



**HAL**  
open science

# Dévissage de la forme de Seifert entière des germes de courbe plane à deux branches

Philippe Du Bois, Emmanuel Robin

► **To cite this version:**

Philippe Du Bois, Emmanuel Robin. Dévissage de la forme de Seifert entière des germes de courbe plane à deux branches. 2005. hal-00016857

**HAL Id: hal-00016857**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00016857>**

Submitted on 30 Jan 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Déviissage de la forme de Seifert entière des germes de courbe plane à deux branches

PHILIPPE DU BOIS - EMMANUEL ROBIN

**Résumé.** Nous proposons une méthode de déviissage de la forme de Seifert d'un germe de courbe plane. Sous certaines hypothèses techniques, nous expliquons comment trouver le(s) type(s) topologique(s) des germes associés à la forme de Seifert d'un germe de courbe plane à deux branches. Réciproquement, nous démontrons que deux germes de courbe plane à deux branches, qui sont «isomères», ont des formes de Seifert entières isomorphes. La filtration par le poids sur l'homologie entière de la fibre de Milnor est l'ingrédient clé de la démonstration.

## *Deviissage of the integral Seifert form of plane curve germs with two branches*

**Abstract.** A devissage method for the Seifert form of a plane curve germ is proposed. Assuming certain technical hypotheses, it is explained how one can find the topological type(s) of germs associated with the Seifert form of a given plane curve germ with two branches. Conversely, two plane curve germs with two branches, which are "isomeric", are shown to have isomorphic integral Seifert forms. The weight filtration on the integral homology of the Milnor fiber is the key ingredient of the proof.

**Classification A.M.S.** 32 S 50, 32 S 55.

**Mots clés.** Germes de courbe plane. Monodromie. Fibre de Milnor. Forme de Seifert. Unités des corps cyclotomiques.

## 0. Introduction.

Soit  $f : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$  un germe de courbe plane à singularité isolée. On note  $K(f) := S_\varepsilon^3 \cap f^{-1}(0)$  l'entrelacs de la singularité où  $\varepsilon \ll 1$ . Les composantes de  $K(f)$  sont appelées *composantes de bord* de la fibre de Milnor  $F$  de  $f$ . Soit  $h$  une monodromie géométrique de  $F$  et  $h_*$  le morphisme induit par  $h$  sur  $H_1(F, \mathbf{Z})$ . On note  $A(f)$  la *forme de Seifert* de  $f$  définie sur  $H_1(F, \mathbf{Z})$ . Les principales propriétés de  $A(f)$  sont les suivantes : la forme  $A(f)$  est unimodulaire et  $h_*$ -équivariante, elle détermine la forme d'intersection  $S$  et le morphisme  $h_*$  par les égalités  $S(x, y) = A(x, y) - A(y, x) = A(x, y) - A(x, h_*(y))$ .

L'*arbre de désingularisation avec multiplicités*  $T(f)$  du germe  $f$  est l'arbre dual de la résolution minimale de  $f$ , pondéré par les multiplicités des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel de la résolution. Le sommet correspondant au premier diviseur qui apparaît lors de la résolution par éclatements successifs sera noté #1 la multiplicité  $e_1$  de ce sommet est égale à la multiplicité à l'origine du germe  $f$ , notée  $\nu_0(f)$ . La *valence*  $v(i)$  d'un sommet  $i$  de  $T(f)$  est le nombre de voisins de  $i$  et  $e_i$  sa multiplicité. On dit que  $i$  est un *sommet de rupture* si  $v(i) \geq 3$ . Le *halo de multiplicité centrale*  $e_i$  est le  $n$ -uplet  $\mathcal{H}_i := (e_i; (\eta_{ij})_{j \in V(i)})$  où  $V(i)$  est l'ensemble des voisins de  $i$  et  $\eta_{ij}$  est l'entier de l'intervalle  $[0, e_i - 1]$  congru à  $e_j$  modulo  $e_i$ . Une arête d'extrémités un sommet de rupture  $i$  et un autre sommet  $j$  est une *arête sortante* (resp. une *arête entrante*) pour le sommet  $i$  si  $e_i < e_j$  (resp.  $e_i > e_j$ ).

L'arbre de désingularisation avec multiplicités est équivalent au type topologique du germe. Si le germe est irréductible, d'après Burau (1933), le polynôme caractéristique de  $h_*$  détermine le type topologique de  $f$ . Par contre, si  $f$  est réductible, la forme de Seifert ne détermine pas le type topologique, voir [DM3]. On étudie ici la question suivante : *partant de la forme de Seifert  $A$  d'un germe de courbe plane, peut-on retrouver le(s) type(s) topologique(s) des germes de courbe plane dont la forme de Seifert est isomorphe à  $A$  ?*

Pour répondre à cette question, nous donnons une méthode de dévissage de  $A(f)$  en deux étapes. Dans la première étape, on se demande si on peut déterminer à partir de  $A(f)$  les données numériques suivantes : les halos des sommets de rupture, ainsi que les nombres d'enlacement des composantes de bord. Ensuite dans la seconde étape, on se demande quels sont les germes déterminés par ces données numériques. Nous suivons ainsi une démarche réciproque de celle suivie en [DM3].

D'après [K], la restriction de  $A(f)$  à  $\text{Ker}(t - 1)$  détermine les nombres d'enlacement des composantes de bord. Nous décrirons au §1 une méthode pour déterminer les halos de valence 3 à partir de la forme de Seifert. Cette méthode utilise la théorie des corps cyclotomiques.

À partir du §2, nous restreignons notre étude au cas des germes de courbe plane à deux branches. Sous certaines hypothèses techniques portant sur les unités cyclotomiques associées à la forme de Seifert, nous montrerons en 2.9, 2.11 et 2.15 que la forme de Seifert d'un tel germe permet de trouver comment les deux branches se séparent. On déterminera au passage la multiplicité du germe.

Le §3 est consacré à la reconstruction de l'arbre réduit  $TR(f)$  de l'arbre de désingularisation  $T(f)$ , défini en 3.2, à partir de la forme de Seifert. Nous démontrerons en 3.6 que, sous les mêmes hypothèses techniques, si deux germes de courbe plane à deux branches ont des formes de Seifert entières isomorphes, ils sont isomères (voir la définition en 3.4). Voir [R1] pour la première version de cette étude, ainsi que la note [R2].

Le §4 est consacré au calcul des paires de Zariski d'un germe de courbe plane  $f$  à partir de l'arbre réduit  $TR(f)$ . Si  $f$  n'a pas d'isomères, et sous les mêmes hypothèses techniques, on en déduira en 4.11 que la donnée de la forme de Seifert, à isomorphisme près, détermine le type topologique du germe  $f$ . Nous démontrerons en 4.12 que, si la reconstruction de l'arbre réduit de l'arbre de désingularisation  $T(f)$  peut être effectuée de plusieurs manières, chaque reconstruction provient effectivement d'un germe de courbe plane, c'est-à-dire que chaque arbre réduit, isomère de l'arbre  $TR(f)$ , est l'arbre réduit de l'arbre de désingularisation d'un germe de courbe plane  $g$ , un tel  $g$  est donc un isomère de  $f$ ; de plus, des germes isomères ont la même multiplicité, et le nombre d'intersection des deux branches ne dépend pas de l'isomère choisi. Enfin, nous donnerons en 4.16 une formule très simple qui calcule le nombre d'intersection des deux branches de  $f$  en termes des multiplicités dans  $T(f)$ , ce qui entraîne que ce nombre d'intersection est déterminé par la collection des halos de  $T(f)$ .

Réciproquement, nous démontrerons en 5.9 que deux germes de courbe plane à deux branches qui sont isomères ont des formes de Seifert entières isomorphes. Voir [D] pour l'annonce de ce résultat.

Enfin, le §6 est consacré au calcul d'un exemple suivant la méthode développée au cours de l'article.

Le point de départ de ce travail est la thèse du deuxième auteur [R1], complétée par la note [D].

## 1. La filtration par le poids et les halos.

La forme de Seifert induit sur l'homologie de la fibre de Milnor, la filtration par le poids  $M$  et une structure isométrique (le couple  $(S, t)$ ). Le gradué central de la filtration,  $\text{Gr}_{-1}^M H_1(F, \mathbf{Z})$ , est la somme directe de facteurs associés aux halos de l'arbre de désingularisation. Nous

étudierons d'abord de 1.1 à 1.11 le problème de l'unicité de cette décomposition en somme directe. L'ingrédient clé est ici le calcul des résultants des polynômes cyclotomiques, dû à T. Apostol, [A].

La structure isométrique sur  $H_1(F, \mathbf{Z})$  induit une structure isométrique, notée  $(S_{-1}, t)$ , sur le gradué central de la filtration. La décomposition en somme directe de  $\text{Gr}_{-1}^M H_1(F, \mathbf{Z})$  associée aux halos est orthogonale pour  $S_{-1}$ . Nous étudierons ensuite de 1.12 à 1.17 les facteurs de cette somme directe (correspondants aux halos de valence 3), en leur associant des unités cyclotomiques, dans le but de retrouver les halos à partir de ces unités.

**1.1.** La filtration par le poids  $M$  sur l'homologie  $H_1(F, \mathbf{Z})$  de la fibre de Milnor  $F$  du germe  $f$  est définie dans [DM1] et utilisée dans [DM2] et [DM3], par les formules suivantes, où la monodromie homologique  $h_*$  est notée comme la multiplication par  $t$ , et  $e$  désigne un exposant de la monodromie.

$$M_0(H_1(F, \mathbf{Z})) = H_1(F, \mathbf{Z}), \quad M_{-1}(H_1(F, \mathbf{Z})) = \text{Ker}(t^e - 1),$$

$$M_{-2}(H_1(F, \mathbf{Z})) = \left( (\text{Ker}(t - 1) + \text{Im}(t^e - 1)) \otimes \mathbf{Q} \right) \cap H_1(F, \mathbf{Z}).$$

Dans [DM3], on associe à chaque halo  $\mathcal{H}_i$  une surface  $D_i$  qui est un revêtement cyclique d'ordre  $e_i$  de  $\mathbf{P}^1$ , ramifié en  $v(i)$  points dont les entiers du revêtement sont les  $\eta_{ij}$ . On a l'isomorphisme de  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules suivant :

$$(\text{Gr}_{-1}^M H_1(F, \mathbf{Z}), S_{-1}) \cong \bigoplus_i^\perp (H_1(D_i, \mathbf{Z}), S_i),$$

où la somme directe (orthogonale pour  $S$ ) est effectuée sur les halos de rupture,  $S_{-1}$  et  $S_i$  désignant les formes bilinéaires (unimodulaires) induites par la forme d'intersection  $S$ .

**1.2.** Considérons un sommet de rupture  $i$  de valence 3, notons  $\mathcal{H}_i := (e_i; \eta_1, \eta_2, \eta_3)$  le halo associé et  $H_1(D_i, \mathbf{Z})$  le facteur correspondant de la somme directe. On a l'isomorphisme de  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules suivant :

$$H_1(D_i, \mathbf{Z}) \cong \frac{\mathbf{Z}[t, t^{-1}]}{(\mathbf{L}_i(t))} := \mathbf{Z}_{\mathbf{L}_i},$$

où  $m_{ij} = \text{pgcd}(e_i, \eta_j)$ ,  $r_i = \text{pgcd}(m_{ij})$  et  $\mathbf{L}_i(t) = \frac{(t^{e_i} - 1)(t^{r_i} - 1)^2}{(t^{m_{i1}} - 1)(t^{m_{i2}} - 1)(t^{m_{i3}} - 1)}$ .

Soit  $i$  un sommet de rupture de valence  $v(i) > 3$ , la structure de  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -module de  $H_1(D_i, \mathbf{Z})$  est plus complexe que dans le cas de la valence 3, voir [DM3, 1.17]. Notons pour le moment que le polynôme caractéristique (resp. minimal) de l'action de  $t$  sur  $H_1(D_i, \mathbf{Z})$  est  $\mathbf{L}_i$  (resp. le polynôme réduit associé  $\mathbf{L}_i^{\text{red}}$ ), où :

$$\mathbf{L}_i(t) = \frac{(t^{e_i} - 1)^{v(i)-2} (t^{r_i} - 1)^2}{(t^{m_{i1}} - 1)(t^{m_{i2}} - 1) \dots (t^{m_{iv(i)}} - 1)}.$$

Les propriétés suivantes des  $\mathbf{L}_i(t)$  sont immédiates.

**1.3. Lemme.** *Soit  $i$  un sommet de rupture de  $T(f)$ , soit  $J(i)$  l'ensemble des indices des polynômes cyclotomiques qui divisent  $\mathbf{L}_i$ , i.e.*

$$J(i) = \{j \mid \Phi_j(t) \mid \mathbf{L}_i(t)\} = \{j \in \mathbf{N} \mid j \mid e_i, j \nmid m_1, j \nmid m_2, \dots, j \nmid m_{j(i)}\},$$

considérons le graphe  $G_{J(i)}$  dont les sommets sont les  $j \in J(i)$  et dont les arêtes joignent deux sommets  $j$  et  $j'$  s'il existe un nombre premier  $p$  tel que  $j' = pj$ . Le graphe  $G_{J(i)}$  est connexe.

**1.4. Lemme.** Soit  $i$  un sommet de rupture de  $T(f)$ , soit  $p$  et  $q$  des nombres premiers distincts et  $c > 0$ . Supposons que  $\Phi_{npq}(t)$  et  $\Phi_n(t)$  divisent  $L_i(t)$ , alors  $\Phi_{np}(t)$  et  $\Phi_{nq}(t)$  divisent  $L_i(t)$ . Supposons que  $\Phi_n(t)$  et  $\Phi_{np^c}(t)$  divisent  $L_i(t)$ , alors  $\Phi_{np}(t), \dots, \Phi_{np^{c-1}}(t)$  divisent  $L_i(t)$ .

On dit que deux éléments  $A$  et  $B$  de  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$  sont *fortement premiers entre eux* s'il existe  $U$  et  $V$  dans  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$  tels que  $AU + BV = 1$ . On notera cette relation  $(A, B)_{\mathbf{Z}} = 1$ .

**1.5. Proposition.** Considérons les polynômes cyclotomiques  $\Phi_a$  et  $\Phi_b$ ,  $a < b$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i.  $b/a$  n'est pas une puissance d'un nombre premier,
- ii. le résultant  $R(\Phi_a, \Phi_b)$  de  $\Phi_a$  et  $\Phi_b$  est égal à 1,
- iii.  $\Phi_a$  et  $\Phi_b$  sont fortement premiers entre eux.

De plus, si  $a > 1$  et s'il existe un nombre premier  $p$  et un entier  $c > 0$  tels que  $b = ap^c$ , alors le résultant de  $\Phi_a$  et  $\Phi_b$  est :

$$\text{res}(\Phi_a, \Phi_b) = \text{res}(\Phi_a, \Phi_{ap^c}) = p^{\varphi(a)}.$$

*Démonstration.* Voir [A] pour (i)  $\Leftrightarrow$  (ii), ainsi que pour le calcul du résultant, et [VW, §30, formule 4] pour (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii).

**1.6. Lemme.** Soit  $A(t), B(t) \in \mathbf{Z}[t]$  deux polynômes unitaires, notons  $(A, B)$  l'idéal de  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]/A \cdot B$  engendré par  $A$  et  $B$ , l'indice du  $\mathbf{Z}$ -module  $(A, B)$  dans  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]/A \cdot B$  est égal au résultant  $\text{res}(A, B)$  de  $A$  et  $B$ .

*Démonstration.* Notons  $\alpha = \deg(A)$  et  $\beta = \deg(B)$ , le  $\mathbf{Z}$ -module  $(A, B)$  est engendré par  $A(t), tA(t), \dots, t^{\beta-1}A(t), B(t), tB(t), \dots, t^{\alpha-1}B(t)$ . Par suite, l'indice cherché est égal au déterminant de Sylvester associé à  $A$  et  $B$ , et donc au résultant  $\text{res}(A, B)$ .

**1.7. Proposition.** Soit  $i$  un sommet de rupture de  $T(f)$ , de valence 3, soit  $g_i$  un générateur de  $H_1(D_i, \mathbf{Z})$ , de sorte que  $H_1(D_i, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[t, t^{-1}] \cdot g_i \cong \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/L_i(t)$ . Si  $\Phi_a \Phi_b$  divise  $L_i$ , avec  $a \neq b$ , l'indice  $\text{ind}_i^{a,b}$  de  $H_1(D_i, \mathbf{Z}) \cap (\ker(\Phi_a(t)) \oplus \ker(\Phi_b(t)))$  dans  $H_1(D_i, \mathbf{Z}) \cap \ker(\Phi_a(t) \cdot \Phi_b(t))$  est alors égal à  $\text{res}(\Phi_a, \Phi_b)$ . Si on suppose de plus que  $\Phi_a$  et  $\Phi_b$  ne sont pas fortement premiers entre eux, on a donc  $\text{ind}_i^{a,b} > 1$ .

*Démonstration.* On a, pour  $\Psi = \Phi_a, \Phi_b$  ou  $\Phi_a \Phi_b$  :

$$H_1(D_i, \mathbf{Z}) \cap \ker(\Psi(t)) = \mathbf{Z}[t, t^{-1}] \cdot (L_i(t)/\Psi(t))g_i \cong \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/\Psi(t),$$

le  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -module  $H_1(D_i, \mathbf{Z}) \cap \ker(\Phi_a(t) \cdot \Phi_b(t))$  est donc engendré par  $L_i(t)/(\Phi_a(t)\Phi_b(t))g_i$ , et l'image de  $H_1(D_i, \mathbf{Z}) \cap (\ker(\Phi_a(t)) \oplus \ker(\Phi_b(t)))$  dans le précédent est engendrée, en tant que  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -module, par  $\Phi_a(t) \cdot (L_i(t)/(\Phi_a(t)\Phi_b(t)))g_i, \Phi_b(t) \cdot (L_i(t)/(\Phi_a(t)\Phi_b(t)))g_i$ , le résultat est donc donné par le lemme 1.6.

**1.8. Proposition.** Soit  $i$  un sommet de rupture de  $T(f)$ , de valence 4, supposons que  $\Phi_a \Phi_b$  divise  $L_i$ , où  $a \mid b$  et  $a \neq b$ , et que  $\text{res}(\Phi_a, \Phi_b) > 1$ . L'indice  $\text{ind}_i^{a,b}$  de  $H_1(D_i, \mathbf{Z}) \cap (\ker(\Phi_a(t)) \oplus \ker(\Phi_b(t)))$  dans  $H_1(D_i, \mathbf{Z}) \cap \ker(\Phi_a(t) \cdot \Phi_b(t))$  est alors  $> 1$ .

*Démonstration.* Soit  $L_i(t)$  le polynôme caractéristique de la monodromie sur  $H_1(D_i, \mathbf{Z})$ , le polynôme minimal est  $L_i^{\text{red}}(t)$  (cf. 1.3). Définissons  $A, B \in \mathbf{Z}[t]$  par  $A(t)B^2(t) = L_i(t)$  et  $A(t)B(t) = L_i^{\text{red}}(t)$ , on a l'isomorphisme suivant, associé à une matrice de présentation diagonale :

$$H_1(D_i, \mathbf{Q}) \cong \mathbf{Q}[t]/B(t) \oplus \mathbf{Q}[t]/(A(t)B(t)).$$

D'après [DM3, 1.17], on peut trouver une famille de 2 générateurs  $(g_{i,1}, g_{i,2})$  du  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -module  $H_1(D_i, \mathbf{Z})$ , de telle sorte que la matrice de présentation associée  $M$  soit triangulaire supérieure. En comparant avec la forme réduite obtenue sur  $\mathbf{Q}$ , on voit qu'il existe  $A_1, A_2, C \in \mathbf{Z}[t]$  tels que  $A(t) = A_1(t)A_2(t)$  et

$$M = \begin{pmatrix} B(t)A_1(t) & B(t)C(t) \\ 0 & B(t)A_2(t) \end{pmatrix}.$$

Si  $\Phi_a$  divise  $L_i$ , deux cas se présentent :

- i)  $\Phi_a(t)$  ne divise aucun des  $t^{m_j} - 1$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , et alors  $\Phi_a$  divise  $B$ ,
- ii)  $\Phi_a(t)$  divise l'un des  $t^{m_j} - 1$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , ceci pour un unique  $j$ , et alors  $\Phi_a$  divise  $A$ .

Si  $\Phi_a$  et  $\Phi_b$  divisent  $L_i$  et si  $a$  divise  $b$ , trois cas se présentent :

- i)  $\Phi_a$  et  $\Phi_b$  divisent  $B$ ,
- ii)  $\Phi_b(t)$  ne divise aucun des  $t^{m_j} - 1$  et  $\Phi_a(t)$  divise l'un d'entre eux, alors  $\Phi_a$  divise  $A$  et  $\Phi_b$  divise  $B$ ,
- iii)  $\Phi_a$  et  $\Phi_b$  divisent  $A$ .

Dans le cas i), le produit  $\Phi_a\Phi_b$  est en facteur dans la matrice  $M$  et on vérifie facilement que :

$$H_1(D_i, \mathbf{Z}) \cap \ker(\Phi_a(t)\Phi_b(t)) \cong \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(\Phi_a(t)\Phi_b(t)) \oplus \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(\Phi_a(t)\Phi_b(t)),$$

par suite, l'indice cherché vérifie  $\text{ind}_i^{a,b} = \text{res}(\Phi_a, \Phi_b)^2 > 1$ .

Dans le cas ii), numérotions les voisins du sommet  $i$  de telle sorte que  $\Phi_a(t)$  divise  $t^{m_3} - 1$ , choisissons les générateurs donnés dans (*loc. cit.*) en accord avec cette numérotation, on trouve alors que  $B(t)A_2(t)$  divise  $(t^{e_i} - 1)/(t^{m_3} - 1)$ , par suite  $\Phi_a$  ne divise pas  $BA_2$  et donc divise  $A_1$ . On vérifie facilement que :

$$H_1(D_i, \mathbf{Z}) \cap \ker(\Phi_a(t)\Phi_b(t)) \cong \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(\Phi_a(t)\Phi_b(t)) \oplus \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(\Phi_b(t)),$$

par suite, l'indice cherché vérifie  $\text{ind}_i^{a,b} = \text{res}(\Phi_a, \Phi_b) > 1$ .

Dans le cas iii), on peut de même choisir les générateurs de telle sorte que  $\Phi_a\Phi_b$  divise  $A_1$ , on trouve ici :

$$H_1(D_i, \mathbf{Z}) \cap \ker(\Phi_a(t)\Phi_b(t)) \cong \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(\Phi_a(t)\Phi_b(t)),$$

par suite, l'indice cherché vérifie  $\text{ind}_i^{a,b} = \text{res}(\Phi_a, \Phi_b) > 1$ . Ceci termine la démonstration.

**1.9. Théorème.** *Soit  $f$  un germe de courbe plane à singularité isolée, supposons que les sommets de rupture de l'arbre  $T(f)$  sont de valence 3 ou 4, et que les polynômes  $L_i$ ,  $i \in \mathfrak{R} := \{i \mid v(i) \geq 3\}$  sont 2 à 2 premiers entre eux, on peut alors retrouver la famille  $(L_i)_{i \in \mathfrak{R}}$  à partir de la forme de Seifert  $A(f)$  en procédant comme suit. Soit  $\Phi_a$  et  $\Phi_b$  deux polynômes cyclotomiques distincts tels que  $\Phi_a\Phi_b$  divise  $\prod_{i \in \mathfrak{R}} L_i$  et  $\text{res}(\Phi_a, \Phi_b) > 1$ , alors  $\Phi_a$*

et  $\Phi_b$  divisent le même  $L_i$  si, et seulement si, les sous  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules de  $H_1(F, \mathbf{Z})$  suivants,  $\ker(\Phi_a(t)) \oplus \ker(\Phi_b(t))$  et  $\ker(\Phi_a(t) \cdot \Phi_b(t))$ , sont distincts.

Si tous les sommets de rupture sont de valence 3, ceci donne directement les  $(L_i)_{i \in \mathfrak{R}}$ . S'il existe des sommets de rupture de valence 4, le procédé donne les  $(L_i^{\text{red}})_{i \in \mathfrak{R}}$ , on en déduit facilement les  $(L_i)_{i \in \mathfrak{R}}$ . On notera que si  $f$  est un germe à deux branches,  $T(f)$  admet au plus un sommet de valence 4 et n'admet aucun sommet de valence  $> 4$ .

*Démonstration.* D'après 1.7 ou 1.8, si  $\Phi_a \Phi_b$  divise  $L_{i_0}$ , l'indice de  $\ker(\Phi_a(t)) \oplus \ker(\Phi_b(t)) = H_1(D_{i_0}, \mathbf{Z}) \cap (\ker(\Phi_a(t)) \oplus \ker(\Phi_b(t)))$  dans  $\ker(\Phi_a(t) \cdot \Phi_b(t)) = H_1(D_{i_0}, \mathbf{Z}) \cap \ker(\Phi_a(t) \cdot \Phi_b(t))$  est  $> 1$ . Si  $\Phi_a$  divise  $L_{i_1}$  et  $\Phi_b$  divise  $L_{i_2}$ ,  $i_1 \neq i_2$ , on a les égalités suivantes, d'où le théorème :

$$\ker(\Phi_a(t)) \oplus \ker(\Phi_b(t)) = (H_1(D_{i_1}, \mathbf{Z}) \cap \ker(\Phi_a(t))) \oplus (H_1(D_{i_2}, \mathbf{Z}) \cap \ker(\Phi_b(t))) =$$

$$(H_1(D_{i_1}, \mathbf{Z}) \cap \ker(\Phi_a(t) \cdot \Phi_b(t))) \oplus (H_1(D_{i_2}, \mathbf{Z}) \cap \ker(\Phi_a(t) \cdot \Phi_b(t))) = \ker(\Phi_a(t) \cdot \Phi_b(t)).$$

**1.10. Remarque.** Si l'on ne suppose plus que les polynômes  $L_i$ ,  $i \in \mathfrak{R} := \{i \mid v(i) \geq 3\}$  sont 2 à 2 premiers entre eux, on ne peut pas espérer prolonger le théorème 1.9 en toute généralité, ainsi que le montre l'exemple suivant : supposons que  $\Phi_{np} \Phi_{nq} \Phi_{npq}^2$  divise  $\prod_{i \in \mathfrak{R}} L_i$ , où  $p$  et  $q$  sont des nombres premiers distincts, et  $n$  est un nombre entier, et que les calculs d'indice comme en 1.7 et 1.8 nous assurent qu'il existe  $i_1$  et  $i_2$  tels que  $\Phi_{np} \Phi_{npq}$  divise  $L_{i_1}$  et  $\Phi_{nq} \Phi_{npq}$  divise  $L_{i_2}$  ; la méthode proposée ne permet pas de distinguer les cas  $i_1 = i_2$  et  $i_1 \neq i_2$ . Cependant, l'utilisation du lemme 1.4 permet d'utiliser les calculs d'indice pour prolonger le résultat d'unicité de 1.9, voir l'exemple au §6 ou la proposition suivante.

**1.11. Proposition.** *Supposons que le produit  $\Phi_n \Phi_{np}^2 \Phi_{npq}$ , où  $p$  et  $q$  sont des nombres premiers distincts, apparaît dans la décomposition de  $\prod_{i \in \mathfrak{R}} L_i$  en produit de puissances de polynômes cyclotomiques distincts, supposons de plus que l'on ait démontré (en utilisant 1.7) qu'il existe  $i_0$  et  $i_1$  tels que  $\Phi_{np} \Phi_{npq} \mid L_{i_0}$  et  $\Phi_n \Phi_{np} \mid L_{i_1}$ . Alors, si  $\Phi_{nq}$  ne divise pas  $\prod_{i \in \mathfrak{R}} L_i$ , on a  $i_0 \neq i_1$  ; si  $\prod_{i \in \mathfrak{R}} L_i$  est divisible par  $\Phi_{nq}$ , mais pas par  $\Phi_{nq}^2$ , on a  $i_0 = i_1$  si, et seulement si, l'indice de  $\ker(\Phi_n) \oplus \ker(\Phi_{nq}) \oplus \ker(\Phi_{npq})$  dans  $\ker(\Phi_n \Phi_{nq} \Phi_{npq})$  est égal à  $\text{res}(\Phi_{nq}, \Phi_n \Phi_{npq}) = q^{\varphi(n)} p^{\varphi(nq)}$ .*

**1.12. Structure isométrique associée à un halo de valence 3 et unités cyclotomiques.** Nous allons donner un invariant complet de la structure isométrique  $(H_1(D_i, \mathbf{Z}), S_i, t)$ , et en déduire une méthode pour déterminer un halo de valence 3 à partir de cet invariant. Nous omettrons l'indice  $i$  pour alléger l'écriture.

Soit  $h_1$  et  $h_2$  des éléments de  $H_1(D, \mathbf{Z})$ , on notera  $SS(h_1, h_2)$  l'élément de  $\mathbf{Z}[[t, t^{-1}]]$  suivant :

$$SS(h_1, h_2) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} S(h_1, t^n h_2) t^n.$$

On trouve immédiatement les égalités  $SS(th_1, h_2) = SS(h_1, t^{-1}h_2) = tSS(h_1, h_2)$ . Décomposons la série  $SS(h_1, h_2)$  de la façon suivante :  $SS(h_1, h_2) = SS_-(h_1, h_2) + SS_+(h_1, h_2)$  où les degrés des termes de  $SS_+(h_1, h_2)$  sont minorés, et ceux de  $SS_-(h_1, h_2)$  majorés. On a  $\Lambda(t)SS(h_1, h_2) = SS(L(t)h_1, h_2) = 0$ , d'où  $\Lambda(t)SS_+(h_1, h_2) = -L(t)SS_-(h_1, h_2)$  et, par suite,  $\Lambda(t)SS_+(h_1, h_2) \in \mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ . La série  $SS_+(h_1, h_2)$  étant définie à l'addition d'un polynôme près,  $U(h_1, h_2) := L(t)SS_+(h_1, h_2)$  est ainsi un élément bien défini de  $\mathbf{Z}_{\mathbb{L}}$ . Réciproquement,  $U(h_1, h_2)$  détermine la série  $SS(h_1, h_2)$  par l'égalité suivante, grâce à la relation de périodicité

$$S(h_1, t^n h_2) = S(h_1, t^{n+e} h_2) :$$

$$\frac{t^e - 1}{\mathbf{L}(t)} U(h_1, h_2) = (t^e - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} S(h_1, t^n h_2) t^n = - \sum_{n=0}^{e-1} S(h_1, t^n h_2) t^n.$$

Soit maintenant  $g$  un générateur du  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -module  $H_1(D, \mathbf{Z})$ , soit  $v \in \mathbf{Z}_{\mathbf{L}}^\times$ , où  $\mathbf{Z}_{\mathbf{L}}^\times$  désigne le groupe des unités de  $\mathbf{Z}_{\mathbf{L}}$ , on a l'égalité  $U(vg, vg) = v(t)v(t^{-1})U(g, g)$ . Notons  $N_+(v) = v(t)v(t^{-1})$  et  $U = U(t)$  la classe de  $U(g, g)$  dans  $\mathbf{Z}_{\mathbf{L}}^\times/N_+(\mathbf{Z}_{\mathbf{L}}^\times)$ .

**1.13. Théorème. Invariant complet de la structure isométrique associée à un halo de valence 3.** [R1, Th. 4.20]. *Avec les notations ci-dessus,  $U(g, g)$  est une unité de  $\mathbf{Z}_{\mathbf{L}}$ , sa classe  $U$  dans  $\mathbf{Z}_{\mathbf{L}}^\times/N_+(\mathbf{Z}_{\mathbf{L}}^\times)$  est un invariant complet de la structure isométrique  $(H_1(D, \mathbf{Z}), S, t)$ . De plus, on trouve :*

$$U = t^r \frac{t^{\eta_1} - 1}{t^{m_1} - 1} \times \frac{t^{\eta_2} - 1}{t^{m_2} - 1} \times \frac{t^{\eta_3} - 1}{t^{m_3} - 1}.$$

*Démonstration.* Avec les notations de [DM3], on peut choisir pour générateur de  $H_1(D, \mathbf{Z})$  :

$$g = \frac{t^{-\eta_2} - 1}{t^r - 1} \hat{\gamma}_1 - \frac{t^{-\eta_1} - 1}{t^r - 1} \hat{\gamma}_2,$$

plus commode que le générateur donné en [DM3, 1.13]. La proposition [DM3, 1.16] permet alors de calculer  $SS(g, g)$ . Cette proposition donne, en effet, en posant  $P(t) = (t^{-\eta_2} - 1)/(t^r - 1)$  et  $Q(t) = -(t^{-\eta_1} - 1)/(t^r - 1)$  :

$$SS(g, g) = ((t^{\eta_2} - 1)Q(t)Q(t^{-1}) + (1 - t^{-\eta_1})P(t)P(t^{-1})) \sum_{n \in \mathbf{Z}} t^{ne},$$

d'où on tire le résultat indiqué, voir [R1, 4.2.4] pour un calcul détaillé. L'invariant  $U$  est une unité, car la structure isométrique est unimodulaire.

**1.14.** La forme d'intersection  $S$  étant antisymétrique, il peut être préférable de caractériser la structure isométrique ci-dessus par une unité symétrique en  $t$  et  $t^{-1}$ . Pour cela, on remarque que le degré du polynôme  $\mathbf{L}$  est pair, disons  $\deg(\mathbf{L}) = 2d$ , plus précisément,  $\Lambda(t)$  est un produit de polynômes cyclotomiques 2 à 2 distincts, et ce produit n'est divisible ni par  $\Phi_1(t) = t - 1$ , ni par  $\Phi_2(t) = t + 1$ . On a de plus, pour tout halo de valence 3,  $\eta_{i1} + \eta_{i2} + \eta_{i3} = e_i$ . On pose alors  $U'(t) = t^{-d}U(t)$  et on vérifie immédiatement que :

$$U(t^{-1}) = t^{-2d}U(t) \quad \text{et} \quad U'(t^{-1}) = U'(t).$$

Considérons le morphisme d'anneaux  $\mathbf{Z}_{\mathbf{L}} \rightarrow \mathbf{C}$  défini par  $t \mapsto \exp(2\pi i/e)$ . L'image  $U'(\exp(2\pi i/e))$  de  $U'(t)$  par ce morphisme est donc un nombre réel, dont le signe ne change pas si on remplace  $U'(t)$  par  $U'(t)v(t)v(t^{-1})$ , où  $v(t)$  est une unité de  $\mathbf{Z}_{\mathbf{L}}$ . Le calcul de l'argument de  $U'(\exp(2\pi i/e))$  montre que ce nombre réel est positif. Par suite, si  $U(t)$  est une unité de  $\mathbf{Z}_{\mathbf{L}}$  associée à une structure isométrique comme en 1.12, alors  $-U(t)$  ne peut pas être associé à une structure isométrique dont le polynôme annulateur est le même polynôme  $\mathbf{L}(t)$ .



**1.15. Détermination d'un halo de valence 3.** La question que nous nous posons est maintenant de déterminer un halo de valence 3 à partir de la donnée de l'unité associée  $U \in \mathbf{Z}_L^\times/N_+(\mathbf{Z}_L^\times)$ . Nous allons pour cela utiliser les applications naturelles de l'anneau  $\mathbf{Z}_L$  dans les corps cyclotomiques  $\mathbf{K}_n := \mathbf{Q}[t]/\Phi_n(t)$  tels que  $\Phi_n$  divise  $\Lambda$ . Soient  $E_n$  le groupe des unités de  $\mathbf{K}_n$ ,  $C_n := \{\pm t^b \prod_a (t^a - 1)\} \cap E_n$  le groupe des unités circulaires et  $W_n$  le groupe des racines de l'unité. On notera  $\tilde{E}_n = E_n/W_n$  et  $\tilde{C}_n = C_n/W_n$ , on rappelle que  $\tilde{E}_n$  et  $\tilde{C}_n$  sont des groupes abéliens libres de rang  $\frac{1}{2}\varphi(n) - 1$ . De plus, pour tout  $u \in E_n$ , il existe  $\zeta \in W_n$  tel que  $u\bar{u} = \zeta u^2$ , en effet, si on pose  $\zeta = \bar{u}/u$ , on trouve que  $\zeta$  est un entier algébrique dont tous les conjugués sont de module 1, par suite  $\zeta$  est une racine de l'unité. L'image de  $U$  dans  $\mathbf{K}_n$ , qu'on note toujours  $U$ , donne donc un élément bien défini de  $M_n := \tilde{C}_n/(\tilde{C}_n \cap \tilde{E}_n^2)$ , qui est un espace vectoriel de dimension  $\frac{1}{2}\varphi(n) - 1$  sur  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .

On trouvera dans l'article de R. Gold et J. Kim [GK] la construction d'un ensemble minimal de générateurs de  $C_n$ , ce qui donne une base de l'espace vectoriel  $M_n$ . Notons  $\gamma_a$  l'image de  $t^a - 1$  dans  $\tilde{C}_n$ , les relations de Bass, rappelées ci-dessous (voir [B], [E] ou [W], 8.9) permettent alors de travailler dans  $\tilde{C}_n$  ou dans  $M_n$  :

$$\gamma_a = \gamma_{n-a} \quad \text{et} \quad \gamma_{km} = \prod_{j=0}^{m-1} \gamma_{k+jn/m}, \quad \text{pour } m \mid n \text{ et } km \not\equiv 0 \pmod{n}.$$

D'après [S],  $[\tilde{E}_n : \tilde{C}_n] = 2^b h_n^+$  où  $h_n^+$  est le nombre de classes d'idéaux du sous-corps réel maximal de  $\mathbf{K}_n$  et où  $b = 0$  si  $n$  a 1, 2 ou 3 facteurs premiers et  $b > 0$  sinon. Nous obtenons alors des résultats qui dépendent du nombre de facteurs premiers de la multiplicité  $e$ .

Soit  $e$  le produit de  $s$  puissances de nombres premiers distincts, soient  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  trois entiers de l'intervalle  $[1, e - 1]$  tels que  $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \equiv 0 \pmod{e}$ , notons, pour  $j = 1, 2$  ou  $3$ ,  $m_j = \text{pgcd}(e, \eta_j)$ ,  $r = \text{pgcd}(m_1, m_2, m_3)$  et

$$L(t) = \frac{(t^e - 1)(t^r - 1)^2}{(t^{m_1} - 1)(t^{m_2} - 1)(t^{m_3} - 1)}.$$

Par définition, le problème  $\mathcal{U}_s$  associé à  $e$  et  $L$  est : «déterminer les entiers  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  à partir de la classe de

$$U = t^r \frac{t^{\eta_1} - 1}{t^{m_1} - 1} \times \frac{t^{\eta_2} - 1}{t^{m_2} - 1} \times \frac{t^{\eta_3} - 1}{t^{m_3} - 1}$$

dans le groupe  $\mathbf{Z}_L^\times/N_+(\mathbf{Z}_L^\times)$ ».

**1.16. Théorème.** [R1, Th. 4.23, 4.43, 4.46, 4.54]. Soit  $e$  un entier positif. On considère les halos de valence 3 dont la multiplicité centrale est égale à  $e$ .

**i.** Dans le cas où  $e = p^m$  avec  $p$  premier ou  $e = 2p^m$  avec  $p$  premier impair, si  $h_{p^m}^+$  est impair, alors la structure isométrique  $(H_1(D, \mathbf{Z}), S, t)$  détermine le halo associé.

**ii.** Supposons que  $e = p_1^a p_2^b \not\equiv 2 \pmod{4}$  avec  $p_1, p_2$  premiers distincts. Soit  $I_e = \{1 \leq a < e/2 \mid (a, e) = 1\}$ . Supposons vérifiées les conditions suivantes :  $h_e^+$  est impair, la relation  $\prod_{a \in I_e} (t^a - 1) \in W_e$  est la seule relation de la famille  $(t^a - 1)_{a \in I_e}$  et  $m_1 + m_2 + m_3 < \frac{1}{4}\varphi(e)$  (noter que cette condition porte sur le polynôme  $L$ ). Alors la structure isométrique  $(H_1(D, \mathbf{Z}), S, t)$  détermine le halo associé.

iii. Supposons que  $e = \prod_{i=1}^s p_i^{a_i}$  où  $s \geq 3$  et les  $p_i$  sont des nombres premiers distincts.

Supposons qu'on sache résoudre les problèmes  $\mathcal{U}_1$  associés à  $p_i^{a_i}$  ( $1 \leq i \leq s$ ) et les problèmes  $\mathcal{U}_2$  associés à  $p_i^{a_i} p_j^{a_j}$  ( $1 \leq i < j \leq s$ ), ceci pour n'importe quel polynôme  $L$ . Alors la structure isométrique  $(H_1(D, \mathbf{Z}), S, t)$  détermine le halo associé en dehors de la situation particulière suivante : quitte à échanger les  $m_j$ , on a  $m_1 = m_2$ , et à une permutation près des  $p_i$ , si l'on pose  $m_3 = \prod_{i=1}^s p_i^{\gamma_i}$ , il existe un entier  $q$ ,  $1 \leq q \leq s-2$ , tel que, pour  $1 \leq i \leq q$ , on a  $\gamma_i < a_i$  et  $\eta_1 \equiv \eta_2 \pmod{p_i^{a_i}}$  et, pour  $q+1 \leq i \leq s$ , on a  $\gamma_i = a_i$ . Cependant, on détermine l'entier  $\eta_3$  dans cette situation particulière.

On obtient le point 1) car la famille  $(\frac{t^a - 1}{t - 1})_{1 < a < p^m/2, (a,p)=1}$  est une base du  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ -espace vectoriel  $\tilde{C}_e/\tilde{C}_e^2$ . Ce résultat n'est plus vrai lorsque  $e$  est composée. Mais lorsque  $e$  a deux facteurs premiers, on a une méthode similaire si la famille  $(t^a - 1)_{a \in I_e}$  a une seule relation. La troisième hypothèse provient de l'existence de cette relation car celle-ci implique deux écritures de l'invariant  $U$  dans cette famille génératrice. On obtient le point 3) en appliquant le théorème des restes chinois. Ce théorème n'englobe pas toutes les multiplicités  $e$ . Cependant,  $h_e^+$  étant toujours supposé impair, la même méthode s'applique dans tous les cas pour déterminer le halo en partant de l'unité  $U$ , mais nous n'avons pas de résultat général quant à l'unicité du halo correspondant à une unité. Si  $h_e^+$  est de la forme  $2^a b$  où  $b$  est impair et  $a \leq 8$ , on peut encore appliquer notre méthode, voir [R1, 4.60]. D'après les tables numériques, voir [W], cette hypothèse est vérifiée pour tout  $e$  inférieur à 300.

**1.17.** Le cas de la structure isométrique associée à un halo  $i_0$  de valence 4 ne semble pas pouvoir être traité de façon praticable : nous avons une grande latitude dans le choix des générateurs  $(g_{i_0,1}, g_{i_0,2})$ , et ceux-ci ont une forme peu propice au calcul des séries  $SS(g_{i_0,1}, g_{i_0,1})$ ,  $SS(g_{i_0,1}, g_{i_0,2})$  et  $SS(g_{i_0,2}, g_{i_0,2})$ . Nous utiliserons uniquement le polynôme  $L_{i_0}$ , ce qui donne  $e_{i_0}$  et les  $m_{i_0,j} = \text{pgcd}(e_{i_0}, \eta_{i_0,j})$ , où  $j = 1, \dots, 4$ , sans chercher à retrouver le halo  $\mathcal{H}_{i_0} := (e_{i_0}; \eta_{i_0,1}, \dots, \eta_{i_0,4})$ .

**1.18.** Nous avons donc une décomposition en somme directe orthogonale (pour  $S$ ) de  $\text{Gr}_{-1}^M(H_1(F, \mathbf{Z}))$ , associée aux sommets de rupture de  $T(f)$ , et les structures isométriques sur les facteurs de cette décomposition ont, dans le cas des sommets de valence 3, une forme très particulière, donnée par une unité cyclotomique qui se déduit simplement du halo associé. Ceci excuse ou justifie l'hypothèse 2.1 que nous allons faire pour continuer notre travail.

## 2. L'arbre de désingularisation au voisinage du sommet #1.

Nous allons maintenant restreindre notre étude au cas des germes de courbe plane à deux branches. Dans toute la suite,  $f : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$  désignera un tel germe. On se donne la forme de Seifert  $A(f)$  du germe  $f$ . Sous l'hypothèse 2.1, nous allons trouver, en partant de  $A(f)$ , comment les deux branches de  $f$  se séparent, voir 2.9, 2.11 et 2.15 ci-dessous. Nous déterminerons au passage la multiplicité du germe.

**2.1. Hypothèse de travail.** Nous supposons dorénavant que la décomposition en somme directe orthogonale (pour  $S$ ) du  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -module  $\text{Gr}_{-1}^M H_1(F, \mathbf{Z})$  est unique, et que, dans cette décomposition, la structure isométrique de chaque facteur associé à un sommet de rupture de valence 3 définit un unique triplet  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ ; on rappelle qu'un tel facteur est isomorphe

à  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(L_i(t))$  pour un certain  $L_i(t)$ . La filtration  $M$  étant définie en termes de la forme de Seifert (via la monodromie homologique), ainsi que les structures isométriques sur les facteurs directs de  $Gr_{-1}^M H_1(F, \mathbf{Z})$ , notre hypothèse porte donc sur la forme de Seifert et sur les unités cyclotomiques que nous lui avons associé.

**2.2.** On notera  $\varphi$  et  $\varphi'$  des développements de Puiseux des branches du germe  $f$ . Les paires de Zariski de  $\varphi$  (resp.  $\varphi'$ ) seront notées  $p_1/q_1, \dots, p_g/q_g$  (resp.  $p'_1/q'_1, \dots, p'_{g'}/q'_{g'}$ ). On notera  $\mathcal{C}(\varphi, \varphi')$  l'exposant de coïncidence de  $\varphi$  et  $\varphi'$ . Un nombre rationnel  $r$  est un *exposant permis* pour  $\varphi$  si les développements de Puiseux  $\varphi(x)$  et  $x^r + \varphi(x)$  ont les mêmes paires caractéristiques. Il s'ensuit que  $r$  est dans  $(q_1 \cdots q_g)^{-1}\mathbf{N}$ . L'exposant de coïncidence est permis pour l'une au moins des deux branches, on conviendra qu'il est permis pour la branche  $\varphi$ . On définit l'entier  $c$  par la double inégalité suivante :

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{p_c}{q_1 \cdots q_c} \leq \mathcal{C}(\varphi, \varphi') < \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{p_{c+1}}{q_1 \cdots q_{c+1}}.$$

On a donc  $\mathcal{C}(\varphi, \varphi') \in \frac{1}{q_1 \cdots q_c} \mathbf{N}$  et  $e_1 = \nu_0(f) = q_1 \cdots q_g + q'_1 \cdots q'_{g'}$ . On reprend les notations données aux §0 et §1. On notera  $\Gamma(1, \varphi)$  (resp.  $\Gamma(1, \varphi')$ ) la géodésique de  $T(f)$  joignant #1 à la flèche symbolisant  $\varphi$  (resp.  $\varphi'$ ). On notera  $\text{som}(T(f))$  l'ensemble des sommets de  $T(f)$ ,  $m_{ij}$  le pgcd des multiplicités des sommets  $i$  et  $j$ , extrémités de l'arête  $(ij)$  de  $T(f)$ ; ce pgcd est constant le long d'un segment géodésique, on rappelle qu'un *segment géodésique* est la réunion des arêtes situées entre deux sommets de rupture consécutifs sur une géodésique de  $T(f)$ , ou entre un sommet de rupture et un sommet de valence 2 portant une flèche symbolisant  $\varphi$  ou  $\varphi'$ , consécutifs sur une géodésique de  $T(f)$ . Une *branche morte* est la réunion des arêtes situées entre un sommet de rupture et un sommet de valence 1 distinct du sommet #1. Le pgcd  $m_{ij}$  est constant le long d'une branche morte; de plus, il est égal à la multiplicité du sommet de valence 1 de la branche. De même, si le sommet #1 est de valence 1, le  $m_{ij}$  est constant, et égal à  $e_1$ , le long de la réunion des arêtes situées entre #1 et le sommet de rupture de plus petite multiplicité; dans ce cas, on appellera *branche géodésique d'extrémité #1* cette réunion d'arêtes. Enfin, on appellera *sommet de séparation* le sommet de rupture en lequel se séparent les géodésiques de  $T(f)$  qui joignent le sommet #1 aux sommets qui portent les flèches symbolisant les composantes de  $f$ .

**2.3.** Le lemme suivant se déduit de [MW, 5.4.1 et 6.6.4], voir aussi [BK]. Il va nous permettre de distinguer entre branche sortante et branche entrante. Nous donnons l'énoncé pour un germe ayant un nombre quelconque de branches.

**2.4. Lemme. Multiplicité sortante après un sommet de rupture.** Soit  $g : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$  un germe de courbe plane à singularité isolée, ayant un nombre de branches quelconque, soit  $T(g)$  l'arbre de désingularisation avec multiplicités de  $g$ . Soit  $i$  un sommet de rupture de  $T(g)$ , ou le sommet #1 s'il est de valence 2. Soit  $i^\Lambda$  le sommet voisin de  $i$  sur une arête sortante de  $i$ . Notons  $(\chi^\ell)_{\ell \in \Lambda}$  des développements de Puiseux des branches de  $g$  telles que la géodésique  $\Gamma(1, \chi^\ell)$  de  $T(g)$  joignant #1 à la flèche symbolisant  $\chi^\ell$  passe par l'arête qui porte le sommet  $i^\Lambda$ ; notons  $q_{k_\ell}, \dots, q_{g_\ell}$  les dénominateurs des paires de Zariski de  $\chi^\ell$  qui interviennent, dans la suite d'éclatements donnant la désingularisation minimale de  $g$ , après l'éclatement qui crée le diviseur représenté par  $i$ . On a alors :

$$e_i^\Lambda \equiv \sum_{\ell \in \Lambda} q_{k_\ell} \cdots q_{g_\ell} \pmod{e_i}.$$

**2.5. Proposition.** Soit  $f : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$  un germe de courbe plane à deux branches. Considérons l'arbre de désingularisation  $T(f)$  du germe  $f$ .

- i. Le long d'une branche morte, le pgcd  $m_{ij}$  est constant, et sa valeur est strictement supérieure à  $e_1 = \nu_0(f)$ .
- ii. Si  $T(f)$  présente une branche géodésique d'extrémité #1, le pgcd  $m_{ij}$  est constant le long de cette branche, et sa valeur est égale à  $e_1 = \nu_0(f)$ .
- iii. Le long d'un segment géodésique, le pgcd  $m_{ij}$  est constant, et sa valeur est strictement inférieure à  $e_1 = \nu_0(f)$ .

*Démonstration.* La multiplicité d'un sommet de valence 1 extrémité de branche morte est strictement supérieure à  $e_1$ , le point i) se déduit donc de 2.2. Le point ii) est donné en 2.2. Si un segment géodésique commence par une arête sortante pour le sommet de rupture  $i$ , le lemme 2.4 donne la majoration suivante :  $\text{pgcd}(e_i, e_i^\Lambda) < e_1 = q_1 \cdots q_g + q'_1 \cdots q'_{g'}$ . Ceci donne le point iii) à l'exception du cas suivant. Si l'exposant de coïncidence  $\mathcal{C}(\varphi, \varphi')$  est permis pour la branche  $\varphi$ , mais non pour la branche  $\varphi'$ , considérons le segment géodésique de l'arbre  $T(f)$  dont les extrémités,  $i(c)$  et  $i'(c)$ , sont associées à la  $c$ -ième paire de Zariski de la branche  $\varphi$ , pour  $i(c)$ , ou  $\varphi'$ , pour  $i'(c)$ . Autrement dit,  $i(c)$  est le sommet où les géodésiques  $\Gamma(1, \varphi)$  et  $\Gamma(1, \varphi')$  se séparent, et  $i'(c)$  est le sommet de rupture suivant sur  $\Gamma(1, \varphi')$  (ou, à défaut, le sommet portant la flèche  $\varphi'$ ). Les arêtes situées aux extrémités de ce segment géodésique sont toutes deux des arêtes entrantes (pour le sommet  $i(c)$  ou pour le sommet  $i'(c)$ ). Notons  $i(c)^{\varphi'}$  le sommet voisin de  $i(c)$  dans la direction de la flèche associée à  $\varphi'$ , notons  $e_{i(c)^{\varphi'}}$  sa multiplicité et  $m_{i(c)^{\varphi'}} = \text{pgcd}(e_{i(c)}, e_{i(c)^{\varphi'}})$ , alors, d'après le lemme 2.17 de [R1], le pgcd  $m_{i(c)^{\varphi'}}$  le long du segment géodésique considéré divise  $q'_c \cdots q'_{g'}$ . On a donc encore  $m_{i(c)^{\varphi'}} < e_1$ , ce qui achève la démonstration.

**2.6.** D'après [AC, Th. 4], le polynôme caractéristique de l'action de la monodromie sur  $H_1(F, \mathbf{Z})$  est, dans le cas d'un germe à deux branches :

$$\Delta(t) = (t - 1) \prod_i (t^{e_i} - 1)^{v(i)-2},$$

où l'on effectue le produit sur l'ensemble des sommets de  $T(f)$ . La forme de Seifert nous donne donc, via le polynôme caractéristique  $\Delta$ , l'élément  $\sum_i (v(i) - 2)[e_i]$  de  $\mathbf{Z}[\mathbf{N}]$ . Rappelons que  $T(f)$  comporte au plus un sommet de valence 4 dans le cas d'un germe à deux branches. Si c'est le cas, notons  $i_0$  ce sommet, le polynôme caractéristique de l'action induite par la monodromie sur  $H_1(D_{i_0}, \mathbf{Z})$  est alors, en notant  $\mathcal{H}_{i_0} = (e_{i_0}; \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$  le halo correspondant, puis  $m_{i_0j} = \text{pgcd}(e_{i_0}, \eta_j)$  et  $r_{i_0} = \text{pgcd}(m_{i_0j} \mid 1 \leq j \leq 4)$  :

$$\mathbf{L}_{i_0}(t) = \frac{(t^{e_{i_0}} - 1)^2 (t^{r_{i_0}} - 1)^2}{(t^{m_{i_01}} - 1)(t^{m_{i_02}} - 1)(t^{m_{i_03}} - 1)(t^{m_{i_04}} - 1)}.$$

Par ailleurs, l'hypothèse 2.1 nous donne la liste des polynômes  $\mathbf{L}_i$  associés aux sommets de rupture. Vu que, pour tout sommet de rupture  $i$ , on a, pour  $j = 1, 2, 3$  (ou  $j = 1, 2, 3, 4$ ),  $e_i > m_{ij} \geq r_i$ , ceci donne l'expression  $\sum_{i, v(i) \geq 3} (v(i) - 2)[e_i]$ , où l'on somme sur les seuls sommets de rupture. On trouve ainsi la liste  $SV(3)$  des sommets de valence au moins égale à 3 :

$$SV(3) = \{(i, e_i, v(i)) \mid i \in \text{som}(T(f)), v(i) \geq 3\}.$$

La comparaison avec  $\sum_i(v(i) - 2)[e_i]$  nous donne ensuite la liste  $SV(1)$  des sommets de valence 1 :

$$SV(1) = \{(i, e_i) \mid i \in \text{som}(T(f)), v(i) = 1\}.$$

D'après 2.5, l'ensemble des  $m_{ij}$  associés aux segments géodésiques est disjoint de l'ensemble  $\{e_i \mid v(i) = 1\}$ , qui est égal à l'ensemble des  $m_{ij}$  associés aux branches mortes et à l'éventuelle branche géodésique d'extrémité  $\#1$ . En considérant de nouveau la définition de  $L_i$  et la liste de ces polynômes, on trouve donc la proposition suivante.

**2.7. Proposition. i.** *Si  $T(f)$  n'admet pas de sommet de valence 4, on a  $\text{card}SV(1) = \text{card}SV(3)$ , et si  $T(f)$  admet un sommet de valence 4, on a  $\text{card}SV(1) = \text{card}SV(3) + 1$ .*

**ii.** *Si l'hypothèse 2.1 est vérifiée, le polynôme  $\Delta$  et la liste des polynômes  $L_i$  permettent de déterminer l'application*

$$\sigma : SV(1) \rightarrow SV(3),$$

*qui à un sommet de valence 1, extrémité d'une branche morte, associe le sommet de valence 3 ou 4 qui est l'autre extrémité de celle-ci, et au sommet  $\#1$ , s'il est de valence 1, associe le sommet de valence 3 ou 4 extrémité de la branche géodésique d'extrémité  $\#1$ .*

**2.8.** Si  $f$  est le produit de deux germes lisses transverses, on a  $H_1(F, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/(t-1)$ , et  $SV(1) = SV(3) = \emptyset$ . Nous supposons dorénavant que  $f$  n'est pas le produit de deux germes lisses transverses, on a alors  $SV(3) \neq \emptyset$ . En utilisant la description de  $T(f)$  en fonction des développements de Puiseux des branches de  $f$ , donnée dans [BK, p. 698–704] ou dans [MW, 6.5], on déduit de la proposition 2.7 les informations suivantes. La figure 1 donne un exemple de chacun des cas indiqués dans la proposition. Les points de valence 2 ne sont pas marqués. Sauf dans le cas *B.1*, où l'on peut remplacer une équerre par une flèche, nous donnons l'arbre le plus simple possible.

**2.9. Proposition. Cas A.** *Si l'application  $\sigma$  n'est pas injective, le sommet  $\#1$  est de valence 1, le sommet  $\sigma(1)$  porte une branche morte, la multiplicité de  $f$  est donnée par :*

$$\nu_0(f) = e_1 = \min\{e_i \mid i \in \text{som}(T(f)), v(i) \neq 2\},$$

*les paires de Zariski des branches de  $f$  vérifient :*

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p'_1}{q'_1} \leq \mathcal{C}(\varphi, \varphi').$$

*et nous sommes dans l'un des 3 cas suivants.*

*A.1. L'application  $\sigma$  est surjective. Dans ce cas,  $T(f)$  admet un sommet de valence 4 (avec 2 arêtes sortantes) et  $\sigma$  induit une bijection de  $SV(1) \setminus \sigma^{-1}(\{\sigma(1)\})$  sur  $SV(3) \setminus \{\sigma(1)\}$ .*

*A.2. L'application  $\sigma$  n'est pas surjective et le coefficient de coïncidence  $\mathcal{C}(\varphi, \varphi')$  est permis pour les deux branches de  $f$ . Alors, les branches se séparent en un sommet de valence 3 associé à une paire non-caractéristique, ce sommet est le seul sommet de valence 3 de  $T(f)$  sans branche morte, et il admet 2 arêtes sortantes.*

*A.3. L'application  $\sigma$  n'est pas surjective et le coefficient de coïncidence  $\mathcal{C}(\varphi, \varphi')$  est permis pour la branche  $\varphi$  mais non pour la branche  $\varphi'$ . Alors, les branches se séparent en un sommet de valence 3 associé à une paire caractéristique pour  $\varphi$ , mais non pour  $\varphi'$  ; ce sommet est le*

seul sommet de valence 3 de  $T(f)$  sans branche morte, et il admet une unique arête sortante, portée par la géodésique  $\Gamma(1, \varphi)$ .

Cas B. Si l'application  $\sigma$  est injective,  $T(f)$  n'admet pas de sommet de valence 4, l'application  $\sigma$  est bijective et nous sommes dans l'un des 3 cas suivants.

B.1. Les deux branches de  $f$  sont transverses. Dans ce cas, tous les sommets de valence 1 sont extrémités de branche morte et ceux de valence 3 admettent une unique arête sortante.

B.2. Le sommet #1 est de valence 1 et  $\mathcal{C}(\varphi, \varphi')$  est permis pour les deux branches. Celles-ci se séparent sur une paire non-caractéristique. De plus, le sommet de valence 3 extrémité de la branche géodésique d'extrémité #1 admet 2 arêtes sortantes.

B.3. Le sommet #1 est de valence 1 et  $\mathcal{C}(\varphi, \varphi')$  est permis pour la branche  $\varphi$ , mais non pour la branche  $\varphi'$ . De plus, le sommet de valence 3 extrémité de la branche géodésique d'extrémité #1 admet une unique arête sortante.

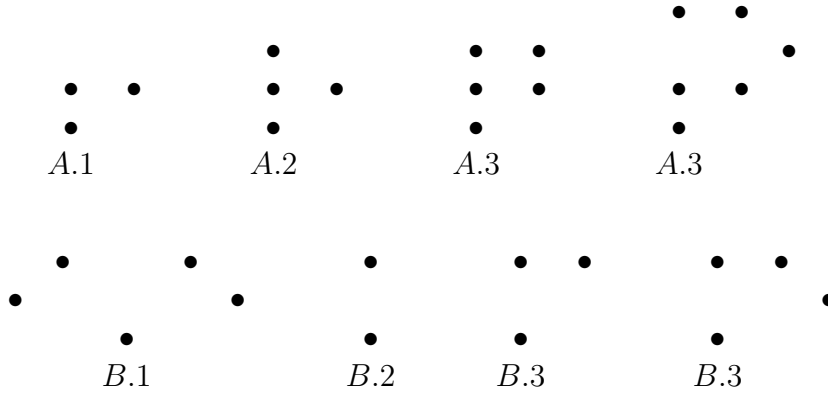


Figure 1

**2.10.** Voyons comment distinguer arête sortante et arête entrante. Soit  $\mathcal{H}_i := (e_i; \eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \eta_{i_3})$  le halo associé à un sommet de valence 3, et  $e_{i_j}$ ,  $j = 1, 2$  ou  $3$  la multiplicité du sommet  $i_j$ , voisin du sommet  $i$ , on a deux cas de figure :

ou bien  $i_j$  est sur une arête sortante pour le sommet  $i$ , par suite  $e_{i_j} > e_i$ , et, d'après 2.4,  $\eta_{i_j} < e_1$ ,

ou bien  $i_j$  est sur une arête entrante pour le sommet  $i$ , par suite  $e_{i_j} < e_i$ , et donc  $\eta_{i_j} = e_{i_j} \geq e_1$ . Dans les cas A.2 et A.3, on trouve une meilleure majoration quand  $i$  est distinct de  $\sigma(1)$ , en effet, si  $i$  est le sommet où se séparent  $\Gamma(1, \varphi)$  et  $\Gamma(1, \varphi')$ , on a, toujours pour une arête entrante :  $\eta_{i_j} = e_{i_j} \geq e_{\sigma(1)} > 2e_1$ .

Dans le cas A,  $e_1$  est donné par 2.9, on trouve donc la proposition suivante.

**2.11. Proposition.** Soit  $\mathcal{H}_i := (e_i; \eta_1, \eta_2, \eta_3)$  le halo associé au sommet de rupture sur lequel se séparent  $\Gamma(1, \varphi)$  et  $\Gamma(1, \varphi')$ . Quitte à renuméroter les voisins de  $i$ , le critère suivant permet de distinguer entre les cas A.2 et A.3 :

dans le cas A.2, on a  $0 < \eta_2, \eta_3 < e_1 < 2e_1 < \eta_1 < e_i$  ;

dans le cas A.3, on a  $0 < \eta_3 < e_1 < 2e_1 < \eta_1, \eta_2 < e_i$ .

**2.12.** Il nous reste à distinguer les sous-cas du cas B. Dans les cas B.1 et B.3, chaque sommet de rupture de  $T(f)$  correspond soit à une paire de Zariski de  $\varphi$ , soit à une paire de

Zariski de  $\varphi'$  ; on a donc  $g + g'$  sommets de rupture, avec  $g \geq 1$  et  $g' \geq 0$ . Dans le cas B.2, le sommet de rupture de plus petite multiplicité est le sommet de séparation des branches de  $f$ , les autres sommets de rupture correspondent soit à une paire de Zariski de  $\varphi$ , soit à une paire de Zariski de  $\varphi'$  ; on a donc  $g + g' + 1$  sommets de rupture, avec  $g \geq 0$  et  $g' \geq 0$ .

On notera  $i(j)$  (resp.  $i'(j)$ ) le sommet de rupture associé à la  $j$ -ème paire de Zariski de  $\varphi$  (resp.  $\varphi'$ ), ceci pour  $j = 1, \dots, g$  (resp.  $j = 1, \dots, g'$ ). Dans le cas B.2, le sommet de séparation sera noté  $i(0)$ . On notera  $e_{i(j)}$  (resp.  $e'_{i(j)}$ ) la multiplicité du sommet  $i(j)$  (resp.  $i'(j)$ ),  $a_{i(j)}$  (resp.  $a'_{i(j)}$ ) la multiplicité du sommet de valence 1 associé, i.e.  $a_{i(j)} = e_{\sigma^{-1}(i(j))}$  et  $a'_{i(j)} = e_{\sigma^{-1}(i'(j))}$ . On désignera par  $\eta_{i(j)}$  le plus petit des  $\eta_{i(j),k}$ ,  $k = 1, 2$  ou  $3$  ; si  $j > 0$ ,  $\eta_{i(j)}$  est donc associé à l'unique arête sortante de  $i(j)$ , et si  $j = 0$ ,  $\eta_{i(0)}$  est associé à l'une des deux arêtes sortantes de  $i(0)$ . On notera de même  $\eta'_{i(j)}$  l'homologue de  $\eta_{i(j)}$  pour la branche  $\varphi'$ .

**2.13. Lemme.** *Si le sommet  $i(j)$  (resp.  $i'(j)$ ) porte une branche morte, on a :*

$$\frac{e_{i(j)}}{a_{i(j)}} = q_j \quad (\text{resp.} \quad \frac{e'_{i(j)}}{a'_{i(j)}} = q'_j).$$

Dans le cas B.2 (resp. B.3), le sommet  $i(0)$  (resp.  $i(1)$ ) est la deuxième extrémité de la branche géodésique d'extrémité #1, et on a :

$$\frac{e_{i(0)}}{a_{i(0)}} = \mathcal{C}(\varphi, \varphi') > 1 \quad (\text{resp.} \quad \frac{e_{i(1)}}{a_{i(1)}} = p_1 > q_1).$$

*Démonstration.* Voir le calcul des multiplicités dans l'arbre de désingularisation dans [BK], dans [MW, 5.4.1 et 6.6.4] ou ci-dessous en 4.15.

**2.14.** Supposons que nous sommes dans le cas B, posons :

$$\nu_0^{(1)}(f) = 2 + \sum_{j=0/1}^{j=g} \eta_{i(j)} \left( \frac{e_{i(j)}}{a_{i(j)}} - 1 \right) + \sum_{j=1}^{j=g'} \eta'_{i(j)} \left( \frac{e'_{i(j)}}{a'_{i(j)}} - 1 \right),$$

$$\nu_0^{(2)}(f) = \min(e_i \mid i \in \text{som}(T(f)), v(i) = 1).$$

De façon précise,  $\nu_0^{(1)}(f) - 2$  est la somme des termes indiqués, étendue à l'ensemble des sommets de valence 3 de  $T(f)$ , et cette somme contient ou non un terme d'indice  $j = 0$ , d'où la notation  $j = 0/1$  pour noter  $j = 0$  ou  $1$ . Nous supposons que l'hypothèse 2.1 est vérifiée, nous pouvons donc calculer  $\nu_0^{(1)}(f)$  et  $\nu_0^{(2)}(f)$  à partir des données.

**2.15. Proposition.** *Dans le cas B,  $\nu_0^{(1)}(f)$  et  $\nu_0^{(2)}(f)$  sont distincts, et la multiplicité  $\nu_0(f)$  est donnée par :*

$$\nu_0(f) = \min(\nu_0^{(1)}(f), \nu_0^{(2)}(f)).$$

*Dans le cas B.1, on a  $\nu_0(f) = \nu_0^{(1)}(f)$ . Dans les cas B.2 et B.3, on a  $\nu_0(f) = \nu_0^{(2)}(f)$ . Quitte à renuméroter les voisins du sommet  $\sigma(1)$  de  $T(f)$ , où  $\sigma(1)$  est le sommet de valence 3 image par  $\sigma$  du sommet de valence 1 de plus petite multiplicité, et en notant provisoirement  $\sigma(1) = i(0/1)$ , le critère suivant permet de distinguer entre les cas B.2 et B.3 :*

*dans le cas B.2, on a  $0 < \eta_2, \eta_3 < \nu_0(f) \leq \eta_1 < e_{i(0/1)}$ , i.e.  $\sigma(1)$  admet deux arêtes sortantes ;*

dans le cas *B.3*, on a  $0 < \eta_3 < \nu_0(f) \leq \eta_1, \eta_2 < e_{i(0/1)}$ , i.e.  $\sigma(1)$  admet deux arêtes entrantes.

*Démonstration.* Dans le cas *B.1*, on a, d'après 2.4 et 2.13 :

$$\begin{aligned}\nu_0^{(1)}(f) &= 2 + \sum_{j=1}^{j=g} \eta_{i(j)} \left( \frac{e_{i(j)}}{a_{i(j)}} - 1 \right) + \sum_{j=1}^{j=g'} \eta'_{i(j)} \left( \frac{e'_{i(j)}}{a'_{i(j)}} - 1 \right), \\ \nu_0^{(1)}(f) &= 2 + \sum_{j=1}^{j=g} q_{j+1} \cdots q_g (q_j - 1) + \sum_{j=1}^{j=g'} q'_{j+1} \cdots q'_{g'} (q'_j - 1), \\ \nu_0^{(1)}(f) &= q_1 \cdots q_g + q'_1 \cdots q'_{g'} = \nu_0(f) < \nu_0^{(2)}(f).\end{aligned}$$

Dans le cas *B.2*, on a, d'après 2.4 et 2.13, et puisque  $\mathcal{C}(\varphi, \varphi') > 1$  :

$$\begin{aligned}\nu_0^{(1)}(f) &= 2 + \sum_{j=0}^{j=g} \eta_{i(j)} \left( \frac{e_{i(j)}}{a_{i(j)}} - 1 \right) + \sum_{j=1}^{j=g'} \eta'_{i(j)} \left( \frac{e'_{i(j)}}{a'_{i(j)}} - 1 \right), \\ \nu_0^{(1)}(f) &= \eta_{i(0)} (\mathcal{C}(\varphi, \varphi') - 1) + 2 + \sum_{j=1}^{j=g} q_{j+1} \cdots q_g (q_j - 1) + \sum_{j=1}^{j=g'} q'_{j+1} \cdots q'_{g'} (q'_j - 1), \\ \nu_0^{(1)}(f) &> q_1 \cdots q_g + q'_1 \cdots q'_{g'} = \nu_0(f) = e_1 = \nu_0^{(2)}(f).\end{aligned}$$

Dans le cas *B.3*, on a, d'après 2.4 et 2.13, et puisque  $p_1 > q_1$  :

$$\begin{aligned}\nu_0^{(1)}(f) &= 2 + \sum_{j=1}^{j=g} \eta_{i(j)} \left( \frac{e_{i(j)}}{a_{i(j)}} - 1 \right) + \sum_{j=1}^{j=g'} \eta'_{i(j)} \left( \frac{e'_{i(j)}}{a'_{i(j)}} - 1 \right), \\ \nu_0^{(1)}(f) &= 2 + q_2 \cdots q_g (p_1 - 1) + \sum_{j=2}^{j=g} q_{j+1} \cdots q_g (q_j - 1) + \sum_{j=1}^{j=g'} q'_{j+1} \cdots q'_{g'} (q'_j - 1), \\ \nu_0^{(1)}(f) &= p_1 q_2 \cdots q_g + q'_1 \cdots q'_{g'} > q_1 \cdots q_g + q'_1 \cdots q'_{g'} = \nu_0(f) = e_1 = \nu_0^{(2)}(f).\end{aligned}$$

On distingue ensuite entre les cas *B.2* et *B.3* en utilisant 2.10.

### 3. Reconstruction de l'arbre réduit de l'arbre de désingularisation.

Soit  $f : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$  un germe de courbe plane à deux branches. On se donne la forme de Seifert  $A(f)$  et on suppose l'hypothèse 2.1 vérifiée. On connaît donc l'ensemble des halos de valence 3 de  $T(f)$  et, s'il existe un halo  $\mathcal{H}_i$  de valence 4, on connaît  $e_i$  et les  $m_{i,j} = \text{pgcd}(e_i, \eta_{i,j})$ , pour  $j = 1, \dots, 4$  (cf. 1.17). Si  $\mathcal{H}_i = (e_i; \eta_{i1}, \eta_{i2}, \eta_{i3})$  est le halo d'un sommet de rupture de valence 3 de  $T(f)$ , l'étude effectuée en 2 donne les réponses aux questions suivantes :

$\eta_{ij}$  est-il porté par une arête entrante ou par une arête sortante ?

dans le cas d'une arête entrante, celle-ci est-elle une arête portée par une branche morte, une arête reliant le sommet de rupture au sommet #1 ou l'arête du type particulier rencontré (en un seul exemplaire) dans les seuls cas *A.3* et *B.3* ?



Nous dirons qu'un halo est *orienté* si on sait distinguer l'arête entrante qui relie le sommet de rupture au sommet #1. Nous montrerons en 3.1 que l'orientation des halos dans  $T(f)$  est fixée. Nous trouverons en 3.5 la disposition relative des halos dans l'arbre  $T(f)$ . Dans certains cas, la reconstruction n'est pas unique, ce qui conduit à la définition de germes isomères, cf. 3.4. Nous montrerons en 3.6 que si deux germes de courbe plane à deux branches ont des formes de Seifert isomorphes, et si l'hypothèse 2.1 est vérifiée, ces germes sont isomères.

**3.1. Proposition. Orientation des halos. i.** *Soit  $\mathcal{H}_i = (e_i; \eta_1, \eta_2, \eta_3)$  le halo d'un sommet de rupture de valence 3 de  $T(f)$ . On peut renuméroter les voisins de  $i$  de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées.*

**a.** *Si le sommet central  $i$  de  $\mathcal{H}_i$  n'est pas le sommet de séparation entre les branches de  $f$ , il admet :*

*une arête entrante, associée à  $\eta_1$ , portée par la géodésique qui relie les sommets  $i$  et #1, et caractérisée par les inégalités  $\eta_1 \geq \nu_0(f) \geq \text{pgcd}(e_i, \eta_1)$ ,*

*une arête entrante, associée à  $\eta_2$ , portée par une branche morte, et caractérisée par les inégalités  $\eta_2 \geq \text{pgcd}(e_i, \eta_2) > \nu_0(f)$ ,*

*et une arête sortante, associée à  $\eta_3$ , et caractérisée par l'inégalité  $\eta_3 < \nu_0(f)$ .*

**b.** *Si le sommet central  $i$  de  $\mathcal{H}_i$  est le sommet de séparation entre les branches de  $f$ , et est associé à une paire non-caractéristique (cas A.2 et B.2), il admet :*

*une arête entrante, associée à  $\eta_1$ , portée par la géodésique qui relie les sommets  $i$  et #1, et caractérisée par l'inégalité  $\eta_1 \geq \nu_0(f)$ ,*

*et deux arêtes sortantes (indiscernables), associées à  $\eta_2$  et  $\eta_3$ , caractérisées par les inégalités  $\eta_2 < \nu_0(f)$  et  $\eta_3 < \nu_0(f)$ .*

**c.** *Si le sommet central  $i$  de  $\mathcal{H}_i$  est le sommet de séparation entre les branches de  $f$ , et est associé à une paire caractéristique pour  $\varphi$ , mais non pour  $\varphi'$  (cas A.3 et B.3), il admet :*

*une arête entrante, associée à  $\eta_1$ , portée par la géodésique qui relie les sommets  $i$  et #1, et caractérisée par les inégalités  $\eta_1 \geq \nu_0(f)$  et  $\text{pgcd}(\eta_1, e_i) > \text{pgcd}(\eta_2, e_i)$ ,*

*une arête entrante, associée à  $\eta_2$ , portée par la géodésique qui relie le sommet  $i$  au sommet symbolisant la branche  $\varphi'$ , et caractérisée par les inégalités  $\eta_2 > \nu_0(f)$  et  $\text{pgcd}(\eta_2, e_i) < \text{pgcd}(\eta_1, e_i)$ ,*

*et une arête sortante, associée à  $\eta_3$ , et caractérisée par l'inégalité  $\eta_3 < \nu_0(f)$ .*

**ii.** *Soit  $\mathcal{H}_i = (e_i; \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$  le halo du sommet de rupture de valence 4 de  $T(f)$ , s'il en existe un. On rappelle que les  $m_{i,j} = \text{pgcd}(e_i, \eta_j)$  sont connus, mais pas les  $\eta_j$ . On peut renuméroter les voisins de  $i$  de sorte que  $i$  admet :*

*une arête entrante, associée à  $\eta_1$ , portée par la géodésique qui relie les sommets  $i$  et #1,*

*une arête entrante, associée à  $\eta_2$ , portée par une branche morte,*

*et deux arêtes sortantes (indiscernables), associées à  $\eta_3$  et  $\eta_4$ ,*

*où la numérotation est définie par la condition :  $m_2 > m_1 > \max(m_3, m_4)$ .*

*Démonstration.* Cette proposition récapitule les résultats relatifs à l'orientation des halos, obtenus plus haut. L'inégalité qui permet de distinguer entre les deux arêtes entrantes dans le cas **i.c** provient, d'une part, de l'égalité  $\text{pgcd}(\eta_1, e_i) = q_c \cdots q_g + q'_c \cdots q'_g$ , voir

pour ce calcul les références données en 2.13, et, d'autre part, de la relation de divisibilité  $\text{pgcd}(\eta_2, e_i) \mid q'_c \cdots q'_{g'}$  de [R1, 2.17] déjà utilisée en 2.5.

Dans le cas **ii**, on vérifie facilement qu'on a, avec les notations 2.2, les inégalités :

$$m_1 = q_c(q_{c+1} \cdots q_g + q'_{c+1} \cdots q'_{g'}), \quad m_2 > p_c(q_{c+1} \cdots q_g + q'_{c+1} \cdots q'_{g'}),$$

$$m_3 \leq q_{c+1} \cdots q_g, \quad m_4 \leq q'_{c+1} \cdots q'_{g'},$$

ce qui donne le résultat indiqué.

**3.2. Définition.** Soit  $f$  un germe de courbe plane à singularité isolée et soit  $T(f)$  son arbre de désingularisation. On appellera *arbre réduit de l'arbre*  $T(f)$ , l'arbre  $TR(f)$  obtenu à partir de  $T(f)$  en effaçant les sommets de valence 2, et en ajoutant, autour de chaque sommet de rupture  $i$ , un sommet, pondéré par  $\eta_{ij}$ , sur l'arête  $(ij)$ , ceci pour tout voisin  $j$  de  $i$  dans  $T(f)$ . Notons que la multiplicité  $e_k$  d'un sommet  $k$  de valence 1 vérifie  $e_k = \text{pgcd}(e_i, \eta_{ij_k})$ , où  $i = \sigma(k)$  est le sommet de rupture associé à  $k$  comme en 2.7, et  $j_k$  est le voisin de  $i$  sur l'arête dirigée vers  $k$  (cf. 2.2). Les multiplicités des sommets de valence 1 sont ainsi déterminées par les halos. De même, la donnée de l'arbre réduit  $TR(f)$  détermine la position des flèches qui symbolisent dans  $T(f)$  les composantes de  $f$ , de la manière suivante : les halos tels que  $\eta_3 = 1$  (resp.  $\eta_2 = \eta_3 = 1$  ou  $\eta_3 = \eta_4 = 1$ ) portent une flèche (resp. deux flèches) ; si la méthode indiquée ne positionne qu'une des deux flèches, nous sommes dans le cas A.3 ou B.3 et de plus la branche qui admet  $\varphi'$  pour développement de Puiseux n'a pas de branche morte au delà du sommet de séparation, alors, la flèche symbolisant  $\varphi'$  se place au bout de l'arête issue du sommet de séparation et portant la composante  $\eta_2$  du halo de ce sommet.

**3.3. Proposition.** *Les halos qui sont voisins sur  $T(f)$  doivent vérifier les conditions suivantes, en numérotant les voisins des sommets de rupture comme indiqué en 3.1 :*

**i.** *Si le halo avec branche morte  $\mathcal{H} = (e, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$  a pour voisin immédiat dans  $T(f)$ , dans la direction du sommet #1, le halo, de valence 3,  $\mathcal{H}^* = (e^*, \eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*)$  ou le halo, de valence 4,  $\mathcal{H}^* = (e^*, \eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*, \eta_4^*)$ , et si le segment géodésique, qui relie ces deux halos, commence du côté de  $\mathcal{H}^*$  par une arête sortante qui porte la composante  $\eta_3^*$  de ce halo, on a les règles de compatibilité suivantes :*

$$\eta_3 \times \frac{e}{\text{pgcd}(e, \eta_2)} = \eta_3^*, \quad \text{pgcd}(e, \eta_1) = \text{pgcd}(e^*, \eta_3^*) \quad \text{et} \quad e^* < \text{pgcd}(e, \eta_2).$$

**ii.** *Si le halo avec branche morte  $\mathcal{H}$  est de valence 4,  $\mathcal{H} = (e, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ , les conditions sur  $\mathcal{H}^*$  restant les mêmes, les règles de compatibilité sont les suivantes :*

$$(\eta_3 + \eta_4) \times \frac{e}{\text{pgcd}(e, \eta_2)} = \eta_3^*, \quad \text{pgcd}(e, \eta_1) = \text{pgcd}(e^*, \eta_3^*) \quad \text{et} \quad e^* < \text{pgcd}(e, \eta_2).$$

**iii.** *Si le halo avec branche morte  $\mathcal{H} = (e, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$  a pour voisin immédiat dans  $T(f)$ , dans la direction du sommet #1, le halo  $\mathcal{H}^* = (e^*, \eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*)$ , et si le segment géodésique, qui relie ces deux halos, commence du côté de  $\mathcal{H}^*$  par une arête entrante qui porte la composante  $\eta_2^*$  de ce halo, nous sommes dans le cas A.3 ou B.3, le halo  $\mathcal{H}^*$  n'est autre que le halo du sommet de séparation et on a la règle de compatibilité suivante :*

$$\text{pgcd}(e, \eta_1) = \text{pgcd}(e^*, \eta_2^*) \quad \text{et} \quad e^* > \text{pgcd}(e, \eta_2).$$

*Démonstration.* Ce résultat traduit la compatibilité des multiplicités sortantes (cf. 2.4), rappelle que le pgcd est constant le long des arêtes d'un même segment géodésique (cf. 2.2) et utilise le fait que la multiplicité du sommet de valence 1 situé au bout d'une branche morte est égale au pgcd des multiplicités le long de cette branche.

**3.4. Définitions.** Considérons l'arbre réduit  $TR(f)$  de l'arbre de désingularisation  $T(f)$  d'un germe de courbe plane à deux branches, numérotions les composantes  $\eta_{ij}$  des halos comme indiqué en 3.1, et considérons la famille des halos de  $TR(f)$ . On appellera *arbre réduit* un arbre obtenu en reliant les halos de cette famille, en suivant les règles indiquées dans la proposition 3.3. On appellera *peuplier* un sous-arbre de l'arbre réduit, obtenu en reliant des halos de valence 3 avec branche morte (choisis dans la famille des halos de  $TR(f)$ ), avec la condition que le halo de multiplicité centrale maximale dans le peuplier admette 1 pour multiplicité sortante, c'est-à-dire, soit de la forme  $\mathcal{H}_M = (e_M; \eta_{M1}, \eta_{M2}, 1)$ . Le poids  $\varpi(\mathcal{P})$  d'un peuplier  $\mathcal{P}$  est défini à partir de son halo de multiplicité centrale minimale  $\mathcal{H}_m = (e_m; \eta_{m1}, \eta_{m2}, \eta_{m3})$  par l'égalité suivante :

$$\varpi(\mathcal{P}) = (\eta_{m3} \times \frac{e_m}{\text{pgcd}(e_m, \eta_{m2})}, \text{pgcd}(e_m, \eta_{m1})).$$

Il est utile de remarquer le point suivant : si  $\mathcal{P}$  est un peuplier composé de  $p$  halos, on obtient de nouveaux peupliers en enlevant à  $\mathcal{P}$  le halo de plus petite multiplicité centrale, ceci 1, 2,  $\dots$ , ou  $p - 1$  fois. Deux arbres réduits sont dits *isomères* si l'on passe de l'un à l'autre en effectuant une ou plusieurs fois l'échange de peupliers de même poids. On dit que deux germes de courbe plane,  $f_1$  et  $f_2$ , à singularité isolée, sont *isomères* si leurs arbres réduits  $TR(f_1)$  et  $TR(f_2)$  sont isomères. Dans ce cas, on dira aussi que  $T(f_1)$  et  $T(f_2)$  sont isomères. Les définitions ci-dessus gardent un sens dans le cas d'un germe de courbe plane  $g$  à singularité isolée avec un nombre arbitraire de branches, si l'on suppose que les sommets de rupture de  $T(g)$  sont tous de valence 3. Voir la remarque 5.10 pour une utilisation de cette notion.

**3.5. Proposition.** *Soit  $f$  un germe de courbe plane à deux branches, les arbres réduits construits à partir de la famille des halos de  $T(f)$  sont isomères.*

*Démonstration.* Nous partons de la famille  $\mathcal{H}(T(f))$  des halos de  $T(f)$ . Nous effectuons l'étude vue en 2 pour savoir dans lequel des cas *A.1*, *A.2*, *A.3* ou *B.1*, *B.2*, *B.3*, nous nous trouvons, et nous orientons les halos.

Si l'arbre  $T(f)$  ne possède aucun halo avec branche morte tel que  $\eta_3 = 1$ , on attache au sommet de séparation une flèche dans les cas *A.3* et *B.3*, ou deux flèches dans les cas *A.1*, *A.2* et *B.2*, et on passe au raccordement des halos situés en dessous du sommet de séparation, voir la fin de la démonstration.

Si l'arbre  $T(f)$  possède un halo  $\mathcal{H} = (e; \eta_1, \eta_2, \eta_3)$  avec branche morte tel que  $\eta_3 = 1$ , nous construisons un peuplier comme suit : on cherche un halo  $\mathcal{H}^* = (e^*; \eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*)$  avec branche morte vérifiant les conditions de compatibilité indiquées en 3.3.i. S'il n'existe pas un tel halo, le halo  $\mathcal{H}$  est le peuplier cherché. Dans le cas contraire, il existe au plus deux halos vérifiant les conditions 3.3.i, parce que la multiplicité sortante du halo, qui est le voisin immédiat de  $\mathcal{H}$  dans  $T(f)$  dans la direction du sommet #1, ne peut se trouver que deux fois dans l'arbre de désingularisation d'un germe à deux branches ; le cas échéant, on choisit pour  $\mathcal{H}^*$  un des deux halos possibles et on raccorde alors  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}^*$  en traçant une arête entre  $\eta_1$  et  $\eta_3^*$ .

En répétant la même opération, on construit ainsi un premier peuplier, puis s'il existe un deuxième halo  $\mathcal{H}'$  avec branche morte tel que  $\eta'_3 = 1$ , un deuxième peuplier, en partant de  $\mathcal{H}'$ . Si la construction fait apparaître deux peupliers, elle peut donner plusieurs arbres réduits distincts (si chaque peuplier est la réunion de  $n$  halos, on peut trouver jusqu'à  $2^n$  arbres réduits), mais on passe d'un arbre réduit à un autre en effectuant une ou plusieurs fois l'échange de peupliers de même poids.

La Figure 2 montre comment les halos  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$  peuvent se raccorder à  $\mathcal{H}^* = (e^*; \eta_j^*)$  et  $\mathcal{H}'^* = (\varepsilon^*; \eta_j'^*)$  de deux manières différentes si les conditions 3.3.i le permettent. On a posé  $a = \text{pgcd}(e, \eta_2)$ ,  $a' = \text{pgcd}(e', \eta'_2)$  et représenté les branches mortes issues de  $e$  et  $e'$ .

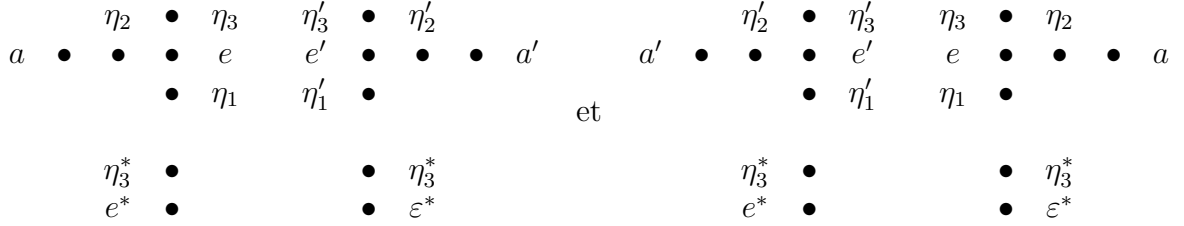


Figure 2 - Échange des halos  $\mathcal{H} = (e; \eta_1, \eta_2, \eta_3)$  et  $\mathcal{H}' = (e'; \eta'_1, \eta'_2, \eta'_3)$

Dans le cas *B.1*, les deux branches de  $f$  sont transverses, et  $TR(f)$  est obtenu en raccordant les deux peupliers construits ci-dessus (resp. le peuplier et une flèche) par une arête qui relie les (la) composante(s)  $\eta_1$  des (du) halo(s) de plus petite multiplicité centrale de chacun des deux peupliers (resp. du peuplier avec la flèche). Dans les autres cas, l'étude indique quel est le sommet de séparation.

Dans les cas *A.1*, *A.2* et *B.2*, on raccorde les deux peupliers, ou le peuplier et une flèche, ou les deux flèches, au sommet de séparation  $e_s$ , en respectant les règles de compatibilité 3.3. i) ou ii) ; en particulier, l'arête sortante, associée à la composante  $\eta_{sj}$  de  $\mathcal{H}_s$ , est attachée à un peuplier dont le poids admet  $\eta_{sj}$  pour première composante, ou à une flèche si  $\eta_{sj} = 1$ . Noter que la première composante du poids d'un peuplier n'est autre que la multiplicité sortante (du sommet  $e_s$ ) le long de l'arête de raccordement, si c'est une arête sortante.

Dans les cas *A.3* et *B.3*, on raccorde les deux peupliers, ou le peuplier et une flèche, ou les deux flèches, au sommet de séparation  $e_s$ , en respectant les règles de compatibilité 3.3. i) pour le raccordement à l'arête sortante (associée à la composante  $\eta_{s3}$  de  $\mathcal{H}_s$ ) et les règles de compatibilité 3.3.iii) pour le raccordement à l'arête entrante (associée à la composante  $\eta_{s2}$  de  $\mathcal{H}_s$ ).

Noter d'une part, que dans chaque cas, on peut construire au moins un arbre réduit, parce que nous sommes partis d'un arbre de désingularisation  $T(f)$  et, d'autre part, que les choix qui interviennent lors de la construction concernent l'échange de peupliers de même poids au dessus du sommet de séparation.

L'isométrie éventuellement rencontrée dans les cas *A.3* et *B.3* est représentée Figure 3.

Les halos restants se raccordent dans l'arbre réduit dans l'ordre décroissant des multiplicités centrales, du halo associé au sommet de séparation jusqu'au halo de plus petite multiplicité centrale ; de plus, l'orientation des halos décrite en 3.1 détermine leurs dispositions relatives

de façon unique.

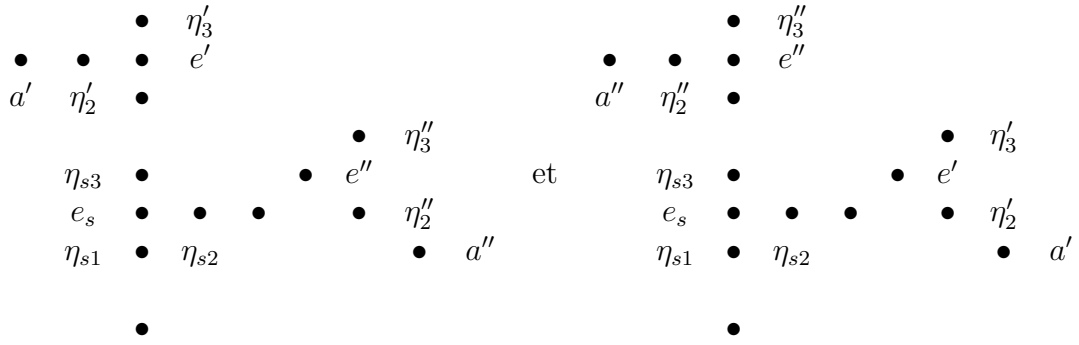


Figure 3 - Échange des halos  $\mathcal{H}' = (e'; \eta'_1, \eta'_2, \eta'_3)$  et  $\mathcal{H}'' = (e''; \eta''_1, \eta''_2, \eta''_3)$

**3.6. Théorème.** Soit  $f_1$  et  $f_2$  deux germes de courbe plane à deux branches, supposons que leurs formes de Seifert  $A(f_1)$  et  $A(f_2)$  sont isomorphes et que l'hypothèse 2.1 est satisfaite, alors les germes  $f_1$  et  $f_2$  sont isomères.

*Démonstration.* Les hypothèses entraînent que la liste des halos de  $T(f_1)$  et celle de  $T(f_2)$  sont identiques, la proposition 3.5 donne donc le résultat.

#### 4. Calcul des paires de Zariski et fin de la reconstruction de l'arbre de désingularisation.

Considérons de nouveau la situation étudiée en 3 :  $f$  désigne un germe de courbe plane à deux branches, on se donne la forme de Seifert  $A(f)$  et on suppose l'hypothèse 2.1 satisfaite. Nous allons calculer les paires de Zariski du germe  $f$  et des germes isomères, s'il en existe, à partir de la forme de Seifert  $A(f)$ , au moyen de l'arbre réduit  $TR(f)$ .

Si  $f$  n'a pas d'isomères, ce qui est le cas général, on en déduira que la donnée de la forme de Seifert détermine le type topologique du germe  $f$ , cf. Théorème 4.11.

Si, au contraire, l'étude donnée en 3 conduit à plusieurs arbres réduits (qui sont donc isomères), nous démontrerons, cf. Théorème 4.12, que chaque arbre réduit construit à partir de  $A(f)$  est l'arbre réduit de l'arbre de désingularisation d'un germe de courbe plane à deux branches  $g$  : les germes  $f$  et  $g$  sont donc isomères. De plus, des germes isomères ont la même multiplicité et le nombre d'intersection des deux branches ne dépend pas de l'isomère choisi.

Enfin, nous donnerons en 4.16 une formule très simple qui calcule le nombre d'intersection des deux branches de  $f$  en termes des multiplicités dans  $T(f)$ , ce qui entraîne que ce nombre d'intersection est déterminé par la collection des halos de  $T(f)$ , et nous conclurons par un exemple en 4.18.

**4.1.** Considérons un germe de courbe plane  $f$  à deux branches, et l'arbre de désingularisation  $T(f)$  de  $f$ . Notons comme en 2.2  $\varphi$  et  $\varphi'$  des développements de Puiseux des branches de  $f$ . On supposera que la droite  $\{x = 0\}$  n'est pas dans le cône tangent au germe de courbe  $\{f = 0\}$ , ce qui entraîne que les paires de Zariski de  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont strictement supérieures à 1. Les lemmes 4.2 à 4.9 donnent le calcul des paires de Zariski associées aux halos  $\mathcal{H} = (e; \eta_j)$  et  $\mathcal{H}' = (e'; \eta'_j)$  de  $T(f)$  représentés Figures 4, 5 et 6, chaque lemme correspondant à un arbre de même numéro. Dans les cas 4.2 et 4.5, le halo  $\mathcal{H}$  peut aussi être un halo de valence 4, la figure doit dans ce cas être modifiée en remplaçant le sommet  $\eta_3$  par deux sommets, de

multiplicités  $\eta_3$  et  $\eta_4$ .

Le lemme 4.10 donne le calcul du coefficient de coïncidence dans le cas *A.2*. Ce coefficient est égal à 1 dans le cas *B.1*, il a été calculé en 2.13 dans le cas *B.2*. Dans les cas *A.1*, *A.3* et *B.3*, il est donné en fonction des paires de Zariski par la formule suivante, cf. 2.2 pour les notations :

$$\mathcal{C}(\varphi, \varphi') = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_1 q_2} + \dots + \frac{p_c}{q_1 \dots q_c}.$$

Pour la démonstration des lemmes, voir le calcul des multiplicités dans l'arbre de désingularisation dans [BK] ou [MW, 5.4.1 et 6.6.4], voir aussi [R, lemmes 3.12 à 3.19] ou le lemme 4.15 ci-dessous.

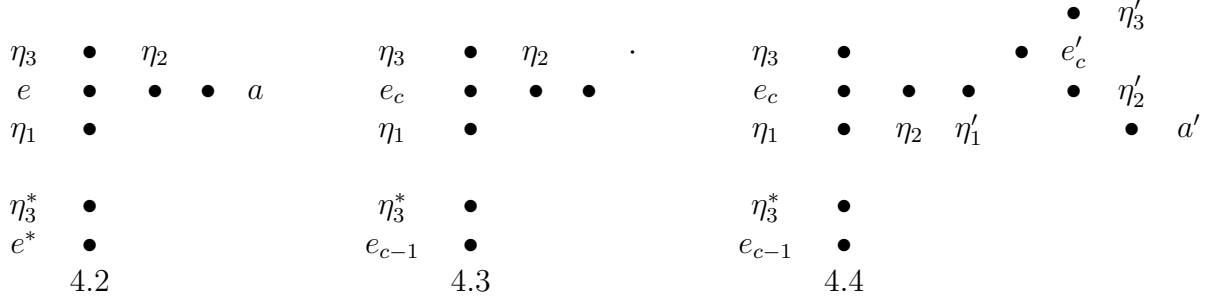


Figure 4

**4.2. Lemme.** *Considérons un halo avec branche morte  $\mathcal{H} = (e; \eta_j)$ , de valence 3 ou 4, et le halo  $\mathcal{H}^* = (e^*; \eta_j^*)$  situé dans l'arbre réduit immédiatement en-dessous de  $\mathcal{H}$ . Notons  $a = \text{pgcd}(e, \eta_2)$  la multiplicité de l'extrémité de la branche morte. La paire de Zariski  $p/q$  associée à  $\mathcal{H}$  est donnée par les formules suivantes :*

$$q = \frac{e}{a}, \quad p = \frac{e - qe^*}{\eta_3^*}.$$

*Si  $\mathcal{H}^*$  est de valence 4,  $\eta_3^*$  n'est pas connu directement, mais il est donné par l'égalité  $\eta_3^* = \eta_3 e/a$ .*

**4.3. Lemme.** *Dans le cas *A.3*, considérons le halo  $\mathcal{H}_c = (e_c; \eta_j)$  du sommet de séparation, et supposons de plus que la branche associée à  $\varphi'$  a  $c-1$  paires de Zariski, c'est-à-dire que la flèche associée à  $\varphi'$  se raccorde en l'arbre réduit à l'extrémité de l'arête portant la composante  $\eta_2$ . Notons  $\mathcal{H}_{c-1} = (e_{c-1}; \eta_j^*)$  le halo associé à la  $(c-1)$ -ième paire de Zariski (commune à  $\varphi$  et  $\varphi'$  par hypothèse). La paire de Zariski  $p_c/q_c$ , associée à  $\mathcal{H}_c$ , est donnée par les formules suivantes :*

$$q_c = \frac{\eta_3^* - 1}{\eta_3}, \quad p_c = \frac{e_c - q_c e_{c-1}}{\eta_3^*}.$$

**4.4. Lemme.** *Dans le cas *A.3*, considérons le halo  $\mathcal{H}_c = (e_c; \eta_j)$  du sommet de séparation, et supposons de plus que la branche associée à  $\varphi'$  a au moins  $c$  paires de Zariski. Notons  $\mathcal{H}'_c = (e'_c; \eta'_j)$  le halo qui se raccorde à l'arbre réduit en l'extrémité de l'arête portant la composante  $\eta_2$ . Notons  $\mathcal{H}_{c-1} = (e_{c-1}; \eta_j^*)$  le halo associé à la  $(c-1)$ -ième paire de Zariski (commune à  $\varphi$  et  $\varphi'$  par hypothèse), notons enfin  $a' = \text{pgcd}(e'_c, \eta'_2)$ . Les paires de Zariski  $p_c/q_c$ , associée à  $\mathcal{H}_c$ , et  $p'_c/q'_c$ , associée à  $\mathcal{H}'_c$ , sont données par les formules suivantes :*

$$q_c = \frac{a' \eta_3^* - e'_c \eta'_3}{a' \eta_3}, \quad q'_c = \frac{e'_c}{a'}, \quad p_c = \frac{e_c - q_c e_{c-1}}{\eta_3^*}, \quad p'_c = \frac{a' - e_{c-1} - p_c \eta_3}{\eta'_3}.$$

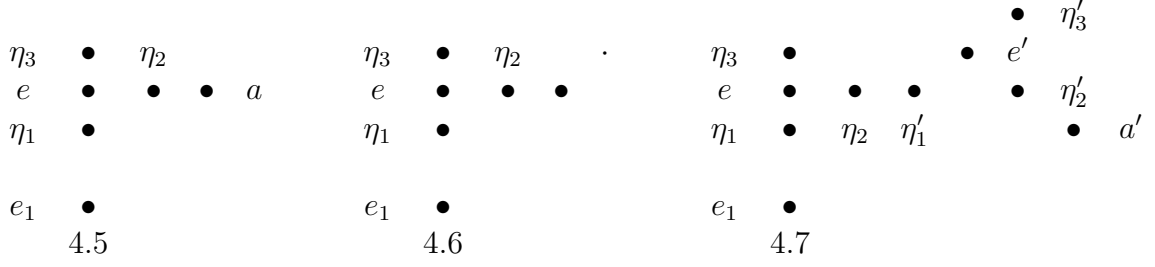


Figure 5

**4.5. Lemme.** Dans les cas A.1, A.2 et A.3, considérons le halo  $\mathcal{H} = (e; \eta_j)$  de plus petite multiplicité centrale. Notons  $a = \text{pgcd}(e, \eta_2)$  et  $e_1$  la multiplicité du sommet #1 (de valence 1). La paire de Zariski  $p_1/q_1$  associée à  $\mathcal{H}$  est donnée par les formules suivantes :

$$q_1 = \frac{e}{a}, \quad p_1 = \frac{e}{e_1}.$$

**4.6. Lemme.** Dans le cas B.3, considérons le halo  $\mathcal{H}_1 = (e_1; \eta_j)$  du sommet de séparation, et supposons de plus que la branche  $\varphi'$  est lisse. Notons  $e_1$  la multiplicité du sommet #1 (de valence 1). La paire de Zariski  $p_1/q_1$  associée à  $\mathcal{H}$  est donnée par les formules suivantes :

$$q_1 = \frac{e_1 - 1}{\eta_3}, \quad p_1 = \frac{e}{e_1}.$$

**4.7. Lemme.** Dans le cas B.3, considérons le halo  $\mathcal{H}_1 = (e_1; \eta_j)$  du sommet de séparation, et supposons de plus que la branche  $\varphi'$  n'est pas lisse. Notons  $\mathcal{H}'_1 = (e'_1; \eta'_j)$  le halo qui se raccorde à l'arbre réduit à l'extrémité de l'arête portant la composante  $\eta_2$ . Notons  $a' = \text{pgcd}(e'_1, \eta'_2)$ . Les paires de Zariski  $p_1/q_1$ , associée à  $\mathcal{H}_1$ , et  $p'_1/q'_1$ , associée à  $\mathcal{H}'_1$ , sont données par les formules suivantes :

$$p_1 = \frac{e}{e_1}, \quad q'_1 = \frac{e'}{a'}, \quad q_1 = \frac{e_1 - q'_1 \eta'_3}{\eta_3}, \quad p'_1 = \frac{a' - p_1 \eta_3}{\eta'_3}.$$

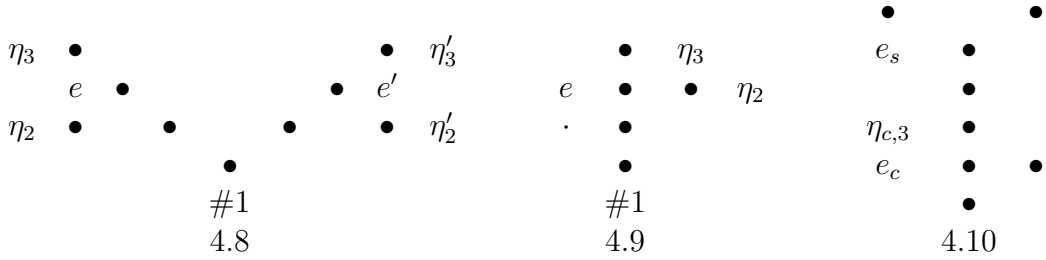


Figure 6

**4.8. Lemme.** Dans le cas B.1, supposons que l'arbre  $T(f)$  comporte deux peupliers. Notons  $\mathcal{H} = (e; \eta_j)$  et  $\mathcal{H}' = (e'; \eta_j)$  les deux halos reliés par une arête au sommet #1, notons  $a = \text{pgcd}(e, \eta_2)$  et  $a' = \text{pgcd}(e', \eta'_2)$ . Les paires de Zariski  $p/q$ , associée à  $\mathcal{H}$ , et  $p'/q'$ , associée à  $\mathcal{H}'$ , sont données par les formules suivantes (on rappelle que l'on a supposé  $p/q > 1$  et  $p'/q' > 1$ ) :

$$q = \frac{e}{a}, \quad q' = \frac{e'}{a'}, \quad p = \frac{a - q' \eta'_3}{\eta_3}, \quad p' = \frac{a' - q \eta_3}{\eta'_3}.$$

**4.9. Lemme.** Dans le cas B.1, supposons que l'arbre  $T(f)$  comporte un seul peuplier. Notons  $\mathcal{H} = (e; \eta_j)$  le halo relié par une arête au sommet #1, notons  $a = \text{pgcd}(e, \eta_2)$ . La paire de Zariski  $p/q$ , associée à  $\mathcal{H}$  est donnée par les formules suivantes :

$$q = \frac{e}{a}, \quad p = \frac{a-1}{\eta_3}.$$

**4.10. Lemme.** Dans le cas A.2, le coefficient de coïncidence  $\mathcal{C}(\varphi, \varphi')$  entre les deux branches de  $f$  se calcule comme suit. On note  $\mathcal{H}_s = (e_s; \eta_{s,j})$  le halo du sommet de séparation, et  $\mathcal{H}_c = (e_c; \eta_{c,1}, \eta_{c,2}, \eta_{c,3})$  le halo du sommet de rupture (avec branche morte) qui correspond à la  $c$ -ième paire de Zariski, cf. 2.2 et Figure 6 pour les notations, on définit l'entier  $\gamma$ ,  $\gamma > 0$ , par l'égalité suivante :

$$\mathcal{C}(\varphi, \varphi') = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_1 q_2} + \dots + \frac{p_c}{q_1 \cdots q_c} + \frac{\gamma}{q_1 \cdots q_c}. \quad \text{On a alors : } \gamma = \frac{e_s - e_c}{\eta_{c,3}}.$$

**4.11. Théorème.** Soit  $f_1$  et  $f_2$  deux germes de courbe plane à deux branches. Supposons que les formes de Seifert sur  $H_1(F(f_a), \mathbf{Z})$ ,  $a = 1$  ou  $2$ , sont isomorphes, que l'hypothèse 2.1 est satisfaite, et que  $f_1$  n'a pas d'isomères, alors  $f_1$  et  $f_2$  ont le même type topologique.

*Démonstration.* D'après l'étude donnée en 3, les hypothèses du théorème entraînent que les arbres réduits  $TR(f_1)$  et  $TR(f_2)$  sont identiques. D'après les lemmes 4.2 à 4.9, il s'ensuit que les branches des germes  $f_1$  et  $f_2$  ont les mêmes paires de Zariski. De plus, d'après 4.1 et 4.10, le coefficient de coïncidence entre les deux branches de  $f_1$  est égal au coefficient de coïncidence entre les deux branches de  $f_2$ . Par suite, les germes  $f_1$  et  $f_2$  ont le même type topologique. Sans utiliser le coefficient de coïncidence, on peut aussi remarquer que la forme de Seifert détermine directement le nombre d'intersection des deux branches  $f'_1$  et  $f''_1$  (resp.  $f'_2$  et  $f''_2$ ) de  $f_1 = f'_1 \cdot f''_1$  (resp.  $f_2 = f'_2 \cdot f''_2$ ), par la formule  $\nu_0(f'_1, f''_1) = -A(b, b)$ , où  $b$  est un générateur de  $\text{Ker}(t-1) \subset H_1(F, \mathbf{Z})$ , on a donc :

$$\nu_0(f'_1, f''_1) = \nu_0(f'_2, f''_2).$$

**4.12. Théorème.** Soit  $f$  un germe de courbe plane à deux branches. Supposons que l'arbre réduit  $TR(f)$  admet des isomères. Alors chaque arbre réduit isomère de l'arbre  $TR(f)$  est l'arbre réduit de l'arbre de désingularisation d'un germe de courbe plane à deux branches  $g$ , un tel germe  $g$  est donc un isomère de  $f$ . De plus, si les germes à deux branches  $f = f' \cdot f''$  et  $g = g' \cdot g''$  sont isomères, ils ont la même multiplicité, et le nombre d'intersection des deux branches est le même dans les deux cas, autrement dit :

$$\nu_0(f) = \nu_0(g) \quad \text{et} \quad \nu_0(f', f'') = \nu_0(g', g'').$$

*Démonstration.* Voir ci-dessous en 4.17.

**4.13.** Donnons une méthode de calcul des multiplicités dans un arbre de désingularisation, en commençant par le calcul de la multiplicité d'intersection de deux germes irréductibles. Soit  $g$  et  $h$  deux germes de courbe plane à une branche, notons  $m = \nu_0(g)$  et  $n = \nu_0(h)$  les multiplicités à l'origine de ces germes, supposons que  $\{x=0\}$  n'est pas dans le cône tangent à  $\{gh=0\}$  et choisissons un développement de Puiseux  $\chi$  (resp.  $\psi$ ) pour  $g$  (resp.  $h$ ), de sorte que  $\{g=0\}$  est paramétré par  $x=t^m$ ,  $y=\chi(t)$  et  $\{h=0\}$  est paramétré par



$x = u^n$ ,  $y = \psi(u)$ . Quitte à multiplier par un inversible de  $\mathbf{C}\{x, y\}$ , on peut supposer que  $g$  et  $h$  sont dans  $\mathbf{C}\{x\}[y]$  et que :

$$g(x, y) = \prod_{\alpha^m=1} (y - \chi(\alpha t)) \quad \text{et} \quad h(x, y) = \prod_{\beta^n=1} (y - \psi(\beta u)).$$

Le résultant  $R_y(g, h)$  de  $g$  et  $h$  est l'élément suivant de  $\mathbf{C}\{x\}$ , en notant que  $x = t^m = u^n$  :

$$R_y(g, h) = \prod_{\alpha^m=1} h(t^m, \chi(\alpha t)) = \prod_{\alpha^m=\beta^n=1} (\chi(\alpha t) - \psi(\beta u)).$$

**4.14. Lemme.** *Avec les mêmes notations, supposons que  $g$  et  $h$  ne sont pas proportionnels, la multiplicité d'intersection en 0 de ces deux germes est donnée par l'égalité suivante :*

$$\nu_0(g, h) = \text{val}_x(R_y(g, h)) = \text{val}_x\left(\prod_{\alpha^m=\beta^n=1} (\chi(\alpha t) - \psi(\beta u))\right).$$

*Démonstration.* La définition générale  $\nu_0(g, h) = \dim(\mathbf{C}\{x, y\}/(g, h))$ , valable sans condition d'irréductibilité sur  $g$  et  $h$ , donne, si  $g$  est irréductible, et pour tout  $\alpha$  tel que  $\alpha^m = 1$ ,  $\nu_0(g, h) = \text{val}_t(h(t^m, \chi(\alpha t)))$ . On a donc :

$$m \nu_0(g, h) = m \text{val}_t(h(t^m, \chi(\alpha t))) = \text{val}_t(R_y(g, h)) = m \text{val}_x(R_y(g, h)).$$

Ceci donne la première égalité. La deuxième égalité s'ensuit, si on suppose de plus  $h$  irréductible.

**4.15. Lemme.** *Soit  $f$  un germe de courbe plane, et  $T(f)$  l'arbre de désingularisation avec multiplicités de  $f$ . Soit  $i$  un sommet de  $T(f)$  et  $\gamma_i$  une curvette de  $f$  associée au sommet  $i$ . La multiplicité  $e_i$  du sommet  $i$  est donnée par l'égalité suivante :*

$$e_i = \nu_0(f, \gamma_i).$$

L'arbre  $T(f)$  donne sans calcul un développement de Puiseux d'une curvette associée au sommet  $i$ , on peut donc utiliser les deux lemmes précédents pour déterminer explicitement  $e_i$ .

**4.16. Proposition.** *Soit  $f = f' \cdot f''$  un germe de courbe plane à deux branches, et  $T(f)$  l'arbre de désingularisation avec multiplicités de  $f$ . Le nombre d'intersection des deux branches  $f'$  et  $f''$  est donné par la formule suivante, où le produit est étendu aux sommets de l'arbre  $T(f)$  :*

$$\nu_0(f', f'') = \prod_i e_i^{v(i)-2}.$$

*Démonstration.* On utilisera les notations 2.2, on notera donc  $\varphi$  (resp.  $\varphi'$ ) un développement de Puiseux de  $f'$  (resp.  $f''$ ),  $p_1/q_1, \dots, p_g/q_g$  les paires de Zariski de  $\varphi$ ,  $p'_1/q'_1, \dots, p'_g/q'_g$  les paires de Zariski de  $\varphi'$  et  $\mathcal{L} = \nu_0(f', f'')$ , qui est aussi le nombre d'enlacement des deux composantes de bord de la fibre de Milnor. Nous donnons une démonstration pour chacun des cas énumérés en 2.9, voir Figure 1. Dans chacun des cas, les résultats du lemme 2.13 seront utilisés pour regrouper, dans le produit des  $e_i^{v(i)-2}$ , les multiplicités des sommets, extrémités de chaque branche morte ou de la branche géodésique d'extrémité  $\#1$ , si ce sommet est de valence 1.

i. Le cas *B.1*. Les branches sont transverses. On a directement  $\mathcal{L} = q_1 \cdots q_g q'_1 \cdots q'_{g'} = \prod_i e_i^{v(i)-2}$ .

ii. Le cas *B.2*. Les branches se séparent sur une paire non caractéristique  $c = \mathcal{C}(\varphi, \varphi')$ , telle que  $c < p_1/q_1$  et  $c < p'_1/q'_1$ . On peut supposer pour le calcul que :

$$\varphi = x^{p_1/q_1} + \cdots \quad \text{et} \quad \varphi' = x^c + x^{p'_1/q'_1} + \cdots$$

Chacun des termes qui interviennent dans le produit donné en 4.14 est de valuation  $c$ , on trouve donc le résultat demandé :

$$\mathcal{L} = q_1 \cdots q_g q'_1 \cdots q'_{g'} \mathcal{C}(\varphi, \varphi') = \prod_i e_i^{v(i)-2}.$$

iii. Le cas *B.3*, en supposant de plus la branche  $f''$  lisse. Les branches se séparent sur la première paire caractéristique de  $\varphi$ ,  $p_1/q_1 = \mathcal{C}(\varphi, \varphi')$ . On peut supposer que :

$$\varphi = x^{p_1/q_1} + \cdots \quad \text{et} \quad \varphi' = x^d, \quad \text{avec} \quad d > p_1/q_1.$$

Chacun des termes qui interviennent dans le produit donné en 4.14 est de valuation  $p_1/q_1$ , on trouve donc le résultat demandé :

$$\mathcal{L} = q_1 \cdots q_g p_1/q_1 = p_1 q_2 \cdots q_g = \prod_i e_i^{v(i)-2}.$$

iv. Le cas *B.3*, en supposant de plus la branche  $f''$  non lisse. Les deux branches se séparent sur la première paire caractéristique de  $\varphi$ ,  $p_1/q_1 = \mathcal{C}(\varphi, \varphi')$ , et  $p_1/q_1 < p'_1/q'_1$ . On peut supposer que :

$$\varphi = x^{p_1/q_1} + \cdots \quad \text{et} \quad \varphi' = x^{p'_1/q'_1} + \cdots.$$

Chacun des termes qui interviennent dans le produit donné en 4.14 est de valuation  $p_1/q_1$ , on trouve donc le résultat demandé :

$$\mathcal{L} = q_1 \cdots q_g q'_1 \cdots q'_{g'} p_1/q_1 = p_1 q_2 \cdots q_g q'_1 \cdots q'_{g'} = \prod_i e_i^{v(i)-2}.$$

v. Le cas *A.1*. Les deux branches ont  $c$  paires de Zariski en commun et se séparent sur la paire caractéristique  $p_c/q_c$ . Notons  $e_1$  la multiplicité du sommet #1,  $e_s$  celle du sommet de séparation (de valence 4),  $g_s$  et  $g'_s$  deux curvettes associées à ce sommet et en position générale. On peut supposer que les développements de Puiseux  $\varphi, \varphi', \chi_s$  et  $\chi'_s$  de  $f', f'', g_s$  et  $g'_s$  sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varphi &= x^{p_1/q_1} (1 + \cdots (1 + x^{p_c/q_1 \cdots q_c} + \cdots)), & \varphi' &= x^{p_1/q_1} (1 + \cdots (1 + 2x^{p_c/q_1 \cdots q_c} + \cdots)), \\ \chi_s &= x^{p_1/q_1} (1 + \cdots (1 + 3x^{p_c/q_1 \cdots q_c})) & \text{et} & \quad \chi'_s = x^{p_1/q_1} (1 + \cdots (1 + 4x^{p_c/q_1 \cdots q_c})). \end{aligned}$$

On trouve successivement, en utilisant 4.14 et 4.15 :

$$\begin{aligned} e_s &= \nu_0(g_s, f) = \nu_0(g_s, f') + \nu_0(g_s, f'') = (q_{c+1} \cdots q_g + q'_{c+1} \cdots q'_{g'}) \nu_0(g_s, g'_s), \\ e_1 &= q_1 \cdots q_c (q_{c+1} \cdots q_g + q'_{c+1} \cdots q'_{g'}) \quad \text{et} \quad \prod_i e_i^{v(i)-2} = \frac{e_s}{e_1} q_1 \cdots q_c q_{c+1} \cdots q_g q'_{c+1} \cdots q'_{g'}, \end{aligned}$$

par suite,  $\prod_i e_i^{v(i)-2} = q_{c+1} \cdots q_g q'_{c+1} \cdots q'_g \nu_0(g_s, g'_s) = \nu_0(f', f'') = \mathcal{L}$ , c.q.f.d..

vi. Le cas *A.2*. Les deux branches ont  $c$  paires de Zariski en commun et se séparent sur une paire non caractéristique. Les notations  $e_1, e_s, g_s$  et  $g'_s$  gardent le sens précédent. On peut supposer que les développements de Puiseux  $\varphi, \varphi', \chi_s$  et  $\chi'_s$  de  $f', f'', g_s$  et  $g'_s$  sont de la forme suivante, où  $p_c < a$  et  $aq_{c+1} < p_c q_{c+1} + p_{c+1}$  :

$$\varphi = x^{p_1/q_1} (1 + \cdots (1 + x^{p_c/q_1 \cdots q_c} + x^{(p_c q_{c+1} + p_{c+1})/q_1 \cdots q_{c+1}} + \cdots)),$$

$$\varphi' = x^{p_1/q_1} (1 + \cdots (1 + x^{p_c/q_1 \cdots q_c} + x^{a/q_1 \cdots q_c} + x^{(p_c q'_{c+1} + p'_{c+1})/q_1 \cdots q_c q'_{c+1}} + \cdots)),$$

$$\chi_s = x^{p_1/q_1} (1 + \cdots (1 + x^{p_c/q_1 \cdots q_c} + 2x^{a/q_1 \cdots q_c})) \quad \text{et} \quad \chi'_s = x^{p_1/q_1} (1 + \cdots (1 + x^{p_c/q_1 \cdots q_c} + 3x^{a/q_1 \cdots q_c})).$$

Le calcul donné en *A.1* s'applique sans changement au cas *A.2*. Noter cependant que la valeur de  $\nu_0(g_s, g'_s)$  dépend du cas considéré, puisque  $\nu_0(g_s, g'_s) = a q_1 \cdots q_c$ , le cas *A.1* correspondant à  $a = p_1$ .

vii. Le cas *A.3*. Premier sous-cas : les deux branches ont  $(c-1)$  paires de Zariski en commun,  $(c-1) > 0$ , et se séparent sur la paire  $p_c/q_c$ , caractéristique pour  $\varphi$ , mais non pour  $\varphi'$ , qui a  $(c-1)$  paires de Zariski. Les notations  $e_1, e_s, g_s$  et  $g'_s$  gardent le sens précédent. On peut supposer que les développements de Puiseux  $\varphi, \varphi', \chi_s$  et  $\chi'_s$  de  $f', f'', g_s$  et  $g'_s$  sont de la forme suivante, où  $d q_c > p_{c-1} q_c + p_c$  :

$$\varphi = x^{p_1/q_1} (1 + \cdots (1 + x^{p_c/q_1 \cdots q_c} + \cdots)), \quad \varphi' = x^{p_1/q_1} (1 + \cdots (1 + x^{p_{c-1}/q_1 \cdots q_{c-1}} + x^{d/q_1 \cdots q_{c-1}})),$$

$$\chi_s = x^{p_1/q_1} (1 + \cdots (1 + 2x^{p_c/q_1 \cdots q_c})) \quad \text{et} \quad \chi'_s = x^{p_1/q_1} (1 + \cdots (1 + 3x^{p_c/q_1 \cdots q_c})).$$

On trouve successivement :

$$e_s = \nu_0(g_s, f) = \nu_0(g_s, f') + \nu_0(g_s, f'') = q_{c+1} \cdots q_g \nu_0(g_s, g'_s) + \nu_0(g_s, f''),$$

$$e_1 = q_1 \cdots q_{c-1} (1 + q_c \cdots q_g), \quad \nu_0(g_s, g'_s) = \frac{p_c}{q_1 \cdots q_c} (q_1 \cdots q_c)^2 = p_c q_1 \cdots q_c,$$

$$\nu_0(g_s, f'') = \frac{p_c}{q_1 \cdots q_c} q_1 \cdots q_c q_1 \cdots q_{c-1} = p_c q_1 \cdots q_{c-1},$$

$$\mathcal{L} = \nu_0(f', f'') = q_{c+1} \cdots q_g \nu_0(g_s, f'') = \frac{e_s q_1 \cdots q_g}{e_1 q_c} = \prod_i e_i^{v(i)-2}, \text{ c.q.f.d.}$$

viii. Le cas *A.3*. Deuxième sous-cas : les deux branches ont  $(c-1)$  paires de Zariski en commun,  $(c-1) > 0$ , et se séparent sur la paire  $p_c/q_c$ , caractéristique pour  $\varphi$ , mais non pour  $\varphi'$ , qui a au moins  $c$  paires de Zariski. Les notations  $e_1, e_s, g_s$  et  $g'_s$  gardent le sens précédent. On peut supposer que les développements de Puiseux  $\varphi, \varphi', \chi_s$  et  $\chi'_s$  de  $f', f'', g_s$  et  $g'_s$  sont de la forme suivante, où  $p_c/q_c < p'_c/q'_c$  :

$$\varphi = x^{p_1/q_1} (1 + \cdots (1 + x^{p_{c-1}/q_1 \cdots q_{c-1}} (1 + x^{p_c/q_1 \cdots q_c} + \cdots))), \quad \chi_s = x^{p_1/q_1} (1 + \cdots (1 + 2x^{p_c/q_1 \cdots q_c})),$$

$$\varphi' = x^{p_1/q_1} (1 + \cdots (1 + x^{p_{c-1}/q_1 \cdots q_{c-1}} (1 + x^{p'_c/q_1 \cdots q_{c-1} q'_c} + \cdots))),$$

$$\chi'_s = x^{p_1/q_1} (1 + \cdots (1 + 3x^{p_c/q_1 \cdots q_c})).$$

On trouve successivement :

$$\begin{aligned}
e_s &= \nu_0(g_s, f') + \nu_0(g_s, f'') = q_{c+1} \cdots q_g \nu_0(g_s, g'_s) + \nu_0(g_s, f''), \\
e_1 &= q_1 \cdots q_{c-1} (q_c \cdots q_g + q'_c \cdots q'_{g'}), \\
\nu_0(g_s, g'_s) &= p_c q_1 \cdots q_c, \quad \nu_0(g_s, f'') = p_c q_1 \cdots q_{c-1} q'_c \cdots q'_{g'}, \\
\mathcal{L} = \nu_0(f', f'') &= q_{c+1} \cdots q_g \nu_0(g_s, f'') = \frac{e_s q_1 \cdots q_g q'_c \cdots q'_{g'}}{e_1 q_c} = \prod_i e_i^{v(i)-2}, \text{ c.q.f.d.}
\end{aligned}$$

**4.17. Démonstration du Théorème 4.12.** On part d'un germe de courbe plane à deux branches  $f$ , on suppose avoir trouvé un arbre réduit  $TR'$ , isomère de  $TR(f)$ . On veut montrer qu'il existe un germe de courbe plane à deux branches  $g$  tel que  $TR' = TR(g)$ . On supposera que  $TR'$  s'obtient à partir de  $TR(f)$  par un unique échange de peupliers de même poids. Le cas général s'en déduit en itérant le cas d'un échange unique. D'après 3.5, deux cas se présentent, voir les Figures 2 et 3, dont nous reprenons les notations.

i. Le cas représenté Figure 2. Dans l'arbre  $T(f)$ , les paires de Zariski  $p/q$ , associée à  $\mathcal{H}$ , et  $p'/q'$ , associée à  $\mathcal{H}'$  sont données par les formules suivantes :

$$q = \frac{e}{a}, \quad p = \frac{e - qe^*}{\eta_3^*} = \frac{a - e^*}{\eta_3}, \quad q' = \frac{e'}{a'}, \quad p' = \frac{e' - q'\varepsilon^*}{\eta_3^*} = \frac{a' - \varepsilon^*}{\eta_3'}.$$

Si le germe  $g$  existe, nous noterons  $\pi/\chi$  la paire de Zariski associée à  $\mathcal{H}$  et  $\pi'/\chi'$  la paire associée à  $\mathcal{H}'$  dans  $T(g)$ ; celles-ci doivent vérifier les formules suivantes :

$$\chi = \frac{e}{a}, \quad \pi = \frac{a - \varepsilon^*}{\eta_3}, \quad \chi' = \frac{e'}{a'}, \quad \pi' = \frac{a' - e^*}{\eta_3'}.$$

On doit donc avoir  $\chi = q$ ,  $\chi' = q'$ ,  $\pi = p + \frac{e^* - \varepsilon^*}{\eta_3}$  et  $\pi' = p' + \frac{\varepsilon^* - e^*}{\eta_3'}$ . Les multiplicités sortantes des halos  $\mathcal{H}^*$  et  $\mathcal{H}'^*$  sont égales à  $\eta_3^*$ , il s'ensuit que  $e^*$  et  $\varepsilon^*$  sont divisibles par  $\eta_3^*$ , ainsi que les multiplicités des sommets situés dans  $T(f)$  sur la géodésique qui joint les deux sommets de valence 3 au centre des halos  $\mathcal{H}^*$  et  $\mathcal{H}'^*$ . Ceci entraîne que  $e^*$  et  $\varepsilon^*$  sont divisibles par  $\eta_3 = \eta_3^*/q$  et  $\eta_3' = \eta_3^*/q'$  et que les nombres  $\pi$  et  $\pi'$  sont des nombres entiers. Les conditions  $e^* < a$ ,  $\varepsilon^* < a'$ ,  $e^* < a$  et  $\varepsilon^* < a'$  donnent de plus que  $\pi$  et  $\pi'$  sont positifs.

On remarquera plus précisément que  $\pi - p$  (resp.  $\pi' - p'$ ) est un multiple entier de  $q$  (resp.  $q'$ ) :

$$\pi - p = q \frac{e^* - \varepsilon^*}{\eta_3^*} \quad \text{et} \quad \pi' - p' = q' \frac{\varepsilon^* - e^*}{\eta_3^*}.$$

Autrement dit, les développements en fraction continue de  $p/q$  et de  $\pi/q$  ne se distinguent que par leurs parties entières, et il en est de même pour les développements de  $p'/q'$  et de  $\pi'/q'$  :

$$\frac{p}{q} = h_0 + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 + \cdots}} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{q} = \bar{h}_0 + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 + \cdots}}.$$

On notera  $\text{ez}(h)$  les exposants caractéristiques de Zariski d'un germe irréductible  $h$ . Supposons que les exposants des branches  $f'$  et  $f''$  du germe  $f = f' \cdot f''$  sont :

$$\text{ez}(f') = \left( \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_a}{q_a}, \frac{p}{q}, \frac{p_{a+2}}{q_{a+2}}, \dots, \frac{p_g}{q_g} \right) \quad \text{et} \quad \text{ez}(f'') = \left( \frac{p'_1}{q'_1}, \frac{p'_2}{q'_2}, \dots, \frac{p'_b}{q'_b}, \frac{p'}{q}, \frac{p'_{b+2}}{q'_{b+2}}, \dots, \frac{p'_{g'}}{q'_{g'}} \right).$$

Considérons un germe  $g = g' \cdot g''$  à deux branches dont le type topologique est défini comme suit. D'une part, les exposants caractéristiques de Zariski des branches  $g'$  et  $g''$  sont :

$$\text{ez}(g') = \left( \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_a}{q_a}, \frac{\pi'}{q'}, \frac{p'_{b+2}}{q'_{b+2}}, \dots, \frac{p'_{g'}}{q'_{g'}} \right) \quad \text{et} \quad \text{ez}(g'') = \left( \frac{p'_1}{q'_1}, \frac{p'_2}{q'_2}, \dots, \frac{p'_b}{q'_b}, \frac{\pi}{q}, \frac{p_{a+2}}{q_{a+2}}, \dots, \frac{p_g}{q_g} \right),$$

et, d'autre part, le coefficient de coïncidence entre les branches de  $g$  est égal au coefficient de coïncidence entre les branches de  $f$ . La méthode de calcul donnée dans [MW, 6.6] permet alors de vérifier que les arbres  $TR'$  et  $TR(g)$  sont identiques, le point clé étant la remarque sur les développements en fraction continue de  $p/q$  et de  $\pi/q$  (resp. de  $p'/q'$  et de  $\pi'/q'$ ), qui assure que le halo associé à  $\pi/q$  (resp.  $\pi'/q'$ ) dans  $T(g)$  est identique au halo  $\mathcal{H}$  (resp.  $\mathcal{H}'$ ) de  $T(f)$ .

Les arbres  $T(f)$  et  $T(g)$  étant isomères, on a, d'après 4.16,  $\nu_0(f', f'') = \nu_0(g', g'')$ . On a enfin, par construction,  $\eta_3^* = qq_{a+2} \cdots q_g = q'q'_{b+2} \cdots q'_{g'}$ , ce qui donne :

$$\nu_0(f) = q_1 q_2 \cdots q_g + q'_1 q'_2 \cdots q'_{g'} = \eta_3^* (q_1 q_2 \cdots q_a + q'_1 q'_2 \cdots q'_b) = \nu_0(g).$$

Le germe  $g$  construit ci-dessus satisfait donc les propriétés demandées.

ii. Le cas représenté Figure 3. Dans l'arbre  $T(f)$ , les paires de Zariski  $p'/q'$ , associée à  $\mathcal{H}'$ , et  $p''/q''$ , associée à  $\mathcal{H}''$  sont données par les formules suivantes, où  $p_s/q_s$  est la paire de Zariski associée au sommet de séparation et  $e_{s-1}$  est la multiplicité du sommet de rupture qui précède le sommet de séparation, s'il en existe un, et 0 sinon :

$$q' = \frac{e'}{a'}, \quad p' = \frac{e' - q'e_s}{\eta_{s3}} = \frac{a' - e_s}{\eta_3'}, \quad q'' = \frac{e''}{a''}, \quad p'' = \frac{a'' - e_{s-1} - p_s \eta_{s3}}{\eta_3''}.$$

Si le germe  $g$  existe, nous noterons  $\pi'/\chi'$  la paire de Zariski associée à  $\mathcal{H}'$  et  $\pi''/\chi''$  la paire associée à  $\mathcal{H}''$  dans  $T(g)$  ; celles-ci doivent vérifier les formules suivantes :

$$\chi'' = \frac{e''}{a''}, \quad \pi'' = \frac{e'' - \chi'' e_s}{\eta_{s3}} = \frac{a'' - e_s}{\eta_3''}, \quad \chi' = \frac{e'}{a'}, \quad \pi' = \frac{a' - e_{s-1} - p_s \eta_{s3}}{\eta_3'}.$$

On doit donc avoir  $\chi' = q'$ ,  $\chi'' = q''$ ,  $\pi' = p' + \frac{e_s - e_{s-1} - p_s \eta_{s3}}{\eta_3'}$  et  $\pi'' = p'' - \frac{e_s - e_{s-1} - p_s \eta_{s3}}{\eta_3''}$ .

La condition imposée sur les halos donne en particulier  $\eta_{s3} = q' \eta_3' = q'' \eta_3''$ , par suite, les deux branches de  $f$  ont une multiplicité en 0 multiple de  $\eta_{s3}$ . On trouve ainsi que  $e_s$  et  $e_{s-1}$  sont multiples de  $\eta_{s3}$ . Les nombres  $\pi'$  et  $\pi''$  sont donc entiers. Plus précisément, on voit que  $\pi' - p'$  est un multiple entier de  $q'$ , et  $\pi'' - p''$  un multiple entier de  $q''$  :

$$\pi' - p' = q' \left( \frac{e_s - e_{s-1}}{\eta_{s3}} - p_s \right) \quad \text{et} \quad \pi'' - p'' = -q'' \left( \frac{e_s - e_{s-1}}{\eta_{s3}} - p_s \right).$$

Supposons que les exposants caractéristiques de Zariski des branches  $f'$  et  $f''$  du germe  $f = f' \cdot f''$  sont :

$$\text{ez}(f') = \left( \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_s}{q_s}, \frac{p'}{q'}, \frac{p_{s+2}}{q_{s+2}}, \dots, \frac{p_g}{q_g} \right) \text{ et } \text{ez}(f'') = \left( \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_{s-1}}{q_{s-1}}, \frac{p''}{q''}, \frac{p'_{s+1}}{q'_{s+1}}, \dots, \frac{p'_{g'}}{q'_{g'}} \right).$$

Considérons un germe  $g = g' \cdot g''$  à deux branches dont le type topologique est défini comme suit. D'une part, les exposants caractéristiques de Zariski des branches  $g'$  et  $g''$  sont :

$$\text{ez}(g') = \left( \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_s}{q_s}, \frac{\pi''}{q''}, \frac{p'_{s+1}}{q'_{s+1}}, \dots, \frac{p'_{g'}}{q'_{g'}} \right) \text{ et } \text{ez}(g'') = \left( \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_{s-1}}{q_{s-1}}, \frac{\pi'}{q'}, \frac{p_{s+2}}{q_{s+2}}, \dots, \frac{p_g}{q_g} \right),$$

et, d'autre part, le coefficient de coïncidence entre les branches de  $g$  est égal au coefficient de coïncidence  $\mathcal{C}(\varphi, \varphi') = p_s/q_s$  entre les branches de  $f$ . On termine la démonstration comme dans le premier cas.

### 5. Formes de Seifert de germes isomères.

Comme plus haut,  $f$  désigne un germe de courbe plane à singularité isolée à deux branches  $f$ , et  $F$  sa fibre de Milnor. Nous allons démontrer dans cette section que  $M_{-2}H_1(F, \mathbf{Z})$  et  $\text{Gr}_0^M(H_1(F, \mathbf{Z}))$  sont des  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules cycliques, *cf.* Théorème 5.7. On en déduira que, si deux germes de courbe plane à deux branches sont isomères, leurs formes de Seifert sont isomorphes, *cf.* Théorème 5.9.

**5.1.** On notera  $\Gamma(\varphi, \varphi')$  la géodésique de  $T(f)$  joignant les flèches symbolisant  $\varphi$  et  $\varphi'$ ; les *sommets* de  $\Gamma(\varphi, \varphi')$  seront les sommets de rupture, le sommet #1 s'il est sur  $\Gamma(\varphi, \varphi')$  (c'est-à-dire si les deux branches sont transverses) et l'éventuel sommet de valence 2 portant la flèche associée à  $\varphi'$  de  $T(f)$  portés par cette géodésique; les *arêtes* de  $\Gamma(\varphi, \varphi')$  seront les segments géodésiques de  $T(f)$  portés par cette géodésique.

Les sommets (resp. les arêtes) seront pondérés par les  $e_i$  et  $r_i$  (resp. les  $m_{ij}$ ) calculés dans  $T(f)$ . Les sommets de  $\Gamma(\varphi, \varphi')$  seront renumérotés en suivant leur position sur la géodésique, de 1 (correspondant au sommet de rupture sur lequel s'attache la flèche associée à  $\varphi$ ) à  $N+1$  (associé à  $\varphi'$ ). Les  $e_i$  et  $r_i$  seront numérotés par le nouveau numéro du sommet correspondant et les  $m_{ij}$  par le numéro du segment géodésique, comme indiqué Figure 7 ci-dessous.

$$\Gamma(\varphi, \varphi') : \quad \begin{array}{cccccccccccc} r_1 & m_1 & r_2 & m_2 & r_3 & m_3 & \dots & m_{N-1} & r_N & m_N & r_{N+1} \\ \bullet & & \bullet & & \bullet & & \dots & & \bullet & & \bullet \end{array}$$

Figure 7

Si  $\mathcal{C}(\varphi, \varphi')$  est un exposant permis pour  $\varphi$  et pour  $\varphi'$  (cas A.1, A.2, B.1 et B.2), on posera :

$$\psi = x^{p_1/q_1} (1 + x^{p_2/q_1 q_2} (1 + \dots + x^{p_c/q_1 \dots q_c}) \dots) \text{ et } \psi = x \text{ si } c = 0.$$

Si  $\mathcal{C}(\varphi, \varphi')$  est un exposant permis pour  $\varphi$  et non pour  $\varphi'$  (cas A.3 et B.3), on posera :

$$\psi = x^{p_1/q_1} (1 + x^{p_2/q_1 q_2} (1 + \dots + x^{p_{c-1}/q_1 \dots q_{c-1}}) \dots).$$

L'arbre  $T(f)$  est alors la réunion du sous-arbre  $T^\top(f)$ , constitué de la géodésique de  $T(f)$  joignant les flèches symbolisant  $\varphi$  et  $\varphi'$  et des branches mortes qui y sont attachées, et d'un

sous-arbre  $T^\perp(f)$  isomorphe à l'arbre  $T(\psi)$  de désingularisation d'un germe ayant  $\psi$  pour développement de Puiseux, les deux sous-arbres étant rattachés par un segment géodésique qui joint le sommet de rupture de  $T^\perp(f)$  ayant la plus grande multiplicité à celui de  $T^\top(f)$  ayant la plus petite multiplicité, ou au sommet  $\#1$  si  $c = 0$ ; ces deux sommets sont distincts, à l'exception du cas où  $T(f)$  admet un sommet de rupture de valence 4, qui est alors l'unique sommet commun à  $T^\perp(f)$  et  $T^\top(f)$ . Suivant la méthode de calcul donnée dans [BK, p. 682-708] ou [MW, 6.6], on voit que les multiplicités des sommets de  $T^\perp(f)$  se déduisent de celles des sommets de  $T(\psi)$  par multiplication par  $(q_{c+1} \cdots q_g + q'_{c+1} \cdots q'_{g'})$ , si  $\mathcal{C}(\varphi, \varphi')$  est un exposant permis pour  $\varphi$  et pour  $\varphi'$ , et par multiplication par  $(q_c \cdots q_g + q'_c \cdots q'_{g'})$  sinon.

**5.2.** Soit  $g$  un germe de courbe plane à singularité isolée ayant un nombre quelconque de branches, et  $F(g)$  sa fibre de Milnor. On peut calculer les  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules  $M_{-2}H_1(F(g), \mathbf{Z})$  et  $\mathrm{Gr}_0^M(H_1(F(g), \mathbf{Z}))$  en considérant le graphe  $G(g)$ , revêtement ramifié de l'arbre  $T(g)$ , construit comme suit : le sommet  $(i)$  de  $T(g)$  a pour image réciproque  $r_i$  sommets, l'arête  $(ij)$  de  $T(g)$  a pour image réciproque  $m_{ij}$  arêtes, chaque flèche de  $T(g)$  a pour image réciproque un segment de  $G(g)$ . L'ensemble des extrémités extérieures de ces segments sera noté  $\partial G$ , les points de  $\partial G$  sont donc en bijection avec l'ensemble des flèches de  $T(g)$  ou avec l'ensemble des branches de  $g$ . De plus, l'action de la monodromie sur  $G(g)$  est un isomorphisme du revêtement. On a alors les isomorphismes de  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules suivants, d'après [DM1, 5.5 et 6.5] :

$$M_{-2}H_1(F(g), \mathbf{Z}) \cong H^1(G(g), \partial G, \mathbf{Z}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Gr}_0^M(H_1(F(g), \mathbf{Z})) \cong H^1(G(g), \mathbf{Z}).$$

Comme observé dans (*loc. cit.*), les branches mortes de  $T(g)$  n'apportent pas de contribution au calcul des  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules étudiés ici ; en effet, une branche morte, dont les extrémités sont les sommets  $(j)$ , de valence 1, et  $(k)$ , de valence  $\geq 3$ , a pour image réciproque dans  $G(g)$ ,  $e_j$  segments attachés à  $G(g)$  par les sommets qui forment l'image réciproque du sommet  $(k)$ . L'image réciproque d'une branche morte est donc contractile.

Revenons maintenant au cas d'un germe à deux branches et aux notations de 5.1.

**5.3. Lemme.** Soit  $f : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$  un germe de courbe plane à deux branches, à singularité isolée en 0. L'image réciproque de  $T^\perp(f)$  dans  $G(f)$  est contractile. Par suite, les arêtes de  $T^\perp(f)$  n'apportent pas de contribution au calcul des  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules  $M_{-2}H_1(F, \mathbf{Z})$  et  $\mathrm{Gr}_0^M(H_1(F, \mathbf{Z}))$ .

*Démonstration.* Il reste à voir que si  $(i)$  est un sommet de rupture de  $T(f)$  situé sur  $T^\perp(f)$  et  $(j)$  le sommet suivant sur l'unique arête sortante du sommet  $(i)$ , on a l'égalité  $r_i = m_{ij}$ . Ceci provient de la description, donnée plus haut, des multiplicités des sommets de  $T^\perp(f)$  en fonction de celles des sommets de  $T(\psi)$ , et du fait bien connu que la monodromie d'un germe de courbe plane irréductible (ici le germe dont  $\psi$  est un développement de Puiseux) est unipotente.

Notons  $(l)$  le sommet de  $\Gamma(\varphi, \varphi')$  dont la multiplicité  $e_l$  est minimale parmi les sommets de  $\Gamma(\varphi, \varphi')$ ; à la renumérotation près,  $(l)$  est associé au sommet de rupture de  $T^\top(f)$ , noté  $(\tilde{l})$ , sur lequel se rattache  $T^\perp(f)$ , ou au sommet  $\#1$  s'il est de valence 2. Le lemme 2.4 donne les informations suivantes sur les multiplicités de certains voisins de  $(l)$ .

Si  $\mathcal{C}(\varphi, \varphi')$  est un exposant permis pour  $\varphi$  et pour  $\varphi'$ , le sommet  $(\tilde{l})$  admet deux arêtes sortantes. La multiplicité  $e_l^\varphi$  (resp.  $e_l^{\varphi'}$ ) du sommet de  $T(f)$  voisin de  $(\tilde{l})$  sur l'arête sortante

dirigée vers  $\varphi$  (resp.  $\varphi'$ ) vérifie :

$$e_l^\varphi \equiv q_{c+1} \cdots q_g \pmod{e_l}, \quad e_l^{\varphi'} \equiv q'_{c+1} \cdots q'_{g'} \pmod{e_l}.$$

Si  $\mathcal{C}(\varphi, \varphi')$  est un exposant permis pour  $\varphi$ , mais non pour  $\varphi'$ , le sommet  $(\tilde{l})$  admet une unique arête sortante (vers  $\varphi$ ) et le sommet  $(\tilde{l} + 1)$  de  $T(f)$ , associé au sommet  $(l + 1)$  sur  $\Gamma(\varphi, \varphi')$ , admet une unique arête sortante (vers  $\varphi'$ ). La multiplicité  $e_l^\varphi$  (resp.  $e_{l+1}^{\varphi'}$ ) du sommet de  $T(f)$  voisin de  $(\tilde{l})$  (resp.  $(\tilde{l} + 1)$ ) sur l'arête sortante dirigée vers  $\varphi$  (resp.  $\varphi'$ ) vérifie :

$$e_l^\varphi \equiv q_{c+1} \cdots q_g \pmod{e_l}, \quad e_{l+1}^{\varphi'} \equiv q'_{c+1} \cdots q'_{g'} \pmod{e_{l+1}}.$$

**5.4. Lemme.** *On a la relation de divisibilité suivante entre les  $m_i$  le long de  $\Gamma(\varphi, \varphi')$  : si, pour un certain couple  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq N$ , l'entier  $a$  divise  $m_i$  et  $m_j$ , alors, pour tout  $k$ ,  $i \leq k \leq j$ ,  $a$  divise  $m_k$ .*

*Démonstration.* Si  $i + 1 = j$ , il n'y a rien à démontrer. On supposera donc que  $i + 1 < j$ . Deux cas se présentent, suivant la position de  $(l)$  par rapport aux arêtes  $(i \ i + 1)$  et  $(j \ j + 1)$ . Si  $k \leq l$  (resp.  $k \geq l + 1$ ), on notera  $e_k^\varphi$  (resp.  $e_k^{\varphi'}$ ) la multiplicité du sommet de  $T(f)$  voisin du sommet de rupture numéroté  $k$  dans  $\Gamma(\varphi, \varphi')$  dans la direction de la flèche associée à  $\varphi$  (resp.  $\varphi'$ ).

*Premier cas :  $j \leq l$  ou  $l \leq i$ .* Si  $j \leq l$ , l'hypothèse  $a \mid m_i$  et  $a \mid m_j$  entraîne que  $a$  divise  $e_i$ ,  $e_{i+1}$ ,  $e_j$  et  $e_{j+1}$  ainsi que le produit  $q_b \cdots q_g$  des dénominateurs des paires de Zariski associées aux sommets de rupture situés entre  $(1)$  et  $(i)$  inclus, en effet le lemme 1 donne  $e_{i+1}^\varphi \equiv q_b \cdots q_g \pmod{e_{i+1}}$ , par suite,  $a$  divise  $e_j$  et  $e_j^\varphi$ , puisque  $e_j^\varphi \equiv q_{b+1+i-j} \cdots q_b \cdots q_g \pmod{e_j}$ . Ceci entraîne que  $a$  divise  $m_{j-1}$ , d'où le résultat demandé. On procède de même si  $l \leq i$ . Noter que si  $\mathcal{C}(\varphi, \varphi')$  n'est pas un exposant permis pour  $\varphi'$  et si  $l = i$ , le lemme 2.4 ne s'applique pas au sommet  $(i) = (l)$  dans la direction de  $\varphi'$ , mais il nous suffit de savoir que  $e_{i+1}^{\varphi'}$  est divisible par  $a$ .

*Deuxième cas :  $i < l < j < N$ .* L'hypothèse entraîne ici que  $a$  divise  $e_i$ ,  $e_{i+1}$ ,  $e_j$  et  $e_{j+1}$  ainsi que le produit  $q_b \cdots q_g$  (resp.  $q'_d \cdots q'_{g'}$ ) des dénominateurs des paires de Zariski associées aux sommets de rupture situés entre  $(1)$  et  $(i)$  inclus (resp. entre  $(j + 1)$  et  $(N + 1)$  inclus), on a en effet, par le lemme 2.4,  $e_{i+1}^\varphi \equiv q_b \cdots q_g \pmod{e_{i+1}}$  et  $e_j^{\varphi'} \equiv q'_d \cdots q'_{g'} \pmod{e_j}$ . Par suite,  $a$  divise  $e_{\#1} = (q_1 \cdots q_g + q'_1 \cdots q'_{g'})$ , et  $a$  divise les multiplicités des sommets de  $T(f)$  portés par la géodésique qui joint  $\#1$  à  $(\tilde{l})$  (le sommet de rupture de  $T(f)$  renuméroté  $(l)$  dans  $\Gamma(\varphi, \varphi')$ ). Le cas où le sommet  $(\tilde{l})$  est de valence 4 se traite comme le premier cas ci-dessus ; sinon, le sommet  $(\tilde{l})$  a trois voisins dans  $T(f)$ , dont nous noterons les multiplicités  $e_l^\varphi$  (multiplicité du voisin de  $(\tilde{l})$  dans la direction de  $\varphi$ ),  $e_l^{\varphi'}$  (dans la direction de  $\varphi'$ ) et  $e_l^\perp$  (dans la direction de  $\#1$ ). On vient de voir que  $a \mid e_l^\varphi$  et  $a \mid e_l^\perp$ , mais  $e_l^\perp + e_l^\varphi + e_l^{\varphi'} \equiv 0 \pmod{e_l}$ , donc aussi  $e_l^\perp + e_l^\varphi + e_l^{\varphi'} \equiv 0 \pmod{a}$ . Ceci montre que  $a \mid e_l^{\varphi'}$ , puis, d'une part  $a \mid m_l$ , car  $m_l = \text{pgcd}(e_l, e_l^{\varphi'})$ , ce qui donne, pour  $i < k < l$ ,  $a \mid m_k$  (en appliquant le premier cas entre  $i$  et  $l$ ) et d'autre part,  $a \mid e_{l+1}$ , car  $m_l = \text{pgcd}(e_l, e_l^{\varphi'}, e_{l+1})$ , ce qui donne, pour  $l < k$ ,  $a \mid m_k$  (en appliquant le premier cas entre  $l$  et  $j$ ).

**5.5. Matrice de présentation** de  $M_{-2}H_1(F, \mathbf{Z})$ . Nous allons travailler avec des produits de polynômes cyclotomiques fortement premiers entre eux, on rappelle (cf. 1.4) qu'on écrit  $(A, B)_{\mathbf{Z}} = 1$  pour indiquer que  $A$  et  $B$  de  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$  sont fortement premiers entre eux.



On posera, pour  $1 \leq i \leq N$ ,  $\alpha_i = (t^{m_i} - 1)/(t^{r_i} - 1)$ ,  $\beta_i = t^{m_i} - 1$  et  $\gamma_i = (t^{m_i} - 1)/(t^{r_{i+1}} - 1)$ . Vu que les sommets de rupture situés aux extrémités de  $\Gamma(\varphi, \varphi')$  portent une flèche dans l'arbre  $T(f)$ , on a  $r_1 = r_{N+1} = 1$ , ce qui donne l'égalité  $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_N = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_N$ . On posera aussi  $\beta_0 = \beta_{N+1} = t - 1$ ,  $\gamma_0 = \alpha_{N+1} = 1$ ,  $u_0 = 1$ ,  $v_1 = 0$ ,  $u_N = 0$  et  $v_{N+1} = 1$  de sorte que  $u_0 \gamma_0 + v_1 \alpha_1 = 1$  et  $u_N \gamma_1 \cdots \gamma_N + v_{N+1} \alpha_{N+1} = 1$ .

**5.6. Lemme.** *Les polynômes  $\alpha_i$  et  $\gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , vérifient les relations suivantes :*

$$(\gamma_1, \alpha_2)_{\mathbf{Z}} = 1, (\gamma_1 \gamma_2, \alpha_3)_{\mathbf{Z}} = 1, \dots, (\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{N-1}, \alpha_N)_{\mathbf{Z}} = 1.$$

Il existe donc des éléments  $u_1, \dots, u_{N-1}$  et  $v_2, \dots, v_N$  de  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$  tels que :

$$u_1 \gamma_1 + v_2 \alpha_2 = 1, u_2 \gamma_1 \gamma_2 + v_3 \alpha_3 = 1, \dots, u_{N-1} \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{N-1} + v_N \alpha_N = 1.$$

*Démonstration.* Procédant comme dans le lemme 5.4, on trouve d'abord que, pour tout  $i$ ,  $1 < i < N$ , on a  $r_i = \text{pgcd}(m_{i-1}, m_i)$ , (noter que le sommet  $(\tilde{i})$  de  $T(f)$ , renuméroté en  $i$  dans  $\Gamma(\varphi, \varphi')$ , a 3 voisins dans  $T(f)$ , sauf si  $T(f)$  admet un sommet de valence 4 et si  $i = l$ ). Il suffit de démontrer que, pour tout  $i$  et  $j$ ,  $1 \leq i < j \leq N$ , on a  $(\gamma_i, \alpha_j)_{\mathbf{Z}} = 1$ , c'est-à-dire que  $\gamma_i = (t^{m_i} - 1)/(t^{r_{i+1}} - 1)$  et  $\alpha_j = (t^{m_j} - 1)/(t^{r_j} - 1)$  sont fortement premiers entre eux. Supposons par l'absurde qu'il existe des entiers  $a \geq 2$ ,  $n \geq 1$  et un nombre premier  $p$  tels que  $\Phi_a \mid \alpha_j$  et  $\Phi_{ap^n} \mid \gamma_i$ , on aurait alors  $a \mid m_j$  et  $ap^n \mid m_i$ , donc  $a \mid m_i$ , et aussi, pour tout  $k$ ,  $i \leq k \leq j$ ,  $a \mid m_k$ , ce qui donne en particulier, par la remarque ci-dessus,  $a$  divise  $r_{i+1}, \dots, r_j$ . Il s'ensuit que  $\Phi_a$  ne divise pas  $\alpha_j$  : contradiction. L'hypothèse  $\Phi_{ap^n} \mid \alpha_j$  et  $\Phi_a \mid \gamma_i$  conduit de même à une contradiction, d'où la proposition.

Nous pouvons maintenant passer au calcul du  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -module  $M_{-2}H_1(F, \mathbf{Z})$ . En utilisant [DM1, 6.6] et le lemme 5.3, on voit que la matrice  $M$  suivante est une matrice de présentation de ce module :

$$M = \begin{bmatrix} \beta_0 & \gamma_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_N & \beta_N & \gamma_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{N+1} & \beta_{N+1} \end{bmatrix}.$$

En multipliant successivement  $M$  à gauche par les matrices  $P_i \in \text{GL}(N + 2 - i, \mathbf{Z}[t, t^{-1}])$  suivantes,  $0 \leq i \leq N$  :

$$P_i = \begin{bmatrix} u_i & v_{i+1} & 0 \\ -\alpha_{i+1} & \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_i & 0 \\ 0 & 0 & I_{N-i} \end{bmatrix},$$

où  $I_{N-i}$  désigne la matrice unité d'ordre  $N - i$ , et en effectuant les simplifications, on trouve les matrices de présentation suivantes :

$$M_1 = \begin{bmatrix} \beta_0 \alpha_1 & \gamma_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_N & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{N+1} & \beta_{N+1} \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} \beta_0 \alpha_1 \alpha_2 & \gamma_1 \gamma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_N & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{N+1} & \beta_{N+1} \end{bmatrix},$$

$$M_N = \begin{bmatrix} \beta_0 \alpha_1 \cdots \alpha_N & \gamma_1 \cdots \gamma_N & 0 \\ 0 & \alpha_{N+1} & \beta_{N+1} \end{bmatrix}, \quad M_{N+1} = [(t-1)\alpha_1 \cdots \alpha_N].$$

On a ainsi déterminé la structure du  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -module  $M_{-2}H_1(F, \mathbf{Z})$ . Le  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -module  $\mathrm{Gr}_0^M H_1(F, \mathbf{Z})$  est donné par un calcul analogue.

**5.7. Théorème.** *Soit  $F$  la fibre de Milnor d'un germe de courbe plane à deux branches, on a les isomorphismes de  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules suivants :*

$$M_{-2}H_1(F, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}[t, t^{-1}] / ((t-1)\alpha_1 \cdots \alpha_N) = \mathbf{Z}[t, t^{-1}] / \left( \frac{(t^{m_1} - 1) \cdots (t^{m_N} - 1)}{(t^{r_1} - 1) \cdots (t^{r_N} - 1)} \right),$$

$$\mathrm{Gr}_0^M H_1(F, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}[t, t^{-1}] / (\alpha_1 \cdots \alpha_N) = \mathbf{Z}[t, t^{-1}] / \left( \frac{(t^{m_1} - 1) \cdots (t^{m_N} - 1)}{(t^{r_1} - 1) \cdots (t^{r_N} - 1)} \right).$$

**5.8. Germes isomères.** Rappelons la définition 3.4 : deux germes de courbe plane  $f_1$  et  $f_2$  sont *isomères* si l'on peut passer de  $T(f_1)$  à  $T(f_2)$  par une suite d'échanges de peupliers de même poids. Dans ce cas, les sommets de  $T(f_1)$  qui portent une (ou deux) flèche(s) sont des sommets de rupture avec branche morte.

Si  $f_1$  et  $f_2$  sont des germes à deux branches, la relation d'isométrie entre  $f_1$  et  $f_2$  signifie que l'on passe de  $T(f_1)$  à  $T(f_2)$  en effectuant une ou plusieurs fois l'opération élémentaire d'échange de sous-arbres qui fait passer du graphe  $\Gamma(\varphi_1, \varphi'_1)$  au graphe  $\Gamma(\varphi_2, \varphi'_2)$  comme indiqué Figure 8 ci-dessous, en respectant les conditions ci-dessous. Soit  $\eta_{j+1}^{(a)}$  le produit des dénominateurs des paires de Zariski des sommets de rupture  $(\tilde{1}), (\tilde{2}), \dots, (\tilde{j})$  de  $T(f_1)$ , si  $a = 1$ , ou des sommets de rupture  $(\tilde{N} + 1), (\tilde{N}), \dots, (\tilde{k})$  de  $T(f_2)$ , si  $a = 2$ . Soit  $\eta_{k-1}^{(a)}$  le produit des dénominateurs des paires de Zariski des sommets de rupture  $(\tilde{k}), \dots, (\tilde{N}), (\tilde{N} + 1)$  de  $T(f_1)$ , si  $a = 1$ , ou des sommets de rupture  $(\tilde{j}), \dots, (\tilde{2}), (\tilde{1})$  de  $T(f_2)$ , si  $a = 2$ . Le nombre  $\eta_{j+1}^{(a)}$  n'est autre que la multiplicité sortante du sommet  $(\tilde{j} + 1)$  de l'arbre  $T(f_a)$  dans la direction de  $\varphi_a$ ; de même, le nombre  $\eta_{k-1}^{(a)}$  est la multiplicité sortante du sommet  $(\tilde{k} - 1)$  de l'arbre  $T(f_a)$  dans la direction de  $\varphi'_a$ , si l'arête associée est sortante. Ces nombres sont aussi les premières composantes des poids des peupliers correspondants.

Les relations imposées sont les suivantes :

i.  $j + 1 \leq l \leq k - 1$  et, si  $\mathcal{C}(\varphi, \varphi')$  est un exposant permis pour  $\varphi$  et pour  $\varphi'$ ,  $j + 1 < k - 1$  (de sorte que  $T(f_1)$  et  $T(f_2)$  sont distincts),

ii.  $\eta_{j+1}^{(1)} = \eta_{j+1}^{(2)} = \eta_{k-1}^{(1)} = \eta_{k-1}^{(2)}$ .

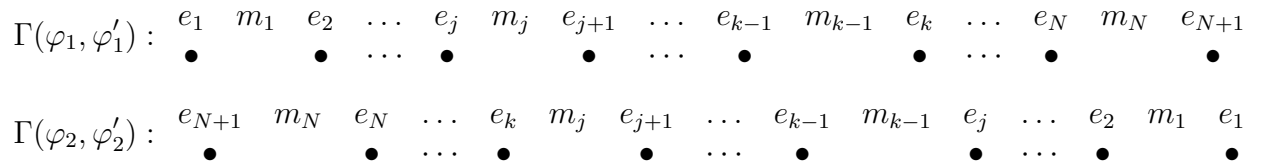


Figure 8

Les sommets (resp. les arêtes) de  $\Gamma(\varphi_2, \varphi'_2)$  seront numérotés par les indices des  $e_i$  (resp.  $m_i$ ) correspondants dans le diagramme. Comme dans la démonstration du lemme 5.4, la condition  $\eta_{j+1} = \eta_{k-1}$  (on omet l'exposant (1) ou (2)) entraîne que  $m_j = \eta_{j+1} = \eta_{k-1} = m_{k-1}$ ; on en déduit les égalités  $r_{j+1}^{(1)} = r_{j+1}^{(2)}$ ,  $r_{k-1}^{(1)} = r_{k-1}^{(2)}$  et donc, pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq N + 1$ ,  $r_i^{(1)} = r_i^{(2)}$ .

**5.9. Théorème.** Soit  $f_1$  et  $f_2$  deux germes de courbe plane à deux branches. Si  $f_1$  et  $f_2$  sont des germes isomères, les formes de Seifert sur  $H_1(F(f_a), \mathbf{Z})$ ,  $a = 1$  et  $2$  sont isomorphes.

*Démonstration.* Par définition de la relation d'isométrie, la collection des halos des sommets de rupture de  $T(f_1)$  est identique à celle de  $T(f_2)$  et, d'après la proposition 4.16, le nombre d'intersection des deux branches de  $f_1$  est égale à celle des deux branches de  $f_2$ . Notons  $\varphi_1$  et  $\varphi'_1$  (resp.  $\varphi_2$  et  $\varphi'_2$ ) des développements de Puiseux des branches de  $f_1$  (resp.  $f_2$ ), la relation entre les arbres pondérés  $\Gamma(\varphi_1, \varphi'_1)$  et  $\Gamma(\varphi_2, \varphi'_2)$  montre que les  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules  $M_{-2}H_1(F(f_1), \mathbf{Z})$  et  $M_{-2}H_1(F(f_2), \mathbf{Z})$  sont des  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules isomorphes, d'après le théorème 5.7.

Notons  $x_0^1 = x_{N+1}^1$  la classe de la composante de bord de  $F(f_1)$  associée à  $\varphi_1$ , orientée comme le bord de  $F(f_1)$ . Notons  $x_i^1$  un cycle de recollement entre les parties de  $F(f_1)$  associées aux sommets de rupture renumérotés  $(i)$  et  $(i+1)$  sur  $\Gamma(\varphi_1, \varphi'_1)$ , voir [DM1] ou [DM3] pour cette construction. Pour  $1 \leq i \leq N$ , on peut choisir  $x_i^1$  parmi les  $t^a x_i^1$  et choisir son orientation de sorte que la matrice de présentation de  $M_{-2}H_1(F(f_1), \mathbf{Z})$  décrive ce  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -module par générateurs et relations comme suit : les générateurs sont  $x_0^1, \dots, x_{N+1}^1$ , les relations sont, pour  $0 \leq i \leq N+1$ ,  $\beta_i x_i^1 = 0$ , et, pour  $0 \leq i \leq N$ ,  $\gamma_i x_i^1 = \alpha_{i+1} x_{i+1}^1$ . On notera de même  $x_i^2$ , pour  $0 \leq i \leq N+1$ , les cycles de recollement correspondants dans  $H_1(F(f_2), \mathbf{Z})$ , en utilisant, pour numéroter  $x_i^2$ , l'indice de l'entier  $m_i$  associé à l'arête correspondante dans  $\Gamma(\varphi_2, \varphi'_2)$ .

On supposera pour simplifier l'exposition qu'on passe de  $T(f_1)$  à  $T(f_2)$  par un unique échange de sous-arbres et que  $\Gamma(\varphi_1, \varphi'_1)$  et  $\Gamma(\varphi_2, \varphi'_2)$  sont comme indiqué plus haut ; le cas général consiste en plusieurs pas du même calcul. On choisira le générateur  $x^a$  de  $M_{-2}H_1(F(f_a), \mathbf{Z})$ ,  $a = 1$  ou  $2$ , de telle sorte que les cycles de recollement  $x_i^a$  soient donnés par  $x_i^a = \gamma_1 \cdots \gamma_{i-1} \alpha_{i+1} \cdots \alpha_N x^a$ . On a alors immédiatement  $x_j^a = x_{k-1}^a$ .

La détermination de la forme de Seifert des germes  $f_1$  et  $f_2$  utilise les données suivantes.

- i. Le nombre d'intersection des deux branches du germe,
- ii. Les relations entre les cycles de recollement ci-dessus, codées dans la donnée de  $(m_1, r_1, m_2, \dots, r_N, m_N)$ ,
- iii. La description de l'image par la monodromie de  $M_{-1}H_1(F(f_a), \mathbf{Z})$ ,  $a = 1$  ou  $2$ , codée dans la donnée des halos de  $T(f_a)$ ,
- iv. Le polynôme de twist  $\text{Tw}_e(t)$ , défini en [DM3, 2.21 et 4.5] et associé au choix d'un générateur  $x$ .

Les résultats de [DM3], la définition de l'isométrie et la proposition 4.16 montrent que les germes  $f_1$  et  $f_2$  ne sont pas distingués par les trois premiers points. Comparons maintenant les polynômes de twist associés aux deux germes. On note  $\nu$  (resp.  $\nu'$ ) la multiplicité de la branche associée à  $\varphi_1$  ou  $\varphi_2$ , (resp.  $\varphi'_1$  ou  $\varphi'_2$ ), les branches notées  $\varphi_a$  (resp.  $\varphi'_a$ ) ayant par hypothèse la même multiplicité pour  $a = 1$  et  $2$ . On note  $\eta_j$  (resp.  $\eta_k$ ) la valeur du  $\eta_i$  correspondant à l'arête sortante du sommet  $(j)$  (resp. du sommet  $(k)$ ) de  $\Gamma(\varphi_1, \varphi'_1)$  vers  $\varphi_1$  (resp.  $\varphi_2$ ) ou de  $\Gamma(\varphi_2, \varphi'_2)$  vers  $\varphi'_2$  (resp.  $\varphi'_1$ ). Cette notation est licite par définition de l'isométrie, *i.e.* la valeur de  $\eta_j$  (resp.  $\eta_k$ ) est la même pour  $a = 1$  ou  $2$ . Avec ces notations, en désignant par  $y^a$  le relevé dans  $H_1(F(f_a), \mathbf{Z})$  d'un générateur de  $\text{Gr}^0 H_1(F(f_a), \mathbf{Z})$  choisi comme expliqué dans [DM3, 4.5], et en notant  $S$  la forme d'intersection sur  $H_1(F(f_a), \mathbf{Z})$ , on a les résultats suivants.

Dans le cas du germe  $f_1$ , la contribution des arêtes  $(j, j+1)$  et  $(k-1, k)$  à  $\text{Tw}_e(t) \cdot x^1$  est :

$$\sum_{h=1}^{m_j} S(t^h x_j^1, y^1) \frac{em_j}{\nu} \left( \frac{\nu}{\eta_{j+1} e_{j+1}} - \frac{\nu}{\eta_j e_j} \right) t^h x_j^1 + \sum_{h=1}^{m_{k-1}} S(t^h x_{k-1}^1, y^1) \frac{em_{k-1}}{\nu'} \left( \frac{\nu'}{\eta_{k-1} e_{k-1}} - \frac{\nu'}{\eta_k e_k} \right) t^h x_{k-1}^1.$$

Dans le cas du germe  $f_2$ , la contribution des arêtes  $(k, j+1)$  et  $(k-1, j)$  à  $\text{Tw}_e(t) \cdot x^2$  est :

$$\sum_{h=1}^{m_j} S(t^h x_j^2, y^2) \frac{em_j}{\nu} \left( \frac{\nu}{\eta_{j+1} e_{j+1}} - \frac{\nu}{\eta_k e_k} \right) t^h x_j^2 + \sum_{h=1}^{m_{k-1}} S(t^h x_{k-1}^2, y^2) \frac{em_{k-1}}{\nu'} \left( \frac{\nu'}{\eta_{k-1} e_{k-1}} - \frac{\nu'}{\eta_j e_j} \right) t^h x_{k-1}^2.$$

Vu que  $x_j^a$  et  $x_{k-1}^a$  sont égaux, ainsi que  $m_j$  et  $m_{k-1}$ , ces deux contributions sont donc égales. De plus, la contribution des autres arêtes ne distingue pas les deux germes. Par suite, les polynômes de twist des deux germes sont égaux.

Le théorème 4.6 de [DM3] nous donne alors le résultat indiqué.

**5.10. Remarque.** L'article [DM2] donne un exemple de deux germes de courbe plane à trois branches, isomères, dont les formes de Seifert ne sont pas isomorphes, ce qui permet de construire des nœuds algébriques (de grande dimension) cobordants et non isotopes.

## 6. Un exemple.

Nous allons mettre en œuvre la méthode décrite dans l'article sur un exemple. On se donne la forme de Seifert  $A(f)$  d'un germe de courbe plane à deux branches  $f = f' \cdot f''$  ; la question est alors de trouver le (ou les) type(s) topologique(s) des germes dont la forme de Seifert est isomorphe à  $A(f)$ , à partir des données suivantes, qui se déduisent de  $A(f)$  : le polynôme caractéristique  $\Delta(t)$  de l'action de la monodromie sur  $H_1(F, \mathbf{Z})$ , la décomposition du  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -module  $\text{Gr}_{-1}^M H_1(F, \mathbf{Z})$  en somme directe orthogonale pour la forme d'intersection  $S$ , les unités associées aux structures isométriques sur les facteurs de cette décomposition et le nombre d'enlacement des composantes de bord de  $F$ , *i.e.*  $\nu_0(f', f'')$ .

**6.1.** Les données relatives à l'exemple proposé sont les suivantes.

i. Le polynôme caractéristique de l'action de la monodromie sur  $H_1(F, \mathbf{Z})$  est :

$$\Delta(t) = (t-1) \frac{(t^{80}-1)(t^{172}-1)(t^{348}-1)(t^{350}-1)}{(t^{16}-1)(t^{86}-1)(t^{87}-1)(t^{175}-1)},$$

ii. La décomposition de  $\text{Gr}_{-1}^M H_1(F, \mathbf{Z})$  en somme directe est :

$$\text{Gr}_{-1}^M H_1(F, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/\Lambda_2(t) \oplus \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/\Lambda_4(t) \oplus \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/\Lambda_6(t) \oplus \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/\Lambda_8(t), \text{ où}$$

$$\Lambda_2(t) = \frac{(t^{80}-1)}{(t^{16}-1)}, \quad \Lambda_4(t) = \frac{(t^{172}-1)(t^2-1)}{(t^{86}-1)(t^4-1)},$$

$$\Lambda_6(t) = \frac{(t^{348}-1)(t-1)}{(t^{87}-1)(t^4-1)}, \quad \Lambda_8(t) = \frac{(t^{350}-1)(t-1)}{(t^{175}-1)(t^2-1)}.$$

iii. Les unités  $U_2 \in \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/\mathbf{L}_2$ ,  $U_4 \in \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/\mathbf{L}_4$ ,  $U_6 \in \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/\mathbf{L}_6$  et  $U_8 \in \mathbf{Z}[t, t^{-1}]/\mathbf{L}_8$ , associées comme en 1.13 aux 4 halos de valence 3 qui correspondent à la décomposition

en somme directe, donnent les unités circulaires suivantes, après passage aux corps cyclotomiques indiqués (on rappelle que ces unités sont définies à multiplication par le carré d'une unité près) :

$$U'_2 = \frac{t^{32} - 1}{t^{16} - 1} \cdot \frac{t^{28} - 1}{t^4 - 1} \in \mathbf{Q}(t)/\Phi_{80}(t), \quad U'_4 = \frac{t^{84} - 1}{t^4 - 1} \in \mathbf{Q}(t)/\Phi_{172}(t),$$

$$U'_6 = \frac{t^{88} - 1}{t^4 - 1} \in \mathbf{Q}(t)/\Phi_{348}(t), \quad U'_8 = \frac{t^{174} - 1}{t^2 - 1} \in \mathbf{Q}(t)/\Phi_{350}(t).$$

iv. Le nombre d'enlacement est :  $\nu_0(f', f'') = 80$ .

**6.2.** On retrouve les polynômes  $L_2, L_4, L_6$  et  $L_8$  en utilisant le théorème 1.9, la remarque 1.10 et le lemme 1.4 (ce dernier indique qu'un des  $L_i$  est divisible par  $\Phi_5\Phi_{10}\Phi_{20}$ ). Ceci montre que l'arbre  $T(f)$  compte 4 sommets de rupture, tous de valence 3. Plus précisément, l'application  $\sigma$ , définie en 2.7, nous indique que les arbres cherchés ont 4 sommets de valence 1, que nous numérotions 1, 3, 5 et 7, de multiplicités  $e_1 = 16, e_3 = 86, e_5 = 87$  et  $e_7 = 175$ , et 4 sommets de valence 3, que nous numérotions 2, 4, 6 et 8, de multiplicités  $e_2 = 80, e_4 = 172, e_6 = 348$  et  $e_8 = 350$ , les sommets de valence 3 étant associés à ceux de valence 1 par :  $\sigma(1) = 2, \sigma(3) = 4, \sigma(5) = 6$  et  $\sigma(7) = 8$ . Nous sommes donc dans le cas  $B$ .

Les sommets de valence 3 sont ordonnés sur la géodésique  $\Gamma(\varphi, \varphi')$  dans l'ordre  $e_6, e_2, e_4, e_8$  ou dans l'ordre inverse, en effet, les multiplicités des composantes du diviseur exceptionnel croissent suivant leur ordre d'apparition lors de la désingularisation, et on a ici  $e_5 > e_2$  et  $e_3 > e_2$ . Les polynômes  $L_4, L_6$  et  $L_8$  permettent alors de calculer les nombres  $m_{ij}$ , pour  $i = 4, 6$  ou  $8$  et  $j = 1, 2$  ou  $3$  :

$$(m_{41}, m_{42}, m_{43}) = (4, 86, 2), \quad (m_{61}, m_{62}, m_{63}) = (4, 87, 1), \quad (m_{81}, m_{82}, m_{83}) = (2, 175, 1),$$

ce qui donne enfin  $(m_{21}, m_{22}, m_{23}) = (16, 4, 4)$ .

**6.3.** On notera, comme en 1.15,  $M_n := \tilde{C}_n / (\tilde{C}_n \cap \tilde{E}_n^2)$  le groupe des unités circulaires du corps cyclotomique  $\mathbf{Q}[t]/\Phi_n(t)$ , modulo le sous-groupe des carrés d'unités. Dans les cas considérés ici, on a  $M_n = \tilde{C}_n / (\tilde{C}_n^2)$ , parce que  $80, 172 = 2^2 \cdot 43, 348 = 2^2 \cdot 3 \cdot 29$  et  $350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$  ont 2 ou 3 facteurs premiers et les  $h_n^+$  valent 1.

D'après Gold et Kim [GK], on peut choisir pour base de l'espace vectoriel  $M_{80}$  (espace vectoriel de dimension  $15 = \frac{1}{2}\varphi(80) - 1$  sur  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ) la famille suivante, où l'on note  $\gamma_a$  l'image de  $t^a - 1$  et on conserve l'écriture multiplicative en passant à  $M_{80}$  :

$$\left( \gamma_1, \gamma_3, \gamma_7, \gamma_9, \gamma_{13}, \gamma_{17}, \gamma_{19}, \gamma_{21}, \gamma_{23}, \gamma_{27}, \gamma_{37}, \frac{\gamma_{32}}{\gamma_{16}}, \frac{\gamma_{15}}{\gamma_5}, \frac{\gamma_{25}}{\gamma_5}, \frac{\gamma_{35}}{\gamma_5} \right).$$

Les relations de Bass (cf. 1.15) donnent successivement dans  $M_{80}$  :

$$\frac{\gamma_{32}}{\gamma_{16}} = \frac{\gamma_{48}}{\gamma_{16}} = \frac{\gamma_{36}}{\gamma_4} = \gamma_8 = \gamma_{24}, \quad \frac{\gamma_{24}}{\gamma_8} = 1, \quad \frac{\gamma_{28}}{\gamma_4} = 1, \quad \gamma_{29} = \gamma_3 \cdot \gamma_{13} \cdot \gamma_{19} \cdot \frac{\gamma_{15}}{\gamma_5} \cdot \frac{\gamma_{35}}{\gamma_5},$$

$$\gamma_{31} = \gamma_1 \cdot \gamma_3 \cdot \gamma_7 \cdot \gamma_{13} \cdot \gamma_{23} \cdot \gamma_{27} \cdot \gamma_{37} \cdot \frac{\gamma_{32}}{\gamma_{16}} \cdot \frac{\gamma_{15}}{\gamma_5}, \quad \gamma_{11} = \gamma_{21} \cdot \gamma_{27} \cdot \gamma_{37} \cdot \frac{\gamma_{25}}{\gamma_5},$$

$$\gamma_{33} = \gamma_3 \cdot \gamma_7 \cdot \gamma_{13} \cdot \gamma_{17} \cdot \gamma_{23} \cdot \gamma_{27} \cdot \gamma_{37} \cdot \frac{\gamma_{32}}{\gamma_{16}}, \quad \gamma_{39} = \gamma_7 \cdot \gamma_9 \gamma_{23} \cdot \frac{\gamma_{25}}{\gamma_5} \cdot \frac{\gamma_{35}}{\gamma_5}$$

$$\text{et enfin } \frac{\gamma_{12}}{\gamma_4} = \gamma_1 \cdot \gamma_3 \cdot \gamma_7 \cdot \gamma_9 \cdot \gamma_{17} \cdot \gamma_{19} \cdot \gamma_{21} \cdot \gamma_{37} \cdot \frac{\gamma_{25}}{\gamma_5} \cdot \frac{\gamma_{35}}{\gamma_5}.$$

Vu que  $(m_{21}, m_{22}, m_{23}) = (16, 4, 4)$ , les  $\eta_{2j}$  sont des multiples de 4, et les valeurs de  $\gamma_a/\gamma_{(80,a)}$  qui interviennent dans le calcul de  $U_2$  figurent dans la liste suivante :

$$\frac{\gamma_4}{\gamma_4} = \frac{\gamma_{16}}{\gamma_{16}} = \frac{\gamma_{28}}{\gamma_4} = \frac{\gamma_{52}}{\gamma_4} = \frac{\gamma_{64}}{\gamma_{16}} = \frac{\gamma_{76}}{\gamma_4} = 1, \quad \frac{\gamma_{12}}{\gamma_4} = \frac{\gamma_{68}}{\gamma_4}, \quad \frac{\gamma_{32}}{\gamma_{16}} = \frac{\gamma_{36}}{\gamma_4} = \frac{\gamma_{44}}{\gamma_4} = \frac{\gamma_{48}}{\gamma_{16}},$$

où l'on a utilisé la relation  $\gamma_a = \gamma_{80-a}$ . La liste des  $\eta_{2j}$  possibles est donc :

$$(4, 12, 16, 28, 32, 36, 44, 48, 52, 64, 68, 76).$$

On cherche alors les triplets d'éléments de cette liste qui vérifient les conditions :

$$\eta_{21} + \eta_{22} + \eta_{23} = e_2 = 80, \quad \gamma_{\eta_{21}} \cdot \gamma_{\eta_{22}} \cdot \gamma_{\eta_{23}} \cdot \gamma_{16} = U_2', \quad \text{pgcd}(\eta_{21}, \eta_{22}, \eta_{23}) = 4.$$

On trouve deux halos possibles,  $\mathcal{H}_2^1 = (80; 48, 28, 4)$  et  $\mathcal{H}_2^2 = (80; 16, 28, 36)$ . Un calcul dans  $M_{40}$  montre que  $\mathcal{H}_2^2$  doit être écarté, en effet, les unités associées s'écrivent, en notant  $U_2''$  (resp.  $\gamma'_a$ ) l'image de  $U_2$  (resp.  $t^a - 1$ ) dans  $M_{40}$  :

$$U_2'' = U(\mathcal{H}_2^1) = \gamma'_8 \cdot \gamma'_{16} \cdot \gamma'_{12} \cdot \gamma'_4 \quad \text{et} \quad U(\mathcal{H}_2^2) = \gamma'_{12} \cdot \gamma'_4,$$

et les relations de Bass donnent ici

$$\gamma'_{16} = \gamma'_8 \cdot \gamma'_{12} \quad \text{et} \quad \gamma'_{12} = \gamma'_3 \cdot \gamma'_7 \cdot \gamma'_{13} \cdot \gamma'_{17} \neq 1,$$

ce qui distingue les deux halos. On a donc trouvé  $\mathcal{H}_2 = (80; 48, 28, 4)$ .

Le cas des halos  $\mathcal{H}_4$  et  $\mathcal{H}_8$  est aisé, en effet, d'une part, les polynômes  $L_4$  et  $L_8$  donnent  $\eta_{42} = 86$  et  $\eta_{82} = 175$  et, d'autre part, les multiplicités sortantes sont connues et donnent  $\eta_{43} = 2$  et  $\eta_{83} = 1$ . Dans le cas du halo  $\mathcal{H}_6$ , on sait que  $\eta_{63} = 1$  et  $\eta_{62} = 87$  ou  $174 = 2 \cdot 87$  ou  $261 = 3 \cdot 87$ , donc  $\eta_{61} = 260$  ou  $173$  ou  $86$ , et seul  $260$  convient car  $\text{pgcd}(348, \eta_{61}) = 4$ . On trouve donc les halos suivants, ce qui est conforme aux données  $U_4$ ,  $U_6$  et  $U_8$  :

$$\mathcal{H}_4 = (172; 86, 84, 2), \quad \mathcal{H}_6 = (348; 260, 87, 1), \quad \mathcal{H}_8 = (350; 175, 174, 1).$$

**6.4.** La proposition 2.15 permet maintenant de distinguer entre *B.1*, *B.2* et *B.3*. En effet, avec les notations de 2.15, on trouve :

$$\nu_0^{(2)}(f) = 16 < \nu_0^{(1)}(f) = 2 + 4\left(\frac{80}{16} - 1\right) + 2\left(\frac{172}{86} - 1\right) + \left(\frac{348}{87} - 1\right) + \left(\frac{350}{175} - 1\right) = 24,$$

ce qui exclut le cas *B.1* et indique que la multiplicité du germe est 16. Les composantes  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  du halo de séparation  $\mathcal{H}_1$ , numérotées comme en 3.1, sont :

$$\eta_3 = 4 < \nu_0(f) = 16 < \eta_2 = 28 < \eta_1 = 48,$$

ce qui exclut le cas *B.2* : les germes cherchés sont dans le cas *B.3*; en particulier, chaque sommet de valence 3 admet une unique arête sortante.

**6.5.** En conclusion, la reconstruction de l'arbre réduit peut se faire de deux manières :

1-er cas :  $\mathcal{H}_4$  est rattaché à  $\mathcal{H}_2$  le long de l'arête sortante (associée à  $\eta_3$ ) et  $\mathcal{H}_6$  est rattaché à  $\mathcal{H}_2$  le long de l'arête entrante (associée à  $\eta_2$ ).

2-ème cas :  $\mathcal{H}_6$  est rattaché à  $\mathcal{H}_2$  le long de l'arête sortante (associée à  $\eta_3$ ) et  $\mathcal{H}_4$  est rattaché à  $\mathcal{H}_2$  le long de l'arête entrante (associée à  $\eta_2$ ).

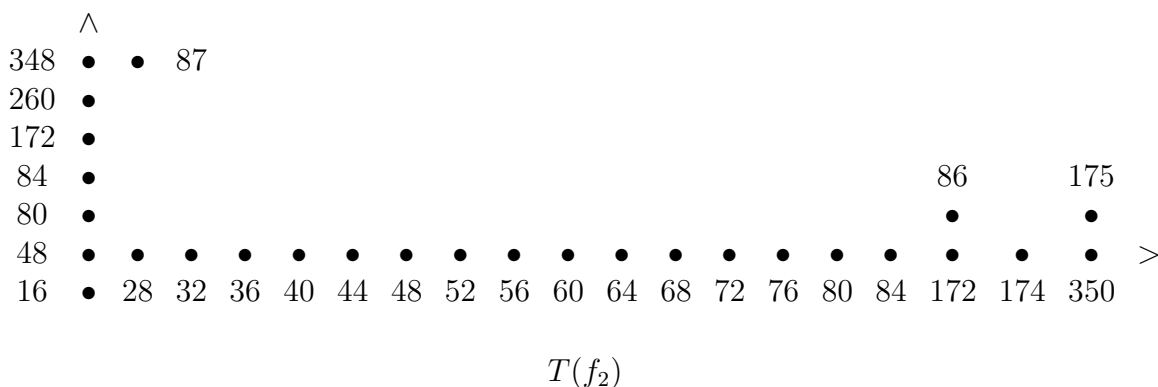
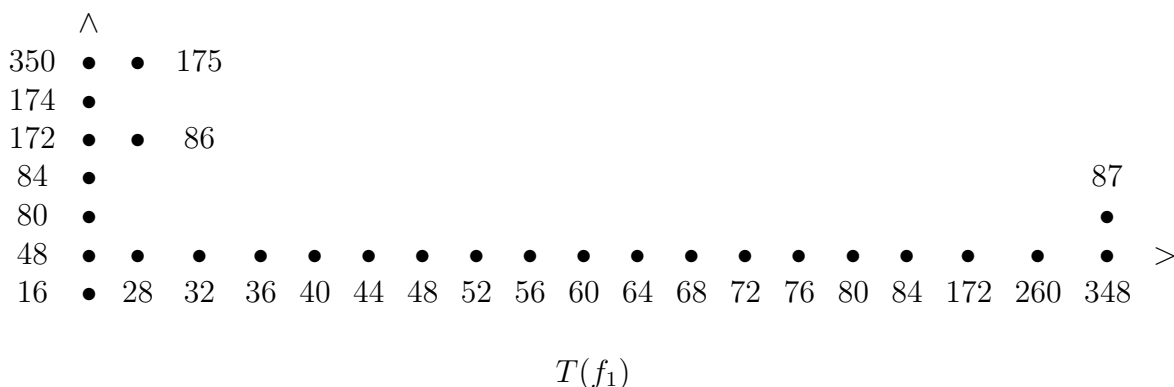
Dans les deux cas,  $\mathcal{H}_8$  est rattaché à  $\mathcal{H}_4$  le long de l'arête sortante. On calcule alors les paires de Zariski en utilisant les lemmes 4.2 et 4.7. Dans le premier cas, on trouve les paires suivantes :  $(5/3, 3/2, 3/2)$  pour une branche et  $(67/4)$  pour l'autre, le type topologique est celui défini par les développements de Puiseux suivants, ou par l'arbre  $T(f_1)$  ci-dessous :

$$\varphi_1 = x^{5/3}(1 + x^{3/6}(1 + x^{3/12})) \quad \text{et} \quad \varphi'_1 = x^{67/4}.$$

Dans le deuxième cas, on trouve les paires suivantes :  $(5/3, 7/4)$  pour une branche et  $(33/2, 3/2)$  pour l'autre, le type topologique est celui défini par les développements de Puiseux suivants, ou par l'arbre  $T(f_2)$  ci-dessous :

$$\varphi_2 = x^{5/3}(1 + x^{7/12}) \quad \text{et} \quad \varphi'_2 = x^{33/2}(1 + x^{3/4}).$$

Dans les deux cas, la proposition 4.16 donne  $\nu_0(f', f'') = 80$ , en conformité avec la donnée iv.



RÉFÉRENCES

[A] Apostol T., *Resultants of cyclotomic polynomials*. Proc. Amer. Math. Soc., **24**, 1970, 457-462

- [AC] A'Campo N., *La fonction zéta d'une monodromie*, Comment. Math. Helvetica, **50** (1975), 233-248
- [B] Bass H., *Generators and relations for cyclotomic units*. Nagoya Math. J., **27** (1966), 401-407
- [BK] Brieskorn E., Knörrer H., *Plane algebraic Curves*. Birkhäuser Verlag, 1986
- [D] Du Bois Ph., *Sur la forme de Seifert entière des germes de courbe plane à deux branches*. C. R. Acad. Sc. Paris, **336**, 2003, Série I, 757-762
- [DM1] Du Bois Ph., Michel F., *Filtration par le poids et monodromie entière*. Bull. Soc. Math. France, **120**, 1992, 129-167
- [DM2] Du Bois Ph., Michel F., *Cobordism of algebraic knots via Seifert forms*. Inventiones math., **111**, 1993, 151-169
- [DM3] Du Bois Ph., Michel F., *The integral Seifert form does not determine the topology of plane curve germs*. Journal of Algebraic Geometry, **3**, 1994, 1-38
- [E] Ennola V., *On relations between cyclotomic units*. J. Number Theory, **4** (1972), 236-247
- [GK] Gold R., Kim J., *Bases for cyclotomic units*. Compositio Mathematica, **71** (1989), 13-28
- [K] Kaenders R., *The Seifert Form of a Plane Curve Singularity determines its Intersection Multiplicities*, Indag. Mathem., **7** (1996), no. 2, 185-197
- [MW] Michel F., Weber C., *Topologie des germes de courbe planes à plusieurs branches*. Prépublication de l'Université de Genève, 1985
- [R1] Robin E., *Sur la forme de Seifert d'un germe de courbe plane*, Thèse de doctorat, Université d'Angers, 1999
- [R2] Robin E., *Déviissage de la forme de Seifert d'un germe de courbe plane*. C. R. Acad. Sc. Paris, **329**, 1999, Série I, 863-866
- [S] Sinnott W., *On the Stickelberger ideal and the circular units of a cyclotomic field*, Ann. of Math., **108** (1978), 107-134
- [VW] van der Waerden B., *Moderne Algebra*, Springer Verlag, Berlin, 1931
- [W] Washington L., *Introduction to cyclotomic fields*, G.T.M. Springer-Verlag **83**

PHILIPPE DU BOIS

LAREMA - UMR 6093 - FACULTÉ DES SCIENCES  
2, BOULEVARD LAVOISIER - 49045 ANGERS

SSPHILIPPE.DUBOIS@UNIV-ANGERS.FR

EMMANUEL ROBIN

LAREMA - UMR 6093 - FACULTÉ DES SCIENCES (pendant la préparation de [R1] et [R2])  
2, BOULEVARD LAVOISIER - 49045 ANGERS

6 Juin 2005