COHOMOLOGIE DE CHEVALLEY DES GRAPHES VECTORIELS

WALID ALOULOU, DIDIER ARNAL ET RIDHA CHATBOURI

ABSTRACT. L'espace des champs de vecteurs augmenté des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ est une sous algèbre de Lie de l'algèbre de Lie (graduée) de l'espace $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ des champs de tenseurs sur $\mathbb{R}^d$ muni du crochet de Schouten.

Dans cet article, on calcule la cohomologie des représentations adjointes de cette sous algèbre de Lie, en se restreignant à des cochaînes définies par des graphes de Kontsevich aériens comme dans [AGM]. On retrouve les résultats bien connus de [GF] et [DWL].

1. Introduction

Notons $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des tenseurs complètement antisymétriques sur $\mathbb{R}^d$. Cet espace, muni du crochet de Schouten et de la graduation $deg(\alpha) = k - 1$ si α est un k-tenseur est une algèbre de Lie graduée.

Cette algèbre de Lie contient une sous-algèbre de Lie intéressante : $Vect(\mathbb{R}^d)$, espace des tenseurs de degré négatif ou nul, c'est à dire l'algèbre de Lie des champs de vecteurs ξ augmentée de l'espace des fonctions C^∞ f muni du crochet usuel des champs de vecteurs étendu aux fonctions par:

$$[\xi, f] = -[f, \xi] = \xi f, \text{ et } \quad [f_1, f_2] = 0.$$

La représentation adjointe fait de $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ un $Vect(\mathbb{R}^d)$-module. Dans cet article, on va calculer des groupes de cohomologies de ce module.

Plus précisément, nous considérons ici des cochaînes φ définies comme dans [AGM] à partir d'une combinaison linéaire de graphes aériens de Kontsevich [K]. Dans le cas de $Vect(\mathbb{R}^d)$, au plus une arête part d'un sommet de chacun de ces graphes. L'opérateur de cohomologie peut alors être défini sur l'espace des graphes, il correspond à une suite d''éclatement' des sommets.

Les cohomologies de Chevalley des champs de vecteurs ont été calculées par plusieurs auteurs. En particulier dans [DWL], la cohomologie à valeurs dans les formes

Date: 30/06/05.

Ce travail a été effectué dans le cadre de l'accord CMCU 03 S 1502. W. Aloulou et R. Chatbouri remercient l'université de Bourgogne pour l'accueil dont ils ont bénéficié au cours de leurs séjours, D. Arnal remercie la faculté des Sciences de Monastir pour l'accueil dont il a bénéficié au cours de ses séjours.

est déterminée explicitement. Dans cet article, notre restriction aux graphes purement aériens nous permet d'adapter la preuve de [DWL]. On reformule en particulier la définition de l'homotopie et on en déduit la cohomologie des graphes aériens. On retrouve le même résultat, à savoir que cette cohomologie est donnée par les roues impaires.

Rappelons que dans le problème de la construction d'une formalité sur $\mathbb{R}^d$ au moyen de graphes, les cohomologies qui apparaissent sont celles de Hochschild, de Chevalley et de Chevalley-Harrison. La première a été calculée dans [AM], la troisième est nulle d'après [GH].

2. Notations et définitions

Dans cet article, on considère l'espace $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ des tenseurs complètement antisymétriques sur $\mathbb{R}^d$. Si $\mathcal{X}$ désigne l'espace des champs de vecteurs ξ sur $\mathbb{R}^d$, on construit $Tens(\mathbb{R}^d)$ comme l'algèbre associative libre sur $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ engendrée par les champs constants $\partial_1, \dots, \partial_d$. $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ est le quotient de $Tens(\mathbb{R}^d)$ par l'idéal engendré par $\{\xi \otimes \eta - \eta \otimes \xi,\ \xi \in \mathcal{X},\ \eta \in \mathcal{X}\}$. $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ est muni d'un produit associatif $\wedge$, tout élément de $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ est une somme de produits de la forme $\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k$ et de fonctions f. On peut aussi écrire tout tenseur α de $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ de façon unique sous la forme

$$\alpha = \sum_{k=0}^{K} \sum_{i_1,\dots,i_k} \alpha_{(k)}^{i_1\dots i_k} \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_k}.$$

(On prend la convention que les coordonnées $\alpha_{(k)}^{i_1\dots i_k}$ sont des fonctions C^∞ et sont complètement antisymétriques en $i_1, \dots, i_k$. On a donc aussi

$$\alpha = \sum_{k=0}^{K} \sum_{i_1<\dots<i_k} k!\ \alpha_{(k)}^{i_1\dots i_k} \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_k}.$$

On place sur $\mathbb{R}^d$ la connexion plate triviale ∇, c'est à dire la connexion pour la structure riemannienne usuelle de $\mathbb{R}^d$. On a donc

$$\nabla_\xi f = \xi f,\ \nabla_\xi \eta = \nabla_\xi (\sum_i \eta^i \partial_i) = \sum_i (\xi \eta^i) \partial_i \quad (f \in C^\infty(\mathbb{R}^d),\ \xi,\ \eta \in \mathcal{X}).$$

Il y a un prolongement unique de ∇_ξ en une dérivation de $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$. On impose

$$\nabla_\xi(\alpha \wedge \beta) = (\nabla_\xi \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\nabla_\xi \beta),$$

on obtient une solution et une seule définie par

$$\nabla_\xi(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_\ell) = \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{j-1} (\nabla_\xi \eta_j) \wedge \eta_1 \wedge \dots \widehat{\eta_j} \dots \wedge \eta_\ell$$

ou par

$$\nabla_\xi \alpha = \sum_{i_1,\dots,i_k} \left(\xi \alpha^{i_1\dots i_k}\right) \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_k}.$$

Maintenant, on considère $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ comme une algèbre graduée par $|\alpha| = k$ si α est un k-tenseur et on utilise systématiquement la règle de Koszul. Si $\xi \in \mathcal{X}$, ∇_ξ est une dérivation de degré 0, le produit $\wedge$ est aussi de degré 0, les formules ci-dessus sont donc cohérentes avec cette règle. Cependant l'application $\nabla : \xi \mapsto \nabla_\xi$ est maintenant homogène de degré -1 de $\mathcal{X}$ vers l'espace $Der(T_{poly}(\mathbb{R}^d))$ des dérivations de $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$. On veut la prolonger comme une dérivation.

On cherche donc $\nabla : T_{poly}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow Der(T_{poly}(\mathbb{R}^d))$ qui la prolonge et telle que

$$\nabla_{\alpha\wedge\beta}(\gamma) = (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge (\nabla_\beta \gamma) + (-1)^{|\beta||\gamma|}(\nabla_\alpha \gamma) \wedge \beta.$$

Lemme 2.1. (Le prolongement)

Un tel prolongement existe et il est unique, il est défini par $\nabla_f = 0$ si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et soit

$$\nabla_{\xi_1\wedge\dots\wedge\xi_k}(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_\ell) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{i+j}\xi_1 \wedge \dots \widehat{\xi_i} \dots \wedge \xi_k \wedge (\nabla_{\xi_i}\eta_j) \wedge \eta_1 \wedge \dots \widehat{\eta_j} \dots \wedge \eta_\ell$$

soit

$$\nabla_\alpha \beta = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \\ j_1,\dots,j_\ell}} \alpha^{i_1\dots i_k} \left(\partial_{i_r} \beta^{j_1\dots j_\ell}\right) \partial_{i_1} \wedge \dots \widehat{\partial_{i_r}} \dots \wedge \partial_{i_k} \wedge \partial_{j_1} \wedge \dots \wedge \partial_{j_\ell}.$$

Remarquons que l'on retrouve l'opération notée $\bullet$ dans [AMM]

$$\nabla_\alpha \beta = \alpha \bullet \beta.$$

Preuve

Soit ξ un champ de vecteur et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. On doit avoir $\nabla_{(f\xi)} = \nabla_{f\wedge\xi}$ ou, pour tout k-tenseur α,

$$f\nabla_\xi \alpha = \nabla_{(f\xi)}(\alpha) = f(\nabla_\xi \alpha) + (-1)^k(\nabla_f \alpha) \wedge \xi.$$

$\nabla_f \alpha$ est un $k-1$-tenseur. S'il n'est pas nul, on peut choisir ξ tel que $(\nabla_f \alpha) \wedge \xi \neq 0$, ce qui est absurde.

On montre ensuite par récurrence sur k que $\nabla_{\xi_1\wedge\dots\wedge\xi_k}(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_\ell)$ ne peut être que ce qui est annoncé. Enfin que l'application ∇ ainsi définie a bien les propriétés demandées. La formule donnant $\nabla_\alpha \beta$ est une conséquence immédiate de la première formule.

Maintenant on a par construction

$$\nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi = [\xi, \eta], \quad (\xi,\ \eta \in \mathcal{X}).$$

Traditionnellement, pour étendre le crochet des champs de vecteurs en le crochet de Schouten, défini sur $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$, on choisit la graduation $deg(\alpha) = k - 1$ si α est un k-tenseur, le crochet des champs de vecteurs est antisymétrique, de degré 0, il se prolonge d'une façon unique en un crochet antisymétrique toujours de degré 0 sur $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ qui est une dérivation 'à droite' c'est à dire en un crochet tel que

$$\begin{aligned}[\alpha, \beta \wedge \gamma] &= [\alpha, \beta] \wedge \gamma + (-1)^{(deg(\beta)-1)deg(\alpha)} \beta \wedge [\alpha, \gamma] \\ [\beta, \alpha] &= -(-1)^{deg(\alpha)deg(\beta)} [\alpha, \beta]\end{aligned}$$

(en effet, $deg(\wedge) = -1$ maintenant). Ce prolongement unique est donné par $[f, g] = 0$ si f et g sont des fonctions, $[\xi, f] = -[f, \xi] = \xi f$ si ξ est un champ de vecteurs et f une fonction et par

$$[\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k, \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_\ell] = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{k-i+j-1} \xi_1 \wedge \ldots \widehat{\xi_i} \cdots \wedge \xi_k \wedge [\xi_i, \eta_j] \wedge \eta_1 \wedge \ldots \widehat{\eta_j} \cdots \wedge \eta_\ell.$$

Il vérifie la relation

$$[\alpha \wedge \beta, \gamma] = \alpha \wedge [\beta, \gamma] + (-1)^{(deg(\beta)+1)deg(\gamma)} [\alpha, \gamma] \wedge \beta.$$

Avec nos notations, on peut aussi définir le crochet de Schouten par:

$$[\alpha, \beta] = (-1)^{deg(\alpha)} \nabla_\alpha \beta - (-1)^{(deg(\alpha)+1)deg(\beta)} \nabla_\beta \alpha.$$

Cependant, nous gardons ici la graduation $|\alpha| = k$ si α est un k-tenseur. Le crochet des champs de vecteurs devient un produit commutatif. On le prolonge donc comme dans [K] en une opération Q symétrique, de degré -1 vérifiant

$$\begin{aligned}Q(\alpha, \beta \wedge \gamma) &= Q(\alpha, \beta) \wedge \gamma + (-1)^{|\beta|(|\alpha|-1)} \beta \wedge Q(\alpha, \gamma) \\ Q(\beta, \alpha) &= (-1)^{|\alpha||\beta|} Q(\alpha, \beta).\end{aligned}$$

Lemme 2.2. (L'opérateur Q)

Il y a un prolongement et un seul Q du crochet des champs de vecteurs vérifiant ces relations. Ce prolongement est donné par

$$Q(\alpha, \beta) = \nabla_\alpha \beta + (-1)^{|\alpha||\beta|} \nabla_\beta \alpha.$$

Il vérifie

$$Q(\alpha \wedge \beta, \gamma) = (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge Q(\beta, \gamma) + (-1)^{|\beta||\gamma|} Q(\alpha, \gamma) \wedge \beta.$$

On a

$$Q(\alpha,\beta)=\sum_{\substack{i_1\dots i_k\\ j_1\dots j_\ell}}\Big[\sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\alpha^{i_1\dots i_k}\left(\partial_{i_r}\beta^{j_1\dots j_\ell}\right)\partial_{i_1}\wedge\dots\widehat{\partial_{i_r}}\dots\wedge\partial_{i_k}\wedge\partial_{j_1}\wedge\dots\wedge\partial_{j_\ell}$$

$$+\sum_{s=1}^{\ell}(-1)^{k+s}\beta^{j_1\dots j_\ell}\left(\partial_{j_s}\alpha^{i_1\dots i_k}\right)\partial_{i_1}\wedge\dots\wedge\partial_{i_k}\wedge\partial_{j_1}\wedge\dots\widehat{\partial_{j_s}}\dots\wedge\partial_{j_\ell}\Big].$$

et

$$[\alpha,\beta]=(-1)^{deg(\alpha)}Q(\alpha,\beta).$$

Preuve

Supposons que Q soit une telle extension. Q étant de degré -1, $Q(f,g)=0$ si f et g sont des fonctions. Maintenant

$$Q(\xi,f\eta)=Q(\xi,f)\eta+fQ(\xi,\eta)=[\xi,f\eta]=(\xi f)\eta+f[\xi,\eta],$$

donc $Q(\xi,f)=Q(f,\xi)=\xi f=\nabla_\xi f+\nabla_f\xi$. L'application $\beta\mapsto Q(\xi,\beta)$ étant une dérivation, on montre par récurrence sur ℓ que

$$Q(\xi,\eta_1\wedge\dots\wedge\eta_\ell)=\sum_{j=1}^{\ell}(-1)^{j-1}[\xi,\eta_j]\wedge\eta_1\wedge\dots\widehat{\eta_j}\dots\wedge\eta_\ell.$$

Par récurrence sur k, on montre ensuite que

$$Q(\xi_1\wedge\dots\wedge\xi_k,\eta_1\wedge\dots\eta_\ell)=\sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{i=k\\ j=\ell}}(-1)^{i+j}\xi_1\wedge\dots\widehat{\xi_i}\dots\wedge\xi_k\wedge[\xi_i,\eta_j]\wedge\eta_1\wedge\dots\widehat{\eta_j}\dots\wedge\eta_\ell.$$

Ceci nous dit que si Q existe, elle est unique et que c'est

$$Q(\alpha,\beta)=\nabla_\alpha\beta+(-1)^{|\alpha||\beta|}\nabla_\beta\alpha.$$

Maintenant les propriétés de ∇ montrent que cette formule définit bien une bidérivation symétrique de degré -1, extension du crochet des champs de vecteurs. Les dernières formules du lemme sont immédiates.

Reprenons maintenant le choix de signes donné dans [AMM]. Soit σ une permutation de $\{1,\dots,n\}$. On note $\varepsilon(\sigma)$ sa signature. Si $v_1,\dots,v_n$ sont n vecteurs homogènes d'un espace vectoriel V gradué par deg, on note $\varepsilon_{deg(v)}(\sigma)$ la signature de la permutation que σ induit sur les v de degrés impairs. Par construction ces signatures sont des homomorphismes de groupe. Si C est une application n-linéaire sur V^n, à valeurs dans un espace vectoriel, on dira que C est symétrique (resp. antisymétrique) si pour toute permutation $\sigma \in S_n$ et tout $v_1, \dots, v_n$ homogènes,

$$C(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \varepsilon_{deg(v)}(\sigma) C(v_1, \dots, v_n)$$
$$\Big(\text{respectivement } C(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon_{deg(v)}(\sigma) C(v_1, \dots, v_n)\Big).$$

Ceci est équivalent à

$$C(v_1, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_n) = (-1)^{deg(v_i)deg(v_{i+1})} C(v_1, \dots, v_n)$$
$$\big(\text{resp. } C(v_1, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_n) = -(-1)^{deg(v_i)deg(v_{i+1})} C(v_1, \dots, v_n)\big)$$

pour tout i.

Changeons de graduation sur V et posons $|v| = deg(v) + 1$. Posons

$$\eta_v(\sigma) = \varepsilon_{deg(v)}(\sigma)\varepsilon_{|v|}(\sigma)\varepsilon(\sigma).$$

Si nous nous donnons une application τ de V^n dans $\{\pm 1\}$ telle que pour tout σ et tout $v_1, \dots, v_n$,

$$\tau(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \eta_v(\sigma)\tau(v_1, \dots, v_n), \tag{2.1}$$

alors on peut faire correspondre à toute application n-linéaire deg-antisymétrique C' une application n-linéaire $|\ |$-symétrique C en posant $C = \tau C'$ ou

$$C(v_1, \dots, v_n) = \tau(v_1, \dots, v_n) C'(v_1, \dots, v_n).$$

Un tel choix a été fait dans [AMM] où on a posé $\tau(v_1, \dots, v_n) = \eta_v(\sigma)$ où σ est la permutation rangeant les v_i deg-pairs au début, sans changer leur ordre et les v_j deg-impairs en fin sans changer leur ordre.

Du fait de la relation que nous venons d'établir entre $[\ ,\ ]$ et Q, nous posons ici

$$\tau(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (-1)^{\sum_{i=1}^{n}(n-i)deg(\alpha_i)}.$$

En fait 2.1 est vrai pour $\sigma = (i, i+1)$ donc pour tout σ puisque chaque membre de 2.1 définit une action de S_n. On a donc

$$Q = \tau[\ ,\ ].$$

Définition 2.3. (Cohomologie de Chevalley)

Soit C' une n-cochaîne, c'est à dire une application n-linéaire deg-antisymétrique de $\big(T_{poly}(\mathbb{R}^d)\big)^n$ dans $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$, homogène de degré $deg(C')$. Le cobord $\partial' C'$ de C' est *par définition l'application $n+1$-linéaire deg-antisymétrique*

$$(\partial' C')(\alpha_0,\dots,\alpha_n)=$$
$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\varepsilon_{deg(\alpha)}(i,0\dots\hat{\imath}\dots n)(-1)^{deg(C')deg(\alpha_i)}\left[\alpha_i,C'(\alpha_0,\dots\widehat{\alpha_i}\dots,\alpha_n)\right]$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\varepsilon_{deg(\alpha)}(i,j,0,\dots\hat{\imath}\dots\hat{\jmath}\dots n)(-1)^{i+j-1}C'\left([\alpha_i,\alpha_j],\alpha_0,\dots\widehat{\alpha_i}\dots\widehat{\alpha_j}\dots,\alpha_n\right).$$

Une n-cochaîne C' telle que $\partial' C'=0$ est appelée un cocycle, une n-cochaîne de la forme $C'=\partial' A'$ est appelée un cobord.

Soit C' une n-cochaîne. Posons $C=\tau C'$ et définissons ∂C par

$$\partial C=\tau\partial' C'.$$

Lemme 2.4. (Cohomologie symétrisée)

Une application n-linéaire $|\ |$-symétrique C est une n-cochaîne, son cobord ∂C est donné par

$$(\partial C)(\alpha_0,\dots,\alpha_n)=$$
$$\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_{|\alpha|}(i,0\dots\hat{\imath}\dots n)(-1)^{|C|(|\alpha_i|-1)}Q\left(\alpha_i,C(\alpha_0,\dots\widehat{\alpha_i}\dots,\alpha_n)\right)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\varepsilon_{|\alpha|}(i,j,0,\dots\hat{\imath}\dots\hat{\jmath}\dots n)C\left(Q(\alpha_i,\alpha_j),\alpha_0,\dots\widehat{\alpha_i}\dots\widehat{\alpha_j}\dots,\alpha_n\right).$$

Ou bien par

$$\begin{aligned}(\partial C)(\alpha_0,\dots,\alpha_n)=&\sum_{i=0}^{n}\Big(\varepsilon_{|\alpha|}(i,0\dots\hat{\imath}\dots n)(-1)^{|C|(|\alpha_i|-1)}\nabla_{\alpha_i}C(\alpha_0,\dots\widehat{\alpha_i}\dots,\alpha_n)\\&+(-1)^{|C|}\varepsilon_{|\alpha|}(0\dots\hat{\imath}\dots n,i)\nabla_{C(\alpha_0,\dots\widehat{\alpha_i}\dots,\alpha_n)}\alpha_i\Big)\\&-\sum_{i\neq j}\varepsilon_{|\alpha|}(i,j,0,\dots\hat{\imath}\dots\hat{\jmath}\dots n)C\left(\nabla_{\alpha_i}\alpha_j,\alpha_0,\dots\widehat{\alpha_i}\dots\widehat{\alpha_j}\dots,\alpha_n\right).\end{aligned}$$

3. Graphes aériens et cochaines

Dans cet article, on considère des graphes de Kontsevich, c'est à dire des graphes Γ ayant des sommets aériens numérotés $1,\dots,n$, que l'on peut voir comme des points du demi espace de Poincaré $\{\mathfrak{Im}(z)>0\}$ et des sommets terrestres, numérotés $\bar{1},\dots,\bar{m}$

que l'on peut voir comme des points rangés sur l'axe réel. De chaque sommet aérien i part $k_i \geq 0$ arêtes du graphe. Ces arêtes sont des flèches d'extrémité soit un sommet aérien (on s'autorise des 'petites boucles', c'est à dire des arêtes de la forme $\overrightarrow{ii}$) soit un sommet terrestre. Il n'y a pas d'arête partant d'un sommet terrestre appelé 'pied' du graphe et il y a exactement une arête y arrivant, cette arête est une jambe du graphe. Il n'y a pas d'arête multiple (mais on peut avoir les arêtes $\overrightarrow{ij}$ et $\overrightarrow{ji}$ si $i \neq j$).

Fixons un ordre $\mathcal{O}$ sur les arêtes qui soit compatible avec la numérotation des sommets aériens c'est à dire tel que les k_1 premières flèches partent du sommet 1, les k_2 suivantes du sommet 2, etc... On définit alors une application $B_{\Gamma,\mathcal{O}}$ n-linéaire de $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ dans lui même de la façon suivante :

$B_{\Gamma,\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est nul sauf si α_1 est un k_1-tenseur, α_2 un k_2-tenseur,$\dots$,α_n un k_n-tenseur.

Dans ce dernier cas, on appelle $Deb(i)$ l'ensemble ordonné des flèches issues de i, elles portent les numéros $a_i = (\sum_{j<i} k_j) + 1, a_i + 1, \dots, a_i + k_i = \sum_{j \leq i} k_j$. On pose:

$$\alpha_i^{Deb(i)} := \alpha_i^{t_{a_i} t_{a_i+1} \dots t_{a_i+k_i}}.$$

Pour un sommet aérien on note $Fin(i)$ l'ensemble des flèches arrivant sur i. Elles portent les numéros $s_1, \dots, s_r$. On pose:

$$\partial_{Fin(i)} := \partial_{t_{s_1} \dots t_{s_r}}.$$

Pour un pied (un sommet terrestre), on note $Fin(\bar{i})$ l'ensemble des flèches arrivant sur $\bar{i}$. Cet ensemble contient une seule flèche de numéro s et on pose

$$\partial_{Fin(\bar{i})} := \partial_{t_s}.$$

Alors on définit $B_{\Gamma,\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ par:

$$B_{\Gamma,\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{1 \leq t_1, \dots, t_{|k|} \leq d} \prod_{i=1}^{n} \partial_{Fin(i)} \; \alpha_i^{Deb(i)} \; \partial_{Fin(\bar{1})} \wedge \dots \wedge \partial_{Fin(\bar{m})}.$$

(On a posé $|k| = k_1 + \dots + k_n$).

Remarque 3.1.

La définition de l'opérateur $B_{\Gamma,\mathcal{O}}$ dépend du choix de l'ordre compatible $\mathcal{O}$. Changer cet ordre revient à multiplier $B_{\Gamma,\mathcal{O}}$ par le signe noté $\varepsilon(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$ dans [AGM] *de la permutation de l'ensemble des arêtes faisant passer de $\mathcal{O}$ à $\mathcal{O}'$.*

On étend la définition de l'opérateur $B_{\Gamma,\mathcal{O}}$ aux ordres $\mathcal{O}'$ non compatibles en posant

$$B_{\Gamma,\mathcal{O}'} = \varepsilon(\mathcal{O}, \mathcal{O}') B_{\Gamma,\mathcal{O}}.$$

Si on se restreint aux graphes vectoriels c'est à dire aux graphes tels que $Deb(i)$ a au plus un élément, il y a un seul ordre compatible. On numérotera alors les flèches par le numéro i de leur origine.

Un graphe qui n'a aucun pied et aucune jambe est appelé graphe aérien. Si Δ est un tel graphe aérien, on peut le 'compléter' en lui ajoutant des pieds et des jambes. On considérera donc tous les graphes Γ tels que, lorsque l'on retire les pieds et les jambes de Γ, on retrouve Δ. Si $(\Delta,\mathcal{O})$ est un graphe orienté, on considérera tous les graphes orientés $(\Gamma,\mathcal{O}_\Gamma)$ tels que l'ordre induit par $\mathcal{O}_\Gamma$ sur l'ensemble des arêtes qui ne sont pas des jambes soit exatement $\mathcal{O}$. On notera cette propriété $(\Gamma,\mathcal{O}_\Gamma)\supset(\Delta,\mathcal{O})$.

Plus précisément, on reprendra la définition de [AGM]. Partant de $(\Delta,\mathcal{O})$ où $\mathcal{O}$ est compatible et de m pieds numérotés $\bar{1},\dots,\bar{m}$, on peut construire un graphe Γ en ajoutant m jambes à Δ (une pour chaque pied). On peut définir un ordre $\mathcal{O}_0$ sur les arêtes de Γ en rangeant les jambes après les arêtes aériennes, dans l'ordre des pieds. Si $k_1,\dots,k_n$ sont les nombres d'arêtes de Γ issues des sommets $1,\dots,n$ et $\ell_1,\dots,\ell_n$ le nombre d'arêtes de Δ issues des sommets $1,\dots,n$, il y a $\dfrac{k!}{\ell!}$ ordres compatibles possibles $\mathcal{O}_\Gamma$ tels que $(\Gamma,\mathcal{O}_\Gamma)\supset(\Delta,\mathcal{O})$. On posera:

$$C_{\Delta,\mathcal{O}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{\substack{(\Gamma,\mathcal{O}_\Gamma)\supset(\Delta,\mathcal{O})\\ \#\{pieds\ de\ \Gamma\}=m}}\frac{\ell!}{k!}\varepsilon(\mathcal{O}_\Gamma,\mathcal{O}_0)B_{\Gamma,\mathcal{O}_\Gamma}.$$

Lorsque l'on se restreint aux graphes vectoriels, cette somme est finie. La somme ci-dessus ne contient que des graphes Γ ayant m pieds avec:

$$0\le m\le n-|\ell|.$$

Comme il n'y a qu'un ordre compatible sur les arêtes de Δ.

Les cochaînes C_δ étudiées dans ce papier sont les symétrisées des applications $C_{\Delta,\mathcal{O}}$, c'est à dire des opérateurs associés à des combinaisons linéaires symétriques de graphes

$$\delta=\sum_{\Delta,\mathcal{O}}a_{\Delta,\mathcal{O}}(\Delta,\mathcal{O}).$$

Si σ est une premutation de n éléments, σ agit sur Δ en permutant ses sommets et ses arêtes par paquets, en gardant l'ordre des arêtes issues d'un même sommet. On sait alors ([AGM], Proposition 4.4) que:

$$C_{\Delta,\mathcal{O}}(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(n)})=\varepsilon_{|Deb(\Delta)|}(\sigma)C_{\Delta,\mathcal{O}}(\alpha_1,\dots,\alpha_n).$$

On dira donc que δ est symétrique si $C_\delta=\sum_{\Delta,\mathcal{O}}a_{\Delta,\mathcal{O}}C_{\Delta,\mathcal{O}}$ l'est, c'est à dire si, pour tout $(\Delta,\mathcal{O})$,

$$a_{\sigma(\Delta),\sigma(\mathcal{O})}=\varepsilon_{|Deb(\Delta)|}a_{\Delta,\mathcal{O}}.$$

Par exemple la roue simple Δ de longueur 3 est un graphe aérien à 3 sommets numérotés 1, 2, 3 et ayant pour arêtes $\{\overrightarrow{12},\overrightarrow{23},\overrightarrow{31}\}$. C'est un graphe vectoriel. La symétrisation δ de $(\Delta, \mathcal{O})$ est:

$$\delta = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma)(\sigma(\Delta), \sigma(\mathcal{O})) = 3 \times \{\overrightarrow{12}, \overrightarrow{23}, \overrightarrow{31}\} - 3 \times \{\overrightarrow{13}, \overrightarrow{32}, \overrightarrow{21}\}.$$

Cette symétrisation définit une application C_δ qui envoie trois champs de vecteurs α_1, α_2, α_3 sur la fonction

$$C_\delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3\partial_{i_3}\alpha_1^{i_1}\partial_{i_1}\alpha_2^{i_2}\partial_{i_2}\alpha_3^{i_3} - 3\partial_{i_2}\alpha_1^{i_1}\partial_{i_1}\alpha_3^{i_3}\partial_{i_3}\alpha_2^{i_2}.$$

4. L'opérateur de cobord sur les graphes vectoriels

Dans ce paragraphe, nous définissons directement sur les combinaisons linéaires δ symétriques de graphes aériens vectoriels un opérateur de cobord ∂ correspondant à l'opérateur de cobord pour les cochaînes symétriques C_δ définies par δ. Dans [AGM], il est montré qu'un tel opérateur défini sur les graphes existe. Dans le cas des graphes vectoriels, son expression peut être simplifiée.

Définition 4.1. (Eclatement propre d'un sommet)

Soit Δ un graphe vectoriel aérien de sommets numérotés $1, \ldots, n$. Fixons i et j tels que $0 \leq i, j \leq n$. On construit une famille de graphes Δ'_{ji} (resp. Δ'_{ij}) de la façon suivante:

On renumérote les sommets de Δ en $0, \ldots \hat{\jmath} \ldots, n$ (en gardant leur ordre initial),

<u>*Si le sommet i est un point isolé ($Deb(i) = Fin(i) = \emptyset$)*</u>

On ajoute le sommet j et la flèche $\overrightarrow{ji}$ (resp. $\overrightarrow{ij}$).

<u>*Si le sommet i n'est pas un point isolé*</u>

On ajoute un sommet j et une flèche $\overrightarrow{ji}$ (resp. $\overrightarrow{ij}$),

Si une flèche $\overrightarrow{ia}$ partait de i dans Δ, on la garde dans Δ'_{ji} (resp. on la remplace par $\overrightarrow{ja}$ dans Δ'_{ij}),

On répartit les flèches du graphe Δ arrivant sur le sommet i entre les sommets j et i du nouveau graphe Δ'_{ji} (resp. Δ'_{ij}) proprement, c'est à dire de telle façon que:

$$\inf\left(|Deb(i)| + |Fin(i)|, |Deb(j)| + |Fin(j)|\right) > 1.$$

Remarquons que:

Si i est un sommet isolé, il y a un seul graphe Δ'_{ji}.

Si i est tel que $|Deb(i)| + |Fin(i)| = 1$ alors il n'y a aucun graphe Δ'_{ji}.

Si i est un sommet tel que $|Deb(i)| = |Fin(i)| = 1$, il y a un seul Δ'_{ji}.

En général si $|Deb(i)| = 1$, il y a $2^{|Fin(i)|} - 1$ graphes Δ'_{ji}, si $|Deb(i)| = 0$ et $|Fin(i)| \geq 1$, il y a $2^{|Fin(i)|} - 2$ graphes Δ'_{ji}.

Le même résultat est valable pour Δ'_{ij}.

Pour représenter la famille des graphes qu'on vient de définir, on notera:

$$\Delta'_{ji} \to_i^{prop} \Delta \quad (\text{resp.}\Delta'_{ij} \to_i^{prop} \Delta).$$

Proposition 4.2. (L'opérateur ∂ sur les graphes)

Soit $\delta = \sum_\Delta a_\Delta \Delta$ une combinaison linéaire symétrique homogène de graphes aériens vectoriels. Alors

$$\partial C_\delta = \sum_\Delta a_\Delta C_{\partial\Delta}$$

avec

$$\partial\Delta = -\sum_{j\neq i} \varepsilon_{\{|Deb(0)|,\dots,|Deb(n)|\}}(j, 0, \dots \hat{\jmath} \dots, n) \sum_{\Delta'_{ji} \to_i^{prop} \Delta} \Delta'_{ji}.$$

On peut écrire $\partial\Delta$ autrement. Notons $\varepsilon_{|Deb|}$ la quantité $\varepsilon_{\{|Deb(0)|,\dots,|Deb(n)|\}}$, alors

$$\begin{aligned}\partial\Delta = -\sum_{i<j} \Big[&\varepsilon_{|Deb|}(j, 0, \dots \hat{\jmath} \dots, n) \sum_{\Delta'_{ji} \to_i^{prop} \Delta} \Delta'_{ji} \\ &+ \big[\,(1 - |Deb(j)|)\, \varepsilon_{|Deb|}(i, 0, \dots \hat{\imath} \dots, n) - |Deb(j)| \varepsilon_{|Deb|}(j, 0, \dots \hat{\jmath} \dots, n)\big] \\ &\times \sum_{\Delta'_{ij} \to_i^{prop} \Delta} \Delta'_{ij}\Big]\end{aligned}$$

Preuve

On sait que:

$$\begin{aligned}(\partial C_\delta)(\alpha_0, \dots, \alpha_n) &= \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_{|\alpha|}(j, 0 \dots \hat{\jmath} \dots n)(-1)^{|C|(|\alpha_j|-1)} \nabla_{\alpha_j} C_\delta(\alpha_0, \dots \widehat{\alpha_j} \dots, \alpha_n) \\ &+ \sum_{i=0}^{n} (-1)^{|C_\delta|} \varepsilon_{|\alpha|}(0 \dots \hat{\imath} \dots n, i) \nabla_{C_\delta(\alpha_0, \dots \widehat{\alpha_i} \dots, \alpha_n)} \alpha_i \\ &- \sum_{i\neq j} \varepsilon_{|\alpha|}(j, i, 0, \dots \hat{\imath} \dots \hat{\jmath} \dots n) C_\delta \left(\nabla_{\alpha_j} \alpha_i, \alpha_0, \dots \widehat{\alpha_i} \dots \widehat{\alpha_j} \dots, \alpha_n\right) \\ &= (I) + (II) - (III).\end{aligned}$$

Puisque la cohomologie de C_δ est déterminée par sa composante dans les fonctions ([AGM], Proposition 5.2), on ne regarde que les termes qui sont des opérateurs 0 différentiels (des fonctions) dans cette expression.

Les termes de la première somme n'apparaissent que si α_j est un champ de vecteurs $\alpha_j = \sum_\ell \alpha_j^\ell \partial_\ell$. On a

$$(I) = \sum_{j\neq i} \varepsilon_{|\alpha|}(j,0,\dots\hat{\jmath}\dots,n) \sum_\ell \alpha_j^\ell C_\delta(\alpha_0,\dots\widehat{\alpha_j}\dots,\partial_\ell\alpha_i,\dots,\alpha_n)$$

Dans le second terme, $|C_\delta|$ est le nombre $|\delta|$ de flèches des graphes de δ. En revenant à la définition de C_δ, ces termes apparaissent lorsque $C_\delta(\alpha_0,\dots\widehat{\alpha_i}\dots,\alpha_n)$ est un champ de vecteurs. Pour chaque Δ de δ, on choisit un sommet j tel que $Deb(\alpha_j)=0$. Alors:

$$\begin{aligned}
&C_\Delta(\alpha_0,\dots\widehat{\alpha_i}\dots,\alpha_n)\\
&\quad= \sum_{(\Gamma,\mathcal{O}_\Gamma)\supset(\Delta,\mathcal{O})} \varepsilon(\mathcal{O}_\Gamma,\mathcal{O}_0) \sum_{j,\ell} B_{(\Gamma,\mathcal{O})}(\alpha_0,\dots,\alpha_j^\ell,\dots\widehat{\alpha_i}\dots,\alpha_n)\partial_\ell\\
&\quad= \sum_{(\Gamma,\mathcal{O}_\Gamma)\supset(\Delta,\mathcal{O})} \varepsilon_{|\alpha|}(0,\dots\hat{\imath}\dots\hat{\jmath}\dots,n,j) \sum_{j,\ell} B_{(\Gamma,\mathcal{O})}(\alpha_0,\dots,\alpha_j^\ell,\dots\widehat{\alpha_i}\dots,\alpha_n)\partial_\ell.
\end{aligned}$$

Donc on obtient puisqu'ici $|\alpha_i|=0$,

$$\begin{aligned}
(II) &= \sum_{j\neq i}(-1)^{|\delta|}\varepsilon_{|\alpha|}(0,\dots\hat{\imath}\dots\hat{\jmath}\dots,n,j)\sum_\ell C_\delta(\alpha_0,\dots,\alpha_j^\ell,\dots\widehat{\alpha_i}\dots,\alpha_n)\partial_\ell\alpha_i\\
&= \sum_{j\neq i}\varepsilon_{|\alpha|}(j,0,\dots\hat{\jmath}\dots,n)\sum_\ell C_\delta(\alpha_0,\dots,\alpha_j^\ell,\dots\widehat{\alpha_i}\dots,\alpha_n)\partial_\ell\alpha_i\\
&= \sum_{j\neq i}\varepsilon_{|\alpha|}(j,0,\dots\hat{\jmath}\dots,n)\sum_\ell C_\delta(\alpha_0,\dots,\underbrace{\alpha_j^\ell}_{(i)},\dots\widehat{\alpha_j}\dots,\alpha_n)\partial_\ell\alpha_i.
\end{aligned}$$

Enfin la dernière somme s'écrit:

$$\begin{aligned}
(III) &= \sum_{i\neq j}\varepsilon_{|\alpha|}(j,i,0,\dots\hat{\imath}\dots\hat{\jmath}\dots,n)C_\delta\left(\nabla_{\alpha_j}\alpha_i,\alpha_0,\dots\widehat{\alpha_i}\dots\widehat{\alpha_j}\dots,\alpha_n\right)\\
&= \sum_{i\neq j}\varepsilon_{|\alpha|}(j,0,\dots\hat{\jmath}\dots,n)\sum_\ell C_\delta(\alpha_0,\dots,\underbrace{\alpha_j^\ell\partial_\ell\alpha_i}_{(i)},\dots\widehat{\alpha_j}\dots,\alpha_n).
\end{aligned}$$

Appliquons la règle de Leibniz pour les dérivations multiples dans le terme (III), on obtient pour chaque Δ de δ:

$$\begin{aligned}
&C_\Delta(\alpha_0,\dots,\underbrace{\alpha_j^\ell\partial_\ell\alpha_i}_{(i)},\dots\widehat{\alpha_j}\dots,\alpha_n)\\
&\quad=\prod_{t\neq i}\partial_{Fin(t)}\alpha_t^{Deb(t)}.\partial_{Fin(i)}\left(\alpha_j^\ell\partial_\ell\alpha_i^{Deb(i)}\right)\\
&\quad=\prod_{t\neq i}\partial_{Fin(t)}\alpha_t^{Deb(t)}.\left(\sum_{A\subset Fin(i)}\partial_A\alpha_j^\ell\partial_{\{\ell\}\cup Fin(i)\setminus A}\alpha_i^{Deb(i)}\right).
\end{aligned}$$

La somme (I) correspond exactement au cas $A=\emptyset$, la somme (II) au cas $A=Fin(i)$. Il y a simplification. Posons $\varepsilon_{|Deb|}=\varepsilon_{\{|Deb(0)|,\dots,|Deb(n)|\}}$ et

$$\partial C_\Delta=-\sum_{j\neq i}\varepsilon_{|Deb|}(j,0,\dots\hat{\jmath}\dots,n)\partial_{ji}C_\Delta=-\sum_{j\neq i}\varepsilon_{|Deb|}(j,0,\dots\hat{\jmath}\dots,n)C_{\partial_{ji}\Delta},$$

on peut écrire:

<u>Si $Deb(i)=Fin(i)=\emptyset$</u>

$$\partial_{ji}\Delta=\Delta'_{ji}=\sum_{\Delta'_{ji}\to_i^{prop}\Delta}\Delta'_{ji}.$$

<u>Si $Deb(i)=\emptyset$ et $|Fin(i)|>1$</u>

$$\begin{aligned}
\partial_{ji}C_\Delta&=\prod_{t\neq i}\partial_{Fin(t)}\alpha_t^{Deb(t)}.\left(\sum_{\substack{A\subset Fin(i)\\ A\neq\emptyset\\ A\neq Fin(i)}}\partial_A\alpha_j^\ell\partial_{\{\ell\}\cup Fin(i)\setminus A}\alpha_i\right)\\
&=\sum_{\Delta'_{ji}\to_i^{prop}\Delta}C_{\Delta'_{ji}}.
\end{aligned}$$

Si $Deb(i) \neq \emptyset$ et $Fin(i) \neq \emptyset$

$$\begin{aligned}\partial_{ji} C_\Delta &= \prod_{t\neq i} \partial_{Fin(t)} \alpha_t^{Deb(t)} . \left(\sum_{\substack{A\subset Fin(i)\\ A\neq\emptyset}} \partial_A \alpha_j^\ell \partial_{\{\ell\}\cup Fin(i)\setminus A} \alpha_i^{Deb(i)} \right) \\ &= \sum_{\Delta'_{ji} \to_i^{prop} \Delta} C_{\Delta'_{ji}} .\end{aligned}$$

Si $|Deb(i)| + |Fin(i)| = 1$

$$\partial_{ji} \Delta = 0 = \sum_{\Delta'_{ji} \to_i^{prop} \Delta} \Delta'_{ji} .$$

Finalement on a donc bien:

$$\partial \Delta = - \sum_{j\neq i} \varepsilon_{|Deb|}(j, 0, \dots \hat{\jmath} \dots, n) \sum_{\Delta'_{ji} \to_i^{prop} \Delta} \Delta'_{ji} .$$

D'autre part, on peut regrouper les termes de (III) autrement:

$$\begin{aligned}(III) = &\sum_{i<j} \varepsilon_{|\alpha|}(j, i, 0, \dots \hat{\imath} \dots \hat{\jmath} \dots, n) C_\delta \left(\nabla_{\alpha_j} \alpha_i, \alpha_0, \dots \widehat{\alpha_i} \dots \widehat{\alpha_j} \dots, \alpha_n\right) \\ &+ \sum_{i<j} \varepsilon_{|\alpha|}(i, j, 0, \dots \hat{\imath} \dots \hat{\jmath} \dots, n) C_\delta \left(\nabla_{\alpha_i} \alpha_j, \alpha_0, \dots \widehat{\alpha_i} \dots \widehat{\alpha_j} \dots, \alpha_n\right)\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}(III) = &\sum_{i<j} \varepsilon_{|\alpha|}(j, 0, \dots \hat{\jmath} \dots, n) \sum_\ell C_\delta(\alpha_0, \dots, \underbrace{\alpha_j^\ell \partial_\ell \alpha_i}_{(i)}, \dots \widehat{\alpha_j} \dots, \alpha_n) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{|\alpha_i||\alpha_j|} \varepsilon_{|\alpha|}(j, i, 0, \dots \hat{\imath} \dots \hat{\jmath} \dots, n) \sum_\ell C_\delta \left(\alpha_i^\ell \partial_\ell \alpha_j, \alpha_0, \dots \widehat{\alpha_i} \dots \widehat{\alpha_j} \dots, \alpha_n\right) .\end{aligned}$$

On transforme le second terme ainsi:

Si $|\alpha_j| = 1$, ce terme est:

$$-\varepsilon_{|\alpha|}(j, 0, \dots \hat{\jmath} \dots, n) \sum_\ell C_\delta(\alpha_0, \dots, \underbrace{\alpha_i^\ell \partial_\ell \alpha_j}_{(i)}, \dots \widehat{\alpha_j} \dots, \alpha_n).$$

Si $|\alpha_j| = 0$, ce terme est:

$$\varepsilon_{|\alpha|}(i,0,\dots\hat{\imath}\dots,n)\sum_\ell C_\delta(\alpha_0,\dots,\underbrace{\alpha_i^\ell\partial_\ell\alpha_j}_{(i)},\dots\widehat{\alpha_j}\dots,\alpha_n).$$

En regroupant les deux cas, on obtient le facteur annoncé:

$$\Big[\,(1-|\alpha_j|)\,\varepsilon_{|\alpha|}(i,0,\dots\hat{\imath}\dots,n) - |\alpha_j|\varepsilon_{|\alpha|}(j,0,\dots\hat{\jmath}\dots,n)\Big]$$
$$C_\delta(\alpha_0,\dots,\underbrace{\alpha_i^\ell\partial_\ell\alpha_j}_{(i)},\dots\widehat{\alpha_j}\dots,\alpha_n).$$

De même pour (I) et (II), on obtient

$$\begin{aligned}(I) = \sum_{i<j}\varepsilon_{|\alpha|}(j,0,\dots\hat{\jmath}\dots,n)\sum_\ell \alpha_j^\ell C_\delta(\alpha_0,\dots,\underbrace{\partial_\ell\alpha_i}_{(i)},\dots\widehat{\alpha_j}\dots,\alpha_n)\\ + \Big[\,(1-|\alpha_j|)\,\varepsilon_{|\alpha|}(i,0,\dots\hat{\imath}\dots,n) - |\alpha_j|\varepsilon_{|\alpha|}(j,0,\dots\hat{\jmath}\dots,n)\Big]\\ \sum_\ell \alpha_i^\ell C_\delta(\alpha_0,\dots,\underbrace{\partial_\ell\alpha_j}_{(i)},\dots\widehat{\alpha_j}\dots,\alpha_n)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(II) = \sum_{i<j}\varepsilon_{|\alpha|}(j,0,\dots\hat{\jmath}\dots,n)\sum_\ell C_\delta(\alpha_0,\dots,\underbrace{\alpha_j^\ell}_{(i)},\dots\widehat{\alpha_j}\dots,\alpha_n)\partial_\ell\alpha_i\\ + \varepsilon_{|\alpha|}(i,0,\dots\hat{\imath}\dots,n)\sum_\ell C_\delta(\alpha_0,\dots,\underbrace{\alpha_i^\ell}_{(i)},\dots\widehat{\alpha_j}\dots,\alpha_n)\partial_\ell\alpha_j.\end{aligned}$$

En faisant le même calcul que ci-dessus, on simplifie les termes qui se correspondent dans (I), (II) et (III) et on obtient la formule annoncée.

Remarque 4.3.
On a retrouvé le cobord défini dans [AGM]. *En particulier, si δ est symétrique, $\partial\delta$ est aussi symétrique.*

On pose bien entendu

Définition 4.4. (Espaces de cohomologie)

Une combinaison linéaire symétrique δ de graphes vectoriels aériens est un cocycle si $\partial\delta = 0$, un cobord s'il existe une combinaison linéaire symétrique β telle que $\delta = \partial\beta$.

L'espace Z^n des n-cocycles est l'espace des combinaisons symétriques de graphes vectoriels ayant n sommets et qui sont des cocycles.

L'espace B^n des n-cobords est l'espace des combinaisons de graphes qui sont les cobords de combinaisons symétriques de graphes ayant $n-1$ sommets.

Le $n^{ème}$ espace de cohomologie des graphes H^n est le quotient de l'espace Z^n par l'espace B^n.

5. Symbole d'un graphe

Soit Δ un graphe aérien vectoriel de sommets numérotés $(1, \ldots, n)$. On peut distinguer six classes de sommets i:

Classe 1: les sommets i tels que $|Fin(i)| > 1$ et $|Deb(i)| = 0$. On appellera ordre de i le symbole r_i où $r_i = |Fin(i)|$,

Classe 2: les sommets i tels que $|Fin(i)| > 1$ et $|Deb(i)| = 1$. On appellera ordre de i le symbole r_i^+ où $r_i = |Fin(i)|$,

Classe 3: les sommets i tels que $|Fin(i)| = 1$ et $|Deb(i)| = 1$. On appellera ordre de i le symbole 1^+,

Classe 4: les sommets i tels que $|Fin(i)| = 1$ et $|Deb(i)| = 0$. On appellera ordre de i le symbole 1,

Classe 5: les sommets i tels que $|Fin(i)| = 0$ et $|Deb(i)| = 0$. On appellera ordre de i le symbole 0,

Classe 6: les sommets i tels que $|Fin(i)| = 0$ et $|Deb(i)| = 1$. On appellera ordre de i le symbole 0^-.

On ordonne les ordres des sommets en posant:

$$r_i > r_j^+ > 1^+ > 1 > 0 > 0^- \text{ et } r_i^+ \geq r_{i'}^+ \Leftrightarrow r_i \geq r_{i'}. \tag{$*$}$$

L'ordre $\mathcal{O}(\Delta)$ d'un graphe Δ est le mot formé par les ordres de ses sommets:

$$\mathcal{O}(\Delta) = (\mathcal{O}(1), \ldots, \mathcal{O}(n)).$$

On ordonne les ordres des graphes en utilisant l'ordre lexicographique, en respectant $(*)$.

Si $\delta = \sum_\Delta a_\Delta \Delta$ est une combinaison linéaire symétrique de graphes vectoriels, on définit l'ordre de δ par:

$$\mathcal{O}(\delta) = Max\{\mathcal{O}(\Delta),\ a_\Delta \neq 0\}$$

et on appellera symbole de δ la combinaison linéaire non symétrique:

$$\sigma_\delta = \sum_{\substack{\Delta \\ \mathcal{O}(\Delta)=\mathcal{O}(\delta)}} a_\Delta \Delta.$$

Comme δ est symétrique, son ordre a la forme:

$$\mathcal{O}(\delta) = (r_1, \ldots, r_{k_0-1}, r^+_{k_0}, \ldots, r^+_{k_1-1}, \underbrace{1^+}_{(k_1)}, \ldots, 1^+, \underbrace{1}_{(k_2)}, \ldots, 1, \underbrace{0}_{(k_3)}, \ldots, 0, \underbrace{0^-}_{(k_4)}, \ldots, 0^-)$$

avec

$$r_1 \geq r_2 \cdots \geq r_{k_0-1},\ r^+_{k_0} \geq \cdots \geq r^+_{k_1-1}$$

(on peut avoir $k_0 = 1$ ou $k_1 = k_0$, etc...)

Proposition 5.1. (Le symbole de $\partial\delta$)

Soit δ une combinaison linéaire symétrique de graphes aériens vectoriels, d'ordre $\mathcal{O}(\delta) =$

$$(r_1, \ldots, r_{k_0-1}, r^+_{k_0}, \ldots, r^+_{k_1-1}, \underbrace{1^+}_{(k_1)}, \ldots, 1^+, \underbrace{1}_{(k_2)}, \ldots, 1, \underbrace{0}_{(k_3)}, \ldots, 0, \underbrace{0^-}_{(k_4)}, \ldots, 0^-).$$

Alors chaque graphe Δ' apparaissant dans $\partial\delta$ est d'ordre au plus: $\mathcal{O}(\delta) \oplus 1^+ =$

$$(r_1, \ldots, r_{k_0-1}, r^+_{k_0}, \ldots, r^+_{k_1-1}, \underbrace{1^+}_{(k_1)}, \ldots, 1^+, \underbrace{1}_{(k_2+1)}, \ldots, 1, \underbrace{0}_{(k_3+1)}, \ldots, 0, \underbrace{0^-}_{(k_4+1)}, \ldots, 0^-).$$

Si $\mathcal{O}(\partial\delta) = \mathcal{O}(\delta) \oplus 1^+$, alors le symbole de $\partial\delta$ est:

$$\begin{aligned}\sigma_{\partial\delta} = -\sum_{\Delta\in\sigma_\delta} a_\Delta & \sum_{\substack{i<j \\ 0\leq i<k_0 \\ k_1\leq j\leq k_2}} \varepsilon_{|Deb|}(j, 0, \ldots \hat{\jmath} \ldots, n) \sum_{\Delta'_{ji} \xrightarrow[i]{prop} \Delta} \Delta'_{ji} \\ & + \sum_{\substack{i<j \\ k_0\leq i<k_1 \\ k_1\leq j\leq k_2}} \varepsilon_{|Deb|}(j, 0, \ldots \hat{\jmath} \ldots, n) \Big[\sum_{\Delta'_{ji} \xrightarrow[i]{prop} \Delta} \Delta'_{ji} - \sum_{\Delta'_{ij} \xrightarrow[i]{prop} \Delta} \Delta'_{ij} \Big] \\ & + \sum_{\substack{i<j \\ k_1\leq i<k_2 \\ k_1\leq j\leq k_2}} \varepsilon_{|Deb|}(j, 0, \ldots \hat{\jmath} \ldots, n) \Big[\sum_{\Delta'_{ji} \xrightarrow[i]{prop} \Delta} \Delta'_{ji} - \sum_{\Delta'_{ij} \xrightarrow[i]{prop} \Delta} \Delta'_{ij} \Big].\end{aligned}$$

Preuve

Si Δ est un graphe de δ qui n'apparaît pas dans le symbole σ_δ, alors les ordres des graphes Δ'_{ij} et Δ'_{ji} qui se contractent sur Δ sont tous strictement plus petits que $\mathcal{O}(\delta) \oplus 1^+$. Regardons donc seulement les Δ de σ_δ.

Fixons un couple (i,j) avec $i < j$. Il est clair que dans la décomposition de $\partial\Delta$, les graphes $\Delta' = \Delta'_{ji}$ ou $\Delta' = \Delta'_{ij}$ sont d'ordre:

Si $0 \leq i < k_0$, alors

$$\mathcal{O}(\Delta'_{ji}) = (r_1, \ldots, \underbrace{(r_i - k + 1)}_{(i)}, \ldots, \underbrace{k^+}_{(j)}, \ldots) \qquad (1 \leq k < r_i).$$

Donc $\mathcal{O}(\Delta'_{ji}) \leq \mathcal{O}(\delta) \oplus 1^+$ et l'égalité n'est vraie que si $k = 1$ et $k_1 \leq j \leq k_2$. Il y a r_i graphes Δ'_{ji} dans ce cas. D'autre part:

$$\mathcal{O}(\Delta'_{ij}) = (r_1, \ldots, \underbrace{k^+}_{(i)}, \ldots, \underbrace{(r_i - k + 1)}_{(j)}, \ldots) \qquad (1 \leq k < r_i).$$

Donc $\mathcal{O}(\Delta'_{ij}) < \mathcal{O}(\delta) \oplus 1^+$. Il n'y a aucun graphe Δ'_{ij} dans ce cas.

Si $k_0 \leq i < k_1$, alors

$$\mathcal{O}(\Delta'_{ji}) = (r_1, \ldots, \underbrace{(r_i - k + 1)^+}_{(i)}, \ldots, \underbrace{k^+}_{(j)}, \ldots) \qquad (1 \leq k \leq r_i).$$

Donc $\mathcal{O}(\Delta'_{ji}) \leq \mathcal{O}(\delta) \oplus 1^+$ et l'égalité n'est vraie que si $k = 1$ et $k_1 \leq j \leq k_2$. Il y a r_i graphes Δ'_{ji} dans ce cas. D'autre part:

$$\mathcal{O}(\Delta'_{ij}) = (r_1, \ldots, \underbrace{k^+}_{(i)}, \ldots, \underbrace{(r_i - k + 1)^+}_{(j)}, \ldots) \qquad (1 \leq k \leq r_i).$$

Donc $\mathcal{O}(\Delta'_{ij}) \leq \mathcal{O}(\delta) \oplus 1^+$ et l'égalité n'est vraie que si $k = r_i$ et $k_1 \leq j \leq k_2$. Il y a un seul graphe Δ'_{ij} dans ce cas.

Si $k_1 \leq i < k_2$, alors

$$\mathcal{O}(\Delta') = (r_1, \ldots, \underbrace{1^+}_{(i)}, \ldots, \underbrace{1^+}_{(j)}, \ldots).$$

Donc pour et seulement pour $i < j \leq k_2$, $\mathcal{O}(\Delta') = \mathcal{O}(\delta) \oplus 1^+$ et il y a un seul graphe Δ'_{ji} et un seul graphe Δ'_{ij} dans ce cas.

Si $k_2 < i$, pour tout $j > i$, on a $\mathcal{O}(\Delta') < \mathcal{O}(\delta) \oplus 1^+$.

Définissons maintenant l'opérateur d'homotopie.

Définition 5.2. (L'homotopie)

Soit Δ *un graphe vectoriel de sommets* $(0, \ldots, n)$*, ayant des sommets* i *tels que* $|Deb(i)| = |Fin(i)| = 1$ *(des sommets* i *d'ordre* 1^+*). On définit le graphe* $h(\Delta)$ *ainsi:*

On considère i_0, le plus grand des indices i d'ordre 1^+. La flèche issue de i_0 est $\overrightarrow{i_0a}$. Le graphe $h(\Delta)$ est le graphe de sommets $(0,\dots\hat{i_0}\dots,n)$ obtenu en comprimant la flèche $\overrightarrow{i_0a}$ et en identifiant les sommets i_0 et a au sommet a.

Si Δ n'a pas de sommets d'ordre 1^+, on pose $h(\Delta)=0$.

On prolonge h linéairement à l'espace des combinaisons linéaires de graphes.

Proposition 5.3. (Symbole et homotopie)

Soit δ une combinaison linéaire symétrique de graphes vectoriels d'ordre

$$\mathcal{O}(\delta)=$$

$$(r_1,\dots,r_{k_0-1},r^+_{k_0},\dots,r^+_{k_1-1},\underbrace{1^+}_{(k_1)},\dots,1^+,\underbrace{1}_{(k_2)},\dots,1,\underbrace{0}_{(k_3)},\dots,0,\underbrace{0^-}_{(k_4)},\dots,0^-).$$

Par abus de notations, on pose:

$$\sigma_{\partial\delta}=\sum_{\substack{\Delta'\in\partial\delta\\ \mathcal{O}(\Delta')=\mathcal{O}(\delta)\oplus 1^+}} a_{\Delta'}\Delta'$$

si $\partial\delta=\sum_{\Delta'}a_{\Delta'}\Delta'$.

Notons enfin $\delta(0,\dots\hat{k_2}\dots,n)$ la combinaison linéaire de graphes Δ dont on a renuméroté les sommets en $(0,\dots\hat{k_2}\dots,n)$. Alors

$$h(\sigma_{\partial\delta})(0,\dots\hat{k_2}\dots,n)=\sigma_{\partial h(\sigma_\delta)}(0,\dots\hat{k_2}\dots,n)$$
$$-\varepsilon_{|Deb|}(k_2,0,\dots\hat{k_2}\dots,n)\left(\sum_{0\le i<k_0} r_i+\sum_{k_0\le i<k_1}(r_i-1)\right)\sigma_\delta(0,\dots\hat{k_2}\dots,n).$$

Preuve

On reprend les notations de la proposition précédente. Le dernier i d'ordre 1^+ dans $\partial\delta$ est k_2. On écrit donc:

$$\sigma_{\partial\delta}=-\sum_{\Delta\in\sigma_\delta}a_\Delta\Big\{\sum_{\substack{i<j\\0\le i<k_0\\j=k_2}}\varepsilon_{|Deb|}(k_2,0,\dots\hat{k_2}\dots,n)\sum_{\Delta'_{k_2i}\to_i^{prop}\Delta}\Delta'_{k_2i}$$
$$+\sum_{\substack{i<j\\0\le i<k_0\\k_1\le j<k_2}}\varepsilon_{|Deb|}(j,0,\dots\hat{j}\dots,n)\sum_{\Delta'_{ji}\to_i^{prop}\Delta}\Delta'_{ji}$$
$$+\sum_{\substack{i<j\\k_0\le i<k_1\\j=k_2}}\varepsilon_{|Deb|}(k_2,0,\dots\hat{k_2}\dots,n)\Big[\sum_{\Delta'_{k_2i}\to_i^{prop}\Delta}\Delta'_{k_2i}-\sum_{\Delta'_{ik_2}\to_i^{prop}\Delta}\Delta'_{ik_2}\Big]$$

$$+\sum_{\substack{i<j\\k_0\leq i<k_1\\k_1\leq j<k_2}}\varepsilon_{|Deb|}(j,0,\dots\hat{\jmath}\dots,n)\Big[\sum_{\Delta'_{ji}\to_i^{prop}\Delta}\Delta'_{ji}-\sum_{\Delta'_{ij}\to_i^{prop}\Delta}\Delta'_{ij}\Big]$$

$$+\sum_{\substack{i<j\\k_1\leq i<k_2\\j=k_2}}\varepsilon_{|Deb|}(k_2,0,\dots\hat{k_2}\dots,n)\Big[\sum_{\Delta'_{k_2i}\to_i^{prop}\Delta}\Delta'_{k_2i}-\sum_{\Delta'_{ik_2}\to_i^{prop}\Delta}\Delta'_{ik_2}\Big]$$

$$+\sum_{\substack{i<j\\k_1\leq i<k_2\\k_1\leq j<k_2}}\varepsilon_{|Deb|}(j,0,\dots\hat{\jmath}\dots,n)\Big[\sum_{\Delta'_{ji}\to_i^{prop}\Delta}\Delta'_{ji}-\sum_{\Delta'_{ij}\to_i^{prop}\Delta}\Delta'_{ij}\Big]\Big\}.$$

Appliquons h, on obtient:

$$h\left(\sigma_{\partial\delta}\right)=-\sum_{\Delta\in\sigma_\delta}a_\Delta\Big\{\varepsilon_{|Deb|}(k_2,0,\dots\hat{k_2}\dots,n)$$
$$\left(\sum_{0\leq i<k_0}r_i+\sum_{k_0\leq i<k_1}(r_i-1)+\sum_{k_1\leq i<k_2}(1-1)\right)\Delta(0,\dots\hat{k_2}\dots,n)+\ reste\Big\}.$$

Le reste est composé de termes de la forme $h(\Delta'_{ij})$ ou $h(\Delta'_{ji})$ avec $i<j<k_2$. Par construction, h étant la compression de la flèche issue du sommet k_2 dans Δ'_{ji} (resp. Δ'_{ij}), il réalise une bijection entre les ensembles

$$\big\{\Delta'_{ji},\ \Delta'_{ji}\to_i^{prop}\Delta\big\}\ \xrightarrow{h}\ \big\{B'_{ji},\ B'_{ji}\to_i^{prop}h(\Delta)\big\}$$

$\Big($resp. entre les ensembles

$$\big\{\Delta'_{ij},\ \Delta'_{ij}\to_i^{prop}\Delta\big\}\ \xrightarrow{h}\ \big\{B'_{ij},\ B'_{ij}\to_i^{prop}h(\Delta)\big\}\Big)$$

où B'_{ji} (resp. B'_{ij}) est un graphe de sommets numérotés $(0,\dots\hat{k_2}\dots,n)$ et $h(\Delta)$ a pour sommets $(0,\dots\hat{\jmath}\dots\hat{k_2}\dots,n)$.

Dans $reste$, chacun des termes correspondant est affecté du signe

$$\varepsilon_{|Deb|}(j,0,\dots\hat{\jmath}\dots,n).$$

Ce signe coïncide avec le même signe calculé en supprimant l'indice k_2:

$$\varepsilon_{|Deb(\Delta')|}(j,0,\dots\hat{\jmath}\dots,n)=\varepsilon_{|Deb(h(\Delta'))|}(j,0,\dots\hat{\jmath}\dots,n).$$

Donc

$$reste=-\sigma_{\partial h(\sigma_\delta)}(0,\dots\hat{k_2}\dots,n).$$

6. Cohomologie des graphes vectoriels

Disons qu'un sommet i d'un graphe vectoriel Δ est simple si $|Fin(i)| \leq 1$.

Proposition 6.1. (Le symbole d'un cocycle ne contient que des sommets simples)

Soit δ une combinaison linéaire symétrique de graphes aériens vectoriels. On suppose que δ est un cocycle ($\partial\delta = 0$). Alors il existe un cobord $\partial\beta$ tel que le symbole $\sigma_{\delta-\partial\beta}$ de $\delta - \partial\beta$ ne contient que des graphes Δ dont tous les sommets sont simples.

Preuve

Puisque δ est un cocycle, $h(\sigma_{\partial\delta}) = 0$. Dire que σ_δ contient au moins un graphe possédant un sommet non simple, c'est dire que dans $\mathcal{O}(\delta)$, $k_1 > 0$. On a alors:

$$0 = -\varepsilon_{|Deb|}(k_2, 0, \dots \hat{k_2} \dots, n) \left(\sum_{0 \leq i < k_0} r_i + \sum_{k_0 \leq i < k_1} (r_i - 1) \right) \sigma_\delta + \sigma_{\partial h(\sigma_\delta)}.$$

Le coefficient a de σ_δ est non nul. Puisque σ_δ n'est pas nul, on en déduit que $h(\sigma_\delta)$ n'est pas nul, donc $k_2 > k_1$, il existe des sommets d'ordre 1^+ dans les graphes Δ de σ_δ.

Posons $\beta_1 = -\frac{1}{a} S(h(\sigma_\delta))$. D'abord par construction, les graphes apparaissant dans $S(h(\sigma_\delta))$ mais pas dans $h(\sigma_\delta)$ sont d'ordre strictement plus petit que les graphes apparaissant dans $h(\sigma_\delta)$, ou:

$$\sigma_{h(\sigma_\delta)} = \sigma_{S(h(\sigma_\delta))}.$$

Ensuite on a vu que pour calculer le symbole de $\partial\delta$, on ne considérait que les graphes du symbole de δ donc:

$$\sigma_{\partial h(\sigma_\delta)} = \sigma_{\partial S(h(\sigma_\delta))} = -a\sigma_{\partial\beta_1}$$

Alors,

$$\sigma_{\partial\beta_1} = \sigma_\delta.$$

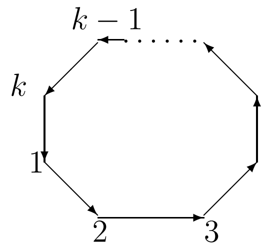
Autrement dit $\delta_1 = \delta - \partial\beta_1$ a un ordre strictement plus petit que $\mathcal{O}(\delta)$. Si le symbole de δ_1 a des graphes avec des sommets non simples, on peut recommencer cette opération. Au bout d'un nombre fini d'étapes, on arrive sur une combinaison de graphes $\delta - \partial\beta$ dont le symbole ne contient que des sommets simples:

$$\mathcal{O}(\delta - \partial\beta) = (1^+, \dots, 1^+, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0^-, \dots, 0^-).$$

Donc tous les graphes de $\delta - \partial\beta$ n'ont eux aussi que des sommets simples.

Définition 6.2. (Les roues)

Une roue symétrique R_k de longueur k est le symétrisé de la roue simple qui est le graphe Δ_k ayant k sommets $\{1, \dots, k\}$ et les k flèches $\{\overrightarrow{12}, \overrightarrow{23}, \dots, \overrightarrow{(k-1)k}, \overrightarrow{k1}\}$.



Lemme 6.3. (La cohomologie des roues)

Les roues symétriques de longueur paire sont nulles, $R_{2k}=0$.
Les roues impaires sont des cocycles $\partial R_{2k+1}=0$ *qui ne sont pas des cobords.*

Preuve
Soit Δ_{2k} une roue simple de longueur paire. Soit σ la permutation circulaire $\sigma=(1,2,\dots,2k)$. Alors

$$\varepsilon(\sigma)=\varepsilon_{|Deb|}(\sigma)=-1$$

et $\sigma(\Delta_{2k})=\Delta_{2k}$. Donc $R_{2k}=S(\Delta_{2k})=0$.
Par contre les roues R_{2k+1} de longueur impaire ne sont pas nulles. En effet si on suppose la dimension de l'espace $\mathbb{R}^d$ assez grande, l'opérateur

$$C_{R_{2k+1}}(\alpha_1,\dots,\alpha_{2k+1})=\sum_{\sigma\in S_{2k+1}}\varepsilon(\sigma)\sum_{1\le i_1\dots i_{2k+1}\le d}\partial_{i_{2k+1}}\alpha^{i_1}_{\sigma(1)}\partial_{i_1}\alpha^{i_2}_{\sigma(2)}\dots\partial_{i_{2k}}\alpha^{i_{2k+1}}_{\sigma(2k+1)}.$$

Cet opérateur est le cocycle non trivial $\zeta^{(2k+1)}$ de [DWL]. Comme il n'est pas nul, le graphe correspondant n'est pas nul non plus.
Soit Δ un graphe apparaissant dans la roue symétrique R_{2k+1}. Les graphes Δ'_{ij} et Δ'_{ji} apparaissant dans $\partial\Delta$ sont tous des roues de longueurs $2k+2$ (à l'ordre de leur sommets près). Comme ∂R_{2k+1} est symétrique, on a donc $\partial R_{2k+1}=0$.
Supposons que $R_{2k+1}=\partial\beta$. Il est clair que β ne contient que des graphes ayant $2k$ sommets tous d'ordres 1^+. Donc β est une combinaison linéaire de roues de longueur paire, $\beta=0$, ce qui est impossible. R_{2k+1} n'est pas un cobord.

Lemme 6.4. (Les graphes à roues)

Si Δ *est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des roues de longueurs impaires, alors le symétrisé de* Δ *est nul si deux composantes connexes ont la même longueur, sinon* $S(\Delta)$ *est au signe près le symétrisé du graphe:*

$$\Delta_{k_1}\wedge\Delta_{k_2}\wedge\dots\wedge\Delta_{k_p}$$

dont les flèches sont:

$$\Big\{\overrightarrow{12},\dots,\overrightarrow{(k_1-1)k_1},\overrightarrow{k_11},$$
$$\overrightarrow{(k_1+1)(k_1+2)},\dots,\overrightarrow{(k_1+k_2-1)(k_1+k_2)},\overrightarrow{(k_1+k_2)(k_1+1)},\dots,$$
$$\overrightarrow{(k_1+\cdots+k_{p-1}+1)(k_1+\cdots+k_{p-1}+2)},\dots,\overrightarrow{(k_1+\cdots+k_p)(k_1+\cdots+k_{p-1}+1)}\Big\}$$

et $k_1<k_2<\cdots<k_p$.

Preuve

Si deux composantes connexes de Δ sont des roues de même longueur $2k+1$, de sommets numérotés $\{i_1,\dots,i_{2k+1},j_1,\dots,j_{2k+1}\}$, alors la permutation

$$\sigma=(i_1,j_1)\dots(i_{2k+1},j_{2k+1})$$

est impaire et laisse Δ invariant, donc le symétrisé de Δ est nul.

Il est clair que si les composantes connexes de Δ sont toutes des roues de longueurs impaires différentes, il existe une permutation des sommets de Δ qui le transforme en $\Delta_{k_1}\wedge\Delta_{k_2}\wedge\cdots\wedge\Delta_{k_p}$ avec $k_1<k_2<\cdots<k_p$. On notera abusivement:

$$S(\Delta)=R_{k_1}\wedge R_{k_2}\wedge\cdots\wedge R_{k_p}.$$

Lemme 6.5. (La cohomologie des graphes à roues)

Tous les graphes à roues $R=\bigwedge_{i=1}^p R_{2k_i+1}$ *sont des cocycles qui sont linéairement indédependants dans l'espace de cohomologie.*

Preuve

D'abord chacun de ces graphes est un cocycle, ensuite si une combinaison linéaire de ces graphes symétriques est un cobord ($\sum_j a_jR_j=\partial\beta$), en se plaçant sur un espace $\mathbb{R}^d$ de dimension assez grande, on obtient une combinaison linéaire d'opérateurs

$$\sum_j a_j\left(\bigwedge_{i=1}^{p_j}\zeta^{(2k_i+1)}\right)$$

qui est un cobord pour la cohomologie de Chevalley de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$ à valeur dans les fonctions (les 0-formes). Ceci n'est possible que si chaque a_j est nul d'après [DWL].

Définition 6.6. (Les lignes)

La ligne symétrique L_ℓ *de longueur* ℓ *est le symétrisé de la ligne simple* Δ_ℓ*, graphe de sommets* $\{1,\dots,\ell+1\}$ *et de flèches* $\{\overrightarrow{21},\overrightarrow{32},\dots,\overrightarrow{(\ell+1)\ell}\}$*. Par convention, la ligne* L_0 *est le graphe à un sommet* $\{1\}$ *et sans flèche.*

Lemme 6.7. (Cohomologie des lignes)

Les lignes symétriques de longueur impaire $L_{2\ell+1}$ sont des cobords.
Le symétrisé d'un graphe contenant deux lignes de même longueur impaire est nul.
Les lignes symétriques de longueur paire $L_{2\ell}$ ne sont pas des cocycles, plus précisément, on a:

$$\partial L_{2\ell} = L_{2\ell+1}.$$

Preuve

Prenons une ligne simple Δ_ℓ. Si $\ell > 0$, dans le calcul de $\partial\Delta_\ell$, on éclate les $\ell - 1$ sommets qui ne sont pas les extrémités de la ligne:

$$\partial\Delta_\ell = -\sum_{i\neq j} \varepsilon_{|Deb|}(j, 0, \dots \hat{\jmath} \dots, \ell+1) \sum_{\Delta'_{ji} \to_i^{prop} \Delta_\ell} \Delta'_{ji}.$$

Pour chaque couple $i \neq j$, il y a un seul graphe Δ'_{ji}. A l'ordre des sommets près, on obtient à chaque fois une ligne de longueur $\ell + 1$.

On cherche donc dans le cobord de L_ℓ les lignes simples $\Delta_{\ell+1}$. Ces lignes ne peuvent provenir que de l'éclatement du sommet i de la ligne simple Δ_ℓ avec les sommets $\{0, \dots \widehat{\imath+1} \dots, \ell+1\}$ et pour $j = i + 1$. On obtient donc

$$\begin{aligned} -\left(\sum_{i=1}^{\ell} \varepsilon_{|Deb|}(i+1, 0, \dots \widehat{\imath+1} \dots, \ell+1)\right)\Delta_{\ell+1} &= -\left(\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^i\right)\Delta_{\ell+1} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \ell \quad \text{est pair,} \\ \Delta_{\ell+1} & \text{si} \quad \ell \quad \text{est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

En symétrisant, on obtient:

$$\partial L_{2\ell+1} = 0, \quad \partial L_{2\ell} = L_{2\ell+1}.$$

Si Δ contient deux composantes connexes qui sont des lignes de même longueur impaire $2\ell + 1$, de sommets numérotés $i_1, \dots, i_{2\ell+2}$ et $j_1, \dots, j_{2\ell+2}$, la permutation

$$\sigma = (i_1, j_1) \dots (i_{2\ell+2}, j_{2\ell+2})$$

est telle que:

$$\varepsilon_{|Deb|}(\sigma) = -1 \quad \text{et} \quad \sigma(\Delta) = \Delta.$$

Donc le symétrisé $S(\Delta)$ de Δ est nul.

Lemme 6.8. *(Les graphes à lignes)*

Si Δ est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des lignes, si le symétrisé $S(\Delta)$ de Δ n'est pas nul, c'est au signe près le symétrisé du graphe:

$$\left(\Delta_0^{k_0}\Delta_2^{k_1}\dots\Delta_{2\ell}^{k_\ell}\right)\Delta_{2\ell_1+1}\wedge\Delta_{2\ell_2+1}\wedge\dots\wedge\Delta_{2\ell_q+1} \qquad (\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_q).$$

Les sommets de ce graphe sont rangés dan l'ordre naturel (par exemple $\Delta_{2\ell}^{k_\ell}$ désigne un graphe ayant $k_\ell(2\ell+1)$ sommets formé d'une union de k_ℓ lignes de longueur 2ℓ, en numérotant d'abord les sommets de la première ligne, puis ceux de la seconde, etc...)

Preuve

Si le symétrisé de Δ n'est pas nul, pour chaque longueur impaire, il y a au plus une composante connexe de cette longueur. Les composantes de longueur paire (y compris 0) peuvent apparaître plusieurs fois. Modulo une permutation des sommets, Δ est donc bien un produit de lignes comme annoncé.

Notons abusivement le symétrisé de ce graphe

$$\left(L_0^{k_0} L_2^{k_1} \dots L_{2\ell}^{k_\ell}\right) L_{2\ell_1+1} \wedge L_{2\ell_2+1} \wedge \cdots \wedge L_{2\ell_q+1}$$

Lemme 6.9. (La cohomologie des graphes à lignes)

Considérons le graphe à lignes:

$$\left(\prod_{i=0}^{\ell} L_{2i}^{k_i}\right)\left(\bigwedge_{j=1}^{q} L_{2\ell_j+1}\right).$$

Si pour chaque i, $k_i \neq 0$ implique qu'il existe j tel que $i = \ell_j$, alors

$$\partial\left(\prod_{i=0}^{\ell} L_{2i}^{k_i}\right)\left(\bigwedge_{j=1}^{q} L_{2\ell_j+1}\right) = 0.$$

Sinon

$$\partial\left(\prod_{i=0}^{\ell} L_{2i}^{k_i}\right)\left(\bigwedge_{j=1}^{q} L_{2\ell_j+1}\right) = \sum_{r=0}^{\ell} k_r \left(\prod_{i\neq r} L_{2i}^{k_i}\right) L_{2r}^{k_r-1} L_{2r+1} \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{q} L_{2\ell_j+1}\right) \neq 0.$$

La cohomologie des graphes à lignes est triviale.

Preuve

Il résulte des calculs précédents et du fait que les lignes de longueur paire peuvent permuter avec toutes les autres lignes sans changement de signe que:

$$\partial\left(\prod_{i=0}^{\ell} L_{2i}^{k_i}\right)\left(\bigwedge_{j=1}^{q} L_{2\ell_j+1}\right) = \sum_{r=0}^{\ell} k_r \left(\prod_{i\neq r} L_{2i}^{k_i}\right) L_{2r}^{k_r-1} L_{2r+1} \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{q} L_{2\ell_j+1}\right).$$

Donc si pour chaque i, $k_i \neq 0$ implique qu'il existe j tel que $i = \ell_j$, alors

$$\partial\left(\prod_{i=0}^{\ell} L_{2i}^{k_i}\right)\left(\bigwedge_{j=1}^{q} L_{2\ell_j+1}\right) = 0.$$

S'il existe i tel que $k_i > 0$ et il n'y a pas de j tel que $i = \ell_j$, le graphe n'est pas un cocycle car si $r \neq s$,

$$\left(\prod_{i\neq r} L_{2i}^{k_i}\right) L_{2r}^{k_r-1} L_{2r+1} \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{q} L_{2\ell_j+1}\right) \neq \left(\prod_{i\neq s} L_{2i}^{k_i}\right) L_{2s}^{k_s-1} L_{2s+1} \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{q} L_{2\ell_j+1}\right).$$

En particulier le graphe à lignes simples

$$\left(\prod_{i=0}^{\ell-1} \Delta_{2i}^{k_i}\right) \Delta_{2\ell}^{k_\ell-1} \Delta_{2\ell+1} \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{q} \Delta_{2\ell_j+1}\right)$$

n'apparaît qu'une seule fois. Le second membre n'est pas nul.

Si un graphe à lignes

$$L = \left(\prod_{i=1}^{p} L_{2i}^{k_i}\right) \left(\bigwedge_{j=1}^{q} L_{2\ell_j+1}\right)$$

est un cocycle, $2\ell_q + 1$ est la plus grande longueur des graphes apparaissant dans L et on a si $p = \ell_q$

$$L = (-1)^{q-1} \partial \frac{1}{k_p+1} \left(\prod_{i=1}^{p-1} L_{2i}^{k_i}\right) L_{2p}^{k_p+1} \left(\bigwedge_{j=1}^{q-1} L_{2\ell_j+1}\right)$$

et si $p < \ell_q$

$$L = (-1)^{q-1} \partial \left(\prod_{i=1}^{p} L_{2i}^{k_i}\right) L_{2\ell_q} \left(\bigwedge_{j=1}^{q-1} L_{2\ell_j+1}\right).$$

La cohomologie des graphes à lignes est donc toujours triviale.

Théorème 6.10. (La cohomologie de Chevalley des graphes)

La cohomologie de Chevalley des graphes vectoriels est donnée par les roues de longueur impaire. Plus précisément, pour tout n, une base de H^n est donnée par

$$\left\{ R_{2k_1+1} \wedge R_{2k_2+1} \wedge \cdots \wedge R_{2k_p+1}, \quad \textit{avec } k_1 < k_2 < \cdots < k_p,\ \sum_{i=1}^{p} (2k_i+1) = n \right\}.$$

Preuve

D'après la proposition 6.1, tout cocycle δ est cohomologue à un cocycle $\delta - \partial\beta$ dont le symbole ne contient que des graphes avec des sommets simples. On suppose maintenant que δ a cette propriété. Chaque graphe de ce symbole est donc une union de composantes connexes qui sont soit des roues simples de longueur impaire soit des lignes simples. Le nombre de lignes est d'ailleurs fixé, égal au nombre de 0^-.

On définit un nouvel ordre sur les graphes de ce type en posant:

$$\mathcal{O}'(\Delta) = (\ell_1, \ldots, \ell_p, r_1, \ldots, r_q)$$

où les ℓ_i sont les longueurs des lignes et les r_j celles des roues. On range ces symboles en posant $\ell_i > r_j$ pour tout i et j, on range ces ordres de graphes par l'ordre lexicographique sur les symboles.

L'ordre de δ est

$$\mathcal{O}'(\delta) = Max\{\mathcal{O}'(\Delta),\ \Delta \text{ apparaissant dans } \sigma_\delta\}.$$

On a donc $\mathcal{O}'(\delta) = (\ell_1, \dots, \ell_p, r_1, \dots, r_q)$ avec $\ell_1 \geq \ell_2, \dots, r_1 > r_2 > \dots$, les seuls ℓ_i répétés sont pairs, les r_j sont tous impairs. Le nouveau symbole de δ est

$$\sigma'_\delta = \sum_{\substack{\Delta \\ \mathcal{O}'(\Delta)=\mathcal{O}'(\delta)}} a_\Delta \Delta.$$

Supposons qu'il existe un indice i tel que ℓ_i est pair et $\ell_i + 1$ n'appartient pas à $\{\ell_1, \dots, \ell_{i-1}\}$. Appelons i_0 le premier indice pour lequel ceci se produit.

Si Δ apparaît dans δ mais pas dans $S(\sigma_\delta)$, on a vu que:

$$\mathcal{O}(\partial\Delta) < \mathcal{O}(\delta) \oplus 1^+.$$

D'après les lemmes précédents, si Δ apparaît dans $S(\sigma_\delta)$ mais pas dans $S(\sigma'_\delta)$, alors le nouvel ordre $\mathcal{O}'(S(\partial\Delta))$ est strictement plus petit que

$$\mathcal{O}'(\delta) \oplus [i_0] = (\ell_1, \dots, \underbrace{\ell_{i_0} + 1}_{(i_0)}, \dots, \ell_p, r_1, \dots, r_q).$$

En effet, pour calculer $\partial\Delta$, on procède à des éclatements soit dans les lignes soit dans les roues. On ne retient que les éclatements qui ne disparaissent pas par symétrisation.

Enfin si Δ apparaît dans $S(\sigma'_\delta)$, le nouvel ordre de $S(\partial\Delta)$ est toujours inférieur ou égal à $\mathcal{O}'(\delta) \oplus [i_0]$, car on utilise les lemmes précédents, en procédant à des éclatements successivement des sommets des lignes et des sommets des roues.

On a donc avec nos notations habituelles:

$$S(\sigma'_\delta) = a \left(\prod_{\ell_i \ pair} L_{\ell_i} \right) \left(\bigwedge_{\ell_i \ impair} L_{\ell_i} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{p} R_j \right)$$

et

$$S(\sigma'_{\partial\delta}) = a \left(\prod_{\substack{\ell_i \ pair \\ i \neq i_0}} L_{\ell_i} \right) L_{\ell_{i_0}+1} \wedge \left(\bigwedge_{\ell_i \ impair} L_{\ell_i} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{p} R_j \right) \neq 0.$$

Ceci est donc impossible, il n'existe pas de i tel que ℓ_i soit pair et $\ell_i + 1$ n'appartient pas à $\{\ell_1, \dots, \ell_{i-1}\}$.

On en déduit en particulier que s'il y a des lignes, ℓ_1 est impair et en retranchant à δ le cobord de

$$\beta = a\left(\prod_{\ell_i\ pair} L_{\ell_i}\right) L_{\ell_1-1}\left(\bigwedge_{\substack{\ell_i\ impair\\ i>1}} L_{\ell_i}\right)\wedge\left(\bigwedge_{j=1}^{p} R_j\right)$$

on obtient un graphe $\delta - \partial\beta$ dont le nouvel ordre est strictement plus petit que celui de δ. En répétant cette opération, on se ramène au cas où le symbole de δ ne contient que des graphes à roues impaires. Alors $S(\sigma_\delta)$ est un cocycle et l'ordre de $\delta - S(\sigma_\delta)$ est strictement plus petit.

On recommence cette opération jusqu'à annulation de l'ordre des cocycles construits. On obtient :

$$\delta = \partial\beta + \sum_{r_1,\dots,r_q} a_{r_1\dots r_q} R_{r_1}\wedge\cdots\wedge R_{r_q}.$$

La cohomologie est donc engendrée par les graphes à roues de longueurs impaires. On a vu que ces graphes sont linéairement indépendants.

References

[AGM] D. Arnal, A. Gammella, M. Masmoudi, *Chevalley Cohomology for Kontsevich's graphs*, Pacific J of Math, vol 218, no 2, (2005) 201-239.

[AM] D. Arnal and M. Masmoudi, *Cohomologie de Hochschild des graphes de Kontsevich*, Bull. Soc. Math. France 130 (2002), no. 1, 49-69.

[AMM] D. Arnal, D. Manchon, M. Masmoudi, *Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich*, Pacific J of Math, vol 203, no 1 (2002), 23-66.

[DWL] M. De Wilde and P.B.A Lecomte,*Cohomology of the Lie algebra of smooth vector fields of a manifold, associated to the Lie derivative of smooth forms*, J. Math. Pures et appl., 197-214 (1983).

[GF] I.M. Gelfand, D.B. Fuchs, *Cohomologies of Lie algebra of tangent vector fields of a smooth manifold*, Funct. Anal. and Applic. Vol 3. N° 2, 1970, 110-116.

[GH] A. Gammella and G. Halbout, *G_∞-formality theorem in terms of graphs and associated Chevalley-Eilenberg-Harrison cohomology*, preprint IRMA 2003-05-21. n° 2003-015 (Strasbourg).

[K] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. 66 (2003), no. 3, 157-216.

Département de Mathématiques, Unité de Recherche Physique Mathématique, Faculté des Sciences de Monastir, Avenue de l'environnement, 5019 Monastir, Tunisie
E-mail address: `Walid.Aloulou@ipeim.rnu.tn`

Institut de Mathématiques de Bourgogne, UMR CNRS 5584, Université de Bourgogne, U.F.R. Sciences et Techniques B.P. 47870, F-21078 Dijon Cedex, France
E-mail address: `Didier.Arnal@u-bourgogne.fr`

Département de Mathématiques, Unité de Recherche Physique Mathématique, Faculté des Sciences de Monastir, Avenue de l'environnement, 5019 Monastir, Tunisie
E-mail address: `Ridha.Chatbouri@ipeim.rnu.tn`