Enroulements Browniens et Subordination dans les Groupes de Lie.

Nathanaël Enriquez, Jacques Franchi, Yves Le Jan

Enroulements browniens et subordination dans les groupes de Lie

N. ENRIQUEZ J. FRANCHI Y. LE JAN

Décembre 2002

Résumé

L'objet de ce travail est de faire apparaître le lien entre l'enroulement brownien et l'opération de subordination, et de montrer qu'il peut être étendu à des groupes de Lie non abéliens.

1 Introduction

Le résultat de Spitzer [S], sur l'enroulement du mouvement brownien plan autour de l'origine, a suscité de multiples travaux (cf. par exemple [LMK],[PY],[F1]). Notre propos est d'une part, par l'emploi d'une échelle de temps adéquate permettant d'obtenir des résultats non asymptotiques, de faire apparaître clairement le lien entre ce type de théorème et l'opération de subordination, d'autre part de montrer qu'il est susceptible d'être étendu à des groupes de Lie non abéliens. Dans les deux premières sections, sont respectivement étudiées l'opération de subordination pour un mouvement brownien dans un groupe de Lie, et son application au processus d'enroulement. Des exemples sont présentés dans la troisième section, notamment celui de l'enroulement dans des pointes hyperboliques complexes, qui conduit à un processus de Lévy sur le groupe d'Heisenberg.

2 Subordination d'un mouvement brownien sur un groupe de Lie

Soit (X_t) un mouvement brownien gauche sur un groupe de Lie G , défini par l'équation

$$X_0 = id \ , \quad (\circ dX_t)\, X_t^{-1} = dW_t \ ,$$

où (W_t) est un mouvement brownien sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$; de sorte que les accroissements à gauche $X_{t_{j+1}} X_{t_j}^{-1}$, $0 \leq t_0 < .. < t_n$, sont indépendants et homogènes.

Soit ν_t le semi-groupe de convolution sur G donnant la loi de X_t.

Considérons un subordinateur (Λ_t) sans dérive de mesure de Lévy π_Λ, indépendant de X. $(s, \Delta\Lambda_s)$ est un processus de Poisson ponctuel sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $dx \otimes \pi_\Lambda(dy)$. Posons $\mathcal{F}_t := \sigma(\Lambda_s, s \leq t) \vee \sigma(W_s, s \leq \Lambda_t)$, et introduisons le processus $Y_t := X_{\Lambda_t}$, qui est $\mathcal{F}_t$-adapté.

Introduisons une métrique sur $\mathcal{G}$ et notons d la distance sur G qui lui est associée. Soit $\rho > 0$ tel que $\exp_{|B(0,\rho)}$ soit injective. L'image de $B(0,\rho)$ par l'exponentielle est une boule de G centrée en l'identité et de rayon ρ.

Nous pouvons alors exprimer le générateur de (Y_t) comme suit, ce qui précise dans notre contexte la formule de Lévy-Khintchine sur le groupe G établie dans [H] (Theorem 5.1) : la mesure de Lévy du processus Y est égale à $\int_0^\infty \nu_s(dg)\pi_\Lambda(ds)$.

Proposition 1 *Soit f une fonction de G dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact. Alors*

$$f(Y_\cdot) - \int_0^\cdot \int_{G\times\mathbb{R}_+} \Big(f(Y_{u-}g) - f(Y_{u-}) - \langle df(Y_{u-}), Y_{u-}\exp^{-1}(g)\rangle 1_{\{d(id,g)<\rho\}}\Big)\nu_s(dg)\pi_\Lambda(ds)du$$

est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

Preuve : Remarquons d'abord que $f(Y_t) - f(id) = \displaystyle\int_0^{\Lambda_t} d(f\circ X)_u$, et découpons cette intégrale suivant les sauts de Λ de taille supérieure à $\varepsilon > 0$. Pour cela introduisons :

- $T_n^\varepsilon :=$ le $n^{\text{ième}}$ temps de saut de Λ de taille supérieure à ε.
- $N_t^\varepsilon := \operatorname{Sup}\{n \in \mathbb{N} \,|\, T_n^\varepsilon \leq t\}$.

N_t^ε est un processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité $\pi_\varepsilon(1)$, où $\pi_\varepsilon(dx) := 1_{\{x\geq\varepsilon\}}\,\pi_\Lambda(dx)$.

Nous avons $\quad f(Y_t) - f(id) = A_t^\varepsilon + B_t^\varepsilon$, $\quad$ avec

$$A_t^\varepsilon := \int_{[0,\Lambda_t]\setminus \cup_{\{n<N_t^\varepsilon\}}[\Lambda_{T_n^\varepsilon-}, \Lambda_{T_n^\varepsilon}]} d(f\circ X)_u$$

et

$$B_t^\varepsilon := \sum_{n<N_t^\varepsilon} \Big(f(Y_{T_n^\varepsilon}) - f(Y_{T_n^\varepsilon-})\Big).$$

A_t^ε tend vers 0 dans L^1. En effet la semi-martingale $f\circ X$ se décompose en une martingale M^f et un processus à variation bornée A^f. f ayant ses dérivées bornées, $\frac{d\langle M^f, M^f\rangle_t}{dt}$ et $\frac{dA_t^f}{dt}$ sont bornées par des constantes, et donc

$$\mathbb{E}\Big[|A_t^\varepsilon|\Big] \leq \mathcal{O}(1) \times \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} 1_{[0,\Lambda_t]\setminus \cup_{\{n<N_t^\varepsilon\}}[\Lambda_{T_n^\varepsilon-}, \Lambda_{T_n^\varepsilon}]}(x)dx\right],$$

quantité qui tend vers 0 lorsque ε tend vers 0, par convergence dominée.

Ensuite $B_t^\varepsilon = C_t^\varepsilon + D_t^\varepsilon$, avec

$$C_t^\varepsilon := \sum_{n<N_t^\varepsilon} \Big(f(Y_{T_n^\varepsilon}) - f(Y_{T_n^\varepsilon -}) - \mathbb{E}[f(Y_{T_n^\varepsilon}) - f(Y_{T_n^\varepsilon -}) | \mathcal{F}_{T_n^\varepsilon -}] \Big)$$

$$\text{et} \qquad D_t^\varepsilon := \sum_{n<N_t^\varepsilon} \mathbb{E}[f(Y_{T_n^\varepsilon}) - f(Y_{T_n^\varepsilon -}) | \mathcal{F}_{T_n^\varepsilon -}] \,.$$

Il apparaît que C_t^ε est une martingale. En effet C_t^ε s'écrit sous la forme $C_t^\varepsilon = \sum_{n\in\mathbb{N}} Z_n 1_{\{n<N_t^\varepsilon\}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} Z_n 1_{\{T_n^\varepsilon<t\}}$, où $Z_n := f(Y_{T_n^\varepsilon}) - f(Y_{T_n^\varepsilon -}) - \mathbb{E}[f(Y_{T_n^\varepsilon}) - f(Y_{T_n^\varepsilon -}) | \mathcal{F}_{T_n^\varepsilon -}]$ vérifie $\mathbb{E}[Z_n | \mathcal{F}_{T_n^\varepsilon -}] = 0$. C_t^ε est donc une somme dénombrable de martingales, qui converge dans L^1 (on vérifie en effet que le reste de la somme des moments d'ordre 1 des variables ajoutées se majore par une constante fois le reste de la série des $\mathbb{P}(N_t^\varepsilon > n)$, qui est convergente puisque N_t^ε est une variable de Poisson).

Quant à D_t^ε , il s'écrit : $D_t^\varepsilon = \displaystyle\sum_{n<N_t^\varepsilon} \int_{\mathbb{R}_+} \int_G f(Y_{T_n^\varepsilon -} g) - f(Y_{T_n^\varepsilon -}) \nu_s(dg) \frac{\pi_\varepsilon(ds)}{\pi_\varepsilon(1)}$.

Si on pose $H_t^\varepsilon := \displaystyle\int_{G\times\mathbb{R}_+} (f(Y_{t-} g) - f(Y_{t-})) \nu_s(dg) \frac{\pi_\varepsilon(ds)}{\pi_\varepsilon(1)}$, alors $D_t^\varepsilon = \displaystyle\int_0^t H_s^\varepsilon dN_s^\varepsilon$ se décompose par la formule de compensation relative aux processus de Poisson composés en la somme d'une $\mathcal{F}_t$-martingale et de $E_t^\varepsilon := \displaystyle\int_0^t \int_{G\times\mathbb{R}_+} \Big(f(Y_{u-} g) - f(Y_{u-}) \Big) \nu_s(dg) \pi_\varepsilon(ds) du$.

Pour faire tendre ε vers 0, il convient d'ajouter un contre-terme.

Notons que $\displaystyle\int_G \langle df(Y_{u-}), Y_{u-} \exp^{-1}(g) \rangle 1_{\{d(id,g)<\rho\}} \nu_s(dg)$ est nul, car ν_s est invariant par $g \mapsto g^{-1}$ et $\exp^{-1}(g^{-1}) = -\exp^{-1}(g)$. Donc

$$E_t^\varepsilon = \int_0^t \int_{G\times\mathbb{R}_+} \Big(f(Y_{u-} g) - f(Y_{u-}) - \langle df(Y_{u-}), Y_{u-} \exp^{-1}(g) \rangle \, 1_{\{d(id,g)<\rho\}} \Big) \nu_s(dg) \, \pi_\varepsilon(ds) \, du \,.$$

$$\text{Or} \qquad \Big| f(Y_{u-} g) - f(Y_{u-}) - \langle df(Y_{u-}), Y_{u-} \exp^{-1}(g) \rangle \Big| \leq Cste \times d(id,g)^2 \qquad \text{et}$$

$$\Big| f(Y_{u-} g) - f(Y_{u-}) - \langle df(Y_{u-}), Y_{u-} \exp^{-1}(g) \rangle \, 1_{\{d(id,g)<\rho\}} \Big| \leq Cste \times \min\{d(id,g)^2, 1\} \,,$$

et $\displaystyle\int_G \min\{d(id,g)^2, 1\} \, \nu_s(dg) = \mathbb{E}[\min\{d(X_s, id)^2, 1\}] \leq Cste \times \min\{s, 1\}$; donc

$$\int_{G\times\mathbb{R}_+} \Big(f(Y_{u-} g) - f(Y_{u-}) - \langle df(Y_{u-}), Y_{u-} \exp^{-1}(g) \rangle \, 1_{\{d(id,g)<\rho\}} \Big) \nu_s(dg)$$

est dans $L^1\Big(\mathbb{P}(d\omega) \otimes \pi_\Lambda(ds) \otimes 1_{[0,t]}(u) du\Big)$. Le théorème de convergence dominée donne alors la convergence dans L^1 de E_t^ε vers

$$\int_0^t \int_{G\times\mathbb{R}_+} \Big(f(Y_{u-} g) - f(Y_{u-}) - \langle df(Y_{u-}), Y_{u-} \exp^{-1}(g) \rangle \, 1_{\{d(id,g)<\rho\}} \Big) \nu_s(dg) \, \pi_\Lambda(ds) \, du \,.$$

Donc les martingales $\Big(f(Y_t) - f(id) - A_t^\varepsilon - E_t^\varepsilon \Big)$ convergent dans L^1 . ⋄

3 Processus d'enroulement dans un groupe

Fixons un groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, un sous-groupe fermé Γ de G, une variété riemannienne $\mathcal{M}$, et un ouvert U de $\mathcal{M}$ tel que $\overline{U}$ soit différent de $\mathcal{M}$ et difféomorphe à $(\Gamma\backslash G)\times \mathbb{R}_+$.

Notons $(x(z),y(z))\in(\Gamma\backslash G)\times\mathbb{R}_+$ les coordonnées de $z\in\overline{U}$.

Considérons une diffusion récurrente (Z_t) sur $\mathcal{M}$, de générateur $\mathcal{L}$ (au sens des problèmes de martingale). Lorsque Z_t est récurrente positive, nous noterons μ sa mesure invariante normalisée. Notons $\mathcal{F}_t$ la filtration canonique de Z.

Faisons l'hypothèse que dans U le générateur $\mathcal{L}$ se décompose en produit semi-direct : il existe une fonction mesurable g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^\star$, un générateur $\mathcal{L}_y$ sur $\mathbb{R}_+$, et un générateur $\mathcal{L}_G$ sur G tels que $\mathcal{L}=\mathcal{L}_y+g\circ y\times\mathcal{L}_G$ dans U. Précisément, $\mathcal{L}_y$ s'écrit $\mathcal{L}_y h(y)=a(y)h''(y)+b(y)h'(y)$, pour a,b boréliennes bornées sur $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{L}_G$ s'écrit $\mathcal{L}_G=\sum_{j=1}^r Y_j^2$ pour certains champs de vecteurs lisses et invariants à gauche $Y_1,..,Y_r$ sur G, et enfin pour toutes fonctions de classe C^2, f sur $\mathbb{R}_+$ et F sur $\Gamma\backslash G$, nous avons dans U :

$$\mathcal{L}\Big((F\circ x)\times(f\circ y)\Big)=(F\circ x)\times((\mathcal{L}_y f)\circ y)+((gf)\circ y)\times((\mathcal{L}_G F)\circ x)\,.$$

L'enroulement dans G associé au passage de la diffusion Z_t dans U est naturellement défini comme la solution θ_t de l'équation différentielle stochastique :

$$d\theta_t=\theta_t\circ dV_t\ ,\qquad\text{où}\qquad V_t:=\int_0^t 1_U(Z_s)\,x(Z_s)^{-1}\circ dx(Z_s)\ .$$

Posons $a_t:=\int_0^t 1_U(Z_s)g(y(Z_s))ds$, et soit $\tau_t:=\inf\{s>0\,|\,a_s=t\}$ son inverse à droite.

y_{τ_t} est alors une diffusion sur $\mathbb{R}_+$. Notons L_t son temps local en 0, d'inverse à droite Λ_t. C'est un subordinateur dont l'exposant caractéristique sera noté ψ. $L_t^0:=L_{a_t}$ est un temps local de ∂U pour la diffusion Z_t ; son inverse à droite est évidemment $\Lambda_t^0:=\tau_{\Lambda_t}$. Notons $X_t:=\theta_{\tau_t}$ l'enroulement dans l'échelle de temps τ_t, et $\varphi_t:=\theta_{\Lambda_t^0}=X_{\Lambda_t}$ l'enroulement dans l'échelle de temps Λ_t^0.

Proposition 2 *La semi-martingale (X_t) est un $\mathcal{F}_{\tau_t}$-mouvement brownien gauche indépendant de (Λ_t), à valeurs dans G, de générateur $\mathcal{L}_G$.*

Preuve (V_{τ_t}) et (y_{τ_t}) sont des diffusions indépendantes : (y_{τ_t}) est une diffusion sur $\mathbb{R}_+$ de générateur $\frac{1}{g(y)}\mathcal{L}_y$ réfléchie en 0, et (V_{τ_t}) est un mouvement brownien sur $\mathcal{G}$ de générateur $\sum_{j=1}^r(D_{y_i})^2$ où $y_i:=Y_i(id)$. Or, du fait que (V_t) est constant là où (a_t) l'est, il est clair que $dX_t=X_t\circ dV_{\tau_t}$. X_t est donc indépendant de y_{τ_t}, et donc de Λ_t. $\diamond$

Proposition 3 *Notons $\hat{P}$ désigne la mesure d'Itô des excursions dans U du processus $Z.$ (ou dans $\mathbb{R}_+$ du processus $y.:=y(Z.)$), et notons ζ le temps de retour en 0 de (y_t)*

et la durée de vie d'une excursion. Fixons la normalisation de la mesure $\hat{P}$ *(et donc du temps local) de sorte que* $\hat{E}(\zeta) = 1$ *. Nous avons alors pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *:*

$$\psi(\alpha) = -\,C^{-1}\,\frac{d}{d\eta}|_{\eta=0}\,\mathbb{E}_\eta\Big(\exp\Big[-\alpha\int_0^\zeta g(y_s)ds\Big]\Big)$$

$$\textit{avec} \qquad C := -\lim_{\alpha\searrow 0}\,\alpha^{-1}\,\psi^0(\alpha)$$

en notant

$$\psi^0(\alpha) = \frac{d}{d\eta}|_{\eta=0}\,\mathbb{E}_\eta(e^{-\alpha\,\zeta})\,.$$

N.B. : $\psi^0(\alpha)$ est l'exposant caractéristique du subordinateur inverse du temps local en zéro de la diffusion y_{σ_t} , où $\sigma_t := \inf\{s \geq 0, \mid \int_0^s 1_U(Z_s)ds \geq t\}$.

Preuve La formule exponentielle pour le processus ponctuel de Poisson des excursions entraîne aussitôt (voir par exemple ([B2], proposition 9.1)) :

$$\psi(\alpha) = \hat{E}\Big(1 - \exp\Big[-\alpha\int_0^\zeta g(y_s)ds\Big]\Big)\,.$$

Notant τ^η le temps d'atteinte de η, nous avons (voir par exemple ([RW], VI.48.1))

$$\hat{E}\Big(1 - e^{-\alpha\,\zeta}\Big) = \lim_{\eta\searrow 0}\hat{E}\Big(1_{\{\tau^\eta<\infty\}}\mathbb{E}_\eta\Big[1 - e^{-\alpha\,\zeta}\Big]\Big) = \lim_{\eta\searrow 0}\,\hat{P}(\tau^\eta < \infty)\times\Big[1 - \mathbb{E}_\eta(e^{-\alpha\,\zeta})\Big]$$

$$= \lim_{\eta\searrow 0}\,(C\,\eta)^{-1}\times\Big[1 - \mathbb{E}_\eta(e^{-\alpha\,\zeta})\Big] = -\,C^{-1}\,\frac{d}{d\eta}|_{\eta=0}\,\mathbb{E}_\eta(e^{-\alpha\,\zeta})\,,$$

pour une certaine constante C dépendant de la normalisation de $\hat{P}$, et de même

$$\hat{E}\Big(1 - \exp\Big[-\alpha\int_0^\zeta g(y_s)ds\Big]\Big) = -\,C^{-1}\,\frac{d}{d\eta}|_{\eta=0}\,\mathbb{E}_\eta\Big(\exp\Big[-\alpha\int_0^\zeta g(y_s)ds\Big]\Big)\,.$$

Enfin

$$1 = \hat{E}(\zeta) = \lim_{\alpha\searrow 0}\nearrow\,\hat{E}\Big(\frac{1 - e^{-\alpha\zeta}}{\alpha}\Big) = -\lim_{\alpha\searrow 0}\,(C\alpha)^{-1}\,\frac{d}{d\eta}|_{\eta=0}\,\mathbb{E}_\eta(e^{-\alpha\,\zeta})\,.\ \diamond$$

Remarque 1 La relation $\mathbb{E}\Big(\int_0^t 1_{\{Z_s\in U\}}ds\Big) = \mathbb{E}(L_t^0)\times\hat{E}(\zeta)$ précise la normalisation du temps local résultant de celle fixée pour $\hat{P}$ dans la proposition 3 ci-dessus, (L_t^0) étant l'inverse de (Λ_t^0) à droite, c'est à dire le temps local correspondant à la mesure d'excursions $\hat{P}$: nous avons $\mathbb{E}(L_t^0) = \mathbb{E}\Big(\int_0^t 1_U(Z_s)ds\Big)$.

En particulier, nous avons dans le cas ergodique : $\lim_{t\to\infty} L_t^0/t = \mu(U)$ presque sûrement.

Notons π_Λ la mesure de Lévy du subordinateur (Λ_t), de sorte que, selon la formule de Lévy-Khintchine pour les subordinateurs (voir [B1, III.1]), dans le cas de sauts purs, nous avons pour tout $r \in \mathbb{R}_+$

$$\psi(r) = \int_{\mathbb{R}_+} (1 - e^{-ru})\, \pi_\Lambda(du) \ , \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}_+} \min\{1, u\}\, \pi_\Lambda(du) < \infty \ .$$

La théorie de Krein (voir [B2, corollaire 9.7]) fournit une unique mesure m_Λ sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\pi_\Lambda(ds) = \left(\int_0^\infty e^{-us} m_\Lambda(du) \right) ds \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{m_\Lambda(du)}{u(1+u)} < \infty \ .$$

Le résultat qui suit est maintenant une conséquence des propositions 1 et 2 :

Théorème 1 *φ_t est un processus de Lévy de mesure :*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \nu_s(dg)\, \pi_\Lambda(ds) = \int_0^\infty R_u(dg)\, m_\Lambda(du) \ ,$$

où ν_t et R_u désignent respectivement le semi-groupe et la résolvante du générateur $\mathcal{L}_G$.

4 Exemples

4.1 Le plan

$\mathcal{M}$ est ici le plan privé de 0, U est la boule ouverte (pointée) de centre 0 et de rayon R, de sorte que $G = \mathbb{R}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$, $\Gamma \backslash G \equiv \mathbb{S}^1$.

Prenons pour $Z.$ le mouvement brownien de $\mathbb{R}^2$, i.e. pour $\mathcal{L}$ le demi-laplacien $\frac{1}{2}\Delta$ de $\mathbb{R}^2$.

En coordonnées polaires $\Delta = \mathcal{L}_r + r^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, où $\mathcal{L}_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$.

Changeant $\mathbb{R}_+$ en $]0, R]$, nous sommes dans le cadre envisagé dans cet article, avec $g(r) = r^{-2}$.

D'après la section 3, (φ_t) est le processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui a pour exposant caractéristique $\lambda \longmapsto \psi(\lambda^2/2)$.

Proposition 4 *Nous avons pour $\alpha, R \in \mathbb{R}_+$ (I_ν désignant la fonction de Bessel usuelle) :*

$$\psi^0(\alpha) = R^{-1} \sqrt{2\alpha}\, \frac{I_1(R\sqrt{2\alpha}\,)}{I_0(R\sqrt{2\alpha}\,)} \quad \textit{et} \quad \psi(\alpha) = R^{-2} \sqrt{2\alpha} \ .$$

Preuve Nous nous ramenons au cadre de la section précédente par le changement de variable $y = \log(R/r)$, et nous appliquons la proposition 3 avec $\zeta = \inf\{t > 0 \,|\, r_t = R\}$:

$$\psi^0(\alpha) = -\,C^{-1}\,\frac{d_o}{d\eta}\,\mathbb{E}_{Re^{-\eta}}(e^{-\alpha\zeta})\,, \qquad \text{et} \qquad \psi(\alpha) = -\,C^{-1}\,\frac{d}{d\eta}|_{\eta=0}\,\mathbb{E}_{Re^{-\eta}}\Big(\exp\Big[-\alpha\int_0^\zeta \frac{ds}{r_s^2}\Big]\Big)\,.$$

Pour $\alpha > 0$, cherchons f lisse sur $]0,+\infty[$, bornée près de 0, telle que

$$M_t := f(r_t) \times \exp\Big[-\alpha\int_0^t r_s^{-2}ds\Big]$$

soit une martingale. Or nous avons $dr_s = db_s + \frac{1}{2r_s}\,ds$, pour un brownien réel (b_s), et donc la formule d'Itô montre aussitôt que M_t est une martingale locale ssi

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - \frac{2\,\alpha}{r^2}f(r) = 0\,.$$

On trouve ainsi $f(r) = r^{\sqrt{2\alpha}}$, et en appliquant le théorème d'arrêt :

$$\mathbb{E}_{R\,e^{-\eta}}\Big(\exp\Big[-\alpha\int_0^{\inf\{t>0\,|\,r_t=R\}}\frac{ds}{\sin^2\varphi_s}\Big]\Big) = \frac{f(R\,e^{-\eta})}{f(R)} = e^{-\eta\sqrt{2\alpha}}\,.$$

De même, pour le calcul de $\psi^0(\alpha)$ nous voulons h lisse sur $]0,\infty[$ et bornée près de 0 telle que $h(r_t)\,e^{-\alpha\,t}$ soit une martingale, et donc telle que $h''(r) + h'(r)/r - 2\,\alpha\,h(r) = 0$. Les solutions bornées près de 0 sont proportionnelles à $h(r) = I_0(r\sqrt{2\alpha}\,)$, I_0 désignant la fonction de Bessel usuelle, de sorte que le théorème d'arrêt nous donne :

$$\mathbb{E}_{R\,e^{-\eta}}\Big(\exp\Big[-\alpha\,\inf\{t > 0\,|\,r_t = R\}\Big]\Big) = \frac{I_0(R\,e^{-\eta}\sqrt{2\alpha}\,)}{I_0(R\sqrt{2\alpha}\,)}\,,$$

et donc

$$-\,\frac{d}{d\eta}|_{\eta=0}\,\mathbb{E}_{Re^{-\eta}}(e^{-\alpha\zeta}) = R\sqrt{2\alpha}\,\frac{I_0'(R\sqrt{2\alpha}\,)}{I_0(R\sqrt{2\alpha}\,)} = R\sqrt{2\alpha}\,\frac{I_1(R\sqrt{2\alpha}\,)}{I_0(R\sqrt{2\alpha}\,)} = R^2\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2)\,.$$

Finalement nous avons $C = R^2$, d'où le résultat. $\diamond$

On en déduit :

Corollaire 1 *(φ_t) est un processus de Cauchy (de paramètre R^{-2} avec notre normalisation, voir la proposition 3).*

4.2 La sphère

$\mathcal{M}$ est ici la sphère $\mathbb{S}^2$ (de rayon 1) privée d'un point o, U est la boule ouverte (pointée) de centre o et de rayon $\varepsilon \in]0,\pi[$, de sorte que $G = I\!R$, $\Gamma = \mathbb{Z}$, $\Gamma\backslash G \equiv \mathbb{S}^1$.

Prenons pour $Z.$ le mouvement brownien de $\mathbb{S}^2$, i.e. pour $\mathcal{L}$ le demi-laplacien $\frac{1}{2}\Delta$ de $\mathbb{S}^2$.

Introduisons les coordonnées polaires de pôle o sur $\mathbb{S}^2 \subset I\!R^3$: $(\cos\varphi \times \sigma\ ,\ \sin\varphi)$, où σ décrit $\mathbb{S}^1$ et φ décrit $[0,\pi]$ et représente la distance riemannienne à o.
Dans ces coordonnées $\Delta = \mathcal{L}_\varphi + (\sin\varphi)^{-2}\,\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}$, où $\mathcal{L}_\varphi$ est l'opérateur de Legendre $\mathcal{L}_\varphi = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \operatorname{cotg}\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi}$.

Changeant $I\!R_+$ en $]0,\varepsilon]$, nous sommes dans le cadre envisagé dans cet article, avec $g(\varphi) = (\sin\varphi)^{-2}$.

D'après la section 3, (φ_t) est le processus de Lévy à valeurs dans $I\!R$ qui a pour exposant caractéristique $\lambda \longmapsto \psi(\lambda^2/2)$.

Proposition 5 *Nous avons pour tous $\varepsilon \in]0,\pi[$ et $\alpha \in I\!R_+$:* $\psi(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2\alpha}}{4\sin^2(\varepsilon/2)}$, *de sorte que (φ_t) est un processus de Cauchy (de paramètre $(2\sin(\varepsilon/2))^{-2}$ dans la normalisation de la proposition 3).*

<u>Preuve</u> Nous nous ramenons au cadre de la section précédente par le changement de variable $y = \log(\varepsilon/\varphi)$, et nous appliquons la proposition 3 avec $\zeta = \inf\{t > 0 \,|\, \varphi_t = \varepsilon\}$:

$$\psi^0(\alpha) = -\,C^{-1}\,\frac{d}{d\eta}|_{\eta=0}\, I\!E_{\varepsilon e^{-\eta}}(e^{-\alpha\zeta}), \quad \text{et} \quad \psi(\alpha) = -\,\frac{d}{d\eta}|_{\eta=0}\, I\!E_{\varepsilon\, e^{-\eta}}\Big(\exp\Big[-\alpha\int_0^\zeta \frac{ds}{\sin^2\varphi_s}\Big]\Big).$$

Pour $\alpha > 0$, cherchons f lisse sur $]0,\pi[$, bornée près de 0, telle que

$$M_t := f(\varphi_t) \times \exp\Big[-\alpha\int_0^t \sin^{-2}\varphi_s\, ds\Big]$$

soit une martingale. Or nous avons $d\varphi_s = db_s + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi_s\, ds$, pour un brownien réel b_s, et donc la formule d'Itô montre aussitôt que M_t est une martingale locale ssi

$$f''(\varphi) + \operatorname{cotg}\varphi \times f'(\varphi) - 2\,\alpha\,(\sin\varphi)^{-2} \times f(\varphi) = 0\,.$$

Le changement de variable $f(\varphi) = H(\operatorname{tg}(\varphi/2))$ donne $t^2H''(t) + tH'(t) - 2\alpha H(t) = 0$, et donc les solutions bornées près de 0 sont proportionnelles à $f(\varphi) = (\operatorname{tg}(\varphi/2))^{\sqrt{2\alpha}}$.

Le théorème d'arrêt nous donne ensuite :

$$I\!E_{\varepsilon\, e^{-\eta}}\Big(\exp\Big[-\alpha\int_0^{\inf\{t>0\,|\,\varphi_t=\varepsilon\}} \frac{ds}{\sin^2\varphi_s}\Big]\Big) = \frac{f(\varepsilon\, e^{-\eta})}{f(\varepsilon)}, \quad \text{et donc} \quad \psi(\alpha) = \frac{\varepsilon\sqrt{2\alpha}}{C\,\sin\varepsilon}.$$

De même, pour le calcul de $\psi^0(\alpha)$ nous voulons h lisse sur $]0,\pi[$ et bornée près de 0 telle que $h(\varphi_t)\,e^{-\alpha t}$ soit une martingale, et donc telle que

$$h''(\varphi) + \text{cotg } \varphi \times h'(\varphi) - 2\,\alpha\,h(\varphi) \;= 0\;.$$

Classiquement, h doit être proportionnelle à $G(\cos\varphi)$, avec $G = P^0_\nu$ fonction de Legendre solution de $(1-u^2)G''(u) - 2uG'(u) - 2\alpha G(u) = 0$ et ν tel que $\nu(\nu+1) + 2\alpha = 0$.

Nous avons donc (avec [MOS] page 171)

$$\psi^0(\alpha) = -\,C^{-1}\,\frac{d_o}{d\eta}\,\frac{h(\varepsilon\,e^{-\eta})}{h(\varepsilon)} = \frac{\varepsilon\,h'(\varepsilon)}{C\,h(\varepsilon)} = -\,\frac{\varepsilon\,(\sin\varepsilon)\,(P^0_\nu)'(\cos\varepsilon)}{C\,P^0_\nu(\cos\varepsilon)}$$
$$= \nu\,\varepsilon\,\frac{(\cos\varepsilon)\,P^0_\nu(\cos\varepsilon) - P^0_{\nu-1}(\cos\varepsilon)}{C\,(\sin\varepsilon)\,P^0_\nu(\cos\varepsilon)}\;.$$

Puisque $\quad 1 = \hat{E}(\zeta) = \lim\limits_{\alpha\searrow 0}\alpha^{-1}\psi^0(\alpha) = -\,2\,\varepsilon\,\dfrac{(\cos\varepsilon)\,P^0_0(\cos\varepsilon) - P^0_{-1}(\cos\varepsilon)}{C\,(\sin\varepsilon)\,P^0_0(\cos\varepsilon)} = \dfrac{2\varepsilon}{C}\,\text{tg}\,(\dfrac{\varepsilon}{2})$,

nous obtenons $C = 2\varepsilon\ \text{tg}\,(\frac{\varepsilon}{2})$, d'où le résultat. Nous avons en outre

$$\psi^0(\alpha) = \nu\,\text{cotg}\,\varepsilon \times \frac{(\cos\varepsilon)\,P^0_\nu(\cos\varepsilon) - P^0_{\nu-1}(\cos\varepsilon)}{2\,(\sin\varepsilon)\,P^0_\nu(\cos\varepsilon)}\;.\;\diamond$$

Lemme 1 *(Voir [F1], lemme 8) Si (φ_t) est un processus de Cauchy de paramètre p et si (A_t) est un processus tel que A_t/t converge en probabilité vers une constante c , alors les lois marginales de dimension finie de $(\varphi_{A_{st}}/t\,,\ s\ge 0)$ convergent vers celles d'un processus de Cauchy de paramètre pc .*

On en déduit le théorème de Spitzer relatif à la sphère (voir par exemple [F1]).

Corollaire 2 *La loi de θ_t/t converge lorsque $t\to\infty$ vers la loi de Cauchy de paramètre $1/4$ (indépendamment de ε). Il en est de même pour les lois marginales de dimension finie de $(\theta_{st}/t\,,\ s\ge 0)$, et conjointement pour les enroulements autour d'un nombre fini de points de la sphère, qui sont asymptotiquement indépendants.*

Preuve Prenant $\alpha = \lambda^2/2t^2$, nous avons pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}(\exp[\sqrt{-1}\ \tfrac{\lambda}{t}\,\varphi_t]) = \exp\left[-\,\frac{|\lambda|}{4\sin^2(\varepsilon/2)}\right].$$

Pour revenir à l'échelle de temps usuelle, utilisons la remarque 1 : nous avons par ergodicité convergence presque sûre de L^0_t/t vers $\mu(U) = \sin^2(\varepsilon/2)$, de sorte que selon le lemme 1 ci-dessus le comportement asymptotique de l'enroulement θ_t est celui de $\varphi_{t\,\sin^2(\varepsilon/2)}$. Donc pour tout $s\in\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}(\exp[\sqrt{-1}\ \tfrac{\lambda}{t}\,\theta_{st}]) = \exp\,[-\,|\lambda|\,s/4]\,.$$

Pour l'indépendance asymptotique des enroulements θ^j_t autour d'un nombre fini de points $o_1,..,o_k$ de la sphère, il suffit de noter que les processus de Cauchy correspondant φ^j_t sont indépendants conditionnellement aux temps locaux $L^{0,j}_t$, conditionnement qui disparaît à la limite. $\diamond$

4.3 Pointes hyperboliques réelles

$\mathcal{M}$ est ici une variété hyperbolique réelle de dimension $d+1$ et de volume fini, (Z_t) est son mouvement brownien, μ est la mesure de volume normalisée, G est le groupe $\mathbb{R}^d$, que nous identifions avec son algèbre de Lie, le sous-groupe parabolique Γ est un réseau de $\mathbb{R}^d$, et U est un voisinage horocyclique d'une pointe $\mathcal{P}$ de $\mathcal{M}$. Choisissons pour modèle le demi-espace de Poincaré, de façon que la pointe $\mathcal{P}$ soit en ∞, et notons h la hauteur (>0 suffisamment grande) à laquelle se trouve la section ∂U dans le modèle choisi. $\mathcal{L}$ est le demi-laplacien hyperbolique, et donc $\mathcal{L}_G$ est le demi-laplacien euclidien de $\mathbb{R}^d$, $g(y)=y^2$, et $\mathcal{L}_y = \frac{y^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{(1-d)y}{2}\frac{\partial}{\partial y}$, de sorte que lors de chaque excursion dans $[h,\infty[$ $y_t = h\, e^{w_t - d\,t/2}$, où w désigne un mouvement brownien réel issu de 0. (X_t) est un brownien de $\mathbb{R}^d$ issu de 0, indépendant de (y_t), et $\theta_t = \int_0^t y_s dW_s$, lors de chaque excursion.

Nota Bene : par rapport aux notations générales introduites dans la section 3, nous avons changé $\mathbb{R}_+$ en $[h,\infty[$, afin de respecter les notations usuelles du demi-espace de Poincaré.

4.3.1 Exposants caractéristiques, mesures de Lévy et de Krein

Nous pouvons encore dans le cas présent calculer les exposants caractéristiques ψ^0 et ψ.

Proposition 6 *Nous avons pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$:*

$$\psi^0(\alpha) = \Big(\sqrt{2\alpha + \frac{d^2}{4}} - \frac{d}{2}\Big)\frac{d}{2} \quad et \quad \psi(\alpha) = \frac{d\,h\sqrt{2\alpha}}{2} \times \frac{K_{d/2-1}(h\sqrt{2\alpha}\,)}{K_{d/2}(h\sqrt{2\alpha}\,)} .$$

La mesure de Krein m_Λ du subordinateur (Λ_t) est donnée par

$$m_\Lambda(ds) = \frac{8d}{\pi^2}\Big((J^2_{d/2} + Y^2_{d/2})(\tfrac{h}{2}\sqrt{s}\,)\Big)^{-1} ds .$$

Preuve Changeons y en $y-h$, et appliquons la proposition 3, ζ désignant le temps d'atteinte de h par le processus (y_t) (issu de $h+\eta$) :

$$\psi^0(\alpha) = -\,C^{-1}\frac{d_o}{d\eta}\,\mathbb{E}_{h+\eta}(e^{-\alpha\zeta}), \quad \text{et} \quad \psi(\alpha) = -\,C^{-1}\frac{d_o}{d\eta}\,\mathbb{E}_{h+\eta}\Big(\exp\Big[-\alpha\int_0^\zeta (y_s)^2 ds\Big]\Big).$$

Puisque $y_s = (h+\eta)\,e^{w_s - \frac{d}{2}s}$ lors de chaque excursion partant du niveau $(h+\eta)$, la formule de Cameron-Martin donne :

$$\mathbb{E}_{(h+\eta)}(e^{-\alpha\zeta}) = \mathbb{E}\Big(\exp\Big[-\alpha\,\inf\{s>0 \,|\, w_s - \tfrac{d}{2}s < \log h - \log(h+\eta)\}\Big]\Big)$$

$$= (1+\frac{\eta}{h})^{\frac{d}{2}}\,\mathbb{E}\Big(\exp\Big[-(\alpha + \tfrac{d^2}{8})\,\inf\{s>0 \,|\, w_s < -\log(1+\frac{\eta}{h})\}\Big]\Big) = (1+\frac{\eta}{h})^{\frac{d}{2}-\sqrt{2\alpha+\frac{d^2}{4}}} ,$$

$$\text{d'où} \qquad \psi^0(\alpha) = \Big(\sqrt{2\alpha + \frac{d^2}{4}} - \frac{d}{2}\Big)/(hC)\,, \qquad \text{et par suite} \qquad C = 2/hd\,.$$

D'autre part cherchons une fonction régulière f bornée près de $+\infty$ et telle que $M_s := \exp\Big(-\alpha\int_0^s (y_u)^2 du\Big) \times f(y_s)$ définisse une martingale. Nous avons

$$M_s = f(y_0) + martingale + \tfrac{1}{2}\int_0^s e^{-\alpha\int_0^r (y_u)^2 du}\Big[f''(y_r) + \tfrac{1-d}{y_r}\,f'(y_r) - 2\alpha\, f(y_r)\Big] \times (y_r)^2\, dr\,.$$

Nous devons donc avoir $f''(y) + (1-d)\,f'(y)/y - 2\alpha\, f(y) = 0$.
Posant $H(y) := y^{-d/2} f(y)$, nous obtenons $H''(y) + H'(y)/y - 2\alpha\, H(y) = 0$.
Par conséquent H est une fonction de Bessel modifiée, bornée près de $+\infty$.
Donc $f(y) = c\, y^{d/2}\, K_{d/2}\,(y\sqrt{2\,\alpha}\,)$. Finalement nous obtenons

$$I\!\!E_{(h+\eta)}\Big(\exp\Big[-\alpha\int_0^\zeta (y_s)^2 ds\Big]\Big) = \frac{f(h+\eta)}{f(h)} = (1+\eta/h)^{\frac{d}{2}} \times \frac{K_{d/2}((h+\eta)\sqrt{2\alpha}\,)}{K_{d/2}(h\sqrt{2\alpha}\,)}\,.$$

La valeur de ψ en découle, étant donné que $\frac{d}{2}K_{d/2}(y) + yK'_{d/2}(y) + yK_{d/2-1}(y) \equiv 0$:

$$\psi(\alpha) = C^{-1}\sqrt{2\alpha} \times \frac{K_{d/2-1}(h\sqrt{2\alpha}\,)}{K_{d/2}(h\sqrt{2\alpha}\,)}\,.$$

Selon Ismail [I], nous avons

$$|\lambda|\,\frac{K_{d/2-1}(|\lambda|)}{K_{d/2}(|\lambda|)} = \frac{16}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{|\lambda|^2\, dt}{t(|\lambda|^2 + 8t)(J^2_{d/2} + Y^2_{d/2})(\sqrt{t}\,)}$$

$$= \frac{16}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(1 - e^{-|\lambda|^2 s/8})\, e^{-st}\, ds\, dt}{(J^2_{d/2} + Y^2_{d/2})(\sqrt{t}\,)} = \frac{16}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(1 - e^{-|\lambda|^2 s/2})e^{-st}\, ds\, dt}{(J^2_{d/2} + Y^2_{d/2})(\frac{1}{2}\sqrt{t}\,)}\,.$$

Ainsi

$$\psi(\alpha) = \frac{8d}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(1 - e^{-\alpha h^2 s})e^{-st}\, ds\, dt}{(J^2_{d/2} + Y^2_{d/2})(\frac{1}{2}\sqrt{t}\,)}\,,$$

et donc la mesure de Lévy π_Λ est donnée par

$$\pi_\Lambda(ds) = \left(\frac{8d}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{e^{-st}\, dt}{(J^2_{d/2} + Y^2_{d/2})(\frac{h}{2}\sqrt{t}\,)}\right) ds\,,$$

d'où le résultat. $\diamond$

Remarque : un calcul un peu plus sophistiqué donne la loi conjointe de ζ et de $\int_0^\zeta (y_s)^2 ds$:

$$I\!\!E_{(h+\eta)}\Big(\exp\Big[-\rho\,\zeta - \alpha\int_0^\zeta (y_s)^2 ds\Big]\Big) = (1+\eta/h)^{\frac{d}{2}} \times \frac{K_{\sqrt{2\,\rho + d^2/4}}\,((h+\eta)\sqrt{2\alpha}\,)}{K_{\sqrt{2\,\rho + d^2/4}}\,(h\sqrt{2\alpha}\,)}\,.$$

Du fait que $\mathcal{L}_G$ est le laplacien euclidien de $I\!\!R^d$, nous déduisons par simple composition la première partie de la proposition suivante.

Proposition 7 *(i) Le processus des enroulements* (φ_t) *du brownien* (Z_t) *dans un voisinage horocyclique* U *d'une pointe de la variété hyperbolique réelle* $\mathcal{M}$ *(sectionnée à la hauteur* h*) est le processus de Lévy à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *ayant pour exposant caractéristique* $\mathbb{R}^d \ni \lambda \longmapsto \frac{d}{2}h|\lambda| \times \frac{K_{d/2-1}(h|\lambda|)}{K_{d/2}(h|\lambda|)}$.

(ii) La mesure de Lévy ν *du processus de Lévy* (φ_t) *est donnée par :*

$$d\nu(x) = \frac{16d}{\pi^2}(2\pi)^{-d/2}\left(\int_0^\infty \frac{K_{\frac{d}{2}-1}(|x|t)\, t^{d/2}}{(J_{d/2}^2 + Y_{d/2}^2)(\frac{h\,t}{2\sqrt{2}})}\, dt\right) |x|^{1-\frac{d}{2}}\, dx \ ,$$

où $J_{d/2}$ *et* $Y_{d/2}$ *désignent les fonctions de Bessel usuelles.*

Preuve de (ii): D'après le Théorème 1, la mesure de Lévy du processus des enroulements (φ_t) est donnée par

$$d\nu(x) = \frac{8d}{\pi^2}\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{|x|^2}{2s}}\, e^{-st}\, (2\pi s)^{-d/2}}{(J_{d/2}^2 + Y_{d/2}^2)(\frac{h}{2}\sqrt{t}\,)}\, ds\, dt\right) dx$$

$$= \frac{8d}{\pi^2}\left(\int_0^\infty \left[\Big(\frac{|x|}{\sqrt{2t}}\Big)^{1-\frac{d}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{|x|\sqrt{2t}}{2}(\frac{1}{s}+s)} \frac{ds}{(2\pi s)^{d/2}}\right] \frac{dt}{(J_{d/2}^2 + Y_{d/2}^2)(\frac{h}{2}\sqrt{t}\,)}\right) dx$$

$$= \frac{8d}{\pi^2}\left(\int_0^\infty \left[2(2\pi)^{-d/2}\Big(\frac{|x|}{\sqrt{2t}}\Big)^{1-\frac{d}{2}} K_{\frac{d}{2}-1}\big(|x|\sqrt{2t}\,\big)\right] \frac{dt}{(J_{d/2}^2 + Y_{d/2}^2)(\frac{h}{2}\sqrt{t}\,)}\right) dx$$

$$= \frac{16d}{\pi^2}\,(2\pi)^{-d/2}\left(\int_0^\infty \frac{K_{\frac{d}{2}-1}(|x|t)\, t^{d/2}}{(J_{d/2}^2 + Y_{d/2}^2)(\frac{h\,t}{2\sqrt{2}})}\, dt\right) |x|^{1-\frac{d}{2}}\, dx \ . \diamond$$

Remarque 2 Lorsque $d=1$, $\frac{1}{(J_{1/2}^2+Y_{1/2}^2)(z)} = \frac{\pi\, z}{2}$, $K_{\frac{d}{2}-1}(x) = e^{-x}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$, et donc $d\nu(x) = \frac{h\sqrt{2}}{\pi\, x^2}$: nous retrouvons une mesure de Lévy de processus de Cauchy.

4.3.2 Résultat asymptotique

Particularisons suivant la dimension, et utilisons la remarque 1.

Notons que dans les coordonnées $(x_1, .., x_d, y)$ du demi-espace de Poincaré la mesure de volume est proportionnelle à $y^{-d-1}dydx_1..dx_d$, et que U est isométrique à $(\Gamma\backslash\mathbb{R}^d)\times[h,\infty[$, h représentant la hauteur à laquelle on a sectionné la pointe $\mathcal{P}$ pour obtenir le voisinage horocyclique U. De sorte que

$$\lim_{t\to\infty} L_t^0/t = \mu(U) = \kappa\int_h^\infty y^{-d-1}dy = \kappa\, h^{-d}/d\,,$$

κ étant une constante dépendant du volume global de la variété $\mathcal{M}$.

Le comportement asymptotique de l'enroulement (θ_t) produit par (Z_t) dans U est donc (en loi) celui de $(\varphi_{\kappa\, h^{-d}\, t/d})$.

Si $d = 1$, étant donné que $\frac{K_{d/2-1}}{K_{d/2}} \equiv 1$, nous voyons que le processus des enroulements (φ_t) est un processus de Cauchy de paramètre $h/2$. Nous retrouvons ainsi via le lemme 1 que $\lim_{t\to\infty} \exp\left(\sqrt{-1}\,\lambda\, t^{-1}\,\theta_{ts}\right) = \exp(-|\lambda|\kappa\, s/2)$, et donc que $t^{-1}\,\theta_{ts}$ converge au sens des marginales de dimension finie vers un processus de Cauchy de paramètre $\kappa/2$. Nous retrouvons le résultat donné dans [ELJ], et appliqué au flot géodésique.

Ceci n'est plus vrai en dimension supérieure.

Si $d = 2$: $\frac{K_{d/2-1}}{K_{d/2}}(y) = y\log(\frac{1}{y}) + \mathcal{O}(y)$, d'où $\lim_{t\to\infty} I\!\!E\left[e^{\sqrt{-1}\ \lambda\cdot\frac{\varphi_{st}}{\sqrt{t\log t}}}\right] = e^{-|\lambda|^2 h^2 d\, s/4}$.

Nous retrouvons le résultat [F2] de convergence (au sens des marginales de dimension finie) de l'enroulement normalisé $(t\,\log\,t)^{-1/2}\theta_{ts}$ vers un mouvement brownien plan isotrope de variance $\kappa/4$, indépendant de la hauteur h.

Si $d \geq 3$: $\frac{K_{d/2-1}}{K_{d/2}}(y) \sim \frac{y}{(d-2)}$, et donc $\lim_{t\to\infty} I\!\!E\left[e^{\sqrt{-1}\ \lambda\cdot\frac{\varphi_{st}}{\sqrt{t}}}\right] = e^{-\frac{|\lambda|^2 h^2 d\, s}{2(d-2)}}$.

De sorte que l'enroulement normalisé $t^{-1/2}\theta_{ts}$ converge (au sens des marginales de dimension finie) vers un mouvement brownien isotrope (de $I\!\!R^d$) de variance $\kappa\, h^{2-d}/(d-2)$; ce qui correspond à des enroulements de variance asymptotique proportionnelle à h^{2-d}, logiquement dépendants de la hauteur h, étant donné que nous sommes ici dans le cas d'un théorème central limite.

Par ailleurs nous avons $K_a/K_b \sim 1$ en $+\infty$ pour tout (a,b), et donc pour tout $d \in I\!\!N^*$:

$$\lim_{h\nearrow\infty} I\!\!E\left[e^{\sqrt{-1}\ \lambda\cdot(h^{-1}\,\varphi_t)}\right] = e^{-|\lambda|\,d\,t/2},$$

ce qui signifie que la loi asymptotique lorsque $h \to \infty$ du processus d'enroulements normalisés $(h^{-1}\,\varphi_t)$ est toujours celle du processus de Cauchy isotrope de paramètre $d/2$.

4.4 Pointes hyperboliques complexes

Nous supposons ici que $I\!\!H = I\!\!H^d_{\mathbb{C}}$ est l'espace hyperbolique complexe de dimension (complexe) d, avec $d \geq 2$.

Nos références sont surtout [HP1], [HP2], [G].

Les deux modèles les plus classiques sont celui de Siegel et le projectif :

$$I\!\!H^d_{\mathbb{C}} = \{(w,z) \in \mathbb{C}^{d-1}\times\mathbb{C} \,|\, 2Re(z) > |w|^2\} = \{P(w,w_1,w_0) \in P\mathbb{C}^d \,|\, Q(w,w_1,w_0) < 0\},$$

où $Q(w,w_1,w_0) := |w|^2 - w_1\overline{w_0} - w_0\overline{w_1}$, pour $(w,w_1,w_0) \in \mathbb{C}^{d-1}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.

Le bord de $I\!\!H^d_{\mathbb{C}}$ est

$$\partial I\!\!H^d_{\mathbb{C}} = \{(w,z) \in \mathbb{C}^{d-1}\times\mathbb{C} \,|\, 2Re(z) = |w|^2\} \cup \{\infty\}.$$

Les coordonnées horosphériques de $(w,z) \in \overline{I\!H^d_{\mathbb{C}}}\setminus\{\infty\}$ sont $(\zeta,v,y) \in \mathbb{C}^{d-1} \times I\!R \times I\!R_+$ définies par : $\zeta = w$, $v = -2Im(z)$, $y = 2Re(z) - |w|^2$. (Donc $z = (y + |\zeta|^2 - iv)/2$).
La norme de Cygan est définie par : $\|(\zeta,v,y)\| := \sqrt{|y + |\zeta|^2 - iv|}$.

Le groupe de Heisenberg $\mathcal{H}_d$ est $\mathbb{C}^{d-1} \times I\!R$ muni de la loi :

$$(\zeta,v)\cdot(\zeta',v') := (\,\zeta+\zeta'\,,\,v+v'+2Im(\zeta\overline{\zeta'}\,)\,)\ .$$

On l'identifie à $\partial I\!H^d_{\mathbb{C}}\setminus\{\infty\}$ via $(\zeta,v) \equiv (\zeta,v,0)$. Il conserve ∞ et agit sur $\overline{I\!H^d_{\mathbb{C}}}\setminus\{\infty\}$ par translation à gauche sur chaque horocycle basé en ∞ :

$$(\zeta,v)\cdot(\zeta',v',y) := (\,\zeta+\zeta'\,,\,v+v'+2Im(\zeta\overline{\zeta'}\,)\,,y)\ .$$

Repassant aux coordonnées (w,z) de Siegel, cela donne : $(\zeta,v) \equiv (\zeta,(|\zeta|^2 - iv)/2)$, et

$$(\zeta,v)\cdot(w,z) := (w+\zeta, z + w\bar{\zeta} + (|\zeta|^2 - iv)/2\,))\ .$$

Le groupe unitaire $U(d-1)$ conserve ∞ et agit sur $\overline{I\!H^d_{\mathbb{C}}}\setminus\{\infty\}$ par rotation de la coordonnée ζ . Le produit semi-direct $\mathcal{H}(d)$ des deux groupes $\mathcal{H}_d$ et $U(d-1)$ constitue le groupe des isométries de $I\!H^d_{\mathbb{C}}$ qui conservent l'orientation, ∞ , et chaque horosphère $\{y = y_0\}$.

Fixons le système de coordonnées usuel sur $\mathbb{C}^{d-1}$:

$$\zeta = (\zeta_1,..,\zeta_{d-1})\ ,\ \text{avec}\quad \zeta_j = x_j + \sqrt{-1}\ y_j\ \ \text{pour}\ \ 1 \le j < d\,.$$

La mesure de volume de $I\!H$ est proportionnelle à

$$y^{-d-1}\,dy\,dv\,dx_1..dx_{d-1}\,dy_1..dy_{d-1}\ .$$

L'algèbre de Lie de $\mathcal{H}_d$ est engendrée par $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, .., \frac{\partial}{\partial x_{d-1}}, \frac{\partial}{\partial y_{d-1}}, \frac{\partial}{\partial v}$, avec pour seuls crochets non triviaux $[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}] = 2\frac{\partial}{\partial v}$.

Pour tout $s > 0$ notons H_s l'homothétie complexe définie par : $H_s(\zeta,v,y) = \left(\frac{\zeta}{\sqrt{s}}, \frac{v}{s}, \frac{y}{s}\right)$. C'est une isométrie, qui vérifie $H_s\big((\zeta,v)\cdot(\zeta',v')\big) = H_s(\zeta,v)\cdot H_s(\zeta',v')$.

Donnons-nous $2d$ mouvements browniens réels standards indépendants :

$$x^1_s\ ,\ ..\ ,\ x^{d-1}_s\ ,\ y^1_s\ ,\ ..\ ,\ y^{d-1}_s\ ,\ w_s\ ,\ \beta_s\ .$$

Le mouvement brownien d'Heisenberg est la diffusion dégénérée de générateur $\frac{1}{2}\Delta$, où

$$\Delta := y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (1-d)y\frac{\partial}{\partial y} + by\,\Delta^K\ \ ,$$

$$\Delta^K := \sum_{j=1}^{d-1}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}+2y_j\frac{\partial}{\partial v}\Big)^2+\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}-2x_j\frac{\partial}{\partial v}\Big)^2\Big]$$
$$=\sum_{j=1}^{d-1}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}+4y_j\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial v}-4x_j\frac{\partial^2}{\partial y_j\partial v}+4(x_j^2+y_j^2)\frac{\partial^2}{\partial v^2}\Big)$$

étant le laplacien de Kohn sur $\mathcal{H}_d$, et $b>0$ étant un paramètre arbitraire.

Nous retrouvons les notations de la section 3, en prenant

$$\mathcal{L}=\tfrac{1}{2}\Delta\,,\quad \mathcal{L}_y=\frac{y^2}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\Big(\frac{1-d}{2}\Big)\,y\,\frac{\partial}{\partial y}\,,\quad g(y)=y\,,\quad \mathcal{L}_G=\frac{b}{2}\Delta^K\,.$$

Lors de chaque excursion dans $[h,\infty[$ nous avons $\quad y_s=h\,\exp\Big(w_s-\frac{d}{2}\,s\Big)$.

Soit $\quad B_s=(\zeta_s\,,\,2\mathcal{A}_s):=\Big(x_s^1+\sqrt{-1}\;y_s^1\,,\,..\,,\,x_s^{d-1}+\sqrt{-1}\;y_s^{d-1}\,,\,2\sum_{j=1}^{d-1}\int_0^s(y_t^j\,dx_t^j-x_t^j\,dy_t^j)\Big)$

le mouvement brownien du groupe $G=\mathcal{H}_d$, où $\mathcal{A}_s=\sum_{j=1}^{d-1}\mathcal{A}_s^j$, $\mathcal{A}_s^j:=\int_0^s(y_t^j\,dx_t^j-x_t^j\,dy_t^j)$.

Rappelons la formule d'aire de Paul Lévy : $\quad$ pour tous $\varrho,x,y\in\mathbb{R}$ et $s>0$

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\sqrt{-1}\;\varrho\,\mathcal{A}_s^j\Big)\,\Big|\,x_s^j=x,y_s^j=y\Big]=\frac{\varrho s}{sh\,(\varrho s)}\times\exp\Big(\frac{x^2+y^2}{2s}\Big[1-\frac{\varrho s}{th\,(\varrho s)}\Big]\Big).$$

La formule d'Itô montre directement que

$$Z_s\equiv\Big(H_{b^{-1}}\Big[B\Big(\int_0^s y_t\,dt\Big)\Big]\,,\,y_s\Big)$$

est le mouvement brownien (d'Heisenberg) de $\mathbb{H}$, en coordonnées horocycliques.

4.4.1 Excursions près d'une pointe de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{M}$ est ici une variété hyperbolique complexe de dimension $2d$ et de volume fini, (Z_t) est son mouvement brownien, μ est la mesure de volume normalisée, G est le groupe de Heisenberg $\mathcal{H}_d$, d'algèbre de Lie $\mathcal{G}\equiv\mathbb{R}^{2d-1}$, et U est un voisinage horocyclique d'une pointe $\mathcal{P}$ de $\mathcal{M}$, que nous plaçons en $\{y=\infty\}$. U est isométrique à $(\Gamma\backslash\mathcal{H}_d)\times[h,\infty[$, h représentant la hauteur à laquelle on a sectionné la pointe pour obtenir le voisinage horocyclique U. Comme dans le cas hyperbolique réel, nous avons changé $\mathbb{R}_+$ en $[h,\infty[$, pour respecter les notations usuelles du demi-espace de Siegel. Nous avons encore $\mu(U)=\kappa'\,h^{-d}/d$, pour la même raison que dans le cas réel (voir la section 4.3.2).

Nous pouvons de nouveau calculer les exposants caractéristiques ψ^0 et ψ .

Lemme 2 *La loi de* $\Theta^1 = \int_0^{\inf\{s|y_s=h\}} y_t\,dt$ *est donnée par : pour tous* $\eta, \alpha \geq 0$ *, nous avons (* K_d *étant l'usuelle fonction de Bessel modifiée) :*

$$\mathbb{E}_{(h+\eta)}\left[\exp\Big(-\alpha\,\Theta^1\Big)\right] = (1+\eta/h)^{d/2} \times \frac{K_d\Big(2\sqrt{2\alpha\,(h+\eta)}\Big)}{K_d\Big(2\sqrt{2\alpha\,h}\Big)}\,.$$

Preuve Pour α, y réels positifs, soient $\zeta := \inf\{s > 0 \,|\, y_s = h\}$ et

$$f(y) := \mathbb{E}_y\left[\exp\Big(-\alpha\int_0^\zeta y_t\,dt\Big)\right].$$

f est une fonction positive décroissante sur $[h, +\infty[$, égale à 1 en h, et qui est harmonique par rapport au semi-groupe de la diffusion (y_s) avec potentiel $-\alpha\,Id$; elle doit donc vérifier :

$$f''(y) + \frac{1-d}{y} \times f'(y) - \frac{2\alpha}{y} \times f(y) = 0\,.$$

Effectuons le changement : $f(y) := y^{d/2}\,H\Big(2\sqrt{2\alpha\,y}\Big)$. Cela donne :

$$t^2\,H''(t) + t\,H'(t) - (t^2+d^2)\,H(t) = 0\,.$$

C'est une équation de Bessel, dont une solution positive décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ est K_d. Le résultat s'ensuit aussitôt. $\diamond$

Proposition 8 *Nous avons pour tous* $h > 0$, $\alpha \geq 0$ *:*

$$\psi^0(\alpha) = \Big(\sqrt{2\alpha + \frac{d^2}{4}} - \frac{d}{2}\Big)\frac{d}{2} \quad \textit{et} \quad \psi(\alpha) = \frac{d\sqrt{2\alpha\,h}}{2} \times \frac{K_{d-1}\Big(2\sqrt{2\alpha\,h}\Big)}{K_d\Big(2\sqrt{2\alpha\,h}\Big)}\,.$$

Preuve De même que dans la preuve de la proposition 6, changeons y en $y-h$ et appliquons la proposition 3. Cela donne d'abord

$$\psi^0(\alpha) = \Big(\sqrt{2\alpha + \frac{d^2}{4}} - \frac{d}{2}\Big)/(hC)\,, \quad \text{et} \quad C = 2/hd\,,$$

comme dans la proposition 6, puisque le processus (y_s) a la même expression exactement dans les cas réels et complexes, et ensuite, en utilisant le lemme 2 ci-dessus :

$$\psi(\alpha) = -\,C^{-1}\,\frac{d_o}{d\eta}\left((1+\eta/h)^{d/2} \times \frac{K_d\Big(2\sqrt{2\alpha\,(h+\eta)}\Big)}{K_d\Big(2\sqrt{2\alpha\,h}\Big)}\right) = \frac{\sqrt{2\alpha\,h}}{hC} \times \frac{K_{d-1}\Big(2\sqrt{2\alpha\,h}\Big)}{K_d\Big(2\sqrt{2\alpha\,h}\Big)}\,.\ \diamond$$

Corollaire 3 *La mesure de Lévy π_Λ du subordinateur (Λ_t) (autrement dit la loi de Θ^1 sous la mesure d'excursion $\hat{P}$) a pour densité sur $\mathbb{R}_+^*$:*

$$s \longmapsto \frac{4d}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{e^{-st}\,dt}{(J_d^2+Y_d^2)(\sqrt{ht}\,)}\,,$$

où J_d et Y_d désignent les fonctions de Bessel usuelles. Donc la mesure de Krein m_Λ du subordinateur (Λ_t) est donnée par

$$m_\Lambda(ds) = \frac{4d}{\pi^2}\Big((J_d^2+Y_d^2)(\sqrt{hs}\,)\Big)^{-1} ds\,.$$

<u>Preuve</u> Nous avons en effet d'après la proposition 8 et d'après Ismail [I], pour tout $\varrho > 0$:

$$\psi(\alpha) = \frac{4d}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\varrho\,dt}{t(\varrho+t)(J_d^2+Y_d^2)(\sqrt{ht}\,)}$$
$$= \frac{4d}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(1-e^{-\varrho s})e^{-st}\,ds\,dt}{(J_d^2+Y_d^2)(\sqrt{ht}\,)} = \frac{4d}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(1-e^{-\varrho s})e^{-st}\,ds\,dt}{(J_d^2+Y_d^2)(\sqrt{ht}\,)}\,.\ \diamond$$

4.4.2 Résultat asymptotique

Lemme 3 *Nous avons pour tout α réel :* $\lim\limits_{t\to\infty} t\,\psi\Big(\frac{\alpha}{t}\Big) = \frac{\alpha hd}{d-1}$, *ce qui signifie que Λ_t/t converge en probabilité lorsque $t\to\infty$ vers $hd/(d-1)$.*

<u>Preuve</u> Nous déduisons aussitôt de la proposition 8, pour tout $d\geq 2$:

$$t\,\psi\Big(\frac{\alpha}{t}\Big) = \tfrac{d}{2}\sqrt{2\alpha ht}\times\frac{K_{d-1}\Big(2\sqrt{2\alpha h/t}\Big)}{K_d\Big(2\sqrt{2\alpha h/t}\Big)} \sim \tfrac{d}{2}\sqrt{2\alpha ht}\times\frac{\Big(\sqrt{2\alpha h/t}\Big)^{1-d}\times(d-2)!}{\Big(\sqrt{2\alpha h/t}\Big)^{-d}\times(d-1)!} = \frac{\alpha hd}{d-1}\ \diamond$$

Corollaire 4 *La variable $H_t(\varphi_t)$ des enroulements normalisés dans $\mathcal{H}_d$ converge en loi lorsque $t\to\infty$ vers $\Big(\sqrt{b}\,\zeta_{\frac{hd}{d-1}}\,,\,2b\,\mathcal{A}_{\frac{hd}{d-1}}\Big) = H_{b^{-1}}\Big(B_{\frac{hd}{d-1}}\Big) \equiv H_{\frac{d-1}{bhd}}(B_1)$.*

Donc le processus normalisé $\Big(H_t(\theta_{st})\Big)$ des enroulements dans $\mathcal{H}_d$ produits par les excursions du brownien (Z_t) dans la pointe U (sectionnée à la hauteur h) converge en loi (au sens des distributions marginales de dimension finie) lorsque $t\to\infty$ vers le brownien de Heisenberg $\Big(H_{\frac{(d-1)h^{d-1}}{b\kappa}}(B_s)\Big)$.

Preuve La proposition 2 assure que $\varphi_t = H_{b^{-1}}(B_{\Lambda_t})$, avec les notations de la section 4.4, le brownien B et le subordinateur Λ étant indépendants. Par conséquent $H_t(\varphi_t) = H_{t/b}(B_{\Lambda_t})$ a la même loi que $H_{t/(b\Lambda_t)}(B_1)$, qui selon le lemme 3 converge vers $H_{\frac{d-1}{bhd}}(B_1)$. Enfin nous savons que $H_t(\theta_{st})$ se comporte asymptotiquement comme $H_t(\varphi_{\kappa' h^{-d} st/d})$, et donc converge en loi vers $H_{\frac{(d-1)h^{d-1}}{b\kappa' s}}(B_1)$, id est vers $H_{\frac{(d-1)h^{d-1}}{b\kappa'}}(B_s)$. $\diamond$

Ce résultat signifie qu'il n'y a pas pour $I\!H^d_{\mathbb{C}}$ de résultat d'enroulements singuliers (analogue au théorème classique de Spitzer), quelque soit $d \geq 2$, mais seulement un théorème central limite, expliquant la dépendance en h du processus limite.

4.4.3 APPENDICE : une extension au cas du Brownien hyperbolique complexe non dégénéré

Étendons ce qui précède au cas où notre Brownien sur le groupe d'Heisenberg est non dégénéré, par ajout d'une excitation indépendante sur la composante centrale v.

Fixons la métrique de type Bergmann : $\quad d\ell^2 := y^{-2} dy^2 + d\ell_y^2$, $\quad$ où

$$d\ell_y^2 := (by)^{-1} \sum_{j=1}^{d-1} (dx_j^2 + dy_j^2) + (ky)^{-2} \Big(dv + 2 \sum_{j=1}^{d-1} (x_j dy_j - y_j dx_j) \Big)^2 ,$$

avec $\quad b > 0$ et $k > 0$.

La mesure de volume riemannien associée à $d\ell^2$ est proportionnelle à

$$y^{-d-1}\, dy\, dv\, dx_1..dx_{d-1}\, dy_1..dy_{d-1} .$$

L'opérateur de Laplace-Beltrami associé est

$$\Delta := y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (1-d) y \frac{\partial}{\partial y} + \Delta_{\mathcal{H}} \ , \qquad \text{avec} \qquad \Delta_{\mathcal{H}} := (ky)^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} + by\, \Delta^K \ ,$$

Δ^K étant toujours le laplacien de Kohn sur $\mathcal{H}_d$.

La formule d'Itô montre directement que

$$Z_s \equiv \left(H_{b^{-1}} \Big[B\Big(\int_0^s y_t\, dt \Big) \Big] + k \Big(0 \,,\, \beta\Big(\int_0^s y_t^2\, dt \Big) \Big) \,,\, y_s \right)$$

est le mouvement brownien de $I\!H$, en coordonnées horocycliques et relativement à la métrique $d\ell^2$.

Ce mouvement brownien ne se met plus sous la forme d'un produit semi-direct comme dans la section 3, mais cependant nous pouvons le considérer de façon assez analogue.

Le lemme 2 et la proposition 8 doivent être modifiés comme suit.

Lemme 4 *La loi de* $\left(\Theta^1 = \int_0^{\inf\{s|y_s=h\}} y_t\,dt\,,\,\Theta^2 = \int_0^{\inf\{s|y_s=h\}} y_t^2\,dt\right)$ *est donnée par : pour tous* $\eta,\varrho\ge 0\,,\,\sigma>0\,,$ *notant* $a := \frac{d+1}{2}+\frac{\varrho}{\sigma}$,

$$I\!E_{(h+\eta)}\Big[\exp\Big(-\varrho\,\Theta^1-\sigma^2\,\Theta^2/2\Big)\Big] = (1+\eta/h)^d\,e^{-\sigma\,\eta}\times\frac{\int_0^\infty e^{-2\sigma(h+\eta)s}\,s^{a-1}\,(1+s)^{d-a}\,ds}{\int_0^\infty e^{-2\sigma hs}\,s^{a-1}\,(1+s)^{d-a}\,ds}\ .$$

<u>Preuve</u> Pour ϱ,σ,y réels positifs, soient $\zeta := \inf\{s>0\,|\,y_s=h\}$ et

$$f(y) := I\!E_y\left[\exp\Big(-\varrho\int_0^\zeta y_t\,dt-\frac{\sigma^2}{2}\int_0^\zeta y_t^2\,dt\Big)\right].$$

f est une fonction positive décroissante sur $[1,+\infty[$, égale à 1 en h, et qui est harmonique par rapport au semi-groupe de la diffusion y_s avec potentiel $-\varrho\,Id-\sigma^2 Id^2/2$; elle doit donc vérifier :

$$f''(y)+\Big(\frac{1-d}{y}\Big)\times f'(y)-\Big(\frac{2\varrho}{y}+\sigma^2\Big)\times f(y)=0\ .$$

Effectuons le changement : $f(y) := e^{-\sigma y}\,H(2\sigma\,y)$. Cela donne :

$$t\,H''(t)+(1-d-t)\,H'(t)+\Big(\frac{d-1}{2}-\frac{\varrho}{\sigma}\Big)\,H(t)=0\ .$$

C'est une équation différentielle confluente hypergéométrique (de Kummer), dont une solution positive sur $I\!R_+^*$ est

$$H(t)=t^d\int_0^\infty e^{-ts}\,s^{a-1}\,(1+s)^{d-a}\,ds\ ,\qquad\text{avec}\qquad a := \frac{d+1}{2}+\frac{\varrho}{\sigma}\ .$$

Ceci se vérifie en observant que

$$\Big(t\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}+(1-d-t)\frac{\partial}{\partial t}+(d-a)\Big)\Big[t^d e^{-ts}s^{a-1}(1+s)^{d-a}\Big]+\frac{\partial}{\partial s}\Big[t^d e^{-ts}s^a(1+s)^{d-a+1}\Big]=0\ .$$

De plus nous avons

$$H(t)=t^{d-a}\int_0^\infty e^{-s}\,s^{a-1}\,(1+s/t)^{d-a}\,ds=\Gamma(a)\,t^{d-a}+t^{d-a}\int_0^\infty e^{-s}\,s^{a-1}\,[(1+s/t)^{d-a}-1]\,ds$$

$$=\Gamma(a)\,t^{d-a}+t^{d-a}\int_0^\infty e^{-s}\,s^{a-1}\,\mathcal{O}\Big[(s/t)(1+s/t)^{(d-a-1)^+}\Big]\,ds=\Gamma(a)\,t^{d-a}\times[1+\mathcal{O}(1/t)]\ .$$

Une solution de l'équation de Kummer non colinéaire à H est

$$t^d\times\sum_{j\in I\!N}\frac{\Gamma(a+j)}{j!\,(d+j)!}\,t^j=e^t\times t^{a-1}\times[1+\mathcal{O}(1/t)]\ ,$$

ce qui fait que seule (à une constante près) H correspond à une fonction f bornée en $+\infty$. Donc nous avons $f(y)=c\,e^{-\sigma\,y}\,H(2\sigma\,y)$, et

$$I\!E_{h+\eta}\Big[\exp\Big(-\varrho\,\Theta^1-\sigma^2\Theta^2/2\Big)\Big]=f(h+\eta)/f(h)\ .\ \diamond$$

Corollaire 5 *Nous avons pour tous* $h>0\,,\ \varrho\ge 0\,,\ \sigma>0\,,$ *notant* $a=\frac{d+1}{2}+\frac{\varrho}{\sigma}$ *:*

$$\hat E\Big[\exp\big(-\varrho\,\Theta^1-\frac{\sigma^2}{2}\,\Theta^2\big)-1\Big]=\frac{hd}{2}\times\Big(\frac{d}{h}-\sigma-\,2\sigma\times\frac{\int_0^\infty e^{-2\sigma hs}\,s^a\,(1+s)^{d-a}\,ds}{\int_0^\infty e^{-2\sigma hs}\,s^{a-1}\,(1+s)^{d-a}\,ds}\Big)\ .$$

En particulier

$$\hat E\Big(1-e^{-\frac{\sigma^2}{2}\Theta^2}\Big)=\frac{h\sigma d}{2}\times\frac{K_{d/2-1}(h\sigma)}{K_{d/2}(h\sigma)}\ .$$

<u>Preuve</u> De même que dans la preuve du corollaire 8, nous avons

$$\frac{2}{hd}\times\hat E\Big[\exp\big(-\varrho\,\Theta^1-\frac{\sigma^2}{2}\,\Theta^2\big)-1\Big]=\frac{\partial}{\partial_\eta}|_{\eta=0}I\!\!E_{(h+\eta)}\Big[\exp\big(-\varrho\,\Theta^1-\frac{\sigma^2}{2}\,\Theta^2\big)\Big]$$

$$=\frac{\partial}{\partial_\eta}|_{\eta=0}\left[(1+\eta/h)^d\,e^{-\sigma\,\eta}\times\frac{\int_0^\infty e^{-2\sigma(h+\eta)s}\,s^{a-1}\,(1+s)^{d-a}\,ds}{\int_0^\infty e^{-2\sigma hs}\,s^{a-1}\,(1+s)^{d-a}\,ds}\right]$$

$$=\frac{d}{h}-\sigma-2\sigma\times\frac{\int_0^\infty e^{-2\sigma hs}\,s^a\,(1+s)^{d-a}\,ds}{\int_0^\infty e^{-2\sigma hs}\,s^{a-1}\,(1+s)^{d-a}\,ds}=\frac{d}{h}-\sigma+2\sigma\times\frac{\Psi'(a,d+1;2\sigma h)}{\Psi(a,d+1;2\sigma h)}\ ,$$

où $\Psi(a,d+1;x)\ :=\ \Gamma(a)^{-1}\int_0^\infty e^{-xs}s^{a-1}(1+s)^{d-a}ds$ est la fonction hypergéométrique confluente (solution de $x\Psi''+(d+1-x)\Psi'-a\Psi=0$) de Tricomi.
Lorsque $\varrho=0$, nous retombons exactement sur le cas de la proposition 6. $\diamond$

Les définitions de la section 3 et la proposition 2 admettent un analogue :

$$\varphi_t:=H_{b^{-1}}\Big[B\Big(\int_0^{\Lambda_t^0}y_t\,dt\Big)\Big]+k\,\Big(0\,,\,\beta\Big(\int_0^{\Lambda_t^0}y_t^2\,dt\Big)\Big)=H_{b^{-1}}\big(B_{\Lambda_t^1}\big)+k\,\big(0\,,\,\beta_{\Lambda_t^2}\big)$$

$$=\Big(\sqrt{b}\,\zeta_{\Lambda_t^1}\,,\,2b\mathcal{A}_{\Lambda_t^1}+k\beta_{\Lambda_t^2}\Big)\,,$$

où $(\Lambda_t^1,\Lambda_t^2)\ :=\Big(\int_0^{\Lambda_t^0}y_t\,dt\,,\,\int_0^{\Lambda_t^0}y_t^2\,dt\Big)\,.$

Rappelons que (ζ_t,β_t) est le brownien standard de $\mathbb{C}^{d-1}\times I\!\!R$, que $\mathcal{A}_t$ est l'aire de Lévy associée à ζ_t, et que (ζ_t,β_t) est indépendant de $(\Lambda_t^1,\Lambda_t^2)$.
En outre la version bidimensionnelle de la formule exponentielle utilisée précédemment (voir la proposition 3 et sa preuve) est

$$\Psi(\varrho,\alpha)=-\,t^{-1}\log\Big(I\!\!E\Big(\exp\big[-\varrho\,\Lambda_t^1-\alpha\,\Lambda_t^2\big]\Big)\Big)=\hat E\,\Big(1-\exp\big[-\varrho\,\Theta^1-\alpha\,\Theta^2\big]\Big)\,.$$

La mesure de Lévy associée est π_Λ telle que

$$\Psi(\varrho,\alpha)=\int_{(I\!\!R_+)^2}(1-e^{-\varrho u-\alpha v})\pi_\Lambda(du,dv)\ .$$

Le lemme 3 est modifié comme suit.

Lemme 5 *Nous avons pour tous* ϱ, σ *réels :* $\lim_{t\to\infty} t\,\psi\Big(\frac{\varrho}{t}, \frac{\sigma^2}{2t^2}\Big) = \frac{\varrho h d}{d-1}$, *ce qui signifie que* $\Big(t^{-1}\Lambda^1_t\,,\, t^{-2}\Lambda^2_t\Big)$ *converge en probabilité lorsque* $t\to\infty$ *vers* $(hd/(d-1), 0)$.

Preuve Nous déduisons du corollaire 5, pour $\sigma \neq 0$:

$$\frac{2}{hd}\times t\,\psi\Big(\frac{\varrho}{t}, \frac{\sigma^2}{2t^2}\Big) = \sigma - t\,\tfrac{d}{h} + 2t\,\sigma\times \frac{\int_0^\infty e^{-2\sigma h s}\, s^a\,(t^{-1}+s)^{d-a}\,ds}{\int_0^\infty e^{-2\sigma h s}\, s^{a-1}\,(t^{-1}+s)^{d-a}\,ds}$$

$$= \sigma - t\,\tfrac{d}{h} + 2t\,\sigma\times \frac{(2\sigma h)^{-d-1}\,d! + (2\sigma h)^{-d}\,(d-1)!\,(d-a)/t + \mathcal{O}(t^{-2})}{(2\sigma h)^{-d}\,(d-1)! + (2\sigma h)^{1-d}\,(d-2)!\,(d-a)/t + \mathcal{O}(t^{-2}\log t)}$$

$$= \sigma - t\,\tfrac{d}{h} + \frac{t}{h}\times \frac{d + 2\sigma h\,(d-a)/t + \mathcal{O}(t^{-2})}{1 + 2\sigma h\,(d-1)^{-1}(d-a)/t + \mathcal{O}(t^{-2}\log t)}$$

$$= \sigma - 2\sigma\,(d-a)/(d-1) + \mathcal{O}(t^{-1}\,\log t) = 2\varrho/(d-1) + \mathcal{O}(t^{-1}\log t)\ .\ \diamond$$

Le corollaire 4 et la fin de la section 4.4.2 restent enfin valables tels quels.

REFERENCES

[B1] Bertoin J. *Lévy Processes.* Cambridge Univ. Press, 1996.

[B2] Bertoin J. *Subordinators : examples and applications.* École d'été de Saint Flour XXVII, 1997. Lecture Notes in Math., Springer 1998.

[EF] Enriquez N. , Franchi J. *Masse des pointes, temps de retour et enroulements en courbure négative.* Bull. Soc. math. de France, vol 130, n°3, 349-386, 2002.

[EFLJ] Enriquez N. , Franchi J. , Le Jan Y. *Stable windings on hyperbolic surfaces.* Prob. Th. Rel. Fields 119, 213-255, 2001.

[ELJ] Enriquez N., Le Jan Y. *Statistic of the winding of geodesics on a Riemann surface with finite area and constant negative curvature.* Rev. Mat. Iberoamericana, Vol. 13, 2, 377-401, 1997.

[F1] Franchi J. *Théorème des résidus asymptotiques pour le mouvement brownien sur une surface riemannienne compacte.* Annales de l'Institut Henri Poincaré , vol. 27 , n°4 , 445-462 , 1991.

[F2] Franchi J. *Asymptotic singular homology of a complete hyperbolic 3-manifold of finite volume.* Proc. London Math. Soc. (3) n°79, 451-480, 1999.

[G] Goldman W.M. *Complex hyperbolic geometry.* Oxford Univ. Press, 1999.

[H] Hunt G.A. *Semi-groups of measures on Lie groups.* Trans. A.M.S. 81, 264-293, 1956.

[HP1] Hersonsky S. , Paulin F. *On the volumes of complex hyperbolic manifolds.* Duke Math. J. vol. 84, n^{o}3, 719-737, 1996.

[HP2] Hersonsky S. , Paulin F. *On the rigidity of discrete isometry groups of negatively curved spaces.* Comment. Math. Helv. 72, 349-388, 1997.

[LMK] Lyons T. , McKean H.P. *Windings of the plane Brownian motion.* Adv. Math. 51, 212-225, 1984.

[I] Ismail M.E.H. *Bessel functions and the infinite divisibility of the Student* $\imath$*-distribution.* Annals of Proba. 5, n^{o}4, 582-585, 1977.

[LJ] Le Jan Y. *The central limit theorem for the geodesic flow on non compact manifolds of constant negative curvature.* Duke Math. J. (1) 74, 159-175, 1994.

[MOS] Magnus W. , Oberhettinger F. , Soni R.P. *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics.* Springer, Berlin 1966.

[PY] Pitman J. , Yor M. *Further asymptotic laws of planar Brownian motion.* Annals of Proba. 17, n^{o}3, 965-1011, 1989.

[RW] Rogers L.C.G.. , Williams D. , *Diffusions, Markov Processes, and Martingales. Volume 2 : Itô Calculus.* John Wiley & Sons, 1986.

[S] Spitzer F. , *Some theorems concerning* 2*-dimensional Brownian motion.* Trans. A. M. S. 87, 187–197, 1958.

Nathanaël ENRIQUEZ : Laboratoire de Probabilités de Paris 6, 4 place Jussieu, tour 56, 3ème étage, 75252 Paris cedex 05.
Adresse électronique : enriquez@ccr.jussieu.fr

Jacques FRANCHI : I.R.M.A., Université Louis Pasteur et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex.
Adresse électronique : franchi@math.u-strasbg.fr

Yves LE JAN : Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay.
Adresse électronique : yves.lejan@math.u-psud.fr