Français d'Acoustique 1990

TRANSMISSION À TRAVERS UN DIOPTRE ET RECONSTRUCTION DU SIGNAL SOURCE

G. SARACCO[(1)], Ph. TCHAMITCHIAN* et C. GAZANHES

CNRS L.M.A., Equipe:Ultrasons et Acoustique sous-marine, 31 Chemin J. Aiguier, F-13402 Marseille Cedex 09, France
**C.P.T. et Faculté des Sciences et Techniques de Saint Jérôme, F-13397 Marseille Cedex 13, France*

Résumé - Nous considérons dans l'espace tridimensionnel, deux milieux fluides homogènes séparés par une interface plane. Le milieu de plus faible célérité contient une source ponctuelle qui émet un signal dépendant arbitrairement du temps. Pour une distance radiale fixe, et un temps d'observation donné, on montre que le milieu où se trouve le point d'observation, peut être approché par une série de filtres à $\Delta f/f = C^{st}$. Par analogie à la formule de reconstitution simple de la transformée en ondelettes, nous établissons pour de grandes distances radiales, une formule de reconstruction du signal-source. La pression transmise joue alors un rôle équivalent à celui d'un coefficient d'ondelettes et la profondeur à celui du paramètre de dilatation. En vue d'une réalisation expérimentale, on s'intéressera au cas du dioptre air-eau.

Abstract - In three-dimensional space, we consider two homogeneous media separated by plane interface. In the lowest velocity media is located a point-source, which emits in time an arbitrary signal. The second medium contains the observation point. By analogy to a reconstruction formula of wavelet transform, we have obtained a formula for the reconstruction of the time dependence of the source-signal. This reconstruction involves an integration over depth (dilation parameter) of the transmitted pressure (wavelet coefficient) at the observation points. To link in future theoretical results to results obtained from an experiment, we consider the air-water interface.

1 - INTRODUCTION

On s'intéresse à la reconstruction de la dépendance temporelle du signal-source émis dans un fluide, de célérité c_1, à partir de la mesure de la pression transmise dans un second milieu de célérité c_2 supérieure à c_1. On suppose que la source émet des ondes sphériques et se trouve à une hauteur h de l'interface.

2- RAPPELS: ETUDE DU PROBLEME DIRECT.

L'étude du problème direct de la transmission acoustique en régime harmonique à travers un milieu inhomogène fluide, nous a permis de mettre expérimentalement en évidence, en accord avec l'étude théorique et numérique, une contribution de surface ou latérale (ψ^{lat}) non négligeable pour des fréquences audibles /1,2/. Celle-ci, par superposition à la contribution géométrique ($\psi^{géo}$) fait alors apparaître dans le champ transmis total, des zones d'interférences fonction des caractéristiques de la source et des coordonnées du point d'observation. La contribution de surface dont l'amplitude décroit exponentiellement en fonction de la fréquence et de la profondeur, se trouve prépondérante par rapport à la contribution géométrique, pour de faibles profondeurs (z) et grandes distances radiales (r) /1-5/. Ces contributions parcourant des trajets différents, arrivent à des temps différents et subissent de plus une atténuation fonction de la fréquence /1/.

Dans le cas transitoire, les potentiels acoustiques transmis et réfléchi, solutions des équations de D'Alembert, ainsi que le terme source temporel sont des fonctions causales et réelles. Elles doivent vérifier dans l'espace de Fourier les conditions d'une part de symétrie hermitienne, d'autre part d'analyticité dans le demi-plan complexe supérieur, en fonction des conventions de Fourier choisies. Les potentiels font alors apparaître dans cet espace, la fonction sgn(ω). Soient $\hat{F}(\omega)$ la transformée de Fourier du terme source temporel F(t), J_0 la fonction de Bessel, nous avons:

$$(1)\qquad \hat{\Phi}_{tot}(r,z,\omega) = \frac{i\,\mathrm{sgn}(\omega)}{c1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\hat{F}(\omega)\,|\omega|\int_0^\infty J_0\!\left(\frac{u\omega r}{c1}\right) N(\omega,u,z)\,\frac{1}{D(u)}\,u\,du$$

$$N(\omega,u,z) = \exp\{\, i\,\mathrm{sgn}(\omega)\,\frac{\omega}{c1}\,[h\sqrt{1-u^2} + z\sqrt{n^2-u^2}]\,\};\qquad D(u) = m\sqrt{1-u^2} + \sqrt{n^2-u^2}\,.$$

---

(1) Ce travail est partiellement supporté par la société DIGILOG (Les Milles-Aix en Provence)

Si u>n, l'expression $\sqrt{n^2-u^2}$ sera définie par i $\mathrm{sgn}(\omega)\sqrt{|(n^2-u^2)|}$. De la même façon, pour u>1, $\sqrt{1-u^2}$ sera définie par i $\mathrm{sgn}(\omega)\sqrt{|(1-u^2)|}$. $n = \frac{c_1}{c_2}$ représente l'indice de réfraction (n<1) et $m = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ le rapport des masses volumiques (m>>1).

Nous pouvons décomposer le potentiel acoustique transmis total, en trois contributions correspondant aux différents points de branchement contenus dans l'intégrand. Par analogie à l'étude faite sur le régime harmonique, la première contribution sera appelée contribution "géométrique", la deuxième contribution de "surface" et la troisième contribution "évanescente":

$$\Phi_{tot} = \underset{0<u<n}{\Phi_1} + \underset{n<u<1}{\Phi_2} + \underset{u>1}{\Phi_3} \tag{2}$$

où $u = \frac{\mu\, c_1}{\omega}$, μ: fréquence spatiale, ω: fréquence temporelle, c_1: célérité du milieu 1.

Nous avons montré que ces contributions pouvaient être calculées de façon exacte et étudiées séparément dans le plan temps-échelle /6,8/, grâce à la transformée en ondelettes /9/. Cette méthode permet d'effectuer une analyse locale à $\frac{\Delta f}{f} = C^{st}$. Les propriétés de la transformée en ondelettes d'une part et celle de l'ondelette analysante que l'on choisit, nous sont utiles. Soit a le paramètre de dilatation (échelle) et b celui de translation, nous pouvons écrire l'expression de la transformée en ondelettes continue dans l'espace de Fourier, par rapport à l'ondelette analysante progressive $\hat{g}(\omega)$ (ie: admissible et telle que $\hat{g}(\omega)=0$ pour $\omega<0$). L'application de la transformée en ondelettes au potentiel acoustique transmis est:

$$(S\,\Phi)(b,a) = \sqrt{a}\int_0^{\infty} \hat{\Phi}_j(r,z,\omega)\,\bar{\hat{g}}(a\omega)\,e^{-ib\omega}\,d\omega, \quad (j=1,2,3) \qquad \text{où } g(t)=\exp(i\omega_0 t)\,\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \tag{3}$$

$\bar{g}$ représente le complexe conjugué de g. L'ondelette analysante g doit vérifier la condition d'admissibilité suivante: $\int \frac{|\hat{g}(\omega)|^2}{|\omega|}\,d\omega < \infty$.

Si l'on suppose que le terme source temporel est un signal impulsionnel, nous pouvons décomposer la fonction de Green en contributions élémentaires d'ondelettes. L'analyse théorique et numérique du potentiel transmis (fonction de Green), a montré pour de faibles valeurs du paramètre d'échelle, un phénomène transitoire très bref (échos). Ces résultats ont pu être mis en évidence lors d'une expérimentation modelisant le dioptre air-eau /7,8/. Ce phénomène d'échos prendra alors toute son importance lors de l'étude du problème inverse.

3 - PROBLEME INVERSE: RECONSTRUCTION DE LA DEPENDANCE TEMPORELLE DU SIGNAL-SOURCE.

3 .1- POSITION DU PROBLEME.

On suppose que le terme source dépend d'une fonction arbitraire du temps F(t). A un instant d'observation donné et une distance radiale fixe, on cherche à reconstruire la dépendance temporelle du signal source émis dans l'air, à partir de mesures de la pression acoustique dans le second milieu. L'idée intuitive est la suivante: En exprimant la pression acoustique transmise totale sous forme intégrale, nous voyons qu'elle peut s'écrire:

$$P_{tot}(r,z,t) = C^{ste}\int \hat{F}(\omega)\,\Gamma(\omega,z)\,e^{-i\omega t}\,d\omega, \qquad P = \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{4}$$

L'intégrand est alors le produit de la transformation de Fourier du terme source temporel F(t) par une fonction Γ qui dépend de deux paramètres, la fréquence temporelle ω et la profondeur z. Cette fonction n'est autre que la pression associée à la contribution "géométrique" et de "surface" ("latérale") de la fonction de Green. Nous pouvons par analogie à la définition de la transformée en ondelettes (3), associer l'expression (4) à l'expression de la transformation en ondelettes du signal source F(t).
Une remarque est à faire: Les fonctions de Green $\Gamma_{géo}$ et Γ_{sur} associées respectivement aux contributions "géométrique" et de"surface" ne sont pas formellement des ondelettes. Néanmoins, leur support fréquentiel

vérifie une loi de comportement à $\frac{\Delta\omega}{\omega} = C^{st}$, lorsque le paramètre z varie. On peut donc modeliser le champ de presssion acoustique transmis, le long d'une verticale (distance radiale r fixe) comme étant le résultat d'un "filtrage multi-échelle" à $\frac{\Delta\omega}{\omega} = C^{st}$, où la profondeur z joue le rôle de paramètre de dilatation. Les fonctions Γ_{sur} et $\Gamma_{géo}$ jouent alors le rôle d'une famille de "pseudo-ondelettes". En effet, plaçons nous à grande distance radiale r (ie: dans une zone d'incidences sur-critiques $\frac{r}{h} > \frac{n}{\sqrt{1-n^2}}$). La profondeur z est considérée comme faible par rapport aux autres grandeurs physiques.

Considérons $\Gamma_{géo}$. Nous sommes dans les conditions où u=n-ε (ε petit), ie: $z=\sqrt{2n\varepsilon}\left(\frac{r}{n} - \frac{h}{\sqrt{1-n^2}}\right) + o(\varepsilon^{3/2})$

L'expression s'écrit alors, si $\omega > 0$:

$$\Gamma_{géo} = 2\sqrt{\frac{n}{r}}\,\frac{\left(\frac{r}{n} - \frac{h}{\sqrt{1-n^2}}\right)^{-3/2}}{m\sqrt{1-n^2}}\,\frac{z}{n}\,\omega\, e^{i\,\omega\,\alpha\, z^2/2c_1} + o(\varepsilon^{3/2}) \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{n} - \frac{h}{\sqrt{1-n^2}}\right)^{-1}$$

Soit:

(5) $\Gamma_{géo} = C^{st}(r,h)\,\omega z e^{i\,(\omega z^2/\alpha c_1)} = C'^{st}\frac{1}{z}\hat{g}_1(\omega z^2)$. La fonction analysante est alors: $\hat{g}_1(\omega) = \omega e^{i\,(\omega/\alpha c_1)}$

Nous obtenons pour la contribution de "surface" la fonction Γ_{sur}:

$$(6) \qquad \Gamma_{sur} = \omega \frac{2h\, e^{i\,(\omega/c_1\,\sqrt{r^2+h^2})}}{(r^2+h^2)\left(\frac{mh}{\sqrt{r^2+h^2}} + i\sqrt{\frac{r^2}{r^2+h^2} - n^2}\right)} e^{-\omega z\xi/c_1}, \quad \text{où } \xi = \sqrt{\frac{r^2}{\sqrt{r^2+h^2}} - n^2}$$

Soit:

$\Gamma_{sur} = \frac{2hz\,C^{st}(r,h)}{(r^2+h^2)}\,\omega e^{-\omega z/\xi\, c_1} = C'^{st}\omega\,\hat{g}_2(\omega z)$, où $\hat{g}_2(\omega)$ s'écrit comme l'ondelette analysante:

(7) $\hat{g}_2(\omega) = \omega\, e^{-(\omega\xi/c_1)}$ (ondelette de T. Paul) /10/.

Quand $\omega<0$, on utilise la symétrie hermitienne: $\Gamma(\omega) = \bar{\Gamma}(-\omega)$.
Le problème que l'on se pose est alors: A-t-on une formule analogue à la transformation en ondelettes inverse, en l'occurence la formule dite de reconstitution simple, de façon à restituer le signal source?
Autrement dit: est-ce-que la pression transmise totale, par simple sommation sur la variable z joue un rôle équivalent à celui de coefficient d'ondelettes? si oui, sous quelles conditions?

3.2- <u>RECONSTRUCTION DE LA DEPENDANCE TEMPORELLE DU SIGNAL-SOURCE</u>. /6-8,11/

L'expression de la pression transmise totale est :

$$(8) \qquad Ptot(r,z,t) = \frac{\rho_2}{c_1}\frac{1}{\pi}\int_{u=0}^{\infty}\left\{\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\hat{F}(\omega)\,\omega^2\,\frac{e^{i\frac{\omega}{c_1}[h\sqrt{1-u^2}+z\sqrt{n^2-u^2}]}}{m\sqrt{1-u^2}+\sqrt{n^2-u^2}}J_0\left(\frac{u\omega r}{c_1}\right)e^{-i\omega t}\,d\omega\right\}u\,du$$

Pour une distance radiale r fixe (r/h>1) et en un temps t d'observation fixe, nous devons calculer l'intégrale:

$$(9) \qquad I(r,t) = \int_{z=0}^{\infty} Ptot(r,z,t)\,dz$$

Les intégrations sur les variables u et ω sont indépendantes. On intègre d'abord l'expression (9) sur la variable u, que nous pouvons décomposer de façon naturelle en deux parties: $u<n$ et $u>n$. Notre but étant d'identifier la dépendance temporelle de la source, chaque intégrale peut alors être estimée à l'aide d'un développement asymptotique sur la variable spatiale, pour de grandes valeurs du paramètre $\frac{\omega r}{c_1}$, en supposant que la source soit alors "haute-fréquence". Chaque composante spectrale de la source ω_j doit vérifier:

(10) $\qquad |\omega_j| > \omega_0 \qquad$ et $\qquad \frac{\omega_j r}{c_1} >> 1$

D'autre part, nous nous limitons au cas le plus intéressant: (11) $\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} > n$. Sous ces deux conditions ((10) et (11)), nous pouvons effectuer le calcul:

$$I(r,t) = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \omega\, e^{-i\omega t}\, \hat{F}(\omega)\, \{ I_{in}(\omega)\} d\omega \qquad (I_{in} : \text{Intégrale interne})$$

$$\approx \frac{C_1^{ste}\, \rho_1}{\sqrt[4]{1-n^2}\sqrt{r(-hn+r\sqrt{1-n^2})}} F\left(t-\frac{rn+h\sqrt{1-n^2}}{c_1}\right) + \frac{\rho_1\, C_2^{ste}\, h}{(r^2+h^2)^{3/4}\sqrt{\sin^2\alpha-n^2\cos\alpha}} HF\left(t-\frac{\sqrt{r^2+h^2}}{c_1}\right)$$

(avec la condition $m \cos\alpha >> \sqrt{\sin^2\alpha-n^2}$, car $m \approx 800$). HF désigne la transformée de Hilbert de F. Sa présence est due à la symétrie hermitienne et à la condition (11).

4. CONCLUSION

Nous voyons que par simple sommation de la pression sur la variable z, nous trouvons effectivement le signal source F(t) et sa réplique décalée dans le temps: écho (écho mis en évidence lors du problème direct) /6-8/. Nous remarquons alors que les temps de retard correspondent à deux trajets bien distincts de l'onde dans l'air. Le premier est celui du trajet d'une onde arrivant sous incidence critique selon le principe de Fermat (analogie au temps t_1), le second correspond au trajet direct de l'onde à incidence sur-critique (analogie au temps t_2)/1,8/. Cette reconstruction n'est valable que sous l'approximation haute-fréquence. Une remarque cependant est à faire en ce qui concerne le deuxième terme de l'expression: Nous n'obtenons pas le signal source, mais la transformée de Hilbert de celui-ci. Ceci implique que les composantes spectrales de ce signal seront déphasées de $\pi/2$ par rapport à celles du signal obtenu dans le premier terme.

Nous n'avons pas de simulations numériques de ces résultats et la partie expérimentale est en cours de réalisation. Néanmoins, nous pouvons penser que l'expérimentation pourrait déboucher sur la réalisation d'une antenne spécifique où les capteurs seraient disposés sur un réseau de façon analogue à celui obtenu par la transformée en ondelettes discrète.

REFERENCES

/1/ Saracco, G., Transmission acoustique à travers le dioptre air-eau, J.Acoust., 1, (1988) 71.

/2/ Saracco, G., Corsain, G., Gazanhes, C., Holtzer, R., Léandre, J., mise en évidence expérimentale des ondes latérales dans le cas de la transmission acoustique à travers le dioptre air-eau, 12ème colq. G.R.E.T.S.I., Juans-Les-Pins (1989).

/3/ Gerjuoy, E., Phys. Rev., 73, (1948) 1442.

/4/ Brekhovskikh, L., N., Wave in layered media, Edt. Wiley, New-York, (1960) 292-302.

/5/ Towne, D., H., J.Acoust.Soc.Am., 44 (1), (1968) 65-76 et 44 (1),(1968) 77.

/6/ Saracco, G., Grossmann, A., Tchamitchian, P., (dec. 1987: Wavelet, Time-frequency methods and Phase Space), Springer-Verlag, Berlin, (1989) 139.

/7/ Saracco, G., Tchamitchian, P., (juin 1988: Electromagnetic and Acoustic scattering. Detection and Inverse Problems), World-Scientific, Singapore, (1989) 222.

/8/ Saracco, G., Propagation acoustique en régime harmonique et transitoire à travers un milieu inhomogène: Méthodes asymptotiques et transformation en ondelettes, Thèse de Doctorat, Marseille-Luminy, (1989).

/9/ Grossmann, A., Morlet, J., Soc. Int. Am. Math., Journ. of Math. Analys., 15, (1984) 723.

/10/ Grossmann A., Paul T. Lectures Notes in Physics, 211, Springer-Verlag, (1984).

/11/ Wilcox, C., Spectral and asymptoc analysis of acoustic wave propagation, Ed. Reidel, (1977) 385.