

Préface à Jaakko Hintikka, Les Principes des mathématiques revisités

Manuel Rebuschi

▶ **To cite this version:**

Manuel Rebuschi. Préface à Jaakko Hintikka, Les Principes des mathématiques revisités. Jaakko Hintikka, Les Principes des mathématiques revisités, trad. fr. M. Rebuschi, Vrin, pp.7-21, 2006. hal-00014666

HAL Id: hal-00014666
https://hal.science/hal-00014666

Submitted on 5 Mar 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

[La version définitive de cet article sera publiée dans: Jaakko Hintikka, *Les Principes des mathématiques revisités*, traduction française par M. Rebuschi, Vrin, 2007]

Préface

Le titre de ce livre est quelque peu provocateur. Comme l'auteur l'explique dès l'introduction, les Principes des mathématiques revisités sont directement inspirés des *Principles of Mathematics* de Russell 1903. Pour autant, il ne s'agit pas d'une lecture de l'illustre philosophe et logicien. Il s'agit plutôt de la réouverture d'un chantier généralement délaissé après le premier tiers du vingtième siècle : la construction de fondements logiques et en fait logicistes pour les mathématiques.

RAPIDE SURVOL DES FONDEMENTS

La question des fondements des mathématiques fut historiquement posée de façon cruciale par la crise dite des fondements au tournant du vingtième siècle. Tandis que la théorie des ensembles de Cantor proposait d'apporter une clarification conceptuelle aux bases de l'analyse mathématique, elle se révéla être minée par divers paradoxes, l'un des plus célèbres – le paradoxe de l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas comme élément – étant construit par Russell, un autre étant attribué à Burali-Forti, d'autres enfin étant découverts par Cantor lui-même [1].

Le caractère dramatique des paradoxes réside presque tout entier dans cette loi de la logique classique qui veut que d'une contradiction l'on puisse dériver n'importe quel énoncé (*ex falsum quodlibet*) : dès qu'un paradoxe apparaît dans une théorie mathématique axiomatisée dont les inférences se conforment aux lois de la logique classique, on peut en dériver tout énoncé correctement construit avec le vocabulaire de cette théorie. Par exemple si un paradoxe était construit en arithmétique, on pourrait en déduire que $2 + 2 = 4$, mais aussi que $2 + 2 = 5$, et encore que $2 + 2 \neq 5$. La correction de la théorie axiomatisée disparaît alors, puisque les énoncés inférés ne sont plus seulement des énoncés vrais, mais également des énoncés faux.

Les ensembles paradoxaux de Russell ou Cantor sont dirimants parce qu'ils sont constructibles au sein de la théorie de Cantor. Et la place spécifique occupée par la théorie cantorienne des ensembles à la base de l'édifice des mathématiques y rend la présence de paradoxes proprement intolérable, ledit édifice étant alors comparable à une maison rongée par des termites. La solution consiste alors à imposer des restrictions pour bloquer l'engendrement des paradoxes. Plusieurs stratégies ont été avan-

1. Sur l'apparition des paradoxes, voir p.ex. A. R. Garciadiego, 1992 : *Bertrand Russell and the Origins of the Set-theoretic 'Paradoxes'*, Basel-Boston-Berlin, Birkhäuser Verlag.

cées pour sortir de l'impasse, proposant différentes localisations pour ces restrictions [2].

L'intuitionnisme de Brouwer considérait ainsi que les mathématiques s'étaient fourvoyées dans l'affirmation débridée de vérités dont la preuve n'était pas assurément fondée. En particulier, de la réfutation de la non-existence d'un objet vérifiant telle propriété ne devrait pas suivre l'affirmation de l'existence d'un objet vérifiant cette propriété, au contraire de ce que font les mathématiciens classiques, si l'on ne dispose pas d'un procédé de construction de cet objet. Dans le prolongement de l'intuitionnisme, différentes approches constructivistes ont été développées, proposant chacune les critères propres d'une bonne construction et permettant par là d'éviter les constructions paradoxales. La stratégie de Brouwer est toutefois restée sinon marginale du moins minoritaire, parce qu'elle conduisait à une attitude révisionniste à l'égard des mathématiques : la restriction était trop stricte [3].

Autre stratégie face à la crise des fondements, celle du formalisme attribué à Hilbert connue pour expulser l'intuition hors du champ des mathématiques, réduites à un pur jeu de symboles, pour la rétablir sur le plan des métamathématiques. Ce programme de fondation purement syntaxique des mathématiques a quant à lui échoué du fait de l'incomplétude de tout langage du premier ordre suffisamment riche – contenant au moins l'arithmétique élémentaire – (Gödel 1931) signifiant qu'un certain nombre d'énoncés vrais des mathématiques ne pouvaient pas être prouvés à l'aide d'un simple système formel [4].

La troisième stratégie qui nous intéresse plus particulièrement, celle du logicisme, fut développée par Frege et indépendamment par Russell, puis par Russell et Whitehead avec la publication des *Principia Mathematica* en 1910. L'idée du logicisme consistait à fonder l'ensemble des mathématiques sur la seule logique : tant au niveau conceptuel, les concepts mathématiques devant être réduits à des concepts logiques, qu'à celui des inférences, les modes de démonstration mathématique devant être réduits à des modes d'inférence purement logiques. Frege proposa ainsi une reconstruction du concept de nombre à partir de la notion d'extension de concept et de celle d'équipotence.

Le logicisme fut frappé de plein fouet par les paradoxes ensemblistes, la théorie cantorienne associant à chaque concept une classe (principe d'abstraction). Tandis que les théoriciens des ensembles réviseront

2. Pour une présentation générale, voir J. Ladrière, 1957 : *Les Limitations internes des formalismes*, Paris, Gauthier-Villars. (Rééd. 1992, Paris, Jacques Gabay.)

3. L'intuitionnisme a cependant connu un nouvel essor à partir de la fin des années 1950 en lien avec la théorie de la calculabilité puis avec l'informatique théorique.

4. Sur le formalisme et sa crise, voir F. Nef & D. Vernant (éds.), 1998 : *Le formalisme en question, Le tournant des années 30*, Paris, Vrin.

ce principe, instaurant un décalage entre logique et théorie des ensembles, la stratégie logiciste consista à l'assumer tout en révisant la logique pour éviter les concepts engendrant des ensembles antinomiques. Après plusieurs essais Russell produisit la théorie des types, qui devint ensuite la théorie des types ramifiés, un formalisme logique empêchant la formation de concepts antinomiques.

C'est pourtant une autre stratégie encore qui a massivement dominé le champ des fondements. Les mathématiciens travaillant sur la théorie des ensembles avaient en effet besoin, indépendamment du rôle fondationnel de leur spécialité pourrait-on dire, de restaurer une théorie correcte et viable du domaine. Entre 1903 et 1908 une solution fut élaborée qui évitait les paradoxes connus en refusant à des entités comme la classe de Russell le statut d'ensemble. Une nouvelle théorie remplaça celle de Cantor, la théorie de Zermelo et Fraenkel (abrégée en ZF), où l'axiome d'abstraction était remplacé par un axiome de séparation. Les ensembles ont cessé d'être directement abstraits de concepts éventuellement fallacieux : un concept peut désormais tout au plus « séparer » un sous-ensemble – le sous-ensemble des individus qu'il subsume – au sein d'un ensemble préalablement (donc indépendamment) défini.

Le fondement standard qui s'est imposé au vingtième siècle a donc été apporté par la théorie des ensembles, une fois réformée et nettoyée des paradoxes. C'est une théorie des ensembles axiomatisée, dans l'esprit du formalisme hilbertien, et formalisée en logique du premier ordre qui a occupé ce rôle. Ce qui n'est pas sans coût dans une perspective fondationnelle, puisque le corset du premier ordre habituel impose une interprétation non-standard aux quantificateurs portant sur les ensembles.

RETOUR AU LOGICISME

Hintikka propose une approche entièrement renouvelée du logicisme. Le renouvellement intervient à deux niveaux : celui, philosophique, de la conception du rôle devant être joué par la logique, et celui, technique, des instruments logiques employés.

La logique a deux fonctions liées entre elles mais distinctes : elle fournit des modes d'inférence (rôle déductif), mais aussi des moyens d'expression (rôle descriptif). Dans la logique contemporaine, la théorie de la démonstration traite du premier aspect et la théorie des modèles du second. Hintikka considère que si l'accent a été mis sur la première fonction, rendant par là centrales des exigences comme celle de la complétude sémantique, c'est la seconde qu'il importe désormais de développer dans un but fondationnel. A la quête d'introuvables axiomatisations sémantiquement complètes, on préfèrera celle de théories *catégoriques*, c'est-à-dire de systèmes formels les moins ambigus possible,

dont les modèles sont déterminés à un isomorphisme prêt (des systèmes « descriptivement complets » suivant la terminologie de Hintikka) [5]. Cette réorientation de la philosophie de la logique préconisée par Hintikka est liée à la nouvelle tradition, modèle-théorétique, qui s'est substituée à l'universalisme de Frege ou Russell [6] : la conception du langage comme calcul a définitivement supplanté la conception du langage comme médium universel, et ce « tournant sémantique » doit être suivi d'effet en philosophie de la logique. C'est donc armé de cette conception nouvelle, orientée vers l'aspect descriptif des formalismes, que Hintikka met en œuvre une nouvelle logique.

Pourquoi une nouvelle logique ? L'expressivité de la logique du premier ordre ordinaire est limitée : les quantifications ne portant que sur des objets individuels – et pas sur des entités d'ordre supérieur comme les classes, les fonctions ou les relations – l'existence de tel ou tel ensemble ou celle de telle ou telle fonction ne peuvent pas être assertées en tant que telles dans un langage du premier ordre ordinaire. Ainsi en va-t-il par exemple de la notion d'équipotence entre deux classes (le fait de posséder le même cardinal), définie classiquement par l'existence d'une correspondance biunivoque ou bijection entre ces deux classes : asserter cette existence, et donc l'équipotence, c'est se situer au-delà du premier ordre habituel [7].

L'instrument développé par Hintikka et Sandu à partir de 1989, la logique dite « faite pour l'indépendance » ou logique IF (*independence-friendly logic*), est équivalente à une extension de la logique classique [8].

5. Une formalisation non-catégorique de l'arithmétique admet des modèles non-isomorphes à $\mathbb{N}$ qui consistent (lorsqu'ils sont dénombrables) en la suite infinie dénombrable des entiers $\langle 0, 1, 2, \ldots \rangle$ suivie d'une infinité dénombrable de nombres dits non-standards. Plus précisément, la suite des entiers standards est suivie d'une suite infinie (ordonnée par $\mathbb{Q}$) d'ensembles infinis isomorphes à $\mathbb{Z}$. Par contraste, une formalisation catégorique n'admettra que des modèles isomorphes à $\mathbb{N}$.

6. J. Hintikka, 1988 : « On the Development of the model-theoretic viewpoint in logical theory », *Synthese* **77**, pp. 1-36. trad.fr. par N. Lavand *in* J. Hintikka, 1994, *Fondements d'une théorie du langage*, Paris, PUF, pp. 209-251.

7. Le logicisme de Frege recourait bien à la logique d'ordre supérieur. Pour autant, il semble que sa conception par trop intensionnelle des ensembles l'ait conduit à une interprétation non-standard des quantificateurs d'ordre supérieur – c'est-à-dire une interprétation ne prenant pas en compte tous les ensembles arbitraires possibles mais seulement une partie d'entre eux –, réduisant à néant le projet de fonder les mathématiques sur la logique. A ce sujet, voir J. Hintikka & G. Sandu, 1992 : « The Skeleton in Frege's Cupboard : The Standard Versus Nonstandard Distinction », *The Journal of Philosophy* **89** (6), pp. 290-315. Cette analyse de la conception frégéenne est toutefois contestée, cf. R. G. Heck & J. Stanley, 1993 : « Reply to Hintikka and Sandu : Frege and Second-Order Logic », *The Journal of Philosophy* **90** (8), pp. 416-424.

8. Pour une introduction générale à la logique IF, voir J. Hintikka & G. Sandu, 1997 : « Game-Theoretical Semantics », *in* J. van Benthem & A. ter Meulen (eds.) : *Handbook of Logic and Language*, Cambridge, Mass., MIT Press, pp. 361-410. On trouvera une présentation plus complète dans A.-V. Pietarinen & T. Tulenheimo, 2004 : *An Introduction*

Les énoncés de logique IF peuvent en effet être traduits en énoncés du fragment Σ^1_1 du second ordre – fragment composé des formules de la forme $\exists X_1 \ldots \exists X_n \psi$, où $\exists X_1$, …, $\exists X_n$ sont n quantificateurs existentiels du second ordre et ψ une formule du premier ordre (ordinaire) – et réciproquement, tous les énoncés Σ^1_1 peuvent être traduits en énoncés IF. Comparée à la logique du premier ordre ordinaire, la logique IF bénéficie d'une expressivité accrue puisqu'elle permet par exemple d'exprimer l'équipotence que nous venons d'évoquer, tout en conservant une quantification restreinte aux variables individuelles.

Nous n'entrerons pas ici dans une présentation détaillée de cette logique et de sa contribution à la question des fondements des mathématiques puisque c'est précisément l'objet du présent livre. Disons simplement qu'elle a des propriétés intéressantes comme la compacité ou la propriété de l'interpolation. Une originalité qui est sa partialité, le principe du tiers exclu n'y étant pas valide [9].

Mais la logique IF possède surtout deux propriétés remarquables. Elle est d'une part sémantiquement incomplète, ce qui constitue une donnée importante dans la conception que nous nous faisons du rôle de la logique pour les fondements, et dans le travail supposé du logicien : les formules valides (logiquement vraies) ne sont pas récursivement énumérables, si bien que l'ensemble des principes logiques n'est pas entièrement donné à l'avance ni figé ; de nouveaux principes d'inférence peuvent être ajoutés dans la pratique, guidés par des considérations modèle-théorétiques, comme par exemple l'axiome du choix [10].

D'autre part, contre l'impossibilité énoncée par Tarski on peut définir un prédicat de vérité pour un langage IF à l'intérieur même de ce langage. L'expression des conditions de vérité repose en effet sur l'assertion de l'existence des fonctions de Skolem dont les symboles viennent remplacer les quantificateurs existentiels dans la skolémisation d'un énoncé du premier ordre [11] ; cette expression relève donc du fragment Σ^1_1 de la logique du second ordre qui peut être traduit en logique IF [12].

to IF Logic, Nancy, Esslli 2004 (http://esslli2004.loria.fr/), et une présentation plus rapide dans M. Rebuschi, 2005 : « Quantification et indépendance informationnelle », *in* P. Joray (éd.), *La quantification dans la logique moderne*, Paris, L'Harmattan, pp. 155-178.

9. Il s'agit du tiers exclu ($\sim\varphi \vee \varphi$) avec la négation « duale » ou « forte » spécifique à la logique IF. Cf. note 14.

10. J. Hintikka & G. Sandu, 1996 : « A Revolution in Logic ? », *Nordic Journal of Philosophical Logic* **1** (2), pp. 169-183. Voir également J. Hintikka, 2000 : « Game-Theoretical Semantics as a Challenge to Proof Theory », *Nordic Journal of Philosophical Logic* **4** (2), pp. 127-141.

11. A strictement parler, lesdits symboles de fonction interviennent aussi au niveau des disjonctions, d'où une skolémisation en un sens généralisé.

12. Pour une discussion générale sur la définissabilité de la vérité, voir J. Hintikka, 1985 : « Is Truth Ineffable ? », trad.fr. par F. Schmitz *in* J. Hintikka 1994 : *La Vérité est-*

L'expressivité de la logique IF reste cependant limitée puisqu'elle possède, par exemple, la propriété descendante de Löwenheim-Skolem [13] : on ne peut pas caractériser de structure non-dénombrable avec cette seule logique. Une logique IF étendue équivalente à un fragment élargi du second ordre (Π^1_1) est obtenue par l'ajout d'une (seconde) négation, qui permet d'exprimer l'essentiel des mathématiques [14]. Des notions comme la finitude, le bon ordre, le principe d'induction, qui ne peuvent pas s'exprimer en logique IF simple, sont exprimables dans la version étendue [15]. Cette version étendue perd cependant plusieurs des propriétés intéressantes de la logique IF, comme la définissabilité de la vérité à l'intérieur du langage [16].

Selon Hintikka, l'objectif de la logique IF n'est pas de remplacer les logiques d'ordre supérieur dans la pratique des mathématiciens. Son intérêt est théorétique et philosophique, la réduction des mathématiques à la logique IF (ou à sa version étendue) permettant d'échapper à toutes

elle ineffable ?, Combas, L'Eclat, pp. 9-47. L'apport spécifique de la logique IF sur la vérité est présenté dans J. Hintikka, 2001 : « Post-Tarskian Truth », *Synthese* **126**, pp. 17-36. Pour une présentation technique détaillée, voir J. Hintikka, 1998 : « Truth Definitions, Skolem Functions and Axiomatic Set Theory », *Bulletin of Symbolic Logic* **4**, pp. 303-337.

13. Toute théorie dans un langage IF (dénombrable) admettant un modèle infini admet un modèle dénombrable.

14. La logique IF comporte une négation « duale » ou « forte » (notée ~) dont la sémantique suit celle des autres constantes logiques. La nouvelle négation, « contradictoire » ou « faible » (notée ¬), ne peut apparaître que comme préfixe des énoncés IF (ou des énoncés atomiques). Sémantiquement, si φ est un énoncé IF, alors ¬φ est vrai si et seulement si φ n'est pas vrai, c'est-à-dire si et seulement si φ est faux *ou indéterminé*. Un énoncé IF étant équivalent à un énoncé de la forme $\exists X_1 \ldots \exists X_n \psi$, sa négation contradictoire sera équivalente à un énoncé de la forme $\forall X_1 \ldots \forall X_n \neg\psi$, donc à un énoncé Π^1_1. Plus récemment Hintikka a envisagé une extension supplémentaire de la logique IF (*fully extended IF logic*), équivalente à la logique du second ordre, obtenue en autorisant la présence d'occurrences de la négation contradictoire dans la portée de quantificateurs (dont l'interprétation est alors de type substitutionnel). *Cf.* J. Hintikka, 2005 : « Truth, Negation and Other Basic Notions of Logic », *in* J. van Benthem *et al*. (eds.), *The Age of Alternative Logics, Assessing Philosophy of Logic and Mathematics Today*, Dordrecht, Kluwer-Springer. (*A paraître.*)

15. On peut virtuellement représenter tout le second ordre avec la logique IF étendue. On peut en effet généralement simuler les logiques d'ordre supérieur dans une logique du premier ordre multisorte ; pour la logique du second ordre, il suffit de deux sortes, les variables de la première sorte représentant les individus, celles de la seconde sorte les ensembles d'individus. Le problème est de s'assurer que la seconde sorte comporte bien tous les ensembles d'individus. Pour cela, il faut pouvoir asserter que pour tout ensemble d'individus (de la première sorte), il y a un objet dans la seconde sorte. Cette assertion est Π^1_1, elle est donc exprimable en logique IF étendue. (Cf. D. J. Velleman, 1999 : « Review of *The Principles of Mathematics Revisited* », *Mind* **108**, pp. 170-179.)

16. Dans la version étendue, on retombe sur le paradoxe du Menteur auquel la logique IF échappait (l'énoncé affirmant sa propre fausseté en logique IF étant dénué de valeur de vérité).

les difficultés ontologiques liées à l'existence des classes et des entités d'ordre supérieur [17].

On rencontre ici le critère bien connu et très massivement partagé d'engagement ontologique de Quine, suivant lequel *être, c'est être la valeur d'une variable (quantifiée)*. L'engagement ontologique d'une théorie est fonction de la nature des valeurs prises par les variables quantifiées dans les énoncés vrais de cette théorie. Or les quantificateurs du second ordre ont précisément pour valeurs non pas les individus constitutifs du domaine d'interprétation du langage, mais des classes d'individus (ou des classes de *n*-uplets d'individus). Mais ces entités du second ordre sont éventuellement suspectes, quand elles ne sont pas le siège d'antinomies. Un principe d'économie ontologique fera généralement préférer, quand cela est possible, l'attitude nominaliste qui consiste à restreindre la quantification au premier ordre. C'est ce qui préside, semble-t-il, à l'axiomatisation habituelle de la théorie des ensembles mentionnée plus haut.

Pour Hintikka, la logique IF constitue donc un bien meilleur fondement pour les mathématiques que cette axiomatisation. Du fait du caractère non-standard de l'interprétation lié au premier ordre, la théorie des ensembles au premier ordre crée notamment une situation paradoxale quant à l'expression de la vérité de ses propres énoncés. L'existence des fonctions de Skolem fondant les conditions de vérité d'un énoncé devrait pouvoir être exprimée en termes ensemblistes, mais elle ne peut pas l'être dans la théorie des ensembles axiomatisée au premier ordre : certaines assertions de la forme $\exists f_1 \ldots \exists f_n \, \psi$, où ψ est un énoncé du premier ordre, peuvent être fausses tout en exprimant les conditions de vérité d'un énoncé vrai de la théorie. La fausseté de $\exists f_1 \ldots \exists f_n \, \psi$ dans la théorie des ensembles axiomatisée au premier ordre est liée à l'absence des fonctions de Skolem susceptibles de constituer les valeurs des variables de fonctions $f_1, \ldots, f_n$ dans l'interprétation de la théorie [18]. Il y a même des énoncés affirmant la vérité d'énoncés ensemblistes vrais dont on peut prouver, dans la théorie des ensembles du premier ordre, qu'ils sont faux, toujours au sens où les fonctions de Skolem correspondantes n'existent pas dans le modèle. Autrement dit il y a des énoncés réfutables de la théorie des ensembles qui sont en fait vrais : selon Hintikka cette infraction à la correction devrait définitivement retirer à la théorie

17. Cf. J. Hintikka, 1997 : « A Revolution in the Foundations of Mathematics? », *Synthese* **111**, pp. 155-170.

18. Un exemple est fourni par l'énoncé $\forall x \, \exists y \, (x = y)$, dont la fonction de Skolem serait la classe de tous les couples $\langle x, x \rangle$. Dans une interprétation ensembliste on ne peut pas affirmer l'existence d'une telle fonction car sa cardinalité serait celle de l'ensemble de tous les ensembles.

des ensembles du premier ordre toute prétention sérieuse à fonder les mathématiques [19].

UN PROGRAMME CONTESTE

Comme le lecteur peut l'imaginer, le projet de Hintikka de fonder les mathématiques sur la logique IF n'est pas resté sans réaction. Ce dont le présent livre offre une magistrale synthèse a été accompagné de la publication de dizaines d'articles parfois très techniques, comportant des critiques, des réponses, des clarifications sur tel ou tel point du programme.

Nous exposerons ici brièvement deux points, dont le premier au moins est amplement discuté par les spécialistes : l'ordre de la logique IF et son caractère logique, avant de présenter une question touchant à la capacité de la logique IF à contribuer au fondement des mathématiques.

La logique IF est-elle vraiment une logique du premier ordre ? Nous avons signalé que le premier ordre était recherché car économique du point de vue ontologique. Pour plusieurs critiques cependant, la logique IF serait une logique d'ordre supérieur à peine voilée.

S. Feferman montre ainsi que les quantificateurs indépendants de la logique IF sont des cas particuliers de quantificateurs généralisés de Lindström, dont l'ordre est discutable : s'il s'agit incontestablement de quantificateurs du premier ordre sur le plan syntaxique (les seules variables liées étant des variables individuelles), les choses paraissent moins claires sur le plan sémantique. Pour Feferman, le fait que les quantificateurs généralisés permettent de définir des notions comme la cardinalité ou la bonne fondation, qui sont des notions d'ordre supérieur – car recourant implicitement à des quantifications sur des fonctions arbitraires – suffit à qualifier ces quantificateurs de la même manière [20].

Dans une veine similaire, Ph. de Rouilhan débusque le second-ordre des énoncés IF dans leur signification, exprimée par leurs conditions de vérité en sémantique des jeux ; l'argument repose sur une relativisation de la notion d'ordre à l'interprétation du langage et conduit à promouvoir la logique du premier ordre ordinaire également au second ordre [21].

Les deux critiques renvoient à la définition du premier ordre, en particulier à la question de savoir si le recours à des quantifications *implici-*

19. J. Hintikka, 2004 : « Independence-Friendly Logic and Axiomatic Set Theory », *Annals of Pure and Applied Logic* **126**, pp. 313-333.

20. S. Feferman, 2005 : « What Kind of Logic is 'Independence Friendly' Logic ? », *in* R. E. Auxier & L. E. Hahn (eds.), *The Philosophy of Jaakko Hintikka*, La Salle (Illinois), Open Court, The Library of Living Philosophers. (*A paraître*).

21. Ph. de Rouilhan, 2005 : « Note sur l'ordre de IF : Hintikka a-t-il véritablement découvert la véritable logique élémentaire ? », *Philosophia Scientiae* **9** (1), pp. 141-150.

tes du second ordre, qui ne sont explicitées qu'au niveau du métalangage, suffisent à situer le langage-objet lui-même au-delà du premier ordre. Une défense du caractère de premier ordre de la logique IF pourrait être qu'elle ne suppose que des choix d'individus (et pas de fonctions ni d'ensembles) dans les jeux sémantiques constituant l'interprétation des énoncés ; cette défense ne vaudrait toutefois que pour la version inétendue de IF [22-23].

La logique IF est-elle encore de logique ? La discussion n'est pas nouvelle car elle est liée au statut de la logique d'ordre supérieur.

Il est connu que Quine qualifiait la logique d'ordre supérieur de « théorie des ensembles déguisée en agneau » [24]. Prenons l'exemple du nombre 2 dont on affirme qu'il est un nombre naturel (N(2)) ; si l'on en infère qu'il y a un X tel que 2 est un X à l'aide d'un quantificateur du second ordre : $(\exists X)\ X(2)$, quelle est alors la nature des valeurs pouvant être prises par X ? Dans le cadre d'une interprétation courante, objectuelle et extensionnelle du quantificateur, cette valeur est une classe ($\mathbb{N}$), dont on affirme qu'elle possède 2 comme élément. Les variables quantifiées du second ordre prendraient donc au mieux leurs valeurs parmi les classes – et au pire parmi des « attributs », « propriétés » et autres choses suspectes non seulement à cause de leur ordre, mais aussi du fait de leur caractère intensionnel.

En outre, la logique du second ordre paraît avoir partie liée avec la théorie des ensembles sur le plan de l'interprétation. Dans une interprétation standard, les quantificateurs du second ordre balayent toutes les classes formées des individus composant le domaine. Le domaine d'une interprétation ne peut donc pas comporter tous les ensembles ou tous les ordinaux, sous peine de contradiction. C'est une différence notable avec la théorie ZF formalisée dans le premier ordre, qui ne rencontre pas cette difficulté. Dans le premier ordre, le domaine de l'interprétation n'a pas à être spécifié autrement que comme une simple collection d'objet, mais dans le second ordre il faut supposer que l'on a affaire à un *ensemble* (au sens de la théorie des ensembles) [25].

La discussion sur la logicité de la logique IF est bien entendu étroitement liée à celle sur l'ordre de IF. Si la logique IF devait être considé-

22. H. Hodes, 1998 : « Review of *The Principles of Mathematics Revisited* », *Journal of Symbolic Logic* **63** (4), pp. 1615-1623.

23. Pour une discussion sur l'ordre de la logique IF liée cette fois à la question de la formalisation de fragments des langues naturelles, se reporter à M. Eklund & D. Kolak, 2002 : « Is Hintikka's Logic First-Order ? », *Synthese* **131**, pp. 271-388, ainsi qu'à la réponse de Hintikka qui suit immédiatement cet article.

24. W. V. O. Quine, 1975 : *La Philosophie de la logique*, Paris, Aubier-Montaigne.

25. Voir G. Boolos, 1975 : « On Second-Order Logic », *Journal of Philosophy* **72** (16), pp. 509-527.

rée comme une logique d'ordre supérieur, la question de sa nature serait alors en effet ouverte ; si elle est, comme le défend Hintikka, une authentique logique du premier ordre, alors la question est résolue. Ajoutons enfin que la réalisabilité du programme logiciste à l'aide de la logique IF repose entièrement sur cette hypothèse.

Le rôle fondationnel de la logique IF est par ailleurs abondamment discuté. Une partie de la discussion touche à la possibilité de définir la vérité d'un langage IF sans avoir à passer par un métalangage. La définition de la vérité étant un premier pas vers une définition de la sémantique du langage, Hintikka met en avant cette propriété comme un avantage dans une stratégie de fondements : au contraire de la théorie axiomatique des ensembles qui dépend d'une autre théorie pour sa sémantique, la logique IF paraît bien être autosuffisante.

La définition de la vérité pour les langages IF semble pourtant receler des complications. Ainsi Sandu & Hyttinen ont-ils montré qu'à partir d'une axiomatisation (incomplète) de l'arithmétique en logique IF, on ne pourrait pas systématiquement prouver la contradiction de l'affirmation simultanée de la vérité et de la fausseté d'un énoncé [26].

Dans le même sens, signalons l'argument de Bozon & de Rouilhan contre la capacité prétendue des langages IF à comporter leur propre définition de la vérité : s'ils peuvent contenir un prédicat, ils ne permettent pas pour autant d'exprimer une *définition adéquate* de la vérité [27].

Des questions plus vitales sont également en jeu. Feferman explique que si la dimension descriptive de la logique est avantageusement servie par la logique IF, la fonction déductive ne peut pas être totalement évacuée [28]. C'est notamment le cas quand Hintikka explique que d'un énoncé mathématique qui ne peut pas s'exprimer en logique IF mais uniquement en logique IF étendue – et qui est donc la négation contradictoire $\neg S$ d'un énoncé S de la logique IF non étendue –, on peut *in fine* appréhender les conséquences s'exprimant en logique IF inétendue C par l'implication $\neg S \rightarrow C$, qui équivaut à $S \vee C$, autrement dit par un énoncé de logique IF non étendue.

Ce cas se présente avec les axiomes de la théorie des ensembles ou de l'arithmétique du deuxième ordre, qui peuvent être formulés en logique IF étendue. Si tous les énoncés arithmétiques vrais ne sont pas des

26. G. Sandu & T. Hyttinen, 2001 : « IF Logic and the Foundations of Mathematics », *Synthese* **126**, pp. 37-47.

27. L'adéquation étant ici entendue au sens de Tarski. *Cf.* Ph. de Rouilhan & S. Bozon, 2005 : « The Truth of IF : Has Hintikka Really Exorcised Tarski's Curse ? », *in* R. E. Auxier & L. E. Hahn (eds.), *The Philosophy of Jaakko Hintikka*, La Salle (Illinois), Open Court, The Library of Living Philosophers. (*A paraître*).

28. Cf. article cité *supra*.

énoncés IF, c'est donc le cas de l'affirmation qu'ils sont conséquences des axiomes. La logique IF est alors le lieu de l'expression des problèmes prenant la forme d'une vérification de conjectures (pour peu que ces conjectures s'expriment dans IF).

La question n'est plus alors celle de la satisfaction de la formule $\neg S \rightarrow C$ mais celle de sa *validité*, c'est-à-dire sa vérité dans toutes les interprétations possibles de ses symboles non-logiques. Or tandis que la satisfaction et la vérité peuvent, comme on l'a signalé plus haut, être formulées dans le langage IF lui-même, ce n'est pas le cas de la validité qui se situe au-delà de Σ^1_1, au cœur du second ordre [29]. Le caractère (auto-)fondationnel de la logique IF en est semble-t-il affaibli.

L'UNIVERSALISME RETROUVE ?

Le lecteur appréciera la variété des thèmes abordés dans ce livre, qui sont autant d'indicateurs des développements en cours ou à venir de la logique IF. Loin d'être fabriquée sur mesure pour les fondements des mathématiques, la logique IF est à même d'offrir un éclairage nouveau sur de nombreuses questions touchant à philosophie et à l'épistémologie des mathématiques (sur l'intuitionnisme et les constructivismes notamment [30]) et sur l'épistémologie en général.

L'extension IF par l'introduction d'indépendance informationnelle entre quantificateurs peut en effet être appliquée à d'autres logiques que la logique du premier ordre ordinaire. C'est le cas notamment de la logique épistémique, une autre création très fructueuse de Hintikka datant des années 1960 [31]. En logique épistémique IF [32], les quantificateurs (ou les opérateurs) apparaissant dans la portée d'opérateurs épistémiques peuvent être rendus indépendants de ces derniers, assimilés à des quantificateurs universels sur des ensembles de mondes possibles. La logique épistémique de la « seconde génération » permet ainsi de traiter de l'opposition entre connaissance d'objets et connaissance de faits, ou de revisiter celle entre connaissance *de re* et connaissance *de dicto* [33].

29. Voir J. Väänänen, 2001 : « Second-Order Logic and Foundations of Mathematics », *Bulletin of Symbolic Logic*, **7** (4), pp. 504-520.

30. Voir J. Hintikka, 2001 : « Intuitionistic Logic as Epistemic Logic », *Synthese* **127**, pp. 7-19.

31. J. Hintikka, 1962 : *Knowledge and Belief*, Dordrecht, Reidel.

32. A. Pietarinen, 2003 : « What Do Epistemic Logic and Cognitive Science Have to Do With Each Other ? », *Cognitive Systems Research* **4**, pp. 169–190. J. Hintikka, 2003 : « A Second Generation Epistemic Logic and its General Significance », *in* V. F. Hendricks *et al.* (eds.), *Knowledge Contributors*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 33-55.

33. J. Hintikka, 1996 : « Knowledge Acknowledged : Knowledge of Propositions vs. Knowledge of Objects », *Philosophy and Phenomenological Research* **61**, pp. 251-273, traduction française par F. Poinboeuf & Ch. Chauviré, 1998 : « La Connaissance reconnue. La connaissance de propositions par opposition à la connaissance d'objets », *in* E. Rigal

D'autres développements importants ont été réalisés et sont attendus en logique modale IF, résultat de l'introduction d'indépendance informationnelle entre les opérateurs modaux de possibilité et de nécessité [34]. La logique IF entretient aussi des connexions étroites avec la logique quantique [35] ou encore avec la logique linéaire [36].

Le caractère naturel de l'extension IF de la logique du premier ordre et des extensions IF d'autres logiques est en grande partie lié à l'interprétation des langages correspondants suivant la théorie sémantique des jeux (GTS, pour *Game-Theoretical Semantics*). Historiquement, la logique IF apparaît même comme un produit dérivé de GTS.

Cette sémantique, concurrente de la sémantique modèle-théorétique standard dite parfois « à la Tarski », a été développée par Hintikka à partir de la fin des années 1960. L'idée – présentée de façon détaillée dans le livre – est d'associer un jeu sémantique à chaque énoncé qui se verra décomposé au fil de la partie suivant des règles déterminées par les constantes logiques. Un énoncé est vrai (au sens GTS) s'il existe une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs nommé vérificateur, et faux (toujours au sens GTS) s'il existe une stratégie gagnante pour l'autre joueur nommé falsificateur. Pour des jeux à information parfaite, c'est-à-dire les jeux dont les joueurs connaissent à chaque coup tous les coups antérieurement joués, la vérité GTS dans un modèle coïncide avec l'interprétation usuelle des énoncés du premier ordre ordinaire [37]. Il suffit alors d'introduire de l'information imparfaite – en rendant certains coups inaccessibles au vérificateur au fil de la partie – pour obtenir des énoncés du premier ordre IF.

Même si la logique IF est relativement indépendante de l'interprétation GTS, la vérité étant déterminée par l'existence de fonctions de Skolem indépendamment de cette interprétation, GTS offre une compréhension naturelle des énoncés IF en terme de jeux. Dans les faits, c'est-à-dire dans la plupart des écrits des fondateurs de la logique IF, la théorie sémantique des jeux est si étroitement liée à la logique IF du

(ed.) 1998 : *Jaakko Hintikka, Questions de logique et de phénoménologie*, Paris, Vrin, pp. 99-123.

34. J. C. Bradfield & S. B. Fröschle, 2002 : « On Logical and Concurrent Equivalences », *Nordic Journal of Computing* **9**, pp. 102-117. T. Tulenheimo, 2004 : *Independence-Friendly Modal Logic : Studies in its Expressive Power and Theoretical Relevance*, Philosophical Studies from the University of Helsinki 4.

35. J. Hintikka, 2002 : « Quantum Logic as a Fragment of Independence-Friendly Logic », *Journal of Philosophical Logic* **31**, pp. 197-209.

36. G. Sandu, 2001 : « Signalling in Languages with Imperfect Information », *Synthese* **127**, pp. 21-34.

37. Plus précisément, les deux définitions de la vérité, Tarski et GTS, sont équivalentes si l'on présuppose l'axiome du choix.

premier ordre qu'il faut considérer les deux ensemble pour saisir pleinement le nouveau paradigme logico-sémantique.

De façon plus générale, les dernières décennies ont vu émerger un champ d'investigation spécifique à l'intersection entre logique et théorie mathématique des jeux [38]. La théorie sémantique des jeux de Hintikka constitue l'un des trois grands courants dominant ce champ, les deux autres étant issus pour l'un de la logique dialogique de Lorenzen et Lorenz, et pour l'autre des études de l'école hollandaise sur les rapports entre logique, jeux et computation, conduites dans le sillage des travaux de van Benthem [39].

Avec l'utilisation de GTS et de la logique IF en sémantique formelle pour les langues naturelles [40], on aborde un autre grand secteur d'application de la logique bien connu en philosophie du langage. La logique IF et sa sémantique des jeux paraissent ainsi constituer un nouveau cadre logique universel au sens où elles permettent la réunification en un formalisme unique de théories qui, à force de spécialisation, ont fini par se couper les unes des autres : logique du premier ordre ordinaire et théorie des ensembles ou théorie des catégories pour les fondements des mathématiques, logiques intensionnelles typées puis logiques dynamiques pour la sémantique des langues naturelles.

Sur ce point comme dans l'usage fait par Hintikka de ses instruments techniques pour la résolution d'énigmes philosophiques, on reconnaît l'ambition logiciste rénovée d'un Frege ou d'un Russell qui retrouve, un siècle plus tard, une seconde jeunesse.

La généralité du phénomène d'indépendance informationnelle dévoilé par la logique IF a conduit Hintikka à contester le caractère « classique » de la logique du premier ordre ordinaire. Celle-ci impose en effet des restrictions injustifiées sur les liens de dépendance et d'indépendance mutuelles entre quantificateurs. Hintikka a fini par regretter l'appellation de « logique IF » qui peut laisser croire à une logique déviante ou tout au moins non classique. Ce regret est renforcé par

38. Pour un aperçu d'ensemble sur ce champ, voir M. Rebuschi & T. Tulenheimo (éds.), 2004 : « Logique & théorie des jeux », *Philosophia Scientiae*, Volume **8** (2).

39. Se reporter en particulier au site de l'Institute for Logic, Language and Information à Amsterdam : http://www.illc.uva.nl/lgc/.

40. Voir p.ex. J. Hintikka & G. Sandu, 1994 : « What Is A Quantifier ? », *Synthese* **98**, pp. 113-129. G. Sandu, 1997 : « On the Theory of Anaphora : Dynamic Predicate Logic vs. Game-Theoretical Semantics », *Linguistics and Philosophy* **20**, pp. 147-174. J. Hintikka, 1997 : « No Scope For Scope ? », *Linguistics and Philosophy* **20**, pp. 515-544. J. Hintikka, 2002 : « Negation in Logic and in Natural Language », *Linguistics and Philosophy* **25**, pp. 585-600. T. Tulenheimo, 2004 : « Sur les 'opérateurs rétrogrades' », *Philosophia Scientiae* **8** (2), pp. 145-160. T. Tulenheimo, 2004 : « Are There Tense Operators in English ? » *in* L. Behounek (ed.), *The Logica Yearbook 2003*, Prague, Filosofia, pp. 271-84.

l'extraordinaire fécondité de la nouvelle logique. Finalement, il propose de l'appeler « logique hyperclassique » puisqu'elle constitue, à ses yeux, notre véritable logique élémentaire [41].

Le lecteur appréciera dans *Les Principes des mathématiques revisités* un ouvrage passionnant par l'envergure de son propos comme par la pertinence des questions et l'originalité des positions soutenues. La culture philosophique et la connaissance de l'histoire de la logique et des mathématiques de son auteur ne sont plus à démontrer. Jaakko Hintikka est un philosophe mondialement connu dont les contributions à la logique, à la philosophie et à l'histoire de la philosophie se déploient sur plus d'un demi-siècle.

Comme l'auteur le signale dans sa préface à la présente traduction, il s'agit d'une nouvelle édition d'où un certain nombre d'erreurs techniques de l'édition originale ont été corrigées [42]. L'édition française comporte en outre un appendice inédit par Gabriel Sandu, remplaçant celui de la version originale. Je remercie Tero Tulenheimo d'avoir revu l'ensemble de la traduction, étant bien entendu moi-même seul responsable des erreurs qui subsistent.

Manuel Rebuschi
L.P.H.S. – Archives H. Poincaré

41. Voir J. Hintikka, 2002 : « Hyperclassical Logic (a.k.a. IF Logic) and Its Implications for Logical Theory », *Bulletin of Symbolic Logic* **8** (3), pp. 404-423.

42. Des modifications substantielles ont été notamment apportées aux pages 64, 88, 136 et 188 de l'édition originale.