Une variante à la Coxeter du groupe de Steinberg

Christian Kassel, Christophe Reutenauer

► To cite this version:

Christian Kassel, Christophe Reutenauer. Une variante à la Coxeter du groupe de Steinberg. *K-Theory*, 1998, 14, pp.305-318. hal-00124660

HAL Id: hal-00124660

<https://hal.science/hal-00124660>

Submitted on 15 Jan 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une variante à la Coxeter du groupe de Steinberg

CHRISTIAN KASSEL¹ ET CHRISTOPHE REUTENAUER²

¹ *Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur - C.N.R.S., 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France*

² *Mathématiques, Université du Québec à Montréal, Montréal, CP 8888, succ. Centre Ville, Canada H3C 3P8*

ABSTRACT. *Let $G_n(\Lambda)$ be the semi-direct product of the symmetric group $\mathfrak{S}_n$ by the Steinberg group $St_n(\Lambda)$ of a ring Λ . We first prove that $G_n(\Lambda)$ has a Coxeter-type presentation. The canonical morphism $St_n(\Lambda) \rightarrow GL_n(\Lambda)$ extends to a group homomorphism $\Phi : G_n(\Lambda) \rightarrow GL_n(\Lambda)$. We next determine the kernel of Φ for $n = \infty$. We also give an expression for the generator of the algebraic K -group $K_2(\mathbf{Z})$ of the integers in terms of permutation matrices.*

MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION (1991): 19C09, 19C99, 20B30, 20F55

KEY WORDS: *Steinberg group, K_2 , infinite symmetric group, central extension of a group*

RÉSUMÉ. *Soit $G_n(\Lambda)$ le produit semi-direct du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ par le groupe de Steinberg $St_n(\Lambda)$ d'un anneau Λ . Nous établissons au théorème 1 que $G_n(\Lambda)$ a une présentation similaire à celle d'un groupe de Coxeter. L'application canonique $St_n(\Lambda) \rightarrow GL_n(\Lambda)$ s'étend en un homomorphisme de groupes $\Phi : G_n(\Lambda) \rightarrow GL_n(\Lambda)$. Nous en déterminons le noyau dans le cas stable $n = \infty$ (voir Théorèmes 2 et 3). Au passage nous donnons une expression pour le générateur du groupe $K_2(\mathbf{Z})$ de K -théorie algébrique de l'anneau $\mathbf{Z}$ des nombres entiers relatifs à l'aide de matrices de permutation (voir Proposition 2).*

MOTS-CLÉS : *Groupe de Steinberg, K -théorie algébrique, groupe symétrique, extension centrale de groupes*

Introduction

Le but de cet article est de montrer comment l'on peut passer des relations de Steinberg à une version paramétrée des relations de Coxeter formant la présentation standard des groupes symétriques. On y passe du groupe de Steinberg à un groupe un peu plus gros ayant une présentation à la Coxeter, et du groupe K_2 de K -théorie algébrique à un groupe qui joue un rôle équivalent pour le groupe à la Coxeter.

Considérons les matrices carrées $P_i(\lambda)$ ($i = 1, \dots, n-1$) de taille n , obtenues à partir de la matrice identité en insérant à l'intersection des lignes et colonnes i et $i+1$ le bloc

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le coefficient λ est un élément d'un anneau Λ . Le point de départ de notre travail est l'observation que les matrices $P_i(\lambda)$ satisfont entre elles les trois relations de Coxeter "avec paramètres" suivantes :

$$\begin{aligned} P_i(\lambda) P_i(0) P_i(\mu) &= P_i(\lambda + \mu), \\ P_i(\lambda) P_j(\mu) &= P_j(\mu) P_i(\lambda) \quad \text{si } |i - j| \geq 2, \\ P_i(\lambda) P_{i+1}(\mu) P_i(\nu) &= P_{i+1}(\nu) P_i(\mu + \lambda\nu) P_{i+1}(\lambda). \end{aligned}$$

Soit $G_n(\Lambda)$ le groupe engendré par des éléments y_i^λ ($i = 1, \dots, n-1$, $\lambda \in \Lambda$) soumis aux trois relations précédentes. Le théorème 1 énonce que pour $n \geq 3$ le groupe ainsi défini est isomorphe au produit semi-direct du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ par le groupe de Steinberg $St_n(\Lambda)$ de l'anneau Λ .

Soit Φ l'homomorphisme de groupes de $G_n(\Lambda)$ vers le groupe $GL_n(\Lambda)$ des matrices inversibles donné par $\Phi(y_i^\lambda) = P_i(\lambda)$. Son image est le sous-groupe engendré par les matrices élémentaires et les matrices de permutation.

Nous déterminons le noyau $N(\Lambda)$ de l'homomorphisme Φ dans le cas stable, c'est-à-dire après passage à la limite inductive sur n , et pour les anneaux dans lesquels la matrice d'une transposition n'est pas le produit de matrices élémentaires. La clé du calcul de $N(\Lambda)$ se trouve dans la suite exacte de groupes

$$0 \rightarrow K_2(\Lambda) \rightarrow N(\Lambda) \rightarrow \mathfrak{A}_\infty \rightarrow 1$$

où $\mathfrak{A}_\infty$ est le groupe alterné infini et $K_2(\Lambda)$ est le groupe de K -théorie algébrique de l'anneau Λ tel qu'il a été défini par Milnor. Nous montrons que cette extension de groupes est centrale (corollaire 2) et que, si Λ est l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs, le noyau $N(\mathbf{Z})$ est isomorphe à l'extension centrale universelle $\tilde{\mathfrak{A}}_\infty$ de $\mathfrak{A}_\infty$ (théorème 2).

La démonstration du théorème 2 est une application de la théorie des extensions centrales de groupes. Elle fait apparaître quatre extensions centrales :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow C \rightarrow \tilde{\mathfrak{A}}_\infty \rightarrow \mathfrak{A}_\infty \rightarrow 1, \quad 0 \rightarrow K_2(\mathbf{Z}) \rightarrow N(\mathbf{Z}) \rightarrow \mathfrak{A}_\infty \rightarrow 1, \\ 0 \rightarrow K_2(\mathbf{Z}) \rightarrow St(\mathbf{Z}) \rightarrow E(\mathbf{Z}) \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow \mathbf{Z}/2 \rightarrow S^3 \times S^3 \rightarrow SO(4) \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Ces extensions centrales non scindées ont en commun que leur noyau est isomorphe à $\mathbf{Z}/2$ et que le générateur de celui-ci s'exprime, dans les quatre cas, simplement à l'aide des permutations (12)(34) et (13)(24) $\in \mathfrak{A}_4$ ou des matrices de permutation correspondantes. En particulier, on obtient ainsi une nouvelle expression du générateur de $K_2(\mathbf{Z})$ (proposition 2).

Au théorème 3 nous déterminons $N(\Lambda)$ dans le cas général. Le calcul se ramène à celui de $N(\mathbf{Z})$.

Le paragraphe 1 est consacré à l'énoncé du théorème 1 et le paragraphe 2 à sa démonstration. Au paragraphe 3 nous considérons la limite inductive $G(\Lambda)$ des groupes $G_n(\Lambda)$ et nous énonçons nos résultats concernant le noyau $N(\Lambda)$ de l'homomorphisme Φ . Enfin, le paragraphe 4 contient la démonstration du théorème 2 qui détermine $N(\mathbf{Z})$ ainsi que des calculs dans les quatre extensions centrales mentionnées plus haut.

1. Le groupe $G_n(\Lambda)$

Nous considérons le groupe de Steinberg $St_n(\Lambda)$ avec les notations de [3], chap. 5 ; Λ est un anneau et $n \geq 3$. Ce groupe est engendré par les éléments x_{ij}^λ , $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, $\lambda \in \Lambda$, sujets aux *relations de Steinberg* :

$$(S) \quad \begin{aligned} x_{ij}^\lambda x_{ij}^\mu &= x_{ij}^{\lambda+\mu}, \\ x_{ij}^\lambda x_{kl}^\mu &= x_{kl}^\mu x_{ij}^\lambda & \text{si } i \neq l \text{ et } j \neq k, \\ x_{ij}^\lambda x_{jk}^\mu &= x_{jk}^\mu x_{ij}^\lambda x_{ik}^{\lambda\mu} & \text{si } i \neq k. \end{aligned}$$

Le but premier de cet article est de montrer que ces relations peuvent être remplacées par des relations à la Coxeter au prix d'un léger agrandissement du groupe.

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère sur $St_n(\Lambda)$ par ${}^\sigma x_{ij}^\lambda = x_{\sigma(i)\sigma(j)}^\lambda$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Soit $G_n(\Lambda)$ le produit semi-direct de $\mathfrak{S}_n$ par $St_n(\Lambda)$ correspondant à cette action. Un élément typique de $G_n(\Lambda)$ s'écrit sous la forme unique $w\sigma$ avec $w \in St_n(\Lambda)$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et le produit de deux tels éléments est donné par $w\sigma w'\sigma' = w {}^\sigma w' \sigma \sigma'$. De manière équivalente, on a $\sigma x_{ij}^\lambda \sigma^{-1} = x_{\sigma(i)\sigma(j)}^\lambda$ dans $G_n(\Lambda)$. Le groupe $St_n(\Lambda)$ est un sous-groupe normal de $G_n(\Lambda)$ et le quotient $G_n(\Lambda)/St_n(\Lambda)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.

Définissons des éléments y_i^λ de $G_n(\Lambda)$ par $y_i^\lambda = x_{i,i+1}^\lambda s_i$, où s_i est la transposition $(i, i+1)$ de $\mathfrak{S}_n$ et $1 \leq i < n$.

THÉORÈME 1.— *Le groupe $G_n(\Lambda)$ est engendré par les éléments y_i^λ , $i = 1, \dots, n-1$, $\lambda \in \Lambda$ et admet comme présentation*

$$(1) \quad \begin{aligned} y_i^\lambda y_i^0 y_i^\mu &= y_i^{\lambda+\mu}, \\ y_i^\lambda y_j^\mu &= y_j^\mu y_i^\lambda & \text{si } |i-j| \geq 2, \\ y_i^\lambda y_{i+1}^\mu y_i^\nu &= y_{i+1}^\nu y_i^{\mu+\lambda\nu} y_{i+1}^\lambda. \end{aligned}$$

Le groupe de Steinberg $St_n(\Lambda)$ a été défini à partir des relations universelles satisfaites par les matrices élémentaires e_{ij}^λ ($1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \Lambda$). Rappelons que e_{ij}^λ est la matrice carrée $n \times n$ dont les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient (i, j) égal à λ et des

coefficients diagonaux égaux à 1. Soit $\varphi : St_n(\Lambda) \rightarrow GL_n(\Lambda)$ l'homomorphisme de groupes déterminé par $\varphi(x_{ij}^\lambda) = e_{ij}^\lambda$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \Lambda$.

Il en va de même pour le groupe $G_n(\Lambda)$: les relations (1) du théorème 1 sont satisfaites par la famille de matrices $P_i(\lambda)$ ($1 \leq i < n$ et $\lambda \in \Lambda$) définies comme suit. Posons

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pour $\lambda \in \Lambda$. Les matrices $P(\lambda)$ ont été introduites par Cohn (voir [1], Chap. 2) pour étendre l'algorithme d'Euclide à certains anneaux non commutatifs et pour donner une présentation du groupe $GL_2(\Lambda)$ d'une algèbre associative libre. Elles servent aussi au calcul des réduites des fractions continues usuelles.

La matrice $P_i(\lambda) \in GL_n(\Lambda)$ est définie comme la somme diagonale des matrices I_{i-1} , $P(\lambda)$ et I_{n-i-1} où I_j est la matrice identité d'ordre j . En d'autres termes, on a

$$(2) \quad P_i(\lambda) = e_{i,i+1}^\lambda s_i$$

où nous avons utilisé la même notation pour la transposition s_i et pour la matrice de permutation correspondante.

LEMME 1.— *Pour tout $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ et tout $i, j = 1, \dots, n-1$ on a les relations*

$$(3) \quad \begin{aligned} P_i(\lambda)P_i(0)P_i(\mu) &= P_i(\lambda + \mu), \\ P_i(\lambda)P_j(\mu) &= P_j(\mu)P_i(\lambda) \quad \text{si } |i - j| \geq 2, \\ P_i(\lambda)P_{i+1}(\mu)P_i(\nu) &= P_{i+1}(\nu)P_i(\mu + \lambda\nu)P_{i+1}(\lambda). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION.— La première relation a été observée par Cohn. La seconde est évidente. La troisième découle des identités

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu + \lambda\nu & \lambda & 1 \\ \nu & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & \lambda & 1 \\ \nu & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Il résulte du lemme qu'il existe un homomorphisme de groupes $\Phi : G_n(\Lambda) \rightarrow GL_n(\Lambda)$ défini par $\Phi(y_{i,i+1}^\lambda) = P_i(\lambda)$ pour tout i et tout $\lambda \in \Lambda$. D'après la relation (2), la restriction de Φ au sous-groupe $St_n(\Lambda)$ est l'homomorphisme φ défini plus haut ; de plus, Φ envoie l'élément s_i de $G_n(\Lambda)$ sur la matrice de permutation correspondante.

2. Démonstration du théorème 1

Soit H le groupe défini par la présentation du théorème 1. Il s'agit de montrer que H est isomorphe à $G_n(\Lambda)$.

Commençons par construire un homomorphisme de groupes $\psi : H \rightarrow G_n(\Lambda)$. Posons $y_{ij}^\lambda = x_{i,i+1}^\lambda s_i \in G_n(\Lambda)$ et montrons que les éléments y_{ij}^λ vérifient les relations (1). Il en résultera que $\psi(y_{ij}^\lambda) = x_{i,i+1}^\lambda s_i$ définit bien un homomorphisme de groupes $\psi : H \rightarrow G_n(\Lambda)$.

(1.1) En utilisant les relations de Steinberg (S) nous avons

$$\begin{aligned}
 y_i^\lambda y_i^0 y_i^\mu &= x_{i,i+1}^\lambda s_i \underbrace{x_{i,i+1}^0 s_i x_{i,i+1}^\mu}_{s_i s_i} s_i \\
 &= x_{i,i+1}^\lambda \underbrace{s_i s_i}_{s_i s_i} x_{i,i+1}^\mu s_i \\
 &= \underbrace{x_{i,i+1}^\lambda x_{i,i+1}^\mu}_{x_{i,i+1}^{\lambda+\mu}} s_i \\
 &= x_{i,i+1}^{\lambda+\mu} s_i \\
 &= y_i^{\lambda+\mu}.
 \end{aligned}$$

(1.2) Soit $i+1 < j$. D'après les relations (S), la définition de l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $St_n(\Lambda)$ et la commutation de s_i et s_j , nous avons

$$\begin{aligned}
 y_i^\lambda y_j^\mu &= x_{i,i+1}^\lambda \underbrace{s_i x_{j,j+1}^\mu}_{s_i x_{j,j+1}^\mu} s_j \\
 &= \underbrace{x_{i,i+1}^\lambda x_{j,j+1}^\mu}_{x_{i,i+1}^\lambda x_{j,j+1}^\mu} \underbrace{s_i s_j}_{s_i s_j} \\
 &= x_{j,j+1}^\mu \underbrace{x_{i,i+1}^\lambda s_j}_{x_{i,i+1}^\lambda s_j} s_i \\
 &= x_{j,j+1}^\mu s_j x_{i,i+1}^\lambda s_i \\
 &= y_j^\mu y_i^\lambda.
 \end{aligned}$$

(1.3) Si la permutation σ satisfait $\sigma(i) = j$ et $\sigma(i+1) = j+1$, alors $\sigma y_i^\lambda \sigma^{-1} = y_j^\lambda$. Par suite il suffit de vérifier la dernière des relations (1) pour $i = 1$. Nous utilisons (S) à

chaque étape. On a

$$\begin{aligned}
y_1^\lambda y_2^\mu y_1^\nu &= x_{12}^\lambda s_1 x_{23}^\mu \underbrace{s_2 x_{12}^\nu}_{s_2} s_1 \\
&= x_{12}^\lambda s_1 \underbrace{x_{23}^\mu x_{13}^\nu}_{x_{23}^\mu x_{13}^\nu} s_2 s_1 \\
&= x_{12}^\lambda \underbrace{s_1 x_{13}^\nu}_{s_1 x_{13}^\nu} x_{23}^\mu s_2 s_1 \\
&= \underbrace{x_{12}^\lambda x_{23}^\nu}_{x_{12}^\lambda x_{23}^\nu} \underbrace{s_1 x_{23}^\mu}_{s_1 x_{23}^\mu} s_2 s_1 \\
&= x_{23}^\nu x_{12}^\lambda \underbrace{x_{13}^\nu x_{13}^\mu}_{x_{13}^{\mu+\lambda\nu}} \underbrace{s_1 s_2}_{s_1 s_2} s_1 \\
&= x_{23}^\nu x_{12}^\lambda \underbrace{x_{13}^{\mu+\lambda\nu} s_2}_{x_{13}^{\mu+\lambda\nu} s_2} s_1 s_2 \\
&= x_{23}^\nu \underbrace{x_{12}^\lambda s_2}_{x_{12}^\lambda s_2} x_{12}^{\mu+\lambda\nu} s_1 s_2 \\
&= x_{23}^\nu s_2 \underbrace{x_{13}^\lambda x_{12}^{\mu+\lambda\nu}}_{x_{13}^\lambda x_{12}^{\mu+\lambda\nu}} s_1 s_2 \\
&= x_{23}^\nu s_2 x_{12}^{\mu+\lambda\nu} \underbrace{x_{13}^\lambda s_1}_{x_{13}^\lambda s_1} s_2 \\
&= \underbrace{x_{23}^\nu s_2}_{x_{23}^\nu s_2} \underbrace{x_{12}^{\mu+\lambda\nu} s_1}_{x_{12}^{\mu+\lambda\nu} s_1} \underbrace{x_{23}^\lambda s_2}_{x_{23}^\lambda s_2} \\
&= y_2^\nu y_1^{\mu+\lambda\nu} y_2^\lambda.
\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de construire un homomorphisme de groupes $\chi : G_n(\Lambda) \rightarrow H$. Puisque $G_n(\Lambda)$ est le produit semi-direct de $\mathfrak{S}_n$ par $St_n(\Lambda)$, il a la présentation suivante : les générateurs sont x_{ij}^λ ($1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \Lambda$) et s_i ($1 \leq i < n$) ; les relations sont celles de Steinberg (S) pour les générateurs x_{ij}^λ , celles de Coxeter

$$\begin{aligned}
(C) \quad & s_i^2 = 1, \\
& s_i s_j = s_j s_i \quad \text{si } |i - j| \geq 2, \\
& s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1},
\end{aligned}$$

pour les générateurs s_i , et les relations "mixtes"

$$(CS) \quad \sigma x_{ij}^\lambda \sigma^{-1} = x_{\sigma(i)\sigma(j)}^\lambda$$

pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $1 \leq i \neq j \leq n$. Ici l'on a identifié $\mathfrak{S}_n$ avec le groupe engendré par $s_1, \dots, s_{n-1}$ et les relations (C).

(C) Posons $\lambda = \mu = 0$ dans les relations (1). Il en résulte que les éléments $s_i = y_i^0$ de H vérifient les relations de Coxeter (C).

(CS) Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ avec $\sigma(k) = i$ et $\sigma(k+1) = j$, posons (au prix d'un léger abus de notation) $x_{ij}^\lambda = \sigma y_k^\lambda s_k \sigma^{-1}$. Il faut vérifier que cet élément de H est bien défini, *i.e.* que si σ fixe k et $k+1$, alors $\sigma y_k^\lambda s_k \sigma^{-1} = y_k^\lambda s_k$; mais dans ce cas, σ commute à y_k^λ et à s_k (car σ est un produit de $s_1, \dots, s_{k-2}, s_{k+2}, \dots, s_{n-1}$), d'où le résultat.

Vérifions maintenant que si α est une permutation, alors $\alpha x_{ij}^\lambda \alpha^{-1} = x_{\alpha(i)\alpha(j)}^\lambda$. On a

$$\alpha x_{ij}^\lambda \alpha^{-1} = \alpha \sigma y_k^\lambda s_k \sigma^{-1} \alpha^{-1} = (\alpha \sigma) y_k^\lambda s_k (\alpha \sigma)^{-1} = x_{\alpha(i)\alpha(j)}^\lambda$$

par définition des x_{ij}^λ , car $(\alpha \sigma)(k) = \alpha(i)$ et $(\alpha \sigma)(k+1) = \alpha(j)$.

Vérifions enfin les relations de Steinberg.

(S.1) Pour la première, en utilisant la première des relations (1), l'on a

$$x_{ij}^\lambda x_{ij}^\mu = \sigma y_k^\lambda s_k \sigma^{-1} \sigma y_k^\mu s_k \sigma^{-1} = \sigma y_k^\lambda y_k^0 y_k^\mu s_k \sigma^{-1} = \sigma y_k^{\lambda+\mu} s_k \sigma^{-1} = x_{ij}^{\lambda+\mu}.$$

(S.2) Pour la seconde relation de Steinberg, il suffit de vérifier que $x_{12}^\lambda x_{34}^\mu = x_{34}^\mu x_{12}^\lambda$ et que $x_{12}^\lambda x_{13}^\mu = x_{13}^\mu x_{12}^\lambda$. La première égalité s'obtient clairement de la deuxième relation (1) puisque $x_{12}^\lambda = y_1^\lambda y_1^0$ et $x_{34}^\mu = y_3^\mu y_3^0$. Pour la seconde, on a, en utilisant plusieurs fois la relation de tresse dans (1),

$$\begin{aligned} x_{12}^\lambda x_{13}^\mu &= y_1^\lambda s_1 s_2 y_1^\mu s_1 s_2 \\ &= y_1^\lambda \underbrace{y_1^0 y_2^0 y_1^\mu}_{y_1^0 y_2^0} y_1^0 y_2^0 \\ &= \underbrace{y_1^\lambda y_2^\mu y_1^0}_{y_2^0 y_1^\mu} \underbrace{y_2^0 y_1^0 y_2^0}_{y_2^0 y_1^0} \\ &= y_2^0 y_1^\mu \underbrace{y_2^\lambda y_1^0 y_2^0}_{y_2^\lambda y_1^0} y_1^0 \\ &= y_2^0 y_1^\mu y_1^0 y_2^0 y_1^\lambda y_1^0 \\ &= \underbrace{s_2 y_1^\mu s_1 s_2}_{y_1^\mu s_1} y_1^\lambda s_1 \\ &= x_{13}^\mu x_{12}^\lambda. \end{aligned}$$

(S.3) Enfin, la dernière relation de Steinberg se vérifie comme suit en utilisant (S) et plusieurs fois la relation $y_i^0 y_i^0 = 1$:

$$\begin{aligned} x_{12}^\lambda x_{23}^\mu &= y_1^\lambda y_1^0 y_2^\mu y_2^0 \\ &= y_1^\lambda \underbrace{y_1^0 y_2^\mu y_1^0}_{y_1^0 y_2^\mu} y_1^0 y_2^0 \\ &= \underbrace{y_1^\lambda y_2^0 y_1^\mu}_{y_2^0 y_1^\mu} y_2^0 y_1^0 y_2^0 \\ &= y_2^\mu y_1^{\lambda\mu} y_2^\lambda y_2^0 y_1^0 y_2^0 \\ &= \underbrace{y_2^\mu y_2^0}_{y_2^\mu y_2^0} \underbrace{y_2^0 y_1^{\lambda\mu} y_2^\lambda}_{y_2^0 y_1^{\lambda\mu}} y_2^0 y_1^0 y_2^0 \\ &= x_{23}^\mu y_1^\lambda y_2^{\lambda\mu} y_1^0 y_2^0 y_1^0 y_2^0 \\ &= x_{23}^\mu \underbrace{y_1^\lambda y_1^0}_{y_1^\lambda y_1^0} y_1^0 y_2^{\lambda\mu} \underbrace{y_1^0 y_2^0 y_1^0}_{y_1^0 y_2^0} y_2^0 \\ &= x_{23}^\mu x_{12}^\lambda y_1^0 y_2^{\lambda\mu} y_2^0 y_1^0 \underbrace{y_2^0 y_2^0}_{y_2^0 y_2^0} \\ &= x_{23}^\mu x_{12}^\lambda \underbrace{y_1^0 y_2^{\lambda\mu} y_2^0}_{y_1^0 y_2^{\lambda\mu}} y_1^0 \\ &= x_{23}^\mu x_{12}^\lambda x_{13}^{\lambda\mu}. \end{aligned}$$

Les calculs précédents montrent que $\chi(x_{i,i+1}^\lambda) = y_i^\lambda y_i^0$ et $\chi(s_i) = y_i^0 \in G_n(\Lambda)$ définissent un homomorphisme de groupes $\chi : G_n(\Lambda) \rightarrow H$ qui est clairement inverse de ψ .

□

3. Stabilisation

Soit $GL(\Lambda)$ (resp. $\mathfrak{S}_\infty$) la limite inductive des groupes $GL_n(\Lambda)$ (resp. des groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$) suivant l'injection standard $GL_n(\Lambda) \rightarrow GL_{n+1}(\Lambda)$ (resp. $\mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_{n+1}$). On considère aussi le groupe de Steinberg stabilisé $St(\Lambda)$ qui est la limite inductive des groupes $St_n(\Lambda)$. L'homomorphisme φ du paragraphe 1 s'étend en un homomorphisme $\varphi : St(\Lambda) \rightarrow GL(\Lambda)$ dont l'image est le sous-groupe $E(\Lambda)$ engendré par les matrices élémentaires. Le noyau de φ est le groupe de K-théorie algébrique $K_2(\Lambda)$ introduit par Milnor (voir [3], Chap. 5).

Le groupe $\mathfrak{S}_\infty$ opère sur $St(\Lambda)$, ce qui permet de définir le produit semi-direct $G(\Lambda)$ de $\mathfrak{S}_\infty$ par $St(\Lambda)$. Il est clair que $G(\Lambda)$ est la limite inductive des groupes $G_n(\Lambda)$. De même que $St(\Lambda)$ est engendré par les symboles x_{ij}^λ où i et j parcourent tous les entiers distincts ≥ 1 , le groupe stabilisé $G(\Lambda)$ admet la présentation donnée dans le théorème 1 avec pour générateurs les symboles y_i^λ où i parcourt maintenant tous les entiers ≥ 1 .

L'homomorphisme Φ du paragraphe 1 s'étend en un homomorphisme de groupes $\Phi : G(\Lambda) \rightarrow GL(\Lambda)$. Son image $ES(\Lambda)$ est le sous-groupe de $GL(\Lambda)$ engendré par $E(\Lambda)$ et les matrices de permutation.

LEMME 2.— *Soit S le sous-groupe de $\mathfrak{S}_\infty$ formé des matrices de permutation appartenant à $E(\Lambda)$. S'il existe une matrice de permutation impaire dans $E(\Lambda)$, alors toutes les matrices de permutation sont dans $E(\Lambda)$ et l'on a $ES(\Lambda) = E(\Lambda)$ et $S = \mathfrak{S}_\infty$. Sinon, $E(\Lambda)$ est un sous-groupe d'indice deux dans $ES(\Lambda)$ et S s'identifie au sous-groupe $\mathfrak{A}_\infty$ des permutations paires de $\mathfrak{S}_\infty$.*

DÉMONSTRATION.— On sait que toute matrice de permutation paire appartient à $E(\mathbf{Z})$, donc à $E(\Lambda)$ (cf. [3], Chap. 9). Par conséquent, $\mathfrak{A}_\infty \subset S \subset \mathfrak{S}_\infty$. Comme $\mathfrak{A}_\infty$ est d'indice deux dans $\mathfrak{S}_\infty$, on a soit $S = \mathfrak{S}_\infty$, soit $S = \mathfrak{A}_\infty$. $\square$

Nous dirons que l'anneau Λ est *normal* si $ES(\Lambda)$ contient $E(\Lambda)$ comme sous-groupe d'indice deux. Dans le cas où $ES(\Lambda) = E(\Lambda)$, nous dirons qu'il est *pathologique*. Parmi les anneaux normaux l'on trouve les anneaux Λ munis d'un morphisme $\varphi : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ vers un anneau commutatif Λ' dans lequel $-1 \neq 1$. En effet, si σ est la matrice d'une transposition dans $GL(\Lambda)$, on a $\det(\varphi(\sigma)) = -1$. Il en résulte qu'une algèbre de groupe ou une algèbre de polynômes à coefficients dans $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}/n$ avec $n > 2$ est normale. Par contre, une $\mathbf{Z}/2$ -algèbre est pathologique. L'anneau $\mathbf{Z}/4 \langle a, b \rangle / (ab - 2, ba)$ est un exemple d'anneau pathologique qui n'est pas une $\mathbf{Z}/2$ -algèbre.

Soit $N'(\Lambda)$ le noyau de l'homomorphisme $\Phi : G(\Lambda) \rightarrow GL(\Lambda)$.

PROPOSITION 1.— *Le groupe $N'(\Lambda)$ est le centralisateur de $St(\Lambda)$ dans $G(\Lambda)$.*

DÉMONSTRATION.— Elle est inspirée de celle du théorème 5.1 de [3]. Si x est un élément du centralisateur, alors la matrice $\Phi(x)$ commute à toutes les matrices élémentaires e_{ij}^λ . Donc $\Phi(x)$ est une matrice scalaire. On conclut en remarquant qu'une matrice scalaire de $GL(\Lambda)$ est nécessairement la matrice identité. Ainsi $x \in N'(\Lambda)$.

Réciproquement, soit $y \in G(\Lambda)$ tel que $\Phi(y) = 1$. Il suffit de montrer que y commute à tous les générateurs x_{ij}^λ du groupe de Steinberg. Soit n assez grand pour que y soit le produit d'éléments x_{ij}^λ avec $i, j < n$ et d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$. Soit P_n le sous-groupe de $St(\Lambda)$ engendré par $x_{1n}^{\mu_1}, x_{2n}^{\mu_2}, \dots, x_{n-1,n}^{\mu_{n-1}}$ où $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1} \in \Lambda$. D'après le

lemme 5.2 de [3], le sous-groupe P_n est commutatif et la restriction de Φ à P_n est injective ; de plus, $x_{ij}^\lambda P_n x_{ij}^{-\lambda} \subset P_n$ si $i < n$ et $j < n$. De même si $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$, on a $\sigma P_n \sigma^{-1} \subset P_n$ car σ permute $\{1, 2, \dots, n-1\}$ et fixe n . Par conséquent, $y P_n y^{-1} \subset P_n$.

Pour tout $x \in P_n$, on a $xyx^{-1} \in P_n$ d'après ce qui précède. Les égalités

$$\Phi(yxy^{-1}) = \Phi(y)\Phi(x)\Phi(y)^{-1} = \Phi(x)$$

montrent que $xyx^{-1} = x$ puisque la restriction de Φ à P_n est injective. Il en résulte que y commute aux éléments x_{kn}^μ avec $k < n$. On montrerait de même que y commute aux éléments $x_{n\ell}^\mu$ avec $\ell < n$. Par conséquent, y commute à $x_{kn}^\mu x_{n\ell}^1 x_{kn}^{-\mu} x_{n\ell}^{-1} = x_{k\ell}^\mu$. On conclut en prenant n arbitrairement grand. $\square$

COROLLAIRE 1.— *On a une extension centrale de groupes*

$$0 \rightarrow K_2(\Lambda) \rightarrow N'(\Lambda) \xrightarrow{\pi} S \rightarrow 1$$

où π est la composée de l'inclusion de $N'(\Lambda)$ dans $G(\Lambda)$ et de la surjection canonique de $G(\Lambda)$ sur $\mathfrak{S}_\infty = G(\Lambda)/St(\Lambda)$.

DÉMONSTRATION.— Montrons d'abord que la suite précédente est exacte. L'image de π est S . En effet, soit $x = w\sigma$ un élément de $N'(\Lambda)$ avec $w \in St(\Lambda)$ et $\sigma = \pi(x) \in \mathfrak{S}_\infty$. Par définition de $N'(\Lambda)$ on a $1 = \Phi(x) = \varphi(w)\sigma$ où, comme précédemment, l'on identifie σ avec la matrice de permutation correspondante. On voit ainsi que $\pi(x) = \sigma = \varphi(w)^{-1}$ appartient à la fois à $\mathfrak{S}_\infty$ et à l'image de φ , donc à S . Réciproquement, soit $\sigma \in S = E(\Lambda) \cap \mathfrak{S}_\infty$. Comme l'image de φ est $E(\Lambda)$, il existe un élément w de $St(\Lambda)$ tel que $\varphi(w) = \sigma^{-1}$. Par suite, $w\sigma$ appartient à $N'(\Lambda)$ et $\pi(w\sigma) = \sigma$.

Déterminons le noyau de $\pi : N'(\Lambda) \rightarrow S$. Soit $x = w\sigma$ un élément du noyau avec $w \in St(\Lambda)$ et $\sigma = \pi(x) \in \mathfrak{S}_\infty$. On a $\pi(x) = 1$ et

$$1 = \Phi(x) = \varphi(w)\sigma = \varphi(w)\pi(x) = \varphi(w).$$

Donc $x = w$ avec $\varphi(w) = 1$. Il appartient donc au noyau de φ , c'est-à-dire à $K_2(\Lambda)$. Réciproquement, si $x = w$ avec $w \in K_2(\Lambda)$, alors $\pi(x) = 1$ et $\Phi(x) = \varphi(w)\pi(x) = 1$.

D'après la proposition 1, tout élément de $N'(\Lambda)$ commute à tout élément du groupe de Steinberg et donc à tout élément du sous-groupe $K_2(\Lambda)$. Il en résulte que l'extension est centrale. $\square$

Nous considérons maintenant le sous-groupe $N(\Lambda)$ constitué des éléments x de $N'(\Lambda)$ tels que $\pi(x)$ appartient à $\mathfrak{A}_\infty$. Il est clair que $N(\Lambda) = N'(\Lambda)$ si Λ est un anneau normal. Si Λ est pathologique, alors $N(\Lambda)$ est un sous-groupe d'indice deux de $N'(\Lambda)$.

Le reste de cet article est consacré à la détermination de la structure du groupe $N(\Lambda)$ (c'est-à-dire du noyau de $\Phi : G(\Lambda) \rightarrow GL(\Lambda)$ si Λ est normal).

Si l'on restreint l'extension du corollaire 1 à $\mathfrak{A}_\infty$, on a le résultat suivant.

COROLLAIRE 2.— *L'extension $0 \rightarrow K_2(\Lambda) \rightarrow N(\Lambda) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{A}_\infty \rightarrow 1$ est centrale.*

On sait depuis Schur [5] (voir aussi [2], Théorème 2.12.5) que le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ d'ordre n a une extension centrale universelle de noyau $C \cong \mathbf{Z}/2$ dès que $n > 7$. Il en est de même de $\mathfrak{A}_\infty$ dont l'extension centrale universelle sera notée $\tilde{\mathfrak{A}}_\infty$. L'universalité de $\tilde{\mathfrak{A}}_\infty$ et le corollaire 2 appliqué à l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs impliquent que l'on a un unique morphisme d'extension centrales

$$(4) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & \tilde{\mathfrak{A}}_\infty & \longrightarrow & \mathfrak{A}_\infty \rightarrow 1 \\ & & u \downarrow & & u \downarrow & & = \downarrow \\ 0 & \rightarrow & K_2(\mathbf{Z}) & \rightarrow & N(\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{A}_\infty \rightarrow 1 \end{array}$$

Comme $K_2(\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/2$ (cf. [3], Corollaire 10.2), la question se pose de savoir si l'application $u : C \rightarrow K_2(\mathbf{Z})$ ainsi définie est nulle ou non. La réponse est donnée au théorème suivant.

THÉORÈME 2.— *Les morphismes $u : C \rightarrow K_2(\mathbf{Z})$ et $u : \tilde{\mathfrak{A}}_\infty \rightarrow N(\mathbf{Z})$ du diagramme (4) sont des isomorphismes.*

Ce théorème sera démontré au paragraphe 4. Nous l'utilisons pour déterminer la structure du groupe $N(\Lambda)$ pour un anneau Λ général.

THÉORÈME 3.— *Soit $i : K_2(\mathbf{Z}) \rightarrow K_2(\Lambda)$ l'application induite par le morphisme canonique $\mathbf{Z} \rightarrow \Lambda$. On a l'isomorphisme de groupes*

$$N(\Lambda) \cong (\tilde{\mathfrak{A}}_\infty \times K_2(\Lambda)) / \langle (u^{-1}(\gamma), i(\gamma)) \rangle$$

où γ est le générateur de $K_2(\mathbf{Z})$ et $\langle (u^{-1}(\gamma), i(\gamma)) \rangle$ est le sous-groupe d'ordre deux engendré par l'élément central $(u^{-1}(\gamma), i(\gamma))$ de $\tilde{\mathfrak{A}}_\infty \times K_2(\Lambda)$. En particulier, si l'application $i : K_2(\mathbf{Z}) \rightarrow K_2(\Lambda)$ est nulle, alors

$$N(\Lambda) \cong \mathfrak{A}_\infty \times K_2(\Lambda).$$

Si Λ est un anneau augmenté (autrement dit, s'il est muni d'un morphisme d'anneaux $\varepsilon : \Lambda \rightarrow \mathbf{Z}$), on a

$$N(\Lambda) \cong \tilde{\mathfrak{A}}_\infty \times K_2(\Lambda) / i(K_2(\mathbf{Z})).$$

DÉMONSTRATION.— Le théorème 2 implique que l'extension centrale $N(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{A}_\infty$ est universelle. D'après le corollaire 2 il existe donc un unique morphisme d'extensions centrales

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & K_2(\mathbf{Z}) & \rightarrow & N(\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{A}_\infty \rightarrow 1 \\ & & i \downarrow & & i \downarrow & & = \downarrow \\ 0 & \rightarrow & K_2(\Lambda) & \rightarrow & N(\Lambda) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{A}_\infty \rightarrow 1 \end{array}$$

Puisqu'il est unique, i est nécessairement induit par le morphisme canonique $\mathbf{Z} \rightarrow \Lambda$.

a) Soit $M = N(\mathbf{Z}) \times K_2(\Lambda)$. Comme $K_2(\mathbf{Z})$ est abélien, $x \mapsto (x, i(x)^{-1})$ définit un homomorphisme de groupes $\delta : K_2(\mathbf{Z}) \rightarrow M$. On voit immédiatement que δ est injectif et que son image est un sous-groupe distingué de M .

Pour tout $(x, y) \in M$, posons $f(x, y) = i(x)y \in N(\Lambda)$. Comme $K_2(\Lambda)$ est central dans $N(\Lambda)$, l'application f est un homomorphisme de groupes. Si $x \in K_2(\mathbf{Z})$, on a

$$(f \circ \delta)(x) = f(x, i(x)^{-1}) = i(x)i(x)^{-1} = 1,$$

ce qui permet de définir un homomorphisme de groupes $f' : M/\delta(K_2(\mathbf{Z})) \rightarrow N(\Lambda)$ par

$$f'((x, y) \bmod \delta(K_2(\mathbf{Z}))) = i(x)y.$$

Considérons l'homomorphisme composé $\pi \circ f' : M \rightarrow \mathfrak{A}_\infty$. Montrons d'abord qu'il est surjectif. En effet, si $\sigma \in \mathfrak{A}_\infty$, il existe $x \in N(\mathbf{Z})$ tel que $\pi(x) = \sigma$. Par conséquent,

$$(\pi \circ f')((x, 1) \bmod \delta(K_2(\mathbf{Z}))) = \pi(i(x)) = \pi(x) = \sigma.$$

Etablissons maintenant que le noyau de $\pi \circ f'$ est isomorphe à $K_2(\Lambda)$. Soit $(x, y) \in M$ tel que $\pi(i(x)y) = 1$. Alors il existe $z \in K_2(\Lambda)$ tel que $i(x)y = z$. Il en résulte que dans M on a

$$(x, y) \equiv (x, y)(x^{-1}, i(x)) = (x, y)(x^{-1}, zy^{-1}) = (1, yzy^{-1})$$

modulo $\delta(K_2(\mathbf{Z}))$, ce qui prouve que tout élément du noyau de $\pi \circ f'$ provient de $K_2(\Lambda)$. Il reste à voir que l'homomorphisme $z \mapsto (1, z) \bmod \delta(K_2(\mathbf{Z}))$ de $K_2(\Lambda)$ dans $M/\delta(K_2(\mathbf{Z}))$ est injectif. Mais si $(1, z) = (x, i(x)^{-1})$, alors $x = 1$ et donc $z = i(x)^{-1} = 1$.

Nous avons ainsi construit un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & K_2(\Lambda) & \rightarrow & M/\delta(K_2(\mathbf{Z})) & \xrightarrow{\pi \circ f'} & \mathfrak{A}_\infty & \rightarrow 1 \\ & & & f' \downarrow & & = \downarrow & \\ 0 \rightarrow & K_2(\Lambda) & \rightarrow & N(\Lambda) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{A}_\infty & \rightarrow 1 \end{array}$$

On vérifie sans peine que f' induit l'identité sur les noyaux. Il en résulte que f' est un isomorphisme. On conclut à l'aide du théorème 2.

b) Si $i : K_2(\mathbf{Z}) \rightarrow K_2(\Lambda)$ est nulle, alors $\delta(x) = (x, 1)$, et donc d'après (a)

$$N(\Lambda) \cong M/\delta(K_2(\mathbf{Z})) \cong (N(\mathbf{Z})/K_2(\mathbf{Z})) \times K_2(\Lambda) \cong \mathfrak{A}_\infty \times K_2(\Lambda).$$

c) Si Λ est un anneau augmenté, l'on a par fonctorialité le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & K_2(\mathbf{Z}) & \rightarrow & N(\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{A}_\infty & \rightarrow 1 \\ & i \downarrow & & i \downarrow & & = \downarrow & \\ 0 \rightarrow & K_2(\Lambda) & \rightarrow & N(\Lambda) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{A}_\infty & \rightarrow 1 \\ & \varepsilon \downarrow & & \varepsilon \downarrow & & = \downarrow & \\ 0 \rightarrow & K_2(\mathbf{Z}) & \rightarrow & N(\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{A}_\infty & \rightarrow 1 \end{array}$$

Ceci montre que le groupe abélien $K_2(\Lambda)$ se met sous la forme $K_2(\Lambda) = K_2(\mathbf{Z}) \oplus \tilde{K}_2(\Lambda)$ et que le noyau de $\varepsilon : N(\Lambda) \rightarrow N(\mathbf{Z})$ est $\tilde{K}_2(\Lambda)$. Comme le morphisme ε est scindé par i et que $\tilde{K}_2(\Lambda) \subset K_2(\Lambda)$ est central dans $N(\Lambda)$, l'extension centrale

$$0 \rightarrow \tilde{K}_2(\Lambda) \rightarrow N(\Lambda) \xrightarrow{\varepsilon} N(\mathbf{Z}) \rightarrow 1$$

est scindée. Par conséquent, $N(\Lambda) \cong N(\mathbf{Z}) \times \tilde{K}_2(\Lambda)$. On conclut à nouveau à l'aide du théorème 2. $\square$

4. Quelques calculs dans des extensions centrales de groupes

Soit $0 \rightarrow C \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow 1$ une extension centrale de groupes. Si deux éléments α et β du groupe E commutent, c'est-à-dire si leur commutateur $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ vaut 1, ils définissent un élément $\alpha * \beta$ du noyau C par la formule

$$(5) \quad \alpha * \beta = [x, y]$$

où x et y sont des relèvements quelconques dans S de α et de β respectivement (voir [3, Chap. 8]).

Appliquons cette construction aux permutations paires $\alpha = (12)(34)$ et $\beta = (13)(24)$. Comme elles commutent, elles définissent un élément $\alpha *_{\mathcal{A}} \beta$ du noyau $C \cong \mathbf{Z}/2$ de l'extension centrale $\tilde{\mathfrak{A}}_{\infty} \rightarrow \mathfrak{A}_{\infty}$.

Considérons maintenant l'extension centrale $0 \rightarrow K_2(\mathbf{Z}) \rightarrow N(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{A}_{\infty} \rightarrow 1$ du corollaire 2. La construction (5) fournit un élément $\alpha *_{\mathcal{N}} \beta$ du noyau $K_2(\mathbf{Z})$. Il est clair que $\alpha *_{\mathcal{N}} \beta$ est l'image de $\alpha *_{\mathcal{A}} \beta$ par l'homomorphisme u du diagramme (4).

DÉMONSTRATION DU THÉOREME 2.— Au vu de ce qui précède, il suffit de vérifier que l'élément central $\alpha *_{\mathcal{N}} \beta$ de $N(\mathbf{Z})$ n'est pas trivial. Pour le calculer, il faut tout d'abord relever α et β dans $N(\mathbf{Z})$. Pour tout $i \neq j$ posons $w_{ij} = x_{ij}^1 x_{ji}^{-1} x_{ij}^1$ et $H_{ij} = w_{ij}^{-2}$ (l'élément H_{ij} est noté $h_{ij}(-1)$ dans [3], Chap. 9). Observons qu'une permutation σ opère sur w_{ij} et sur H_{ij} par ${}^{\sigma}w_{ij} = w_{\sigma(i)\sigma(j)}$ et ${}^{\sigma}H_{ij} = H_{\sigma(i)\sigma(j)}$. Définissons

$$(6) \quad A = w_{12}w_{34}H_{13}^{-1} \quad \text{et} \quad B = w_{13}w_{24}H_{12}^{-1}$$

dans le groupe de Steinberg $St(\mathbf{Z})$. On a

$$(7) \quad \varphi(A) = \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(B) = \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont les matrices des permutations α et β respectivement. Nous affirmons que l'élément $A^{-1}\alpha$ (resp. l'élément $B^{-1}\beta$) de $G(\mathbf{Z})$ est un relèvement de α (resp. de β) dans $N(\mathbf{Z})$. En effet,

$$\Phi(A^{-1}\alpha) = \varphi(A)^{-1}\hat{\alpha} = \hat{\alpha}^{-1}\hat{\alpha} = 1 \quad \text{et} \quad \pi(A^{-1}\alpha) = \alpha.$$

De même pour $B^{-1}\beta$.

L'élément $\alpha *_{\mathcal{N}} \beta$ du noyau $K_2(\mathbf{Z})$ de l'extension centrale $N(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{A}_{\infty}$ se calcule donc comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha *_{\mathcal{N}} \beta &= [A^{-1}\alpha, B^{-1}\beta] \\ &= A^{-1}\alpha B^{-1}\beta \alpha^{-1} A \beta^{-1} B \\ &= A^{-1}\alpha B^{-1}\alpha^{-1}\beta A \beta^{-1} B \\ &= A^{-1}\alpha(B^{-1})^{\beta} A B \end{aligned}$$

car α et β commutent. En remplaçant A et B par leur valeur, on a

$$\alpha *_N \beta = H_{13}w_{34}^{-1}w_{12}^{-1}H_{21}w_{13}^{-1}w_{24}^{-1}w_{34}w_{12}H_{31}^{-1}w_{13}w_{24}H_{12}^{-1}.$$

Le corollaire 9.4 de [3] implique que w_{13} et w_{24} commutent. Par ailleurs,

$$\varphi(w_{13}^{-1}w_{24}^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Une autre application de *loc. cit.* montre alors que

$$w_{13}^{-1}w_{24}^{-1}w_{34}w_{12}H_{31}^{-1}w_{13}w_{24} = w_{12}w_{34}H_{13}^{-1},$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \alpha *_N \beta &= H_{13}w_{34}^{-1}w_{12}^{-1}H_{21} \underbrace{w_{13}^{-1}w_{24}^{-1}w_{34}w_{12}H_{31}^{-1}w_{13}w_{24}}_{= w_{12}w_{34}H_{13}^{-1}} H_{12}^{-1} \\ &= H_{13}w_{34}^{-1}w_{12}^{-1}H_{21}w_{12}w_{34}H_{13}^{-1}H_{12}^{-1}. \end{aligned}$$

Toujours d'après le corollaire 9.4 de [3], les éléments w_{12} et w_{34} commutent également et

$$\varphi(w_{12}^{-1}w_{34}^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $w_{34}^{-1}w_{12}^{-1}H_{21}w_{12}w_{34} = H_{12}$, d'où nous tirons

$$\begin{aligned} \alpha *_N \beta &= H_{13} \underbrace{w_{34}^{-1}w_{12}^{-1}H_{21}w_{12}w_{34}}_{= H_{12}} H_{13}^{-1}H_{12}^{-1} \\ &= H_{13}H_{12}H_{13}^{-1}H_{12}^{-1} \\ &= [H_{12}, H_{13}]^{-1}, \end{aligned}$$

qui n'est autre, d'après Milnor (voir [3], Chap. 8–10), que le générateur de $K_2(\mathbf{Z})$. $\square$

COROLLAIRE 3.— *L'élément $\alpha *_A \beta$ est le générateur du noyau $C \cong \mathbf{Z}/2$ de l'extension centrale universelle $\tilde{\mathfrak{A}}_\infty \rightarrow \mathfrak{A}_\infty$.*

Nous terminons en donnant une expression du générateur du groupe $K_2(\mathbf{Z})$ à l'aide des matrices de permutation $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ de (7). Ces matrices appartiennent à $E(\mathbf{Z})$. Par la construction (5) elles définissent donc un élément $\hat{\alpha} *_St \hat{\beta}$ du noyau $K_2(\mathbf{Z})$ de l'extension centrale $St(\mathbf{Z}) \rightarrow E(\mathbf{Z})$.

PROPOSITION 2.— *L'élément $\hat{\alpha} *_{St} \hat{\beta}$ engendre le groupe $K_2(\mathbf{Z})$.*

DÉMONSTRATION.— Soit A et B les éléments de $St(\mathbf{Z})$ définis par (6). Comme ils relèvent $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, on a $\hat{\alpha} *_{St} \hat{\beta} = [A, B]$. Un calcul similaire à celui de la démonstration du théorème 2 permettrait de montrer que le commutateur $[A, B]$ est le générateur de $K_2(\mathbf{Z})$.

Nous allons procéder différemment. Rappelons (voir [3], Chap. Ê7–10) qu'il existe un isomorphisme naturel de $K_2(\mathbf{Z})$ vers le groupe fondamental $\pi_1 SL(\mathbf{R}) \cong \mathbf{Z}/2$ où $\mathbf{R}$ est le corps des nombres réels et où $SL(\mathbf{R})$ est le sous-groupe des éléments de $GL(\mathbf{R})$ de déterminant 1. Il suffit donc de montrer que l'image de $\hat{\alpha} *_{St} \hat{\beta}$ dans le groupe $\pi_1 SL(\mathbf{R}) \cong \pi_1 SL_4(\mathbf{R})$ n'est pas triviale. Pour établir ce dernier point, nous allons montrer que $\hat{\alpha} *_{St} \hat{\beta}$ s'envoie sur le générateur du centre du groupe de revêtement universel du groupe $SO(4)$ des matrices spéciales orthogonales, ce dernier étant un rétract par déformation de $SL_4(\mathbf{R})$.

Soit $\mathbf{H}$ le corps des quaternions muni de la structure euclidienne induite par la norme $\|x\| = (xx^*)^{1/2}$ où x^* désigne le conjugué de x . Notons S^3 le groupe multiplicatif des quaternions de norme 1. Si u et v sont des éléments de S^3 , l'application linéaire $x \mapsto uxv^*$ est une isométrie positive $\rho(u, v)$ de $\mathbf{H}$. Dans la base orthonormée $(1, i, j, k)$ formée par les générateurs standard de $\mathbf{H}$, on peut identifier $\rho(u, v)$ à un élément de $SO(4)$. Ceci définit un homomorphisme surjectif de groupes $\rho : S^3 \times S^3 \rightarrow SO(4)$ dont le noyau, d'ordre deux, est engendré par $(-1, -1)$. Il est bien connu que cette extension centrale est le groupe de revêtement universel de $SO(4)$ (voir par exemple [4], Chap. 10).

Revenons aux matrices $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$. Le calcul montre que $\alpha = \rho(k, j)$ et $\beta = \rho(i, k)$. Par conséquent, $\hat{\alpha} *_{St} \hat{\beta}$ s'envoie sur le commutateur

$$\kappa = (k, j)(i, k)(k, j)^{-1}(i, k)^{-1} \in S^3 \times S^3.$$

On conclut en observant que dans le corps de quaternions l'on a

$$\kappa = (kik^*i^*, jkj^*k^*) = (-1, -1).$$

□

COROLLAIRE 4.— *L'extension centrale universelle $\tilde{\mathfrak{A}}_\infty$ de $\mathfrak{A}_\infty$ est isomorphe au sous-groupe de $St(\mathbf{Z})$ formé des éléments dont l'image par φ est une matrice de permutation paire :*

$$\tilde{\mathfrak{A}}_\infty \cong \{w \in St(\mathbf{Z}) \mid \varphi(w) \in \mathfrak{A}_\infty\}.$$

DÉMONSTRATION.— Par universalité de $\tilde{\mathfrak{A}}_\infty$, l'inclusion des matrices de permutation paires dans $E(\mathbf{Z})$ induit un unique morphisme d'extensions de groupes

$$(8) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & \tilde{\mathfrak{A}}_\infty & \rightarrow & \mathfrak{A}_\infty \rightarrow 1 \\ & & j \downarrow & & j \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & K_2(\mathbf{Z}) & \rightarrow & St(\mathbf{Z}) & \rightarrow & E(\mathbf{Z}) \rightarrow 1 \end{array}$$

Par construction, j envoie le générateur $\alpha *_{\mathfrak{A}} \beta$ de C sur l'élément $\hat{\alpha} *_{St} \hat{\beta}$ dont nous venons de montrer que c'est le générateur de $K_2(\mathbf{Z})$. Il en résulte que $j : C \rightarrow K_2(\mathbf{Z})$ est un isomorphisme. Ceci, joint à la commutativité du diagramme (8), implique que l'homomorphisme $j : \tilde{\mathfrak{A}}_\infty \rightarrow St(\mathbf{Z})$ induit un isomorphisme de $\tilde{\mathfrak{A}}_\infty$ sur le sous-groupe des éléments dont l'image par φ est une matrice de permutation paire. □

Références

- [1] P. M. COHN, *Free rings and their relations*, London Math. Society Monographs, Academic Press, London, 1971.
- [2] G. KARPILOVSKY, *The Schur multiplier*, London Math. Society Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1987.
- [3] J. MILNOR, *Introduction to algebraic K-theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 72, Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, 1971.
- [4] I. PORTEOUS, *Topological geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2e édition, 1981.
- [5] J. SCHUR, *Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. für Reine Angew. Math. 139 (1911), 155–250.

C.K. : Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur - C.N.R.S.
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex, France
E-mail : kassel@math.u-strasbg.fr
Fax : +33 (0)3 88 61 90 69

C.R. : Mathématiques
Université du Québec à Montréal
Montréal, CP 8888, succ. Centre Ville, Canada H3C 3P8
E-mail : reutenauer.christophe@uqam.ca
Fax : +514 987 8935

(12 novembre 1996)