

Sur le nombre de points visités par une marche aléatoire sur un amas infini de percolation

Clement Rau

▶ **To cite this version:**

Clement Rau. Sur le nombre de points visités par une marche aléatoire sur un amas infini de percolation. 2006. hal-00023619

HAL Id: hal-00023619
https://hal.science/hal-00023619

Preprint submitted on 2 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ccsd-00023619, version 1 - 2 May 2006

SUR LE NOMBRE DE POINTS VISITÉS PAR UNE MARCHE ALÉATOIRE SUR UN AMAS INFINI DE PERCOLATION.

CLÉMENT RAU[1]

RÉSUMÉ. Dans cet article, on s'intéresse à une marche aléatoire simple sur un amas infini issu d'un processus de percolation surcritique sur les arêtes de $\mathbb{Z}^d$ ($d \geq 2$) de loi Q. On montre que la transformée de Laplace du nombre de points visités au temps n, noté N_n, a un comportement similaire au cas où la marche évolue dans $\mathbb{Z}^d$. Plus précisément, on établit que pour tout $0 < \alpha < 1$, il existe des constantes $C_i,\ C_s > 0$ telles que pour presque toute réalisation de la percolation telle que l'origine appartienne à l'amas infini et pour n assez grand,

$$e^{-C_i n^{\frac{d}{d+2}}} \leq \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) \leq e^{-C_s n^{\frac{d}{d+2}}}.$$

Le point principal du travail réside dans l'obtention de la borne supérieure. Notre approche consiste dans un premier temps, à trouver une inégalité isopérimétrique sur l'amas infini, et dans un deuxi-ème temps à la remonter sur un produit en couronne, ce qui nous permet alors d'obtenir une majoration de la probabilité de retour d'une certaine marche sur ce produit en couronne. L'introduction d'un produit en couronne est justement motivée par le fait que la probabilité de retour sur un tel graphe s'interprète comme l'espérance de la transformée de Laplace du nombre de points visités.

1. Introduction et résultats

Soit $d \geq 2$. On appelle percolation de Bernoulli de paramètre p le sous graphe aléatoire de la grille de dimension d obtenu en supprimant (resp. gardant) une arête avec probabilité p (resp. $1-p$) de façon indépendante pour les différentes arêtes. On notera ω une réalisation typique de la percolation. On appelle alors amas infini une composante connexe infinie du graphe ω. On montre qu'une telle composante connexe infinie existe et est presque sûrement unique si le paramètre p est choisi au dessus d'une certaine valeur critique p_c. Une construction plus formelle de la percolation est donnée plus loin dans cette introduction.

[1]CMI, 39 rue Joliot-Curie, 13013 Marseille, rau@cmi.univ-mrs.fr

La percolation est un modéle important de la mécanique statistique des milieux desordonnés, un 'concept unificateur' pour reprendre l'expression de P.G. De Gennes dans [5], qui intervient aussi dans de nombreuses applications, par exemple dans les problèmes de diffusion dans un environnement non homogène que l'on rencontre dans la recherche pétrolière. Depuis son introduction en 1956 par J.M. Hammersley, la percolation a également donné lieu a une jolie théorie mathématique qui recèle encore bien des défis. Nous renvoyons aux livres de Kesten et Grimmett (voir [9] et [8]) pour une introduction aux outils mathématiques de la percolation. On y trouvera en particulier de nombreux résultats sur la géométrie des amas infinis.

Depuis quelques années, différents auteurs se sont attachés à développer la théorie du potentiel des amas infinis ou, en d'autres termes, à décrire le comportement d'une marche aléatoire évoluant sur un amas infini (La 'fourmi dans un labyrinthe' pour reprendre une autre expression de P.G. De Gennes). Les premières bornes sur le noyau de la chaleur sur un amas infini ont été demontrées par P. Mathieu et E. Rémy (voir [12]) à l'aide d'estimées du profil isopérimétrique d'un amas infini. Puis, M. Barlow (voir [2]) a obtenu des estimées de type gaussien. Ces premiers résultats ont ensuite permis de prouver la convergence de la marche aléatoire vers un mouvement brownien sous la forme d'un principe d'invariance valable pour presque toute réalisation de ω, voir [16] [3] et [11]. L'objet du travail présenté ici est de compléter ce panorama en donnant des estimées précises sur le nombre de points visités par la marche aléatoire simple symétrique évoluant sur un amas infini.

Le processus de percolation est défini de la manière suivante. Pour $d \geq 2$, notons E^d l'ensemble des arêtes de $\mathbb{Z}^d$ défini par,

$$E^d = \{(x, y); \sum_{i=1..d} |x_i - y_i| = 1\},$$

où $x = (x_1, ..., x_d)$ et $y = (y_1, ..., y_d)$. Pour $p \in]0, 1]$, soit ω le sous graphe aléatoire de $\mathcal{L}^d := (\mathbb{Z}^d, E^d)$ obtenu en gardant (resp. effaçant) une arête avec probabilité p (resp. $1 - p$) de manière indépendante pour les différentes arêtes de E^d. On identifie ce sous graphe de $\mathbb{Z}^d$ avec l'application $\omega : E^d \to \{0, 1\}$ telle que $\omega(x, y) = 1$ si l'arête (x, y) est présente dans ω (on dira qu'une telle arête est 'ouverte') et $\omega(x, y) = 0$ sinon. On munit $\{0, 1\}^{E^d}$ de la mesure de probabilité Q sous laquelle les variables aléatoires $(\omega(e), e \in \mathbb{E}^d)$ sont indépendantes et suivent des lois de Bernoulli(p). Soit $\mathcal{C}$ la composante connexe de ω

contenant l'origine, $|\mathcal{C}|$ son cardinal et p_c la probabilité critique,

$$p_c = \sup\{p; Q(|\mathcal{C}| = +\infty) = 0\}.$$

On sait que $0 < p_c < 1$(voir [8]) , et désormais, on suppose que $p > p_c$. On se place sur l'événement $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$, $\mathcal{C}$ est alors l'unique amas infini. On considère alors sur $\mathcal{C}$ la marche aléatoire suivante : $X_0 = x$ et X_{n+1} est choisi uniformément parmi les voisins de X_n dans $\mathcal{C}$.

$$\text{ie : } \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = \frac{\omega(x,y)}{\sum\limits_{z;(x,z)\in E^d} \omega(x,z)}.$$

Le but de cet article est d'estimer le nombre de points visités par la marche X. Plus précisément, posons $N_n = |\{X_0, X_1, ..., X_n\}|$, $\mathbb{P}_x^\omega$ la loi de la marche issue de x, et $\mathbb{E}_x^\omega$ son espérance. Le principal résultat est :

Théorème 1.1. *Pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe deux constantes $C_i, C_s > 0$ telles que Q p.s sur l'événement $|\mathcal{C}| = +\infty$, et pour n assez grand :*

$$e^{-C_i n^{\frac{d}{d+2}}} \leq \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) \leq e^{-C_s n^{\frac{d}{d+2}}}.$$

Remarque 1.2. *Ce résultat est également valide pour la marche aléatoire à temps continu qui attend un temps exponentiel entre chaque saut.*

Dans le cas où $\omega = \mathcal{L}^d$ cette expression a déjà été étudiée par Donsker M D et Varadhan S R S (voir [6]). Ils prouvent, en particulier pour la marche aléatoire simple sur la grille $\mathbb{Z}^d$, le théorème suivant :

Théorème 1.3. *(voir [6]) Il existe une constante $c(d,\alpha) > 0$ telle que,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{d}{d+2}}} \log \mathbb{E}_0^{\mathbb{Z}^d}(\alpha^{N_n}) = -c(d,\alpha)$$

Ce résultat est prouvé par double inégalité. La stratégie adoptée dans la preuve de Donsker M D et Varadhan S R S, pour obtenir une majoration de l'expression $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{d}{d+2}}} \log \mathbb{E}_0^{\mathbb{Z}^d}(\alpha^{N_n})$, ne semble pas se généraliser dans un amas infini de percolation pour plusieurs raisons. Par exemple, la symétrie de $\mathbb{Z}^d$ est un point crucial dans leur preuve, qui n'est évidemment pas satisfait dans un amas. En particulier, la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ satisfait une propriété de martingale qui n'est plus vraie pour la marche aléatoire sur l'amas de percolation.

La méthode developpée ici repose sur le fait suivant : $\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n})$ peut s'écrire comme une probabilité de retour à l'origine d'une marche Z construite à partir de X dans un graphe plus "gros" que $\mathcal{C}$, qui sera un produit en couronne. Trouver une borne supérieure de $\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n})$ revient donc à trouver une borne supérieure de la probabilité de retour de la marche Z. On sait que les inégalités isopérimétriques sont un outil

important pour prouver des inégalités fonctionnelles comme celles de Poincaré ou de Nash, qui elles mêmes, permettent d'obtenir des bornes supérieures du noyaux d'une marche simple (voir [4]). On étudie donc le profil isopérimétrique sur ce produit en couronne. Grâce aux récents travaux d'A.Erschler, on sait contrôler l'isopérimétrie du produit en couronne de deux graphes à partir de l'isopérimétrie de chacun d'entre eux. Ici, un des deux graphes étant le graphe ayant comme ensemble de points $\mathcal{C}$, on est finalement ramené à étudier de manière assez fine la géométrie d'un amas et ses propriétés isopérimétriques. Notons $\mathcal{B}_n = [-n;n]^d$ et $\mathcal{C}_n$ la composante connexe de $\mathcal{C} \cap \mathcal{B}_n$ contenant l'origine. Avec des techniques similaires à celles de [12], on prouve la propriété suivante.

Proposition 1.4. *Soient $\gamma > 0$ et $p > p_c$. Il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $c > 0$: Q p.s sur $\#\mathcal{C} = +\infty$, pour n assez grand, on ait,*

$$\frac{|\partial_{\mathcal{C}^g} A|}{f_c(|A|)} \geq \beta \quad \textit{pour tout sous-ensemble } A \textit{ connexe de } \mathcal{C}_n, \tag{1}$$

où $f_c(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < cn^\gamma \\ x^{1-\frac{1}{d}} & si\ x \geq cn^\gamma, \end{cases}$
et $\partial_{\mathcal{C}^g} A = \{(x,y) \in \mathbb{E}^d;\ \omega(x,y) = 1 \text{ et } x \in A\ ;\ y \notin A\}$.
Le rang à partir duquel l'inégalité (1) est satisfaite dépend de l'amas ω et de c.

Remarque 1.5. *Les mêmes techniques s'appliquent pour des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$ aux plus proches voisins, symétriques et dont les taux de transitions sont bornés supérieurement et inférieurement (condition d'ellipticité). Cette dernière condition n'est pas satisfaite pour la percolation.*

Après avoir fixé quelques notations, ce papier se décompose en 4 parties. Dans la partie 2, nous définissons un produit en couronne, nous expliquons l'intêret d'un tel outil dans notre cas et nous traitons le problème de l'isopérimétrie sur un produit en couronne. Dans la partie 3, nous étudions le profil isopérimétrique d'un amas et nous prouvons en particulier la propositions 1.4. A l'aide des parties 2 et 3, nous établissons dans la partie 4, une borne supérieure pour la probabilité de retour à l'origine dans le produit en couronne, et nous en déduisons une borne supérieure pour $\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n})$. Enfin, dans la partie 5 nous prouvons la borne inférieure du théorème 1.1.

1.1. **Notations.**

- Nous utiliserons le symbole := pour définir une nouvelle quantité et on notera $|A|$ ou bien $\#A$ le cardinal d'un ensemble A.
- La somme disjointe de deux ensembles A et B quelconques sera notée $A\dot{\bigcup}B$. Cette notation représente un ensemble en bijection avec $(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$.
- On notera $D(0,x)$ la longueur minimale d'un chemin constitué d'arêtes ouvertes reliant x à 0, (appelé aussi distance chimique) et on pose $B_r(\mathcal{C}) = \{x \in \mathbb{Z}^d;\ D(0,x) \leq r\}$. On utilisera également la norme N_1 sur $\mathbb{Z}^d$ définie par $N_1(x) = \sum_{i=1...d} |x_i|$, si $x = (x_1, ..., x_d)$.
- C et c représenteront des constantes dont la valeur peut évoluer de ligne en ligne mais la dépendance en n ou ω sera spécifiée par l'ordre des quantificateurs. La constante β dépendra uniquement de p.
- Un graphe G est un couple $(V(G), E(G))$, où $V(G)$ désigne l'ensemble des points de G (vertices of G) et $E(G)$ désigne l'ensemble des arêtes de G. Dans ce papier, les graphes seront non orientés (sauf mention explicite comme par exemple dans le lemme 2.7), et où les arêtes de type (x,x) sont exclues. Un sous graphe de G est un graphe G' tel que $V(G') \subset V(G)$ et $E(G') \subset E(G)$.
- On utilisera en particulier le graphe $\mathcal{C}^g$ défini par $V(\mathcal{C}^g) = \mathcal{C}$ et $E(\mathcal{C}^g) = \{(x,y) \in E^d;\ x,y \in \mathcal{C} \text{ et } \omega(x,y) = 1\}$ et le graphe $\mathcal{C}_n^g$ défini par $V(\mathcal{C}_n^g) = \mathcal{C}_n$ (on rappelle que C_n désigne la composante connexe de $\mathcal{C} \cap [-n,n]^d$ contenant l'origine) et $E(\mathcal{C}_n^g) = \{(x,y) \in E^d;\ x,y \in \mathcal{C}_n \text{ et } \omega(x,y) = 1\}$. De façon générale, lorsqu'il n y a pas d'ambiguité sur les arêtes, V^g désignera le graphe ayant cet ensemble d'arêtes et dont l'ensemble des points est V . On notera également $\mathcal{B}_n^g$ le graphe ayant $\mathcal{B}_n = [-n,n]^d$ comme ensemble de points et où $E(\mathcal{B}_n^g) = \{(x,y) \in E^d;\ x \text{ et } y \in \mathcal{B}_n\}$.
- Soit G un graphe, pour $A \subset V(G)$, on notera

$$\partial_G A = \{(x,y) \in E(G);\ x \in A \text{ et } y \in V(G) - A\}.$$

  Cette notation est evidemment cohérente avec la définition du bord $\partial_{\mathcal{C}^g}$ dans la proposition 1.4. En notant $\mathcal{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$, le bord "classique" dans $\mathbb{Z}^d$ d'un ensemble A est donc noté $\partial_{\mathcal{L}^d} A$.
- On travaillera plutôt avec les fonctions de Følner lorsqu'on parlera d'isopérimétrie. Soit G un graphe, on désigne par Fol_G la fonction de Følner de G, définie par :

$$Fol_G(k) = \min\{|U|;\ U \subset V(G) \text{ et } \frac{|\partial_G U|}{|U|} \leq \frac{1}{k}\}.$$

• Si G' est un sous graphe de G, on notera :

$$Fol^G_{G'}(k) = \min\{|U|;\ U \subset V(G') \text{ et } \frac{|\partial_G U|}{|U|} \leq \frac{1}{k}\}.$$

$Fol^G_{G'}$ est toujours une fonction de Følner de G' mais où le bord est compté dans G.

2. Produit en couronne.

Dans cette section, après avoir donné la définition d'un produit en couronne, on motive l'introduction de tels graphes par la propriété 2.3, en considérant une marche aléatoire construite à partir des noyaux de transition de la marche X, sur un certain produit en couronne. Enfin, on estime la fonction de Følner du produit en couronne en question à l'aide des fonctions de Følner des graphes considérés.

2.1. **Définition.** Soient A et B deux graphes, et b_0 un point de $V(B)$. Pour une fonction $f : V(A) \to V(B)$, on appelle support de f, l'ensemble $\{a \in V(A);\ f(a) \neq b_0\}$.

Définition 2.1. *Le produit en couronne $A \wr B$ de deux graphes A et B, est le graphe suivant :*
- $V(A \wr B)$ est l'ensemble des couples (a, f) où $a \in V(A)$ et $f : V(A) \to V(B)$ est à support fini,
-les arêtes sont définies de la manière suivante : $\Big((a_1, f_1), (a_2, f_2)\Big) \in E(A \wr B))$ si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 = a_2 \text{ et } \forall x \neq a_1\ f_1(x) = f_2(x) \text{ et } (f_1(a_1), f_2(a_1)) \in E(B), \\ \text{ou} \\ f_1 = f_2 \quad \text{et} \quad (a_1, a_2) \in E(A). \end{cases}$$

Si $(a, f) \in V(A \wr B)$, l'élément f est appelée la configuration. On appellera le graphe A la "base" du produit en couronne $A \wr B$.

Remarque 2.2. *Si A et B sont des graphes de Cayley de groupes, le produit en couronne de A et B est le graphe de Cayley du produit en couronne de ces groupes, avec l'ensemble "standard" de générateurs construits à partir des générateurs de A et B (voir [7]). [Le produit en couronne de deux groupes A et B est le produit semi direct de A et $\sum_A B$ où A agit sur $\sum_A B$ par ${}^a f(x) = f(xa^{-1})$.]*

2.2. **Marches aléatoires.** Dans notre cas, on prend $A = \mathcal{C}^g$ et pour B le graphe de Cayley du groupe $(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, +)$ avec $\overline{1}$ comme générateur. On notera 'encore' $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ ce graphe. On choisit $b_0 = \overline{0}$. Soit o le point de $A \wr B$ tel que $o = (0, f_0)$ où 0 est l'origine de $\mathbb{Z}^d$ et f_0 est la configuration qui vaut $\overline{0}$ en tous points. Notons $p(\ ,\ )$ les noyaux de transition de la marche X définie dans l'introduction, ie : pour tout $a, b \in \mathcal{C}$ $p(a,b) = \mathbb{P}^{\omega}_x(X_1 = y) = \frac{\omega(a,b)}{\nu(a)}$ où $\nu(a)$ est le nombre de voisins dans $\mathcal{C}$ de a. Pour $\alpha \in]0;1[$, on considère alors la marche Z sur $\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ définie par $Z_0 = o$ et dont les noyaux de probabilité sont :

$$\begin{aligned}
\tilde{p}\Big((a,f),(b,f_{\substack{a,\overline{0}\\ b,\overline{0}}})\Big) &= \alpha^2 p(a,b),\\
\tilde{p}\Big((a,f),(b,f_{\substack{a,\overline{1}\\ b,\overline{0}}})\Big) &= \alpha(1-\alpha)p(a,b),\\
\tilde{p}\Big((a,f),(b,f_{\substack{a,\overline{0}\\ b,\overline{1}}})\Big) &= \alpha(1-\alpha)p(a,b),\\
\tilde{p}\Big((a,f),(b,f_{\substack{a,\overline{1}\\ b,\overline{1}}})\Big) &= (1-\alpha)^2 p(a,b),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
f_{\substack{a,x\\ b,y}} : \quad u &\mapsto f(u) \text{ pour } u \neq a \text{ ou } b,\\
a &\mapsto x,\\
b &\mapsto y.
\end{aligned}$$

L'interprétation de cette marche est la suivante : imaginons qu'il y ait une lampe en chaque point de $\mathcal{C}$, qui soit allumée [resp. éteinte] lorsque la configuration en ce point vaut $\overline{1}$ [resp. $\overline{0}$]. Supposons maintenant qu'à un certain instant le marcheur se trouve en un certain point de $\mathcal{C}$. En une unité de temps, il allume [resp. éteint] la lampe où il se trouve avec probabilité $1-\alpha$ [resp. α], il saute ensuite dans $\mathcal{C}$ uniformément sur ses voisins et il allume [resp. éteint] à nouveau la lampe au point où il se trouve avec probabilité $1-\alpha$ [resp. α]. Ces trois étapes sont indépendantes. Remarquons que si on "oublie" les configurations et que l'on regarde uniquement le premier argument de la marche Z, on retrouve la marche X, ainsi on peut écrire $Z_n = (X_n, f_n)$. Par ailleurs, si nous fixons une trajectoire dans $\mathcal{C}$, les états des différentes lampes sont indépendants. Enfin, la marche Z admet des mesures réversibles, elles sont proportionnelles à :

$$m(a,f) = \nu(a)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\#\{i; f(i)=\overline{1}\}}.$$

Nous verrons plus tard qu'il suffit d'étudier le cas $\alpha = 1/2$ pour obtenir la borne supérieure dans le théorème 1.1(la mesure m se réduit alors à $m(a, f) = \nu(a)$) mais pour la borne inférieure du théorème et pour d'autres valeurs de α, la mesure m nous sera utile.

Le lien, entre la marche Z sur ce produit en couronne et notre problème initial réside dans la propriété suivante. On note $\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega$ la loi de la marche Z issue de o.

Proposition 2.3. *On a,* $\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o) = \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}})$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o) &= \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega\Big((X_{2n}, f_{2n}) = (0, f_0)\Big) \\
&= \sum_{\substack{(k_0,k_1,\dots,k_{2n})\in\mathbb{Z}^d \\ k_0=k_{2n}=0}} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(X_0 = k_0, X_1 = k_1, ..., X_{2n} = k_{2n} \\
&\qquad\qquad \text{et } f_{2n} = f_0) \\
&= \sum_{\substack{(k_0,k_1,\dots,k_{2n})\in\mathbb{Z}^d \\ k_0=k_{2n}=0}} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(X_0 = k_0, X_1 = k_1, ..., X_{2n} = k_{2n}) \\
&\qquad\qquad \times\ \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(f_{2n} = f_0 | X_0 = k_0, ..., X_{2n} = k_{2n}) \\
&= \sum_{\substack{(k_0,k_1,\dots,k_{2n})\in\mathbb{Z}^d \\ k_0=k_{2n}=0}} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(X_0 = k_0, X_1 = k_1, ..., X_{2n} = k_{2n}) \\
&\qquad\qquad \times \alpha^{\#\{k_0,\dots,k_{2n}\}} \\
&= \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_{2n}}\ 1_{\{X_{2n}=0\}}).
\end{aligned}$$

□

2.3. **Remontée de l'isopérimétrie sur le produit en couronne.** On explique dans cette sous section, comment une inégalité isopérimétrique sur le graphe $\mathcal{C}_n^g$ se transmet au produit en couronne $\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$. Ce type de résultat est dû à A. Erschler. Nous présentons ici, une preuve légérement plus simple et plus détaillée. Le résultat principal est le suivant :

Proposition 2.4. *Il existe des constantes universelles* $C_1, C_2 > 0$ *telles que,*

$$Fol^{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}_{\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(k) \geq e^{C_1 Fol^{\mathcal{C}_n^g}_{\mathcal{C}_n^g}(C_2 k)}.$$

On peut prendre (cf preuve) $C_1 = \log(2)/9$ *et* $C_2 = 1/1000$.

La preuve de cette propriété est assez technique et découle de plusieurs lemmes. Pour alléger les notations, on notera, dans cette section, $\partial_\wr =$

$\partial_{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}$. Pour comprendre la preuve, examinons d'où proviennent les points du bord d'un ensemble $U \subset V(\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$. Il y en a de deux types :
- les points du bord provenant du bord de la base $\mathcal{C}_n^g$, ie : les points de la forme $\Big((a,f);(b,f)\Big)$ avec $(a,b) \in E(\mathcal{C}^g)$,
- les points du bord provenant du bord en 'configuration', ie : les points de la forme $\Big((a,f);(a,g)\Big)$ avec $f = g$ sauf en a.
Avant d'énoncer les lemmes préliminaires à la preuve de la propriété 2.4, introduisons quelques notions. Soit $U \subset V(\mathcal{C}_n \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$.

- A chaque U, on associe un graphe K_U de la manière suivante :
  - les points sont les configurations f de l'ensemble
  $$\{f;\ \exists a \in \mathcal{C}_n \ \ (a,f) \in U\},$$
  - deux points distincts f et g sont reliés par une arêtes si et seulement si :
  $$\exists a \in \mathcal{C}_n \text{ tel que } \begin{cases} (a,g) \text{ et } (a,f) \in U, \\ \text{et} \\ \forall x \neq a \ f(x) = g(x). \end{cases}$$
  ie : $f = g$ sauf en un point de $p(V)$, où p est la projection $V(\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \to V(\mathcal{C}_n^g) = \mathcal{C}_n$.
- Soit $f \in K_U$, on dit que f est $b - satisfaisable$, si il y a au moins b arêtes attachées à f dans K_U,
  $$ie : \quad \#\{x \in p(V);\ \dim_x f = 1\} \geq b,$$
  où
  $$\dim_x f = \#\{g;\ (x,g) \in V \text{ et } \forall y \neq x \ f(y) = g(y)\} \in \{0,1\}.$$
  Nous noterons $S_V(b)$ l'ensemble des configurations $b-satisfaisables$, pour alléger les notations, la plupart du temps nous oublierons la dépendance en U, et on notera donc $S(b)$ cet ensemble.

  Remarque 2.5. *Pour tout U, on a*
  $$|U| \geq 2|E(K_U)|,$$
  et si pour tout $(x,f) \in U$, on a $\dim_x f = 1$ (si U n'a pas de points "isolés") alors,
  $$|U| = 2\#E(K_U).$$
- Si f n'est pas b-satisfaisable, on dira que f est $b-non\ satisfaisable$ et on notera $NS(b)$ l' ensemble des configurations b-non satisfaisables.

- Soit K un graphe, on étend la notion de satisfaisabilité à K. Un point $x \in V(K)$ sera dit $b - satisfaisable$ [resp. $b - non\ satisfaisable$] si il y a au moins [resp. strictement moins de] b arêtes attachées à x.
- une arête sera dite $b-satisfaisable$ si elle relie deux configurations b-satisfaisables sinon on dira qu'elle est b-non satisfaisable. On notera $S^e(b)$ ou $S^e_U(b)$ [resp. $NS^e(b)$] l'ensemble des arêtes b-satisfaisables [resp. b-non satisfaisables].
- Un point $u = (x, f) \in U$ sera dit $b - satisfaisable$ [resp. $b - non\ satisfaisable$] si $f \in S(b)$ [resp. $NS(b)$]. On utilisera la notation $S^p(b)$ et $NS^p(b)$ pour l'ensemble des points de U qui sont (ou ne sont pas) b-satisfaisables.

- Un point $u = (x, f) \in U$ sera dit *bon* si $\dim\limits_x f = 1$ sinon on dira qu'il est *mauvais*.

Maintenant la preuve de la propostion 2.4 se décompose en trois étapes, on suppose que $\frac{|\partial_l U|}{|U|} \leq \frac{1}{k}$, on prouve d'abord qu'il y alors peu de points $b - non\ satisfaisables$ (pour une certaine valeur de b), puis on extrait un sous graphe tel que tous les points soient $\frac{b}{3} - satisfaisables$, et enfin on en déduit une minoration de $|U|$.

Dans la proposition suivante, on note ϕ la fonction $Fol^{\mathcal{C}^g}_{\mathcal{C}^g_n}$.

Lemme 2.6. *Soit $U \subset V(\mathcal{C}^g_n \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$, tel que $\frac{|\partial_l U|}{|U|} \leq \frac{1}{1000k}$ alors*

(i) $\frac{|\{u \in U;\ u\ \ mauvais\}|}{|U|} \leq \frac{1}{1000k}$,

(ii) $\frac{|\{u \in U;\ u \in NS^p(\phi(k)/3)\ \}|}{|V|} \leq \frac{1}{500}$.

Démonstration.
Pour (i) on remarque qu'un point mauvais de U nous donne un point du bord en 'configuration' de U, ainsi :

$$|\partial_l U| \geq \#\{u \in U;\ u \text{ mauvais}\}.$$

Pour (ii) posons :

$$\begin{aligned} Neud &= \{u \in U;\ u \in NS^p(\phi(k)/3)\ \} \\ &= \{u = (x, f) \in U; f \in NS(\phi(k)/3)\}, \end{aligned}$$

et

$$Neud(f) = \{(x, f); (x, f) \in U\}.$$

Notons que l'on a $p(Neud(f)) = \{x; (x, f) \in U\}$. Pour un ensemble F de configurations, on pose $Neud(F) = \bigcup\limits_{f \in F} Neud(f)$. Remarquons que c'est une union disjointe.

Soit maintenant $f \in NS(\phi(k)/3)$, intéressons-nous à l'ensemble $p(Neud(f))$. Chaque point du bord de $p(Neud(f))$ fournit un point du bord de U en 'base'. Soit l'ensemble $p(Neud(f))$ possède une part importante de bord relativement à son volume, et il fournit alors une part de bord en 'base' dans U de l'ordre de son volume. Ou bien, cet ensemble possède peu de bord relativement à son volume, et dans ce cas, du fait que f soit non satisfaisable, cet ensemble fournit à U du bord en 'configuration'.

Dans tous les cas, on obtient des points du bord de U mais les hypothèses sur U limitent cet apport. On distingue donc deux cas.

Premier cas : $f \in F_1 := \{f \in NS(\phi(k)/3); \frac{|\partial_{\mathcal{C}^g} p(Neud(f))|}{|p(Neud(f))|} > \frac{1}{k}\}$.

On fait correspondre à chaque point du bord de $p(Neud(f))$ un point du bord de U par l'application injective suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\bigcup_{f\in F_1}} \quad & \partial_{\mathcal{C}^g} p(Neud(f)) \longrightarrow \partial_l U \\ (x,y) \quad & \longmapsto \Big((x,f)\,;(y,f)\Big). \end{aligned}$$

Donc, on a :
(2)

$$|\partial_l U| \geq \sum_{f\in F_1} |\partial_{\mathcal{C}^g} p(Neud(f))| \geq \frac{1}{k} \sum_{f\in F_1} |p(Neud(f))| \geq \frac{1}{k} |Neud(F_1)|.$$

Second cas : $f \in F_2 := \{f \in NS(\phi(k)/3); \frac{|\partial_{\mathcal{C}^g} p(Neud(f))|}{|p(Neud(f))|} \leq \frac{1}{k}\}$.

Comme $f \in NS(\phi(k)/3)$, on a :

$$|\{x \in p(Neud(f));\ \dim_x f = 1\}| < \frac{1}{3}\phi(k),$$

d'où

$$|\{x \in p(Neud(f));\ \dim_x f = 0\}| \geq |Neud(f)| - \frac{1}{3}\phi(k).$$

(on a utilisé le fait que $|p(Neud(f)| = |Neud(f)|$.)
Or $f \in F_2$, donc par la définition de la fonction de Følner on a :

$$|Neud(f)| \geq \phi(k).$$

Ainsi,

$$|\{x \in p(Neud(f);\ \dim_x f = 0\}| \geq \frac{2}{3}|Neud(f)|.$$

Mais pour tout $f \in F_2$, si $y \in \{x \in p(Neud(f);\ \dim_x f = 0\}$ le point (y, f) nous donne un point du bord de U en configuration de manière

injective, par l'application

$$\begin{aligned} \dot{\bigcup_{f\in F_2}} \quad & \{(x,f)\in Neud(f);\ \dim_x f = 0\} \to \partial_l U \\ (x,f) \quad & \longmapsto \Big((x,f);(y,\bar{f}_x)\Big), \end{aligned}$$

où $\bar{f}_x$ est la configuration qui vaut f en tout point différent de x et dont la valeur en x est $\bar{0}$ [resp. $\bar{1}$] si $f(x)=\bar{1}$ [resp. $f(x)=\bar{0}$]. Donc, on obtient,

$$|\partial_l U| \geq \frac{2}{3}\sum_{f\in F_2}|Neud(f)| \geq \frac{2}{3}|Neud(F_2)|.$$

D'où l'on déduit que pour $k\geq 2$

$$|\partial_l U| \geq \frac{1}{k}|Neud(F_2)|. \tag{3}$$

En additionnant (2) et (3) et en utilisant que $\frac{|\partial_l U|}{|U|} < \frac{1}{1000k}$, on a :

$$\frac{|Neud|}{|U|} < \frac{1}{500}.$$

□

Lemme 2.7. *Soit $b>0$ et soit K un graphe. Supposons que $E(K)\neq\emptyset$ et :*

$$\frac{|NS^e_K(b)|}{|E(K)|} < 1/2.$$

Alors il existe un sous graphe non vide K' de K tel que toutes les arêtes soient $S^p_{K'}(b/3)$.

Démonstration. On efface tous les sommets $NS^p(b/3)$ et ainsi que toutes les arêtes adjacentes. Il peut alors apparaître de nouveaux sommets $NS^p(b/3)$ dans ce nouveau graphe. On les efface à nouveau ainsi que les arêtes adjacentes, et on itère ce processus "d'effacement" tant qu'il y a des sommets $NS^p(b/3)$. Prouvons que ce processus se termine avant que le graphe soit vide.
Posons,

$$\begin{aligned} C_1 &= |NS^e_K(b)|, \\ C_2 &= |\{e\in S^e_K(b); e \text{ effacée à la fin du processus }\}| \\ C_0 &= |\{e\in E(K); e \text{ effacée à la fin du processus }\}|. \end{aligned}$$

Si nous montrons que $C_2\leq C_1$, le lemme sera démontré car

$$C_0 \leq C_1 + C_2 \leq 2C_1 < |E(K)|.$$

Ce qui signifiera qu'il reste des points non effacés.

Pour prouver que $C_2 \leq C_1$, introduisons une orientation des arêtes. Si A et B sont deux points du graphe K reliés par une arête, on oriente l'arête de A vers B, si A a été effacé avant B. Nous choisissons une orientation arbitraire si A et B sont effacés simultanément ou si A et B sont non effacés. Nous noterons $\underset{\downarrow}{A}$ [resp. $\underset{\uparrow}{A}$] l'ensemble des arêtes orientées quittant A [resp. arrivant en A].

Sous lemme 2.8. *Soit $b > 0$ et A un point de K, effacé à la fin du processus. Supposons que A soit initialement $S^p(b)$, alors*

$$|\underset{\downarrow}{A}| \leq \frac{1}{2}|\underset{\uparrow}{A}|.$$

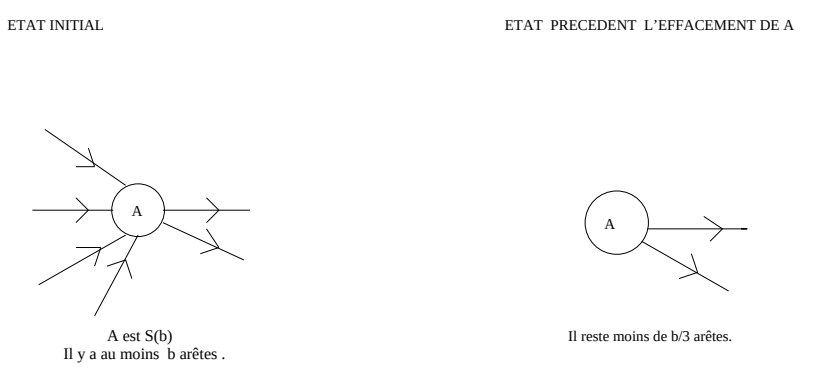


Figure a

Démonstration. La figure a illustre le début et la fin du processus au point A. On a,

$$|\underset{\downarrow}{A}| \leq b/3 \quad \text{et} \quad |\underset{\uparrow}{A}| \geq b - \frac{1}{3}b \geq \frac{2}{3}b.$$

D'où,

$$|\underset{\downarrow}{A}| \leq \frac{1}{2}|\underset{\uparrow}{A}|.$$

□

Pour finir la preuve, on pose :

$$\begin{aligned} D_1 &= \{\text{points effacés à l'étape 1}\}, \\ D_i &= \{\text{points initialement } S^p(b), \text{ effacés à l'étape i}\} \text{ pour } i \geq 2 \\ F_i &= \{\text{arêtes entre } D_i \text{ et } D_{i-1}\}, \\ F_i' &= \{\text{arêtes quittant } D_{i-1}\}. \end{aligned}$$

Ces ensembles sont schématisés sur la figure b.

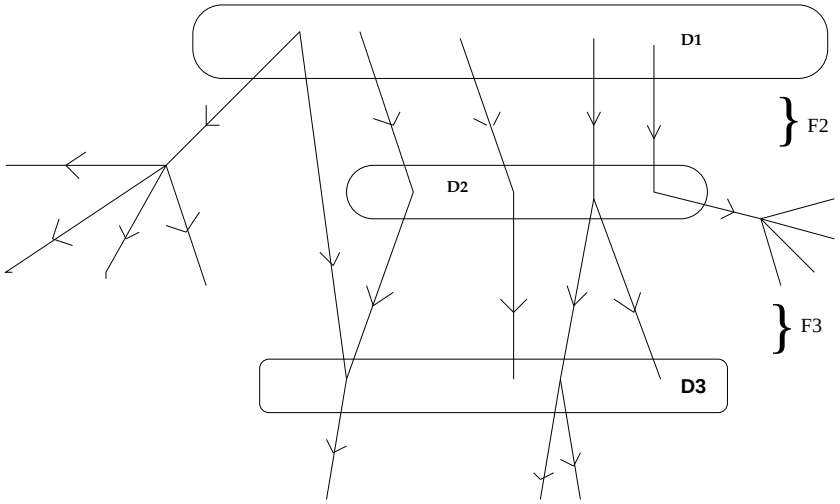


Figure b.

Notons que $F_i \subset F'_i$ et que par ailleurs les arêtes de F'_i sont effacées à l'étape $i-1$. En appliquant le sous lemme 2.8, en chaque point de D_i, on obtient :

$$\forall i \geq 2 \quad |F'_{i+1}| \leq \frac{1}{2}|F_i|.$$

D'où,

$$|F'_{i+1}| \leq \frac{1}{2^{i-1}}|F_2|.$$

(On a utilisé le fait que $|F_i| \leq |F'_i|$.) Ainsi,

$$|\bigcup_{i\geq 3} F'_i| \leq (\sum_{i\geq 1}\frac{1}{2^i})\ |F_2|. \tag{4}$$

Maintenant, les arêtes de F_2 sont $NS^e_K(b)$ car si elles étaient $S^e_K(b)$, elles relieraient deux points $S^p_K(b)$ et en particulier, les points de D_1 seraient $S^p_K(b)$, donc $S^p_K(b/3)$ donc non effacés à l'étape 1. Il s'en suit que,

$$|F_2| \leq |NS^e_K(b)| = C_1. \tag{5}$$

Par ailleurs, toute arête $S^e(b)$ effacée, est dans un certain F'_i avec $i \geq 3$, donc

$$C_2 = \#\{e \in S^e(b); e \text{ effacée à la fin du processus } \} \leq |\bigcup_{i\geq 3} F'_i|. \tag{6}$$

Des inégalités (6), (5) et (4), on déduit que $C_2 \leq C_1$, ce qui termine la preuve. □

Lemme 2.9. *Soit $Y > 0$ et soit $\mathcal{A}$ un ensemble non vide de configurations, tel que pour toute configuration de $\mathcal{A}$, il existe au moins Y points où l'on peut changer la valeur de f tout en restant dans $\mathcal{A}$, alors : $|\mathcal{A}| \geq 2^Y$. i.e :*
$(\forall f \in \mathcal{A}\ \exists a_1, a_2, ..., a_Y \in \mathcal{C}_n$ *tels que* $\bar{f}_{a_i} \in \mathcal{A}) \Longrightarrow |\mathcal{A}| \geq 2^Y$,
où $\bar{f}_{a_i}$ est définie à partir de f par :

$$\bar{f}_{a_i}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq a_i \\ \bar{1} - f(x) & sinon\ . \end{cases}$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur Y.
-Si $Y = 1$ la propriété est satisfaite.
-Supposons $Y \geq 2$ et considérons un point x (dans la base) tel qu'il existe $f, g \in A$ satisfaisant $f(x) = 0$ et $g(x) = 1$, et posons $\mathcal{A}_0 = \{h \in \mathcal{A}; h(x) = 0\}$ et $\mathcal{A}_1 = \{h \in \mathcal{A}; h(x) = 1\}$. $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_1$ sont non vides. On a $\mathcal{A} = A_1 \cup A_0$ et cette union est disjointe. Par ailleurs, A_0, $\mathcal{A}_1$ vérifient l'hypothèse de récurrence avec la constante $Y - 1$. D'où,

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}_0| + |\mathcal{A}_1| \geq 2.2^{Y-1} = 2^{Y+1}.$$

□

A l'aide des trois lemmes précédents, on peut maintenant démontrer la propriété 2.4.

Preuve de la propriété 2.4 :
Soit $U \subset \mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ vérifiant $\frac{|\partial_i U|}{|U|} \leq \frac{1}{1000k}$. Procédons en 5 étapes.

1. Soit $U' = U - \{u \in U;\ u$ mauvais$\}$. Posons $\tilde{K} = K_{U'}$, on a $E(K_U) = E(K_{U'})$ ($\tilde{K}$ est le sous graphe de K_U qui ne contient que des points attachés à une arête de K_U).

2. $V(\tilde{K})$ (et donc aussi $E(\tilde{K})$ par construction) est non vide, puisque par le (i) du lemme 2.6 :

$$|V(\tilde{K})| \geq (1 - \frac{1}{1000k})|U|.$$

3. On a successivement :

$$\begin{aligned}
\#\{e \in E(\tilde{K}) \cap NS^e(\phi(k)/3)\}) &= \#\{e \in E(K_U) \cap NS^e(\phi(k)/3)\} \\
&\leq \frac{1}{2}\#\{u \in U; NS^p\Big(\phi(k)/3\Big)\} \\
&\quad \text{(remarque 2.5)} \\
&\leq \frac{1}{1000}|U| \\
&\quad \text{(par le lemme 2.6 } (ii)) \\
&\leq \frac{1}{1000 - \frac{1}{k}}\ \#\{u \in U;\ u \text{ bon}\} \\
&\quad \text{(par le lemme 2.6 } (i)) \\
&= \frac{2}{1000 - \frac{1}{k}}|E(\tilde{K})| \\
&\leq \theta\ \ |E(\tilde{K})|,
\end{aligned}$$

avec $\theta = \frac{2}{999} < \frac{1}{2}$.

4. Grâce aux points 2 et 3, on peut appliquer le lemme 2.7 à $\tilde{K}$ et déduire qu'il existe un sous graphe K' de $\tilde{K}$ où tous les points sont $S^p_{K'}(\phi(k)/9)$.

5. On déduit du lemme 2.9 que,

$$|U| \geq 2^{\phi(k)/9}.$$

Ainsi on a prouvé que pour tout ensemble $U \subset V(\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$,

$$\frac{|\partial_\wr U|}{|U|} \leq \frac{1}{1000k} \Rightarrow |U| \geq 2^{Fol^{\mathcal{C}^g}_{\mathcal{C}^g_n}(k)/9},$$

ce qui implique,

$$Fol^{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}_{\mathcal{C}^g_n \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(k) \geq 2^{Fol^{\mathcal{C}^g}_{\mathcal{C}^g_n}(k/1000)/9},$$

et fournit des valeurs numériques des constantes C_1 et C_2.

3. Isopérimétrie sur un amas de percolation

Après avoir brièvement discuté d'une première inégalité isopérimétrique, on explique quel type d'inégalité isopérimétrique est nécessaire pour prouver le théorème 1.1. Enfin le reste de cette section est consacrée à la preuve de la propriété 1.4.

3.1. **Point de départ.** Dans [12], l'inégalité suivante est prouvée.

Proposition 3.1. *Il existe une constante $\beta = \beta(p,d) > 0$ telle que Q p.s sur l'ensemble $|\mathcal{C}| = +\infty$ on ait,*

$$\exists n_\omega \quad \forall n \geq n_\omega \qquad \inf_{A \subset \mathcal{C}_n, |A| \leq |\mathcal{C}_n|/2} \frac{|\partial_{\mathcal{C}_n^g} A|}{|A|^{1-\frac{1}{\epsilon}}} \geq \frac{\beta}{n^{1-\frac{d}{\epsilon}}},$$

où $\epsilon = \epsilon(n) = d + 2d\frac{\log\log(n)}{\log(n)}$.

Dans cette inégalité, on peut remplacer le bord dans $\mathcal{C}_n^g$ par le bord dans $\mathcal{C}^g$, et enlever la condition sur le volume de A, en remarquant les deux points suivants.

1. Pour tout $A \subset C_n$, $\partial_{\mathcal{C}^g} A = \partial_{\mathcal{C}_{n+k}^g} A$ pour tout $k \geq 1$.
2. Puis pour enlever la condition sur le volume, rappelons la propriété relative à la croissance du volume de $\mathcal{C}_n$ (voir Appendix B dans [12])

   Proposition 3.2. *Il existe $\rho > 0$ tel que Q p.s sur l'ensemble $|\mathcal{C}| = +\infty$ pour n assez grand,*

   $$|\mathcal{C}_n| \geq \rho n^d.$$

   Ainsi, par exemple il existe $c' > 0$ tel que Q p.s pour n assez grand, pour tout $A \subset C_n$ on ait,

   $$|A| \leq |\mathcal{C}_n| \leq |\mathcal{C}_{n+c'n}|/2.$$

   En effet $|\mathcal{C}_n| \leq n^d \leq \frac{\rho}{2}(n+k)^d \leq \frac{1}{2}|\mathcal{C}_{n+k}|$ est réalisée dès que l'on prend $k \approx n$.

On déduit donc de la propriété 3.1, (en modifiant la constante β par une constante multiplicative) que :

$$\exists \beta > 0 \; Q \text{ p.s pour } n \text{ assez grand, } \inf_{A \subset \mathcal{C}^n} \frac{|\partial_{\mathcal{C}^g} A|}{|A|^{1-\frac{1}{\epsilon}}} \geq \frac{\beta}{n^{1-\frac{d}{\epsilon}}}.$$

Cette manière de compter le bord nous donne une majoration de la probabilité de retour de la marche Z tuée quand elle sort de la boîte $\mathcal{B}_n = [-n,n]^d$. Si on applique alors la même démarche que l'on va utiliser à la section 4, à partir de cette inégalité isopérimétrique, nous trouvons une majoration de la probabilité de retour de Z (et donc de la transformée de Laplace du nombre de points visités) en

$$e^{-c\frac{t^{\frac{d}{d+2}}}{\log(t)^{c'}}}.$$

Ceci n'est pas la borne supérieure attendue. La principale partie du travail consiste donc à supprimer le terme logarithmique. Pour cela,

l'idée est de prouver une nouvelle inégalité isopérimétrique, qui est similaire à celle que l'on a dans le graphe $\mathcal{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ pour les ensembles de 'gros' volume. Plus précisement, la propriété 1.4 peut s'interpréter ainsi, pour $A \subset \mathcal{C}_n$, si $|A|$ est grand, on a $\frac{|\partial_{\mathcal{C}^g} A|}{|A|^{1-\frac{1}{d}}} \geq C$, et si $|A|$ est petit, on peut dire que $|\partial_{\mathcal{C}^g} A| \geq 1$.

Les deux sections suivantes sont consacrées à prouver la propriété 1.4 pour tout $p > p_c$, par des techniques de renormalisation. Dans la section 3.2, nous prouvons pour des valeurs de p proches de 1, une inégalité isopérimétrique modifiée, correspondant à un événement croissant. Puis dans la section 3.3, à l'aide du théorème 2.1 de [1], on déduit la propriété 1.4.

3.2. **Une autre inégalité isopérimétrique.** Soit $\mathcal{G}_n$ l'ensemble des points de $\mathcal{B}_n$ attachés à une arête ouverte. Soit alors $\mathcal{L}_n$ la plus grosse composante connexe de ω dans $\mathcal{B}_n$. On note $\overline{\mathcal{L}_n}$ la composante connexe de $\mathcal{L}_n$ dans le graphe ω. $\overline{\mathcal{L}_n^g}$ est le graphe ayant $\overline{\mathcal{L}_n}$ comme ensemble de points et l'ensemble des arêtes est défini par : $E(\overline{\mathcal{L}_n^g}) = \{(x,y);\ \omega(x,y) = 1,\ x, y \in \overline{\mathcal{L}_n}\}$.

Posons pour $A \subset \mathcal{B}_n$, $n(A)$ le nombre de composantes connexes de $\mathcal{B}_n - \mathcal{L}_n$ qui contiennent au moins une composante connexe de A. Notons que si A est connexe $n(A) = 0$ ou 1 suivant que $A \subset \mathcal{L}_n$ ou non. Remarquons également que si $A \subset \mathcal{B}_n$, $|\partial_{\bar{\mathcal{L}}_n^g} A| = |\{(x,y) \in E^d; x \in A \cap \overline{\mathcal{L}_n},\ y \in B_{n+1} - A,\ \text{et } \omega(x,y) = 1\}|$.

Proposition 3.3. *Il existe $p_0 < 1$ tel que pour tout $p \in [p_0; 1]$:*

$$\exists \beta > 0 \quad \forall c > 0 \quad Q\ p.s\ \exists n_{\omega,c} \quad \forall n \geq n_{\omega,c}$$
$$\forall A \subset \mathcal{B}_n \text{ connexe} \quad \frac{n(A) + |\partial_{\bar{\mathcal{L}}_n^g} A|}{f_c(|A|)} \geq \beta. \tag{7}$$

Avant de prouver cette propriété, remarquons les deux faits suivants :
-d'abord l'événement défini par l'équation (7) est croissant. En effet, l'ajout d'une arête à ω, ne fait pas diminuer $|\partial_{\bar{\mathcal{L}}_n^g} A|$. Et si $n(A)$ diminue de 1, cela signifie qu'il y avait une composante connexe de A qui n'intersectait pas $\mathcal{L}_n$ et qui maintenant intersecte $\mathcal{L}_n$, donc le bord $|\partial_{\bar{\mathcal{L}}_n^g} A|$a augmenté de 1. Finalement, la somme $n(A) + |\partial_{\bar{\mathcal{L}}_n^g} A|$ ne décroît pas.
C'est cette raison qui motive l'introduction d'une telle inégalité, afin de permettre l'utilisation des techniques de renormalisation.
-par ailleurs, pour n assez grand, $\mathcal{C}_n = \mathcal{L}_n$ (voir la première partie de la preuve de 3.3), si l'on prend alors $A \subset \mathcal{C}_n$ connexe, $n(A) = 0$ et on retrouve l'inégalité 1.4 pour p proche de 1, comme conséquence de la proposition 3.3.

Démonstration.
Commençons par prouver que pour n assez grand $\mathcal{L}_n = \mathcal{C}_n$, ce qui nous sera utile dans la suite de la preuve.
Supposons $\mathcal{L}_n \neq \mathcal{C}_n$. On a immédiatement par la propriété 3.2 que :

$$|\mathcal{L}_n| \geq |\mathcal{C}_n| \geq \rho n^d. \tag{8}$$

Soient C_i les composantes connexes de $\mathcal{B}_n - \mathcal{L}_n$ dans le graphe $\mathcal{B}_n^g$. Pour tout i on a :

$$\begin{cases} \partial_{\mathcal{B}_n^g} C_i \text{ est } (*)\text{-connexe}^2 \\ (\text{car } C_i \text{ et } \mathcal{B}_n - C_i \text{ sont connexes }) \\ \text{et} \\ \frac{\sum\limits_{e \in \partial_{\mathcal{B}_n^g} C_i} 1_{\{w(e)=1\}}}{|\partial_{\mathcal{B}_n^g} C_i|} = 0. \end{cases}$$

Pour $\beta > 0$, posons,

$$\mathcal{A}'_n = \{\exists F \subset E(\mathcal{B}_n^g);\ \frac{\sum\limits_{e \in F} 1_{\{w(e)=1\}}}{|F|} \leq \beta\ , \tag{9}$$
$$|F| \geq (\log n)^2, F\ (*) - \text{connexe}\}.$$

On a :

$$Q(\mathcal{A}'_n) \leq \sum_{\substack{F \\ |F| \geq (\log n)^2 \text{ et } F\ (*)-\text{connexe}}} Q(\frac{\sum\limits_{e \in F} 1_{\{w(e)=1\}}}{|F|} \leq \beta)$$

Du fait que les variables aléatoires $(\omega(e))_e$ suivent des des lois de Bernouilli(p) et sont indépendantes, par l'inégalité de Bienaymée Tchebitchef, on a :

$$\forall \lambda \geq 0 \quad Q(\frac{\sum\limits_{e \in F} 1_{\{w(e)=1\}}}{|F|} \leq \beta) \leq e^{\lambda \beta |F|}(pe^{-\lambda} + 1 - p)^{|F|}. \tag{10}$$

D'où, pour tout $\lambda \geq 0$ on déduit :

$$Q(\mathcal{A}'_n) \leq \sum_{k \geq (\log n)^2} e^{\lambda \beta k}(pe^{-\lambda} + 1 - p)^k \times \tag{11}$$
$$|\{F \subset E(\mathcal{B}_n^g);\ F\ (*) - \text{connexe},\ |F| = k\}|.$$

[2]un ensemble M d'arêtes est dit $(*)$-connexe si pour tout e, e' de M, il existe une suite d'arêtes $e_1, ..., e_m$ de M telle que $e_1 = e$ et $e_m = e'$ et $e_i \overset{(*)}{\sim} e_{i+1}$ où $(x, y) \overset{(*)}{\sim} (x', y')$ si $\max |x_i - x'_i| \leq 1$ et $\max |y_i - y'_i| \leq 1$.

Mais $|\{F \subset E(\mathcal{B}_n^g);\ F\ (*) - \text{connexe},\ |F| = k\}| \leq (2n+1)^d e^{ak}$, où a est une constante qui dépend seulement de d (voir [17]). Ainsi, le terme général de la série du membre de droite de l'équation (11) est majoré par :

$$(2n+1)^d e^{k[a+\lambda\beta+\log(pe^{-\lambda}+1-p)]}.$$

Si p est proche de 1, et si on choisit β assez petit (avec $\beta < 1$), il existe $\lambda > 0$ tel que $a + \lambda\beta + \log(pe^{-\lambda} + 1 - p) = -\xi < 0$. Donc pour n assez grand,

$$Q(\mathcal{A}'_n) \leq C\ (2n+1)^d e^{-\xi(\log n)^2} \leq e^{-\frac{\xi}{2}(\log n)^2}$$

Cette dernière expression est sommable en n, donc par le lemme de Borel Cantelli, on déduit :

$$\forall\omega\ \exists n_\omega\ ,\ \forall n \geq n_\omega\ \ \omega \in \mathcal{A}'^c_n.$$

Ainsi, Q p.s pour n assez grand $\partial_{\mathcal{B}_n^g} C_i \in A'^c_n$.

$$ie: \quad |\partial_{\mathcal{B}_n^g} C_i| \leq (\log n)^2. \tag{12}$$

Or

$$|C_i| \leq |B_n| - |\mathcal{L}_n|.$$

Puis de (8), on déduit :

$$|C_i| \leq c' n^d \text{ avec } c' < 1.$$

Puisque C_i a un volume plus petit qu'une fraction du volume de $\mathcal{B}_n$, on peut donc lui appliquer l'inégalité isopérimétrique restreinte à une boite $\mathbb{Z}^d$, pour en déduire

$$|C_i| \leq C_d \log(n)^{\frac{2d}{d-1}}. \tag{13}$$

Or, si $\mathcal{L}_n \neq \mathcal{C}_n$, il existe i tel que $\mathcal{C}_n \subset C_i$. Ce qui est impossible compte tenu de (13) et de la propriété 3.2. Donc pour n assez grand, $\mathcal{L}_n = \mathcal{C}_n$.

Fixons-nous à présent un $c > 0$.
Si $|A| < cn^\gamma$, (7) est satisfaite puisque $n(A) + |\partial_{\bar{\mathcal{L}}_n^g} A| \geq 1$.
Supposons donc maintenant $|A| \geq cn^\gamma$. Par la majoration (13) vérifiée par les volume des C_i, nécessairement A intersecte $\mathcal{L}_n$. De ce fait, on a $n(A) = 0$. Nous voulons donc prouver que

$$\frac{|\partial_{\bar{\mathcal{L}}_n^g} A|}{|A|^{1-\frac{1}{d}}} \geq \beta. \tag{14}$$

Procédons en 5 étapes.

1. L'isopérimétrie classique dans $\mathbb{Z}^d$ fournit,

$$\frac{|\partial_{\mathcal{L}^d} A|}{|A|^{1-\frac{1}{d}}} \geq C_d. \tag{15}$$

2. On voudrait remplacer $\partial_{\mathcal{L}^d} A$ par $\partial_{\bar{\mathcal{L}}_n^g} A$. Mais si on applique un argument de contour à A, il peut exister des arêtes de $\partial_{\mathcal{L}^d} A$ qui appartiennent à $\omega - \overline{\mathcal{L}_n^g}$. Nous allons donc appliquer un argument de contour à l'ensemble A auquel nous avons rajouté les "morceaux" de $\omega - \overline{\mathcal{L}_n^g}$ connexes à A.
Du fait que p.s, il n'existe qu'une seule composante connexe infini dans ω (qui est $\mathcal{C}_n = \mathcal{L}_n$ pour n assez grand), on peut trouver un $k = k_{n,\omega}$ tel que tous les chemins de $\omega - \mathcal{C}_n^g$ commençant dans $\mathcal{B}_n$, se terminent avant d'atteindre une arête de $\partial_{\mathcal{L}^d} \mathcal{B}_{n+k}$.

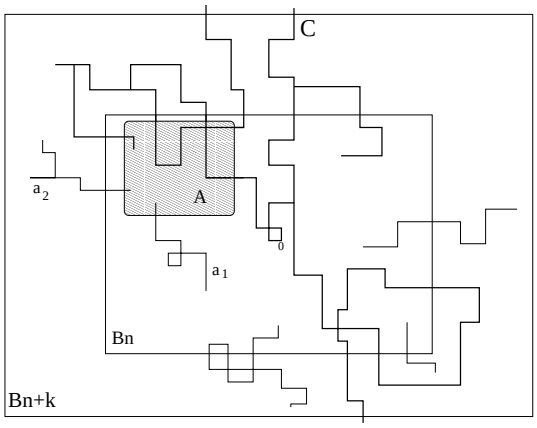


figure d.

Soient $(a_i)_{i=1...m}$ les chemins de $\omega - \overline{\mathcal{L}_n^g}$ qui débutent dans A (voir figure d). Tous ces chemins sont contenus dans $\mathcal{B}_{n+k}$. Ajoutons ces chemins à A, et posons

$$A'' = A \cup a_1 ... \cup a_m.$$

3. A'' vérifie les propriétes suivantes. A'' est connexe et on peut supposer que $\mathbb{Z}^d - A''$ est connexe. En effet, si ce n'est pas le cas, on remplit les trous, en prenant B le complémentaire dans $\mathbb{Z}^d$ de la composante connexe de $\mathbb{Z}^d - A''$ (dans le graphe $\mathcal{L}^d$) qui contient les points à l'infini, et une inégalité isopérimétrique pour l'ensemble B se transmet à A'', puisque $|B| \geq |A''|$ et $|\partial_{\mathcal{L}^d} B| \leq |\partial_{\mathcal{L}^d} A''|$.
Ainsi $\partial_{\mathcal{L}^d} A''$ est (*)-connexe .

Par ailleurs, on a

$$|\partial_\omega A''| = |\partial_{\bar{\mathcal{L}}_n^g} A|, \tag{16}$$

(ω désigne dans l'égalité précédente le graphe issu du processus de percolation) et l'inégalité isopérimétrique classique dans $\mathbb{Z}^d$ donne :

$$|\partial_{\mathcal{L}^d} A''| \geq C_d |A''|^{1-\frac{1}{d}} \geq C_d (cn^\gamma)^{1-\frac{1}{d}}.$$

4. Appliquons un argument de contour à A''. Pour $\beta' > 0$ on pose :

$$\mathcal{A}''_n = \{\omega;\ \exists F \subset E^d,\ |F| \geq C_d(cn^\gamma)^{1-\frac{1}{d}},\ \frac{\sum_{e\in F} 1_{\{w(e)=1\}}}{|F|} \leq \beta', \\ F\ (*) - \text{connexe},\ F \cap E(\mathcal{B}^g_n) \neq \emptyset\}.$$

Comme précédemment, à l'aide de (10) on a :

$$Q(\mathcal{A}''_n) \leq \sum_{j \geq C_d(cn^\gamma)^{1-\frac{1}{d}}} e^{\lambda\beta' j}(pe^{-\lambda} + 1 - p)^j \times h(n,j),$$

où $h(n,j) = \sup_{k\geq 0} |\{H \subset E^d\ , H\ (*) - \text{connexe}\ |H| = j\ , \\ \text{et } H \cap E(\mathcal{B}^g_n) \neq \emptyset\}|.$

Mais $|\{H \subset E(\mathcal{B}^g_{n+k_{n,\omega}})\ , H\ (*) - \text{connexe}\ ,\ |H| = j\ ,\ H \cap E(\mathcal{B}_n) \neq \emptyset\}|$ est inférieur à $(2n+1)^d e^{aj}$ pour tout $k \geq 0$ (avec a indépendant de k). Donc, on obtient finalement que si p est proche de 1, il existe une valeur $\beta' > 0$, et un $\delta > 0$ tels que pour n assez grand :

$$Q(\mathcal{A}''_n) \leq\ e^{-\delta n^{\gamma(1-\frac{1}{d})}}.$$

Puis par le lemme de Borel-Cantelli, on déduit que Q p.s pour n assez grand, $\partial_{\mathcal{L}^d} A'' \notin \mathcal{A}''_n$.

$$ie :\ |\partial_\omega A''| \geq \beta' |\partial_{\mathcal{L}^d} A''|.$$

5. On peut alors terminer la preuve : par (16) on a,

$$|\partial_{\bar{\mathcal{L}}^g_n} A| \geq \beta' |\partial_{\mathcal{L}^d} A''|.$$

En appliquant alors, l'inégalité isopérimétrique dans $\mathbb{Z}^d$ à A'' et par le fait que $A \subset A''$, on déduit qu'il existe $\beta > 0$ tel que Q p.s, pour n assez grand,

$$|\partial_{\bar{\mathcal{L}}^g_n} A| \geq \beta |A|^{1-\frac{1}{d}}.$$

□

3.3. **Renormalisation.** Nous sommes maintenant en mesure de montrer la propriété 1.4 pour tout $p > p_c$. Reprenons les notations et résultats de [1]. Soit $p > p_c$ et $N \in \mathbb{N}$. On recouvre $\mathbb{Z}^d$ par une union disjointe de boites de taille N telles que $\mathbb{Z}^d = \underset{i\in\mathbb{Z}^d}{\cup} B_i$ où B_i est la boite centrée en $(2N+1)i$. Soit B_i' la boite de même centre que B_i mais de taille $\frac{5}{4}N$.

Introduisons (voir [1]), $\mathcal{E}(N) = \{(ke_1, (k+1)e_1); k = 0, ..., [\sqrt{N}]\}$ et $\mathcal{E}_i = \tau_{i(2N+1)}\mathcal{E}(N)$, où τ_b représente le décalage dans $\mathbb{Z}^d$ avec $b \in \mathbb{Z}^d$. On dit qu'un amas K contenu dans B' est traversant pour $B \subset B'$, si dans les d directions il existe un chemin ouvert contenu dans $K \cap B$ reliant la face droite de B à la face gauche de B.

Considérons les deux événements suivants :

$$R_i^N : = \{\text{il existe un amas traversant } K \text{ dans } B_i' \text{ pour } B_i', \text{ tout chemin ouvert contenu dans } B_i' \text{ de longueur plus grande que } N/10 \text{ est connecté à } K \text{ dans } B_i', \text{ et } K \text{ est traversant pour toute sous-boite } B \subset B_i' \text{ de taille supérieure à } N/10\},$$

$$S_i^N : = \{ \text{ Il y a au moins une arête ouverte dans } \mathcal{E}_i\}.$$

Nous écrirons $K(B_i')$ quand cela est nécessaire pour indiquer que nous considérons l'amas traversant K de la boite B_i'.

On définit alors $\phi_N : \omega \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ telle que $(\phi_N\, \omega)(x) = 1_{R_x^N \cap S_x^N}(\omega)$, et on dit qu'une boite B_x est *bonne* si $(\phi_N\, \omega)(x) = 1$. (ie : si les deux événements sont réalisés) sinon on dit que la boite est *mauvaise*. Cela définit un processus (dépendant) de percolation sur les sites du réseau renormalisé, voir [1] pour plus de détails.

Preuve de la proposition 1.4.
On a prouvé la propriété 3.3 pour un paramètre de percolation sur les arêtes assez grand. Puisque l'ensemble des amas qui vérifie l' inégalité (7) est un événement croissant, cette inégalité est donc aussi vérifiée pour un paramétre de percolation sur les sites assez grand (voir [10]).

Soit $A \subset \mathcal{C}_n$ connexe, notons $\tilde{A} = \{i \in \mathbb{Z}^d; A \cap B_i \neq \emptyset\}$. $\tilde{A}$ est connexe et remarquons que l'on a :

$$|\tilde{A}| \geq \frac{|A|}{(2N+1)^d}.$$

On utilise la notation $\tilde{}$ pour les quantités définies dans le processus renormalisé.

Pour un bon choix de N, par la proposition 2.1 de [1], on peut appliquer la proposition 3.3 pour $\tilde{A}$ dans le processus renormalisé, donc (7) est vérifiée pour $\tilde{A}$: il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $c > 0$, Q p.s pour n assez grand on ait,

$$\frac{n(\tilde{A}) + |\partial_{\tilde{\mathcal{L}}_n^g} \tilde{A}|}{f_c(|\tilde{A}|)} \geq \beta. \tag{17}$$

On distingue alors deux cas.

1. Si $\tilde{n}(\tilde{A}) = 1$, alors $\tilde{A}$ est contenu dans une des composantes connexes de $\tilde{\mathcal{B}}_n - \tilde{\mathcal{L}}_n$. Ainsi, $\partial_{\tilde{\mathcal{L}}_n^g} \tilde{A} = \emptyset$, et donc (17) donne $1 \geq \beta f_c(|\tilde{A}|)$. Du fait que $\partial_{\mathcal{C}^g} A \neq \emptyset$, on déduit :

$$|\partial_{\mathcal{C}^g} A| \geq \beta f_c(|\tilde{A}|) \geq \beta f_c(\frac{|A|}{(2N+1)^d}) \geq \frac{\beta}{(2N+1)^{d-1}} f_{c(2N+1)^d}(|A|).$$

qui est l'inégalité de la proposition 1.4 (pour tout $c > 0$ et avec une constante β plus petite).

2. Si $\tilde{n}(\tilde{A}) = 0$, alors par (17) on a,

$$\frac{|\partial_{\tilde{\mathcal{L}}_n^g} \tilde{A}|}{f(|\tilde{A}|)} \geq \beta.$$

Soit $(i, i') \in \partial_{\tilde{\mathcal{L}}_n^g} \tilde{A}$ alors B_i et $B_{i'}$ sont des bonnes boites et A intersecte B_i mais pas $B_{i'}$. Nous allons montrer que chaque couple ainsi choisi donne au moins une arête de $\partial_{\mathcal{C}^g} A$. En effet, du fait que les deux boites B_i et $B_{i'}$ sont bonnes, on peut trouver $x \in B_i \cap A$ et $y \in B_{i'} \cap (\mathcal{C} - A)$ reliés par un chemin ouvert dans $B_i \cup B_{i'}$, et sur ce chemin se trouve une arête de $\partial_{\mathcal{C}^g} A$.

[Expliquons rapidement comment trouver x et y. On prend $x \in A$ donc $x \in B_i \cap \mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ est infini donc il existe un chemin dans $\mathcal{C}$ reliant x à l'extérieur de B_i'. Comme ce chemin a une longueur supérieure à $N/4$, il est connecté à l'amas $K(B_i')$ dans B_i' (donc par connexité $K(B_i') \subset \mathcal{C}$). Prenons maintenant un chemin ouvert contenu dans $K(B_i') \cap B_i'$ joignant la face gauche à la face droite de la boite B_i' dans la direction de $B_{i'}$ et soit y sur ce chemin et dans $B_{i'}$. Toujours par connexité, on en déduit finalement l'existence d'un chemin dans $\mathcal{C}$ reliant x à y.]

Il y a au plus 2^d arêtes (i, i') qui peuvent donner la même arêtes dans $\partial_{\mathcal{C}^g} A$ (toutes les arêtes (i, i') avec i' voisin de i dans $\mathbb{Z}^d$). Donc

finalement, on a, pour tout $c > 0$:

$$|\partial_{\mathcal{C}^g} A| \geq \frac{1}{2^d} |\partial_{\tilde{\mathcal{L}}_n^g} \tilde{A}| \geq \frac{\beta}{2^d} f_c(|\tilde{A}|) \geq \frac{\beta}{2^d (2N+1)^{d-1}} f_{c(2N+1)^d}(|A|).$$

Ce qui termine la preuve de la propriété 1.4, pour tout $p \geq p_c$.

4. Preuve de la borne supérieure

Par les résultats de la section 3 et 2.3, on prouve une minoration de la fonction de Følner sur $\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, puis par des outils analytiques (type inégalité de Nash) on obtient une borne supérieure de la probabilité de retour de Z puis de la transformée de Laplace du nombre de points visités.

4.1. Isopérimétrie sur $\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

La propriété 1.4, donne la minoration suivante pour la fonction de Følner de $\mathcal{C}_n^g$ relative à $\mathcal{C}^g$.

Proposition 4.1. *Soit $\gamma > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $c > 0$, Q p.s sur l'ensemble $|\mathcal{C}| = +\infty$, pour n assez grand, on ait :*

$$Fol_{\mathcal{C}_n^g}^{\mathcal{C}^g}(k) \geq \begin{cases} k & si\ k < cn^\gamma \\ (\beta k)^d & si\ k \geq cn^\gamma. \end{cases} \tag{18}$$

Démonstration. On procède en deux étapes.

1. D'abord il est facile de voir que l'on peut restreindre le minimum définissant la fonction de Følner à des ensembles connexes,

$$\begin{aligned} Fol_{\mathcal{C}_n^g}^{\mathcal{C}^g}(k) &= \min\{|A|; A \subset \mathcal{C}_n \text{ et } \frac{|\partial_{\mathcal{C}^g} A|}{|A|} \leq \frac{1}{k}\} \\ &= \min\{|A|; A \subset \mathcal{C}_n \ A \text{ connexe et } \frac{|\partial_{\mathcal{C}^g} A|}{|A|} \leq \frac{1}{k}\}. \end{aligned}$$

   En effet, si A n'est pas connexe, notons $(A_i)_{i=1..t}$ ses composantes connexes. Au moins une satisfait la condition $\frac{|\partial_{\mathcal{C}^g} A_i|}{|A_i|} < \frac{1}{k}$, et on a $|A_i| \leq |A|$.

2. Maintenant, par la proposition 1.4, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $c > 0$, Q *p.s* sur $|\mathcal{C}| = +\infty$ pour n assez grand, on a

$$\frac{|\partial_{\mathcal{C}^g} A|}{f_c(|A|)} \geq \beta \quad \text{pour tout ensemble } A \subset \mathcal{C}_n \text{ connexe,}$$

Donc, pour tout A connexe de $\mathcal{C}_n$, on a,

$$\frac{|\partial_{\mathcal{C}^g} A|}{|A|} \leq \frac{1}{k} \Longrightarrow \frac{|A|}{f_c(|A|)} \geq \beta k. \tag{19}$$

Posons alors $\mathcal{G}(x) = \frac{x}{f_c(x)}$ et définissons $\mathcal{G}^{-1}$ par :

$$\mathcal{G}^{-1}(y) = \inf\{x\ ; \mathcal{G}(x) = y\} = \begin{cases} y & \text{si } x < cn^\gamma, \\ y^d & \text{si } x \geq cn^\gamma. \end{cases}$$

On déduit de (19)

$$|A| \geq \mathcal{G}^{-1}(\beta k).$$

$$ie: \ Fol^{\mathcal{C}^g}_{\mathcal{C}^g_n}(k) \geq \mathcal{G}^{-1}(\beta k). \tag{20}$$

□

Grâce à la proposition (2.4) et à l'inégalité (20), on déduit immédiatement qu'il existe $C > 0$, tels que pour tout $c > 0$, Q p.s pour n assez grand,

$$Fol^{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}_{\mathcal{C}^g_n \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(k) \geq \begin{cases} e^{Ck} & \text{si } k < cn^\gamma, \\ e^{Ck^d} & \text{si } k \geq cn^\gamma. \end{cases} \tag{21}$$

On ne peut déduire directement une majoration des noyaux de la marche Z, à partir de cette minoration car les arêtes du graphe $\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ ne sont pas adaptées aux sauts de Z. On construit donc les graphes suivants.

Soit G un graphe, on note $G \wr\wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ le graphe tel que,

$$\begin{cases} V(G \wr\wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) = V(G \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}), \\ E(G \wr\wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) = \{\Big((x,f)(y, f_{\substack{x,i \\ y,j}})\Big);\ (x,y) \in E(G) \text{ et } \ (i,j) \in \{0,1\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{et } \mathrm{supp}(f) \subset G\ \}. \end{cases}$$

Soit δ un point imaginaire, on pose $\overline{\mathcal{C}_n} = \mathcal{C}_n \cup \{\delta\}$ et $\overline{\mathcal{C}^g_n}$ le graphe ayant $\overline{\mathcal{C}_n}$ comme ensemble de points et l'ensemble des arêtes est défini par $E(\overline{\mathcal{C}^g_n}) = \{(x,y);\ \omega(x,y) = 1,\ x,y \in \mathcal{C}_n\} \cup \{(x,\delta);\ x \in \mathcal{C}_n,\ \exists z \in V(\omega)\ (x,z) \in \partial_\omega \mathcal{C}_n\}$. Notons alors

$$W_n = \overline{\mathcal{C}^g_n} \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$$

et

$$W'_n = \overline{\mathcal{C}^g_n} \wr\wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}.$$

On prouve :

Proposition 4.2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que que pour tout $c > 0$, Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$ et pour n assez grand,*

$$Fol^{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}_{\mathcal{C}^g_n \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(k) \geq F(k) := F_{C,c}(k) = \begin{cases} e^{Ck} & si\ k < cn^\gamma, \\ e^{Ck^d} & si\ k \geq cn^\gamma. \end{cases} \tag{22}$$

Démonstration. On procède en 4 étapes.

1. Soient ϵ et ϵ' les formes de Dirichlet respectives de W_n et W'_n définies pour tout $f, g : V(\overline{\mathcal{C}^g_n} \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \longrightarrow \mathbb{R}$ par :
$$\epsilon(f,g) = \sum_{(x,y)\in E(W_n)} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)),$$
et
$$\epsilon'(f,g) = \sum_{(x,y)\in E(W'_n)} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)).$$
2. Les graphes W_n et W'_n sont quasi isométriques par l'application identité sur $V(W_n) = V(W'_n)$. En effet, soient d et d' les distances respectives sur ces graphes, pour tout u, v de $V(W_n)$ on a :
$$\frac{1}{3} d'(u,v) \leq d(u,v) \leq 3d'(u,v).$$
Ainsi (voir I.3 dans [18]), il existe $C_1, C_2 > 0$ (indépendant de n) tels que, pour tout $f : V(\overline{\mathcal{C}^g_n} \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \longrightarrow \mathbb{R}$,
$$C_1\epsilon(f,f) \leq \epsilon'(f,f) \leq C_2\epsilon(f,f). \tag{23}$$
3. Soit $U \subset V(\overline{\mathcal{C}^g_n} \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$, prenons $f = 1_{\{U\}}$ dans (23), on obtient
$$C_1|\partial_{W_n} U| \leq |\partial'_{W'_n} U| \leq C_2|\partial_{W_n} U| \tag{24}$$
4. Or on a $|\partial_{W_n} U| = |\partial_{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}} U|$ et $|\partial_{W'_n} U| = |\partial_{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}} U|$. Finalement, on déduit de (21) et (24), que l'on peut remplacer $\partial_{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}$ par $\partial_{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}$ dans (21), cela n'affecte que les constantes c et C.

□

4.2. **Borne supérieure de $\tilde{\mathbb{P}}^\omega_o(Z_{2n} = o)$.** On suppose pour cette section $\alpha = 1/2$. Grâce à (22), nous obtenons une majoration de la probabilité de retour de la marche aléatoire Z.

Proposition 4.3. *Supposons $\alpha = 1/2$. Il existe une constante $c > 0$ tel que Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$, et pour n assez grand,*

$$\tilde{\mathbb{P}}^\omega_o(Z_n = o) \leq e^{-cn^{\frac{d}{d+2}}}.$$

Démonstration. Posons $\tau_n = \inf\{s \geq 0 \ ; \ Z_s \notin \mathcal{C}_n \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\}$. Ainsi, on peut écrire,

$$\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o) = \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o \text{ et } \tau_n \leq n) + \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o \text{ et } \tau_n > n). \tag{25}$$

-Le premier terme du membre de droite est nul, puisque la marche ne peut sortir de la "boite" $V(\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$ avant le temps n.

-Le deuxième terme est égal à $\mathbb{P}_o(\bar{Z}_{2n}^n = o)$, où $(\bar{Z}_i^n)_i$ désigne la marche aléatoire sur W_n', coïncidant avec Z mais tuée quand elle sort de W_n'. $(\bar{Z}_i^n)_i$ est réversible pour la mesure m restreinte à $V(\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$ (m est définie à la sous section 2.2).
Par les méthodes développées dans [4]), pour obtenir une borne supérieure de $\mathbb{P}_o(\bar{Z}_{2n}^n = o)$, posons pour $U \subset V(\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$:

$$\begin{cases} |\partial_{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}} U|_m = \sum_{u_1,u_2} m(u_1)\tilde{p}(u_1,u_2)\ 1_{\{(u_1,u_2)\in \partial_{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}} U\}} \\ \text{ et} \\ |U|_m = \sum_{u\in U} m(u). \end{cases}$$

Comme on suppose $\alpha = 1/2$, la mesure m se réduit à $m(a,f) = \nu(a)$ (qui est bornée car la valence du graphe $\mathcal{C}^g$ est comprise entre 1 et $2d$) et on déduit donc à l'aide de l'inégalité (22) que dans ce cas, il existe une constantes $C > 0$ telle que pour tout $c > 0$, Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$, pour n assez grand,

$$\min\{|U|_m;\ U \subset V(\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \text{ et } \frac{|\partial_{\mathcal{C}^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}} U|_m}{|U|_m} \leq \frac{1}{k}\} \geq F_{C,c}(k). \tag{26}$$

Prenons $c = 1$. $F := F_{C,1}$ est positive et croissante, et son inverse est :

$$\begin{aligned} F^{-1}(y) &= \inf\{x \geq 0 \ ; \ F(x) \geq y\} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{C}\log(y) & \text{si } y < e^{Cn^\gamma} \\ cn^\gamma & \text{si } e^{Cn^\gamma} \leq y \leq e^{Cn^{d\gamma}} \\ (\frac{1}{C}\log(y))^{1/d} & \text{si } e^{Cn^{d\gamma}} < y, \end{cases} \end{aligned} \tag{27}$$

Comme F^{-1} est croissante, (26) implique une inégalité de Nash (voir par exemple 14.1 in [18]) pour la forme de Dirichlet associée à $\bar{Z}^n$, puis une majoration du noyau :

$$\text{pour tout } i \geq 0, \quad \mathbb{P}_0(\bar{Z}_{2i}^n = 0) \leq 2a(i),$$

où a est la solution de l'équation différentielle suivante,

$$\begin{cases} a' = -\frac{a}{8(F^{-1}(4/a))^2}, \\ a(0) = 1. \end{cases}$$

A l'aide de l'expression de F^{-1} par (27) et en résolvant l'équation différentielle dans chaque cas, on obtient qu'il existe des constantes c_i (avec c_3, c_9 et $c_{13} > 0$) telles que :

- Pour $0 \leq t \leq c_1 n^{3\gamma} + c_2$,
$$a(t) = e^{-(c_3 t + c_4)^{1/3}}.$$
- Pour $c_1 n^{3\gamma} + c_2 \leq t \leq c_5 n^{(d+2)\gamma} + c_6 n^{3\gamma} + c_7 n^{2\gamma} + c_8$,
$$a(t) = e^{-c_9 t/n^{2\gamma} + c_{10} n^{\gamma} + c_{11}/n^{2\gamma} + c_{12}}.$$
- Pour $c_5 n^{(d+2)\gamma} + c_6 n^{3\gamma} + c_7 n^{2\gamma} + c_8 \leq t$,
$$a(t) = e^{-(c_{13} t + c_{14} n^{(d+2)\gamma} + c_{15} n^{3\gamma} + c_{16} n^{2\gamma} + c_{17})^{d/d+2}}.$$

On choisit $\gamma < \frac{1}{d+2}$, ainsi on déduit qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour $t = 2n$ assez grand,

$$\tilde{\mathbb{P}}_o^{\omega}(\bar{Z}_{2n}^n = o) \leq e^{-cn^{\frac{d}{d+2}}}.$$

Finalement par (25) et comme $n \mapsto \tilde{\mathbb{P}}_o^{\omega}(Z_n = o)$ est une fonction décroissante, on obtient l'existence d'une constante $c > 0$ telle que Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$ pour n assez grand,

$$\tilde{\mathbb{P}}_o^{\omega}(Z_n = o) \leq e^{-cn^{\frac{d}{d+2}}}.$$

□

4.3. **Conclusion : borne supérieure pour la transformée de Laplace.** Nous pouvons alors démontrer la borne supérieure de la propriété 1.1.

Proposition 4.4. *Pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante $c(d, \alpha, p) > 0$ telle que Q p.s sur l'ensemble $|\mathcal{C}| = +\infty$,*

$$\exists n_\omega \quad \forall n \geq n_\omega \quad \mathbb{E}_0^{\omega}(\alpha^{N_n}) \leq e^{-c(d,\alpha) n^{\frac{d}{d+2}}}.$$

Démonstration. La résultat découle des 3 faits suivants.

1. D'abord, il suffit de prouver le résultat pour une valeur $0 < \alpha_0 < 1$ de α. En effet, supposons que $\mathbb{E}_0^{\omega}(\alpha_0^{N_n}) \leq e^{-c(d,\alpha_0) n^{\frac{d}{d+2}}}$, alors

   -si $\alpha \leq \alpha_0$, il est clair que $\mathbb{E}_0^{\omega}(\alpha^{N_n}) \leq \mathbb{E}_0^{\omega}(\alpha_0^{N_n}) \leq e^{-c(d,\alpha_0) n^{\frac{d}{d+2}}}$,

-si $\alpha_0 < \alpha < 1$, nous pouvons trouver $\lambda > 0$ tel que $\alpha = {\alpha_0}^{\lambda}$, avec $0 < \lambda < 1$. Puis, on écrit,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0^{\omega}(\alpha^{N_n}) &= \mathbb{E}_0^{\omega}(\ [\alpha_0^{N_n}]^{\lambda}\ ) \\ &\leq [\mathbb{E}_0^{\omega}(\ \alpha_0^{N_n}\ )]^{\lambda} \quad \text{(inégalité de Jensen)} \\ &\leq e^{-\lambda\ c(d,\alpha_0)\ n^{\frac{d}{d+2}}}. \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat pour α en prenant $c(d,\alpha) = \lambda c(d,\alpha_0) = (\frac{\log(\alpha)}{\log(\alpha_0)})c(d,\alpha_0)$.

2. La deuxième étape est résumée dans le lemme suivant (voir [15]).

Lemme 4.5. *Il existe une valeur $\alpha_1 > 0$ et une constante $c_0' > 0$ telles que,*

$$\mathbb{E}_0^{\omega}((1/2)^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}}) \geq c_0'\ \mathbb{E}_0^{\omega}(\alpha_1^{N_n}).$$

Démonstration. Pour "retirer" la condition $\{X_{2n} = 0\}$, l'idée est de couper les chemins à l'instant n et d'utiliser la réversibilité entre l'instant n et $2n$. On utilise en particulier le fait suivant :

$$[\mathbb{P}_0^{\omega}(N_n = m)]^2 \leq 2d(2m+1)^d \mathbb{P}_0^{\omega}(N_{2n} \leq 2m; X_{2n} = 0). \quad (28)$$

Ecrivons en effet,

$$\begin{aligned}
[\mathbb{P}_0^\omega(N_n = m)]^2 &= \Big(\sum_{h\in B_m(\mathcal{C})} \mathbb{P}_0^\omega(N_n = m; X_n = h)\Big)^2 \\
&= \Big(\sum_{h\in B_m(\mathcal{C})} \sqrt{\nu(h)} \times 1/\sqrt{\nu(h)} \times \\
&\qquad\qquad \mathbb{P}_0^\omega(N_n = m; X_n = h)\Big)^2 \\
&\leq \nu(B_m(\mathcal{C})) \sum_{h\in B_m(\mathcal{C})} (1/\nu(h))\mathbb{P}_0^\omega(N_n = m; X_n = h)^2 \\
&\qquad \text{(par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&\leq 2d(2m+1)^d \sum_{h\in B_m(\mathcal{C})} \mathbb{P}_0^\omega(N_n = m; X_n = h) \times \\
&\qquad\qquad \mathbb{P}_h^\omega(N_n = m; X_n = 0)(1/\nu(0)) \\
&\qquad \text{(par réversibilité)} \\
&\leq 2d(2m+1)^d \sum_{h\in B_m(\mathcal{C})} \mathbb{P}_0^\omega(N_n = m; X_n = h) \times \\
&\qquad\qquad \mathbb{P}_0^\omega(N_n^{2n} = m; X_n = h; X_{2n} = 0) \\
&\qquad (\text{où } N_n^{2n} = \#\{X_n, ..., X_{2n}\}) \\
&\leq 2d(2m+1)^d \ \mathbb{P}_0^\omega(N_{2n} \leq 2m; X_{2n} = 0).
\end{aligned}$$

Calculons maintenant, $\mathbb{E}_0^\omega((1/2)^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}})$. On a successivement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0^\omega((1/2)^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}}) &= \sum_{m\geq 1} (1/2)^m \ \mathbb{P}_0^\omega(N_{2n} = m; X_{2n} = 0) \\
&= 1/2 \sum_{m\geq 1} (1/2)^m \ \mathbb{P}_0^\omega(N_{2n} \leq m; X_{2n} = 0).
\end{aligned}$$

Car $\{N_{2n} = m\} = \{N_{2n} \leq m\} - \{N_{2n} \leq m-1\}$. Puis,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0^\omega((1/2)^{N_{2n}}1_{\{X_{2n}=0\}}) &\geq 1/2\sum_{m\geq 1}(1/4)^m\mathbb{P}_0^\omega(N_{2n}\leq 2m; X_{2n}=0)\\
&\quad \text{(par le fait (28))}\\
&\geq \sum_{m\geq 1}\frac{1}{4d(2m+1)^d}(1/4)^m[\mathbb{P}_0^\omega(N_n=m)]^2\\
&\geq c_0\sum_{m\geq 1}(1/5)^m[\mathbb{P}_0^\omega(N_n=m)]^2\\
&\geq c_0\Big(\sum_{m\geq 1}(1/4)^m\Big)^{-1}\times\\
&\qquad\qquad \Big(\sum_{m\geq 1}(\frac{1}{2\sqrt{5}})^m\mathbb{P}_0^\omega(N_n=m)\Big)\\
&\quad \text{(par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)}\\
&\geq c_0'\ \mathbb{E}_0^\omega[(\frac{1}{2\sqrt{5}})^{N_n}].
\end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme 4.5. □

3. On peut alors conclure. Pour $\alpha = 1/2$, la propriété 4.3 donne

$$\mathbb{P}_o^\omega(Z_n = o) \leq e^{-cn^{\frac{d}{d+2}}}.$$

Par ailleurs, par la propriété 2.3 on a

$$\mathbb{E}_0^\omega((1/2)^{N_{2n}}1_{\{X_{2n}=0\}}) = \mathbb{P}_o^\omega(Z_n = o).$$

Donc le lemme 4.5 du point 2, nous donne une borne supérieure du bon ordre pour une valeur α_1, et le point 1 permet d'étendre cette borne à tout α de $]0,1[$.

□

5. Borne inférieure de $\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n})$

Dans cette partie, on montre la

Proposition 5.1. *Il existe une constante $c > 0$ telle que Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$, et pour n assez grand, on ait :*

$$\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) \geq e^{-cn^{\frac{d}{d+2}}}.$$

5.1. **Faits généraux pour les marches aléatoires.**
Ce qui suit peut s'appliquer à toute chaîne de Markov Z qui admet une mesure réversible m. Soit A un ensemble de points du graphe sur lequel Z évolue. On peut écrire

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n}=o) &= \sum_z \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n=z)\tilde{\mathbb{P}}_z^\omega(Z_n=o),\\
&\geq \sum_{z\in A} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n=z)\times\frac{m(0)}{m(z)}\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n=z),\\
&\geq \frac{m(0)}{m(A)}[\sum_{z\in A}\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n=z)]^2,\\
&\geq \frac{m(0)}{m(A)}[\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n\in A)]^2.
\end{aligned}$$

Dans notre cas, nous prenons :

$$A=A_r=\{(a,f);\ a\in B_r(\mathcal{C}) \text{ et } \mathrm{supp}(f)\subset B_r(\mathcal{C})\}.$$

Rappelons que $m(a,f)=\nu(a)(\frac{1-\alpha}{\alpha})^{\#\{i;f(i)=\bar{1}\}}$. Donc, on a :

$$m(A_r)\leq 2dr^d\sum_{k=0\ldots r^d} C_{r^d}^k(\frac{1-\alpha}{\alpha})^k = 2d\frac{r^d}{\alpha^{r^d}}.$$

Par ailleurs, la structure des arêtes sur un produit en couronne, implique :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n\in A_r) &\geq \mathbb{P}_0^\omega(\forall i\in[|0,n|]\ X_i\in B_r(\mathcal{C}))\\
&\geq \mathbb{P}_0^\omega(\sup_{0\leq i\leq n} D(0,X_i)\leq r),
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_{2n}}1_{\{X_{2n}=0\}}) &= \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n}=o)\\
&\geq \frac{\alpha^{r^d}}{2dr^d}[\mathbb{P}_0^\omega(\sup_{0\leq i\leq n} D(0,X_i)\leq r)]^2. \qquad (29)
\end{aligned}$$

On est ramené à trouver une borne inférieure de $\mathbb{P}_0^\omega(\sup_{0\leq i\leq n} D(0,X_i)\leq r)$, ce qui est le but de la section suivante.

5.2. **Borne inférieure de** $\mathbb{P}_0^\omega(\sup_{0\leq i\leq n} D(0,X_i)\leq r)$**.** Ce type d'estimée inférieure est connue dans le cas de $\mathbb{Z}^d$, mais la preuve utilise un principe de réflexion (voir[14]), que l'on ne peut utiliser dans $\mathcal{C}$. Notre démarche (inspirée de [15]) pour contourner cette difficulté, utilise des outils analytiques. On prouve :

Proposition 5.2. *Il existe une constante c telle que Q p.s, pour r assez grand et pour $n \geq r$, on ait :*

$$\mathbb{P}_0^\omega(\sup_{0\leq i\leq n} D(0,X_i) \leq r) \geq e^{-c(r+n/r^2)}.$$

(Pour $n < r$ cette probabilité est égale à 1.)

Démonstration. Divisons la preuve en 5 temps.

1. Notons $\sigma_r = \min\{j \geq 0;\ X_j \notin B_r(\mathcal{C})\}$ et considérons les opérateurs $P^{B_r(\mathcal{C})}$ définis sur les fonctions $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ par :

$$P^{B_r(\mathcal{C})}(f)(x) = \ 1_{B_r(\mathcal{C})}(x)\ \mathbb{E}_x^\omega(f(X_1); \sigma_r > 1).$$

L'opérateur $P^{B_r(\mathcal{C})}$ est sous markovien mais néamoins symétrique par rapport à la restriction de ν à $B_r(\mathcal{C})$. On note $p^{B_r(\mathcal{C})}(,)$ les noyaux de $P^{B_r(\mathcal{C})}$ et $p_n^{B_r(\mathcal{C})}(,)$ les noyaux de $(P^{B_r(\mathcal{C})})^n$. Pour tout $x, y \in B_r(\mathcal{C})$, on a :

$$p^{B_r(\mathcal{C})}(x,y) = 1_{\{(x,y)\in B_r(\mathcal{C})^2\}}\mathbb{P}_x^\omega(X_1 = y),$$

et

$$p_n^{B_r(\mathcal{C})}(x,y) = \mathbb{P}_x^\omega(X_n = y; \sigma_r > n).$$

2. Pour $n \geq r$ on a successivement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0^\omega(\sup_{0\leq i\leq n} D(0,X_i) \leq r) &= \mathbb{P}_0^\omega(\sigma_r > n) \\
&= \sum_{y\in B_r(\mathcal{C})} p_n^{B_r(\mathcal{C})}(0,y) \\
&\geq \sum_{y\in B_r(\mathcal{C})} p_r^{B_r(\mathcal{C})}(0,y) p_{n-r}^{B_r(\mathcal{C})}(y,y) \\
&\geq e^{-rc} \sum_{y\in B_r(\mathcal{C})} p_{n-r}^{B_r(\mathcal{C})}(y,y) \\
&\quad \text{(avec } c = \log(2d), \text{ puisque par connexité,} \\
&\quad \text{il existe un chemin entre 0 et } y) \\
&\geq e^{-rc} Tr(P_{n-r}^{B_r(\mathcal{C})}) \\
&\geq e^{-rc}(1-\lambda_1)^{n-r}, \qquad (30)
\end{aligned}$$

où $\lambda_1 = \lambda_1(B_r(\mathcal{C}))$ est la plus petite valeur propre strictement positive de l'opérateur $(Id - P^{B_r(\mathcal{C})})1_{B_r(\mathcal{C})}$.

$$\lambda_1(B_r(\mathcal{C})) = \inf_{\substack{\text{supp}(f)\subset B_r(\mathcal{C}) \\ f\neq 0}} \frac{\xi(f,f)}{||f||^2_{l^2(\nu)}}, \qquad (31)$$

avec

$$\xi(f,f) = \Big((Id - P^{B_r(\mathcal{C})})1_{B_r(\mathcal{C})}f|f\Big)_\nu.$$

Notons que si $\mathrm{supp}(f) \subset B_{r-1}(\mathcal{C})$, on peut simplifier l'expression de ξ.

$$\begin{aligned}
\xi(f,f) &= \sum_{x\in B_r(\mathcal{C})} \nu(x)f(x)[f(x) - \sum_{y\in B_r(\mathcal{C})} p^{B_r(\mathcal{C})}(x,y)f(y)] \\
&= \sum_{x\in B_r(\mathcal{C})} \nu(x)f(x)[\sum_{y\in B_r(\mathcal{C})} p^{B_r(\mathcal{C})}(x,y)(f(x)-f(y))] \\
&\qquad\qquad \text{(Car si } x\in B_{r-1}(\mathcal{C}),\ \sum_{y\in B_r(\mathcal{C})} p^{B_r(\mathcal{C})}(x,y) = 1.\text{)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{x,y\in B_r(\mathcal{C})} \nu(x)p^{B_r(\mathcal{C})}(x,y)(f(x)-f(y))^2.
\end{aligned}$$

3. Prenons maintenant $h(x) = (r-|x|)1_{B_r(\mathcal{C})}$. On a $\mathrm{supp}(h) \subset B_{r-1}(\mathcal{C})$, donc on peut utiliser la formule précédente pour $\xi(h,h)$, et on a :
   - $\xi(h,h) \le |B_r(\mathcal{C})|$.
   - $h \ge r/2$ sur $B_{r/2}(\mathcal{C})$, donc $||h||^2_{l^2(\nu)} \ge (r/2)^2\nu(B_{r/2}(\mathcal{C}))$
     $\ge \frac{1}{2d}(r/2)^2|B_{r/2}(\mathcal{C})|$.

   Ainsi par (31), on déduit :

$$\lambda_1 \le 8d\frac{|B_r(\mathcal{C})|}{r^2|B_{r/2}(\mathcal{C})|} \tag{32}$$

4. L'étape suivante consiste à minorer $|B_{r/2}(\mathcal{C})|$. On a le lemme suivant :

   Lemme 5.3. *Pour $p > p_c$, il existe $c > 0$ tel que Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$, pour r assez grand, on ait :*

$$|B_r(\mathcal{C})| \ge cr^d.$$

   Démonstration. Remarquons que :

$$\text{si } m \ge \max_{x\in C_r} D(0,x), \text{ alors } \mathcal{C}_r \subset B_m(\mathcal{C}).$$

   Maintenant, par le corollaire 1.3 de [1], il existe une constante $\rho' = \rho'(p,d) \ge 1$ telle que Q p.s,

$$\limsup_{N_1(y)\to+\infty} \frac{D(0,y)}{N_1(y)} \le \rho'.$$

   Donc,

$$\begin{aligned}
&\exists \rho' \ge 1\ Q\ p.s \quad \exists A_\omega \ge 0\ \forall y \in \mathcal{C}, \\
&(N_1(y) \ge A_\omega \Rightarrow D(0,y) \le 2\rho N_1(y)).
\end{aligned} \tag{33}$$

Soit $r \geq r_\omega = \max_{\substack{z \in \mathcal{C} \\ N_1(z) < A_\omega}} D(0,z)$ et prenons $m = 2\rho' r$. Soit maintenant $x \in \mathcal{C}_r$, on distingue deux cas :

-soit $N_1(x) \geq A_\omega$, alors par (33), $D(0,x) \leq 2\rho' N_1(x) \leq 2\rho' r = m$,

-ou bien $N_1(x) < A_\omega$, mais alors par notre choix de r, $D(0,x) \leq r \leq 2\rho' r = m$.

Dans tous les cas, on obtient que pour tout $r \geq r_\omega$ et pour tout x dans $\mathcal{C}_r$, $D(0,x) \leq m = 2\rho n$. On déduit donc,

$$\exists \rho' \text{ tel que } Q \text{ p.s pour } r \text{ assez grand, } \mathcal{C}_r \subset B_{2\rho' r}(\mathcal{C}).$$

Puis par la propriété 3.2 (voir Appendice B dans [12]), on sait qu'il existe une constante $\rho > 0$ telle que Q p.s, pour r assez grand, $|\mathcal{C}_r| \geq \rho r^d$. Finalement, on a bien l'existence d'une constante $c > 0$ telle Q p.s pour r assez grand, $|B_r(\mathcal{C})| \geq c r^d$. □

5. On déduit alors immédiatement de l'étape 4 et de (32) qu'il existe $C > 0$ tel que Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$, pour r assez grand,

$$\lambda_1(B_r(\mathcal{C})) \leq \frac{C}{r^2}.$$

Donc pour r assez grand, on peut écrire : $1 - \lambda_1 \geq e^{-2\lambda_1}$. Et finalement, avec (30), on déduit :

$$\mathbb{P}_0^\omega(\sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq r) \geq e^{-c(r+(n-r)/r^2)} \geq e^{-c(r+n/r^2)}.$$

□

5.3. **Preuve de la proposition 5.1.** Par l'inégalité (29) et par la propriété 5.2, on déduit, qu'il existe $c > 0$ tel que Q p.s, pour r assez grand et $n \geq r$, on ait :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}}) &\geq \frac{\alpha^{r^d}}{2dr^d} e^{-2c(r+n/r^2)} \\ &\geq e^{-c'(r^d + n/r^2)}. \end{aligned}$$

choisissons r proportionnel à $n^{\frac{1}{d+2}}$ (qui est bien plus petit que n, pour n assez grand), ainsi on obtient finalement l'existence d'une constante $c > 0$ telle que Q p.s sur $|\mathcal{C}| = +\infty$, pour n assez grand,

$$\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_{2n}}) \geq e^{-cn^{\frac{d}{d+2}}}.$$

Pour les temps impairs, on remarque simplement que $\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_{2n}}) \leq \mathbb{E}_0(\alpha^{N_{2n-1}})$. Ce qui achève la preuve de 5.1.

6. Questions et extensions

6.1. **Questions ouvertes.**

La première question naturelle, est de savoir si $\frac{1}{n^{d/d+2}} \log \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n})$ converge lorsque n tend vers l'infini ? Nous savons seulement que cette expression est bornée .

Une autre question intéressante est d'estimer $Q(\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}))$. Pour la borne supérieure, à n fixé on doit estimer la Q probabilité que l'inégalité isopérimétrique de la propriété 1.4 ne soit pas réalisée. Dans [2], des calculs assez précis donnent un contrôle de ce type d'événement en e^{-cn^β} avec $\beta = \frac{d-1}{d+1} < \frac{d}{d+2}$. Or $e^{-cn^{d/d+2}} << e^{-cn^\beta}$, et ce terme d'erreur est déjà trop "gros" pour la borne espérée.

6.2. **Extensions.**

La même démarche donne des bornes supérieures pour des fonctionnelles plus générales, comme par exemple, $exp^{-\sum\limits_{z;L_{z,n}\neq 0} F(L_{z,n},z)}$ où F une fonction positive et $L_{z,n}$ est le nombre de visite de z par la marche X sur l'amas avant le temps n (voir [13]).

Remerciements

Je remercie mon directeur de thèse Pierre Mathieu ainsi que Christophe Pittet, Enrique Andjel et Anna Erschler pour leurs remarques très utiles.

Références

[1] ANTAL P. et PISZTORA A. *On the chemical distance for supercritical bernoulli percolation*, Annals of probability, vol 24 No.2 1036-1048 (1996)

[2] BARLOW M T *Random walks on supercritical percolation clusters*, Annals of Probability, Vol. 32, No. 4, 3024-3084 (2004)

[3] BERGER N. et BISKUP M. *Quenched invariance principle for simple random walk on percolation clusters*, preprint (2005)

[4] COULHON T. *Ultracontractivity and Nash Type inequalities*, Journal of functional analysis, Vol. 141, p 510-539 (1996)

[5] DE GENNES P.G. *La percolation : un concept unificateur* , La Recherche n° 72, 919 (1976)

[6] DONSKER M D. et VARADHAN S R S. *On the number of distinct sites visited by a random walk*, Communications on Pure and Applied Mathematics , vol 32 721-747 (1979)

[7] ERSCHLER A. , *On isoperimetric profiles of finitely generated groups*, Geometria Dedicata 100 p 157-171 (2003)

[8] GRIMMETT G. , *Percolation*, Springer-Verlag (1989)

[9] KESTEN H. , *Percolation theory for mathematicians*, Birkhauser (1982)

[10] LIGGETT T.M. et SCHONMANN R.H. et STACEY A.M *Domination by product measures*, Annals of Probability, 2, No , p 71-95, (1997).

[11] MATHIEU P. et PIANITSKI A. *Quenched invariance principles for random walk on percolation clusters*, preprint (2005).

[12] MATHIEU P. et REMY E. *Isoperimetry and heat kernel decay on percolation clusters*, Annals of Probability, 32 1A, p 100-128, (2004).

[13] RAU C. *Marches aléatoires sur un amas de percolation.*, Thèse en préparation (2006).

[14] SALOFF-COSTE L. et PITTET C. *A survey on the relationships between volume growth, isoperimetry, and the behaviour of simple random walks on Caley graphs, with example.*, preprint (2001).).

[15] SALOFF-COSTE L.et PITTET C. *On random walks on wreath products*, (2001).

[16] SIDOVARICIUS V. et SZNITMAN A S. *Quenched invariance principles for walks on clusters of percolation or among random conductances* Probability Theory Related Fields 129 p 219 -244.

[17] SINAI Y.G., *Theory of Phase Transition : Rigourous results.*, Int Series in Natural Phil., VOl 108, Pergamon Press (1982).

[18] WOESS W , *Random walk on infinite graphs and groups*, Cambridge university press (2000)

Clément Rau
Laboratoire d'Analyse, de Topologie et de Probabilités
Centre de Mathématiques et d'Informatique
39, rue F. Joliot Curie
13453 Marseille Cedex 13
rau@cmi.univ-mrs.fr

URL: `http ://www.cmi.univ-mrs.fr/ rau/`