HAL open science

Indice et decomposition de Cartan d'une algebre de Lie semi-simple reelle

Anne Moreau

To cite this version:

Anne Moreau. Indice et decomposition de Cartan d'une algebre de Lie semi-simple reelle. Journal of Algebra, 2006, 303 (1), pp.382-406. hal-00005319v3

HAL Id: hal-00005319
https://hal.science/hal-00005319v3

Submitted on 29 Jan 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

hal-00005319, version 3 - 29 Jan 2007

INDICE ET DÉCOMPOSITION DE CARTAN D'UNE ALGÈBRE DE LIE SEMI-SIMPLE RÉELLE

par

Anne Moreau

Résumé. — La décomposition d'Iwasawa $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$ issue de la décomposition de Cartan $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ d'une algèbre de Lie semisimple réelle permet d'écrire $\mathfrak{g}_0$ sous la forme $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{b}_0$, avec $\mathfrak{b}_0 = \widehat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$. La question de savoir si l'indice est additif dans la décomposition $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{b}_0$ a été soulevée par M. Raïs dans [**19**]. Dans [**13**], il est écrit que l'indice est toujours additif pour cette décomposition. Précisément, j'y affirme que l'indice de $\mathfrak{b}$ est donné par la relation : ind $\mathfrak{b} = \mathrm{rg}\ \mathfrak{g} - \mathrm{rg}\ \mathfrak{k}$, où $\mathfrak{b}$ est le complexifié de $\mathfrak{b}_0$. Ce résultat n'est en fait pas vrai en général. On dispose en fait de l'inégalité : ind $\mathfrak{b} \geq \mathrm{rg}\ \mathfrak{g} - \mathrm{rg}\ \mathfrak{k}$, et l'égalité a lieu si, et seulement si, une certaine condition est satisfaite. Cet article a pour but de corriger cette erreur. On reprend la démarche de [**13**] pour obtenir cette fois l'inégalité précédente. On donne alors une caratérisation des algèbres de Lie simples réelles $\mathfrak{g}_0$ pour lesquelles l'égalité a lieu. On étudie ou outre dans cet article le caractère quasi-réductif de certaines sous-algèbres de $\mathfrak{g}$. Cette partie est nouvelle par rapport à [**13**].

Abstract **(The index and the Cartan decomposition of a real semisimple Lie algebra)**

The Iwasawa decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$ of the real semisimple Lie algebra $\mathfrak{g}_0$ comes from its Cartan decomposition $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$. Then we get $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{b}_0$ where $\mathfrak{b}_0 = \widehat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$. The question of knowing if the index were additive in the decomposition $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{b}_0$ goes back M. Raïs [**19**]. In [**13**], I wrote that the index always is additive for this decomposition. Precisly, I claim that the index of $\mathfrak{b}$ is given by the following formula: ind $\mathfrak{b} = \mathrm{rk}\ \mathfrak{g} - \mathrm{rk}\ \mathfrak{k}$, where $\mathfrak{b}$ is the complexification of $\mathfrak{b}_0$. This result is false in general. We actually have an inequality: ind $\mathfrak{b} \geq \mathrm{rg}\ \mathfrak{g} - \mathrm{rg}\ \mathfrak{k}$. The goal of this paper is to correct this mistake. We resume the approach of [**13**] to obtain this time the previous inequality. Then we give in more a characterization of the semisimple real Lie algebra $\mathfrak{g}_0$ for which the index is additive in the decomposition $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{b}_0$. Moreover, we study in this paper the quasi-reductive character of some subalgebras of $\mathfrak{g}$. This is a new part in comparison with [**13**].

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 22-04,22E46,22E60,17B10,17B20.
Mots clefs. — indice, décomposition d'Iwasawa, algèbre de Lie, quasi-réductive, involution de Cartan, forme stable, transformation de Cayley.

Introduction

Soit $\mathfrak{g}_0$ une algèbre de Lie semi-simple réelle et soit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_0$. On note θ l'involution de Cartan correspondante. Soit $\widehat{\mathfrak{a}}_0$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}_0$. Le sous-espace $\widehat{\mathfrak{a}}_0$ est formé d'éléments semi-simples dans $\mathfrak{g}_0$ et, pour λ dans $\widehat{\mathfrak{a}}_0^*$, on pose

$$\mathfrak{g}_0^\lambda = \{X \in \mathfrak{g}_0 \mid [H, X] = \lambda(H)X,\ \forall H \in \widehat{\mathfrak{a}}_0\}.$$

L'ensemble Σ constitué des formes lineaires non nulles λ sur $\widehat{\mathfrak{a}}_0$ pour lesquelles le sous-espace $\mathfrak{g}_0^\lambda$ est non nul est un système de racines dans $\widehat{\mathfrak{a}}_0^*$. Soit Σ_+ un système de racines positives de Σ. On pose

$$\mathfrak{n}_0 = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_0^\lambda,$$

de sorte qu'on obtient la décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{g}_0$ suivante :

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \mathfrak{n}_0.$$

En posant $\mathfrak{b}_0 = \widehat{\mathfrak{a}}_0 \ \oplus \mathfrak{n}_0$, on obtient la décomposition :

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{b}_0.$$

Dans tout ce qui suit, on note sans indice 0 les complexifiés des algèbres de Lie réelles notées, elles, avec un indice 0. Ainsi, $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0)^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{k} = (\mathfrak{k}_0)^{\mathbb{C}}$, $\widehat{\mathfrak{a}} = (\widehat{\mathfrak{a}}_0)^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_0)^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}_0)^{\mathbb{C}}$, etc. L'indice d'une algèbre de Lie $\mathfrak{q}$, noté ind $\mathfrak{q}$, est la dimension minimale des stabilisateurs pour l'action coadjointe des éléments de $\mathfrak{q}^*$. Si $\mathfrak{q}$ est le complexifié d'une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{q}_0$, alors on a : ind $\mathfrak{q}$ = ind $\mathfrak{q}_0$.

La question de savoir si l'indice est additif dans la décomposition $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{b}_0$ a été soulevée par M. Raïs dans [**19**]. Dans [**13**], il est écrit que l'indice est toujours additif pour cette décomposition. Précisément, j'affirme que l'indice de $\mathfrak{b}$ est donné par la relation : ind $\mathfrak{b}$ = rg $\mathfrak{g}$ − rg $\mathfrak{k}$, où $\mathfrak{b}$ est le complexifié de $\mathfrak{b}_0$. Ce résultat n'est pas vrai en général, comme le prouve le cas de l'algèbre de Lie simple réelle $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2p, 1)$, pour $p \geq 1$. En effet, si l'indice était additif pour cette algèbre, la formule précédente donnerait ind $\mathfrak{b} = 0$, car ici rg $\mathfrak{g}$ = rg $\mathfrak{k}$. Or, d'après [**3**], l'algèbre $\mathfrak{b}$ ne possède pas, dans ce cas, d'orbite ouverte dans son dual, ce qui signifie : ind $\mathfrak{b} > 0$.

Le but de cet article est de corriger l'erreur commise dans [**13**]. On reprend exactement la démarche de [**13**] pour construire des formes linéaires régulières sur $\mathfrak{b}$. Mais on obtient cette fois l'inégalité :

$$\text{ind } \mathfrak{g}_0 \leq \text{ind } \mathfrak{k}_0 + \text{ind } \mathfrak{b}_0. \tag{1}$$

On donne alors ici une caractérisation des algèbres de Lie simples réelles pour lesquelles il y a égalité dans la relation précédente.

La première partie concerne la structure de $\mathfrak{g}_0$. On rappelle dans la deuxième partie la construction «en cascade» de Kostant. Cette construction servira à définir dans les parties suivantes une forme linéaire régulière sur $\mathfrak{b}$ ainsi qu'une forme stable sur une certaine sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{b}$. On utilise dans la partie 3 les transformations de Cayley pour obtenir des relations utiles pour la suite (Proposition 3.2). On prouve dans la partie 4 la relation (1) et on obtient une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité dans la relation (1) (Théorème 4.5). La partie 5 concerne les algèbres de Lie quasi-réductives. Parmi les algèbres de Lie réelles semi-simples $\mathfrak{g}_0$, on caractérise celles pour lesquelles la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ est quasi-réductive. On donne en outre une description précise de certaines sous-algèbres paraboliques quasi-réductives de $\mathfrak{g}$. La dernière partie repose sur la classification des algèbres de Lie simples réelles. On compare certaines propriétés portant sur $\mathfrak{b}$: «l'indice est additif dans la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b}$», «$\mathfrak{b}$ est quasi-réductive», «$\mathfrak{b}$ possède une orbite ouverte dans son dual», etc. Pour chaque type d'algèbre de Lie simple réelle, on précise quelles sont les propriétes satisfaites par $\mathfrak{b}$.

Notons que la partie 5 est nouvelle par rapport à [**13**]. Les résultats principaux de cette partie (Théorème 5.8 et Table 4) sont, pour une large part, indépendants du reste. La partie 6 est, quant à elle, largement modifiée par rapport à la partie correspondante de [**13**] compte tenu de l'erreur annoncée.

1. Quelques précisions sur la structure de $\mathfrak{g}_0$

On regroupe dans cette partie quelques résultats concernant la structure de $\mathfrak{g}_0$. On trouve les preuves de ces résultats dans [**5**] et [**9**]. Soit $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$, stable par θ. Puisque $\mathfrak{h}_0$ est stable, elle s'écrit sous la forme

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{t}_0,$$

avec $\mathfrak{a}_0$ dans $\mathfrak{p}_0$ et $\mathfrak{t}_0$ dans $\mathfrak{k}_0$. La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et on note Δ le système de racines associé au couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Les éléments de Δ sont à valeurs réelles sur $\mathfrak{a}_0 \oplus i\mathfrak{t}_0$. On choisit un système de racines positives Δ_+ dans Δ en prenant $\mathfrak{a}_0$ avant $i\mathfrak{t}_0$ pour former l'ordre lexicographique sur $(\mathfrak{a}_0 \oplus i\mathfrak{t}_0)^*$. Ainsi, pour α une racine de Δ non nulle sur $\mathfrak{a}_0$, la positivité de α ne dépend que de sa restriction à $\mathfrak{a}_0$. On note Π la base de Δ_+.

On note encore θ l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de θ à $\mathfrak{g}$. La transposée de θ est également notée θ. On note $\Delta^{'}$ (respectivement $\Delta^{''}$) l'ensemble des racines de Δ qui s'annulent sur $\mathfrak{a}$ (respectivement qui ne s'annulent pas sur $\mathfrak{a}$). On a $\theta(\Delta) = \Delta$ et $\Delta^{'}$ est l'ensemble des éléments de Δ invariants par θ. On pose $\Delta^{''}_+ = \Delta^{''} \cap \Delta_+$, $\Delta^{''}_- = \Delta^{''} \cap (-\Delta_+)$. On a $\theta(\Delta^{''}_+) = \Delta^{''}_-$ et $(\Delta^{''}_+ + \Delta^{''}_+) \cap \Delta \subset \Delta^{''}_+$.

Pour chaque élément α de Δ, on fixe X_α un élément non nul de $\mathfrak{g}^\alpha$ et on note H_α l'unique élément de $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ tel que $\alpha(H_\alpha) = 2$. Une racine est dite *réelle* si elle prend des valeurs réelles sur $\mathfrak{h}_0$ (i.e. si elle s'annule sur $\mathfrak{t}_0$), *imaginaire* si elle prend des valeurs imaginaires sur $\mathfrak{h}_0$ (i.e. si elle s'annule sur $\mathfrak{a}_0$), et *complexe* sinon. Le lemme suivant est connu et ne présente pas de difficulté :

Lemme 1.1. — (i) : *Pour α dans Δ, on a : $\theta X_\alpha \in \mathfrak{g}^{\theta\alpha}$,*

(ii) : *Pour α dans Δ, on a : $\theta H_\alpha = H_{\theta\alpha}$,*

(iii) : *Soit α une racine de Δ. On a les équivalences suivantes :*

$$\alpha \text{ est réelle} \iff \theta\alpha = -\alpha \iff H_\alpha \in \mathfrak{a},$$
$$\alpha \text{ est imaginaire} \iff \theta\alpha = \alpha \iff H_\alpha \in \mathfrak{t}.$$

La *dimension compacte* est par définition la dimension, $\dim \mathfrak{t}_0$, de l'intersection de $\mathfrak{h}_0$ avec $\mathfrak{k}_0$ et la *dimension non-compacte* est par définition la dimension, $\dim \mathfrak{a}_0$, de l'intersection de $\mathfrak{h}_0$ avec $\mathfrak{p}_0$. On dit que $\mathfrak{h}_0$ est *maximalement compacte* si la dimension compacte est la plus grande possible et on dit que $\mathfrak{h}_0$ est *maximalement non-compacte* si la dimension non-compacte est la plus grande possible.

Remarque 1. — Il se peut que $\mathfrak{h}_0$ soit à la fois maximalement compacte et maximalement non-compacte. C'est le cas si $\mathfrak{g}_0$ est l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à une algèbre de Lie simple complexe, ou si $\mathfrak{g}_0$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$ ou à l'algèbre de Lie simple exceptionelle EIV, comme on peut le voir à l'aide de la table 5 présentée à la fin de ce chapitre.

Si α est une racine imaginaire de Δ, alors $\theta\alpha = \alpha$ donc $\mathfrak{g}^\alpha$ est stable par θ, et on a $\mathfrak{g}^\alpha = (\mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{p})$. Puisque $\mathfrak{g}^\alpha$ est de dimension 1, on a $\mathfrak{g}^\alpha \subseteq \mathfrak{k}$ ou $\mathfrak{g}^\alpha \subseteq \mathfrak{p}$. On dit que la racine imaginaire α est *compacte* si $\mathfrak{g}^\alpha \subseteq \mathfrak{k}$ et *non-compacte* si $\mathfrak{g}^\alpha \subseteq \mathfrak{p}$. Le résultat suivant est démontré en [**9**], proposition 6.70.

Lemme 1.2. — *Soit $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ stable par θ. Alors, il n'existe pas de racine imaginaire non-compacte si, et seulement si, $\mathfrak{h}_0$ est maximalement non-compact et, il n'existe pas de racine réelle si, et seulement si, $\mathfrak{h}_0$ est maximalement compact.*

Soit $\widehat{\mathfrak{t}}_0$ un sous-espace abélien maximal du centralisateur $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}_0}(\widehat{\mathfrak{a}}_0)$ de $\widehat{\mathfrak{a}}_0$ dans $\mathfrak{k}_0$. Le sous-espace $\widehat{\mathfrak{t}}_0$ est formé d'éléments semi-simples dans $\mathfrak{g}_0$ et $\widehat{\mathfrak{h}}_0 = \widehat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{t}}_0$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ stable par θ qui est maximalement non-compacte. On surmonte d'un chapeau les ensembles définis précédemment relatifs à $\widehat{\mathfrak{h}}$. On a :

$$(\mathfrak{g}_0)^\lambda = \mathfrak{g}_0 \cap \Big(\bigoplus_{\substack{\alpha \in \widehat{\Delta}''_+ \\ \alpha_{|\widehat{\mathfrak{a}}} = \lambda}} \mathfrak{g}^\alpha \Big)$$

et

$$\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_0)^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha \in \widehat{\Delta}''_+} \mathfrak{g}^\alpha.$$

D'où

$$\mathfrak{b} = \widehat{\mathfrak{a}} \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha \in \widehat{\Delta}''_+} \mathfrak{g}^\alpha \Big).$$

On termine par un lemme :

Lemme 1.3. — *L'ensemble* $\widehat{\Delta}'_{|\widehat{\mathfrak{t}}}$ *est le système de racines associé au couple* $(\mathfrak{m}, \widehat{\mathfrak{t}})$. *Si* α *appartient à* $\widehat{\Delta}'$, *on a* $\mathfrak{m}^{\alpha_{|\widehat{\mathfrak{t}}}} = \mathfrak{g}^{\alpha}$. *Enfin, on a :*

$$\mathfrak{m} = \widehat{\mathfrak{t}} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \widehat{\Delta}'} \mathfrak{g}^{\alpha}).$$

2. Construction «en cascade» de Kostant

2.1. Soit $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ stable par θ. On reprend les notations de la partie précédente. On utilise en outre les notations introduites dans [**25**] et [**24**]. Si λ appartient à $\mathfrak{h}^*$, on écrit $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ pour $\lambda(H_\alpha)$. Pour toute partie S de Π, on note Δ^S le système de racines engendré par S, et Δ^S_+ le système de racines positives correspondant. Si S est une partie connexe de Π, le système de racines Δ^S est irreductible et on note ε_S la plus grande racine de Δ^S_+.

Supposons que S est une partie connexe de Π. Les résultats qui suivent vont être utilisés à plusieurs reprises dans la suite ; ils sont démontrés dans [**1**] et rappelés dans [**23**], [**25**] et [**24**]. Pour toute racine α de $\Delta^S_+ \setminus \{\varepsilon_S\}$, on a : $\langle \alpha, {\varepsilon_S}^\vee \rangle \in \{0, 1\}$. Si T est l'ensemble des racines α de Δ^S qui vérifient $\langle \alpha, {\varepsilon_S}^\vee \rangle = 0$, alors T est un système de racines dans le sous-espace de $\mathfrak{h}^*$ qu'il engendre et l'ensemble $\{\alpha \in S \mid \langle \alpha, {\varepsilon_S}^\vee \rangle = 0\}$ forme une base de T. De plus, si α appartient à $T \cap \Delta^S_+$, alors on a : $\alpha \pm \varepsilon_S \notin \Delta$. Ainsi, pour α dans T, les racines α et ε_S sont fortement orthogonales.

On rappelle la construction et quelques propriétés d'un ensemble de racines deux à deux fortement orthogonales dans Δ. Par récurrence sur le cardinal de S, on définit un sous-ensemble $\mathcal{K}(S)$ de l'ensemble des parties de Π de la manière suivante :

a) : $\mathcal{K}(\emptyset) = \emptyset$,

b) : Si $S_1, \ldots, S_r$ sont les composantes connexes de S, on a :

$$\mathcal{K}(S) = \mathcal{K}(S_1) \cup \cdots \cup \mathcal{K}(S_r),$$

c) : Si S est connexe, alors :

$$\mathcal{K}(S) = \{S\} \cup \mathcal{K}(\{\alpha \in S \mid \langle \alpha, \varepsilon_S^\vee \rangle = 0\}).$$

Les deux lemmes suivants regroupent des propriétés de cette construction utiles pour la suite. Ils sont énoncés dans [**23**], [**25**] ou [**24**].

Lemme 2.1. — (i) : *Tout élément* K *de* $\mathcal{K}(S)$ *est une partie connexe de* Π.

(ii) : *Si K, K' appartiennent à $\mathcal{K}(S)$, alors ou bien $K \subset K'$, ou bien $K' \subset K$, ou bien K et K' sont des parties disjointes de S telles que $\alpha + \beta$ n'appartient pas à Δ, pour α dans Δ^K et β dans $\Delta^{K'}$.*

(iii) : *Si K et K' sont des éléments distincts de $\mathcal{K}(S)$, alors ε_K et $\varepsilon_{K'}$ sont fortement orthogonales.*

Si $K \in \mathcal{K}(\Pi)$, on pose :

$$\Gamma^K = \{\alpha \in \Delta^K \mid \langle \alpha, \varepsilon_K^\vee \rangle > 0\}, \qquad \Gamma_0^K = \Gamma^K \setminus \{\varepsilon_K\}, \qquad \mathcal{H}_K = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma^K} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Lemme 2.2. — *Soit K, K' dans $\mathcal{K}(\Pi)$, α, β dans Γ^K et γ dans $\Gamma^{K'}$.*

(i) : *On a $\Gamma^K = \Delta_+^K \setminus \{\delta \in \Delta_+^K \mid \langle \delta, \varepsilon_S^\vee \rangle = 0\}$.*

(ii) : *L'ensemble Δ_+ est la réunion disjointe des $\Gamma^{K''}$ pour K'' dans $\mathcal{K}(\Pi)$, et $\mathcal{H}_K$ est une algèbre de Heisenberg de centre $\mathfrak{g}^{\varepsilon_K}$.*

(iii) : *Si $\alpha + \beta$ appartient à Δ, alors $\alpha + \beta = \varepsilon_K$.*

(iv) : *Si $\alpha + \gamma$ appartient à Δ, alors ou bien $K \subset K'$ et $\alpha + \gamma$ appartient à $\Gamma^{K'}$, ou bien $K' \subset K$ et $\alpha + \gamma$ appartient à Γ^K.*

Remarque 2. — *Notons que si K est un élément de $\mathcal{K}(\Pi)$, alors pour toute racine α de Γ_0^K, il existe une unique racine β de Γ_0^K telle que $\alpha + \beta = \varepsilon_K$ et on a :*

$$\langle \alpha, {\varepsilon_K}^\vee \rangle = \langle \beta, {\varepsilon_K}^\vee \rangle = 1.$$

Cela résulte du point (ii) du lemme 2.2 et des résultats de [**1**] *rappelés précédemment.*

Le cardinal de $\mathcal{K}(\Pi)$ dépend de $\mathfrak{g}$ mais pas de $\mathfrak{h}$ ou de Π. On note $k_\mathfrak{g}$ cet entier. La table 1 donne la valeur de $k_\mathfrak{g}$ pour les différents types d'algèbres de Lie simples.

	$A_l, l \geq 1$	$B_l, l \geq 2$	$C_l, l \geq 3$	$D_l, l \geq 4$	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$k_\mathfrak{g}$	$\left[\frac{l+1}{2}\right]$	l	l	$2\left[\frac{l}{2}\right]$	4	7	8	4	2

TABLE 1. $k_\mathfrak{g}$ pour les algèbres de Lie simples.

On descrit dans les tables 2 et 3 l'ensemble $\{\varepsilon_K \ , \ K \in \mathcal{K}(\Pi)\}$ pour les différents types d'algèbres de Lie simples complexes.

2.2. On étudie dans ce paragraphe la façon dont l'involution θ agit sur l'ensemble $\mathcal{K}(\Pi)$. Posons

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^{''}(\Pi) &= \{K \in \mathcal{K}(\Pi) \mid \varepsilon_{K|_{\mathfrak{a}}} \neq 0\} \\ &= \{K \in \mathcal{K}(\Pi) \mid \varepsilon_K \in \Delta_+^{''}\},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^{'}(\Pi) &= \{K \in \mathcal{K}(\Pi) \mid \varepsilon_{K|_{\mathfrak{a}}} = 0\} \\ &= \{K \in \mathcal{K}(\Pi) \mid \varepsilon_K \in \Delta_+^{'}\}.\end{aligned}$$

Si K appartient à $\mathcal{K}^{'}(\Pi)$, alors $\theta\varepsilon_K = \varepsilon_K$. On cherche maintenant à étudier la façon dont l'involution θ agit sur l'ensemble $\mathcal{K}^{''}(\Pi)$. On introduit pour cela la définition suivante :

Définition 2.3. — *On dira que le couple* $(\mathfrak{h}_0, \Pi)$ a la propriété (P) *si, pour tout* K *dans* $\mathcal{K}^{''}(\Pi)$*, il existe un unique élément* L *dans* $\mathcal{K}^{''}(\Pi)$ *tel que,* $-\theta\varepsilon_K = \varepsilon_L$*.*

On introduit les deux sous-ensembles suivants de $\mathcal{K}^{''}(\Pi)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi) &= \{K \in \mathcal{K}^{''}(\Pi) \mid -\theta\varepsilon_K = \varepsilon_K\} \\ &= \{K \in \mathcal{K}(\Pi) \mid \varepsilon_K \text{ est réelle }\}\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{K}_{\text{comp}}(\Pi) = \{K \in \mathcal{K}^{''}(\Pi) \mid -\theta\varepsilon_K \neq \varepsilon_K\}.$$

Si $(\mathfrak{h}_0, \Pi)$ a la propriété (P), alors θ induit une involution dans $\mathcal{K}^{''}(\Pi)$, que l'on note encore θ. L'ensemble $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi)$ est alors l'ensemble des points fixes pour cette involution et, puisque θ est une involution, le cardinal de $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\Pi)$ est pair et l'on peut choisir un sous-ensemble $\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\Pi)$ de $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\Pi)$ de sorte que,

$$\mathcal{K}_{\text{comp}}(\Pi) = \mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\Pi) \cup \theta\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\Pi).$$

Proposition 2.4. — *Soit* $\mathfrak{h}_0$ *une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}_0$ *stable par* θ*. Si* $\mathfrak{h}_0$ *est maximalement non-compacte, alors* $(\mathfrak{h}_0, \Pi)$ *a la propriété* (P)*.*

Démonstration. — Il s'agit de prouver que, pour tout K dans $\mathcal{K}''(\Pi)$, il existe un unique élément L dans $\mathcal{K}''(\Pi)$ tel que, $-\theta\varepsilon_K = \varepsilon_L$. On démontre cette assertion par induction sur l'inclusion dans $\mathcal{K}''(\Pi)$.

1) Soit K dans $\mathcal{K}''(\Pi)$ qui est maximal pour l'inclusion et supposons par l'absurde l'assertion fausse. Alors il existe un élément L dans $\mathcal{K}''(\Pi)$ tel que $-\theta\varepsilon_K$ appartienne à Γ_0^L. Soit α dans Γ_0^L tel que,

$$\alpha + (-\theta\varepsilon_K) = \varepsilon_L. \tag{2}$$

On a alors,

$$(\theta\alpha) + (-\theta\varepsilon_L) = \varepsilon_K. \tag{3}$$

Si $\theta\alpha$ est une racine positive, alors α appartient à Δ'_+ et $\theta\alpha = \alpha$. La relation (3) entraine alors que α appartient à Γ_0^K, d'après le lemme 2.2, (iii) et (iv). On en déduit que $K = L$, car l'intersection $\Gamma^L \cap \Gamma^K$ est non vide, puis que $\varepsilon_K + \theta\varepsilon_K$ est une racine. C'est une racine imaginaire non-compacte. En effet, c'est clairement une racine imaginaire et, d'après le lemme 1.1 (i), le crochet $[X_{\varepsilon_K}, \theta X_{\varepsilon_K}]$ est un élément non nul de $\mathfrak{g}^{\varepsilon_K+\theta\varepsilon_K}$, qui est contenu dans $\mathfrak{p}$, donc la racine imaginaire $\varepsilon_K + \theta\varepsilon_K$ est non-compacte. Ceci est alors en contradiction avec le lemme 1.2, car $\mathfrak{h}_0$ est maximalement non-compacte.

Par suite, $-\theta\alpha$ est une racine positive et la relation (3) donne :

$$\varepsilon_K + (-\theta\alpha) = -\theta\varepsilon_L.$$

Puisque K est maximal, il résulte du lemme 2.2 (iv), que les racines $-\theta\alpha$ et $-\theta\varepsilon_L$ appartiennent à Δ_+^K. La relation précédente contredit alors que ε_K est la plus grande racine de Δ_+^K.

2) Soit K dans $\mathcal{K}''(\Pi)$. Supposons l'assertion démontrée pour tout élément dans $\mathcal{K}''(\Pi)$ contenant strictement K et supposons par l'absurde l'assertion fausse pour K. Alors il existe un élément L dans $\mathcal{K}''(\Pi)$ tel que $-\theta\varepsilon_K$ appartienne à Γ_0^L. Soit α comme précédemment dans Γ_0^L tel que,

$$\alpha + (-\theta\varepsilon_K) = \varepsilon_L. \tag{4}$$

En raisonnant comme dans le cas (1), on obtient que $-\theta\alpha$ est une racine positive et on a,

$$\varepsilon_K + (-\theta\alpha) = -\theta\varepsilon_L. \tag{5}$$

Soit M dans $\mathcal{K}''(\Pi)$ tel que $-\theta\alpha$ appartienne à Γ_0^M. D'après le lemme 2.2 (iv), il y a deux cas : si $M \subseteq K$, on obtient une contradition en raisonnant comme dans le cas (1). Sinon, alors $-\theta\varepsilon_L$ appartient à Γ^M et d'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $-\theta\varepsilon_L = \varepsilon_M$. La relation (5) contredit alors que les racines ε_K et ε_M sont fortement orthogonales.

Par induction sur l'inclusion, la proposition est démontrée. ∎

En particulier, puisque $\widehat{\mathfrak{h}}_0$ est maximalement non-compacte, la proposition précédente assure que le couple $(\widehat{\mathfrak{h}}_0, \widehat{\Pi})$ a la propriété (P).

2.3. On s'intéresse dans ce paragraphe à la condition suivante :

$$(*) \qquad \mathcal{K}(\Pi^{'}) = \mathcal{K}^{'}(\Pi),$$

qui équivaut a l'inclusion : $\mathcal{K}(\Pi^{'}) \subset \mathcal{K}(\Pi)$. Notons que cette condition est en particulier remplie si $\Delta^{'}$ est vide, ce qui est le cas dès que $\mathfrak{m}$ est abélienne.

Lemme 2.5. — *Soit $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ stable par θ. On suppose que $(\mathfrak{h}_0, \Pi)$ a la propriété (P) et satisfait à la condition $(*)$. Alors :*
(i) $\forall \alpha \in \Delta^{'}_{+}$, $\forall K \in \mathcal{K}^{''}(\Pi)$, *on a :* $\alpha \pm \varepsilon_K \notin \Delta$,
(ii) $\forall K \in \mathcal{K}^{''}(\Pi)$, $\Gamma^K \subset \Delta^{''}_{+}$,
(ii) *Si $\mathfrak{h}_0$ n'est pas maximalement compacte, alors $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi)$ n'est pas vide.*

Démonstration. — (i) Supposons par l'absurde qu'il existe α dans $\Delta^{'}_{+}$ et K dans $\mathcal{K}^{''}(\Pi)$ tel que $\alpha+\varepsilon_K \in \Delta$. Puisque α appartient à $\Delta^{'}_{+}$, il existe L dans $\mathcal{K}(\Pi^{'}) = \mathcal{K}^{'}(\Pi)$ tel que α appartient à Γ^L_0. La relation $\alpha + \varepsilon_K \in \Delta$ entraine alors l'inclusion $K \subset L$, d'après le lemme 2.2 (iv). Ceci est absurde car les racines de $\Delta^{''}_{+}$ sont plus grandes que celles de $\Delta^{'}_{+}$ par construction de Δ_{+}.

Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe α dans $\Delta^{'}_{+}$ et K dans $\mathcal{K}^{''}(\Pi)$ tel que $\alpha - \varepsilon_K \in \Delta$. Si $\varepsilon_K - \alpha = \beta$ appartient à Δ_{+}, alors il résulte du lemme 2.2 (iv) que α et β appartiennent à Γ^K_0. Comme par ailleurs, α appartient à $\Delta^{'}_{+}$, il existe un unique L dans $\mathcal{K}(\Pi^{'}) = \mathcal{K}^{'}(\Pi)$ tel que α appartient à Γ^L_0, d'où la contradiction. On en déduit que $\alpha - \varepsilon_K = \beta$ est une racine positive. Mais alors α est plus grande que ε_K, ce qui est absurde, pusique α est une racine imaginaire.

(ii) Soit $K \in \mathcal{K}^{''}(\Pi)$ et $\alpha \in \Gamma^K_0$. Il existe $\beta \in \Gamma^K_0$ tel que $\alpha + \beta = \varepsilon_K$. Supposons par l'absurde que α appartient à $\Delta^{'}_{+}$. Puisque $(\mathfrak{h}_0, \Pi)$ a la propriété (P), on a alors :

$$(-\theta\beta) = \varepsilon_{\theta K} + \alpha,$$

ce qui contredit (i).

(iii) Puisque $\mathfrak{h}_0$ n'est pas maximalement compacte, il résulte du lemme 1.2 qu'il existe un élément K dans $\mathcal{K}^{''}(\Pi)$ tel que Γ^K possède une racine réelle α. Il suffit de montrer que ε_K est une racine réelle. On peut supposer que α appartient à Γ^K_0. Il existe β dans Γ^K_0 tel que,

$$(6) \qquad \alpha + \beta = \varepsilon_K.$$

Puisque $(\mathfrak{h}_0, \Pi)$ a la propriété (P), on en déduit la relation suivante :

$$(7) \qquad \alpha + (-\theta\beta) = \varepsilon_{\theta K}.$$

D'après (ii), $-\theta\beta$ est une racine positive et la relation (7) implique que α et $-\theta\beta$ appartiennent à $\Gamma^{\theta K}_0$. L'intersection $\Gamma^{\theta K}_0 \cap \Gamma^K_0$ est alors non vide, d'où il vient

$\theta K = K$. Par suite, ε_K est réelle. ■

3. Utilisation des transformations de Cayley

On utilise dans cette partie les transformations de Cayley afin d'obtenir la proposition 3.2. On trouve davantage de précisions concernant ces transformations dans [**9**]. Si $\mathfrak{h}_0$ et $\mathfrak{h}_0^{'}$ sont deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ stables par θ, leurs complexifiées $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}^{'}$ sont conjuguées dans $\mathfrak{g}$. Les transformations de Cayley permettent de construire explicitement, et étapes par étapes, un automorphisme de $\mathfrak{g}$ qui conjugue ces deux sous-algèbres. Il existe deux types de transformations de Cayley à partir d'une sous-algèbre de Cartan θ-stable :

(i) : avec une racine imaginaire non-compacte β, on construit une nouvelle sous-algèbre de Cartan dont l'intersection avec $\mathfrak{p}_0$ augmente de 1 en dimension. On notera $\mathbf{c}_\beta$ la transformation correspondante.

(ii) : avec une racine réelle α, on construit une nouvelle sous-algèbre de Cartan dont l'intersection avec $\mathfrak{p}_0$ diminue de 1 en dimension. On notera $\mathbf{d}_\alpha$ la transformation correspondante.

Seules les transformations de type $\mathbf{d}_\alpha$ vont intervenir dans la suite. On donne ici les résultats nécessaires concernant ces transformations. Soit $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ stable par θ. Si α est une racine réelle de Δ, on pose :

$$\mathbf{d}_\alpha = \mathrm{Ad}(\exp i\frac{\pi}{4}(\theta X_\alpha - X_\alpha)).$$

Pour β dans Δ, on note $\mathbf{d}_\alpha(\beta)$ la forme linéaire de $\mathbf{d}_\alpha(\mathfrak{h})$ qui à H dans $\mathbf{d}_\alpha(\mathfrak{h})$ associe $\beta(\mathbf{d}_\alpha^{-1}(H))$; c'est un élément du système de racines associé au couple $(\mathfrak{g}, \mathbf{d}_\alpha(\mathfrak{h}))$. On a

$$\mathfrak{g}_0 \cap \mathbf{d}_\alpha(\mathfrak{h}) = \ker(\alpha_{|\mathfrak{h}_0}) \oplus \mathbb{R}(X_\alpha + \theta X_\alpha),$$

d'où on tire la relation :

$$\dim(\mathbf{d}_\alpha(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{p}) = \dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) - 1. \tag{8}$$

On dispose en outre de la relation suivante :

$$\mathbf{d}_\alpha(H_\alpha) = i\mu(X_\alpha + \theta X_\alpha), \tag{9}$$

où μ est réel non nul. Enfin, compte tenu de l'expression de $\mathbf{d}_\alpha$, il est clair que si β est une racine fortement orthogonale à α et différente de α, alors $\mathbf{d}_\alpha(H_\beta) = H_\beta$.

Lemme 3.1. — *Soit $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ stable par θ. Soit K dans $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi)$. Alors la sous-algèbre $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\mathfrak{h}_0)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ qui est stable par θ. De plus, on a :*

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{''}(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Pi)) &= \{\varepsilon_L \mid L \in \mathcal{K}^{''}(\Pi)\} \setminus \{\varepsilon_K\}, \\ \mathcal{K}^{'}(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Pi)) &= \{\varepsilon_L \mid L \in \mathcal{K}^{'}(\Pi)\} \cup \{\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\varepsilon_K)\}. \end{aligned}$$

De plus, si $(\mathfrak{h}_0, \Pi)$ *a la propriété* (P)*, alors la sous-algèbre* $(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\mathfrak{h}_0), \mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Pi))$ *a la propriété* (P) *et, si* $(\mathfrak{h}_0, \Pi)$ *satisfait à la condition* $(*)$*, alors la sous-algèbre* $(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\mathfrak{h}_0), \mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Pi))$ *satisfait à la condition* $(*)$*.*

Démonstration. — La sous-algèbre $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\mathfrak{h}_0)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ et l'expression de $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}$ montre qu'elle est stable par θ. Puisque les racines ε_K et ε_L sont fortement orthogonales, pour tout L dans $\mathcal{K}(\Pi)$ différent de K, il est clair que $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\varepsilon_L) = \varepsilon_L$, pour tout L dans $\mathcal{K}(\Pi)$ différent de K. Par ailleurs, d'après la relation (9), $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(H_{\varepsilon_K})$ appartient à $i\mathbb{R}(X_{\varepsilon_K} + \theta X_{\varepsilon_K})$, donc $H_{\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\varepsilon_K)} = \mathbf{d}_{\varepsilon_K}(H_{\varepsilon_K})$ appartient à $\mathfrak{k}$. Par suite, $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\varepsilon_K)$ est une racine imaginaire de $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Delta)$, d'après le lemme 1.1 (iii). Les expressions de $\mathcal{K}''(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Pi))$ et $\mathcal{K}'(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Pi))$ sont alors claires.

Compte tenu des relations précédentes, il est clair que si $(\mathfrak{h}_0, \Pi)$ a la propriété (P), alors la sous-algèbre $(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\mathfrak{h}_0), \mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Pi))$ a la propriété (P). Supposons que $(\mathfrak{h}_0, \Pi)$ satisfait à la condition $(*)$. D'après le lemme 2.5 (i), les racines ε_K et α sont fortement orthogonales, pour tout α dans Δ'_+. Par suite, on a :

$$\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Delta'_+) = \Delta'_+ \cup \mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\varepsilon_K).$$

De plus, comme $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\alpha) = \alpha$, pour tout $\alpha \in \Delta'_+$, il est clair que $(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\mathfrak{h}_0), \mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Pi))$ satisfait à la condition $(*)$, puisque $(\mathfrak{h}_0, \Pi)$ satisfait à la condition $(*)$. ■

Proposition 3.2. — *On as :*

$$\dim(\widehat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}) - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) = \dim \widehat{\mathfrak{a}} - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) \geq \text{rg}\,\mathfrak{g} - \text{rg}\,\mathfrak{k}.$$

Si de plus la condition $(*)$ *est satisfaite, alors on a les égalités suivantes :*

$$\dim(\widehat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}) - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) = \dim \widehat{\mathfrak{a}} - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) = \text{rg}\,\mathfrak{g} - \text{rg}\,\mathfrak{k}.$$

Démonstration. — Notons tout d'abord que si $\mathfrak{h}_0$ est une sous-algèbre de Cartan θ-stable, on a :

$$\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \geq \text{rg}\,\mathfrak{g} - \text{rg}\,\mathfrak{k},$$

car $\dim \mathfrak{t} \leq \text{rg}\,\mathfrak{k}$.

1$^{\text{ère}}$ étape : si $\mathfrak{h}_0$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ stable par θ et maximalement compacte, alors $\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) = \text{rg}\,\mathfrak{g} - \text{rg}\,\mathfrak{k}$. D'après le lemme 1.2, l'ensemble $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi)$ est vide et la relation,

$$\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi) = \text{rg}\,\mathfrak{g} - \text{rg}\,\mathfrak{k},$$

est satisfaite.

2$^{\text{ème}}$ étape : soit $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ stable par θ telle que $(\mathfrak{h}_0, \Pi)$ a la propriété (P) et qui n'est pas maximalement compacte. Si l'ensemble $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi)$ est vide, alors on a l'inégalité :

$$\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi) = \dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \geq \text{rg}\,\mathfrak{g} - \text{rg}\,\mathfrak{k}.$$

Sinon, soit K dans $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi)$. D'après le lemme 3.1, la sous-algèbre $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\mathfrak{h}_0)$ est une sous-algèbre de Cartan stable par θ et on a la relation,

$$\#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Pi)) = \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi) - 1.$$

Par ailleurs, d'après la relation (8), on a :

$$\dim(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{p}) = \dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) - 1.$$

On en déduit l'égalité,

$$\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi) = \dim(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{p}) - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Pi)).$$

Par ailleurs, $(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\mathfrak{h}_0), \mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Pi))$ possède la propriété (P), d'après le lemme 3.1. De plus, toujours d'après le lemme 3.1, si $(\mathfrak{h}_0, \Pi)$ vérifie la condition $(*)$, alors $(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\mathfrak{h}_0), \mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Pi))$ la satisfait aussi.

Prouvons alors la proposition. Si $\widehat{\mathfrak{h}}_0$ est maximalement compacte, on a l'égalité :

$$\dim(\widehat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}) - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) = \operatorname{rg} \mathfrak{g} - \operatorname{rg} \mathfrak{k},$$

d'après la première étape. Sinon, on applique la deuxième étape autant de fois nécessaires pour obtenir une sous-algèbre de Cartan maximalement compacte. On applique la première étape à la sous-algèbre de Cartan ainsi obtenue. D'après ces deux étapes, on obtient l'inégalité souhaitée.

Si de plus la condition $(*)$ est satisfaite, alors on obtient une égalité car à chaque étape la nouvelle sous-algèbre de Cartan θ-stable obtenue satisfiait la propriété (P) et vérifie la condition $(*)$. L'ensemble $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi)$ est alors non vide tant que cette sous-algèbre n'est pas maximalement compacte, d'après le lemme 2.5 (iii). ∎

4. Formes linéaires stables et indice de $\mathfrak{b}$

4.1. Si $\mathfrak{q}$ est une algèbre de Lie complexe et si φ est une forme linéaire sur $\mathfrak{q}$, on désigne par $\mathfrak{q}_\varphi$ l'ensemble des s de $\mathfrak{q}$ tels que $\varphi([\mathfrak{q}, s]) = 0$. Autrement dit $\mathfrak{q}_\varphi = \{s \in \mathfrak{q} \mid (\operatorname{ad}^* s) \cdot \varphi = 0\}$, où $\operatorname{ad}^* : \mathfrak{q} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{q}^*)$ est la représentation coadjointe de $\mathfrak{q}$. On rappelle que l'*indice de* $\mathfrak{q}$, noté ind $\mathfrak{q}$, est défini par :

$$\operatorname{ind} \mathfrak{q} = \min_{\varphi \in \mathfrak{q}^*} \dim \mathfrak{q}_\varphi .$$

On dit que l'élément φ de $\mathfrak{q}^*$ est *régulier* si $\dim \mathfrak{q}_\varphi = \operatorname{ind} \mathfrak{q}$. L'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{q}^*$ est un ouvert non vide de $\mathfrak{q}^*$.

La notion de formes linéaires stables est introduite dans [**10**]. Rappelons qu'un élément φ de $\mathfrak{q}^*$ est dit *stable* s'il existe un voisinage V de φ dans $\mathfrak{q}^*$ tel que, pour tout ψ de V, $\mathfrak{q}_\varphi$ et $\mathfrak{q}_\psi$ soient conjugués par un élément du groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{q}$. En particulier, si φ est une forme linéaire stable, alors c'est un élément régulier de $\mathfrak{q}^*$. Lorsque $\mathfrak{q}$ possède une forme linéaire stable, l'indice de $\mathfrak{q}$ est donné par la dimension du stabilisateur de cette forme. En général, $\mathfrak{q}$ ne possède pas de forme linéaire stable ; on trouve des exemples d'algèbres de Lie ne possédant pas de forme linéaire stable dans [**10**] ou dans [**25**]. La proposition qui suit est démontrée dans [**25**], Théorème 1.7.

Proposition 4.1. — *Soit* $\mathfrak{q}$ *une algèbre de Lie, et soit* φ *un élément de* $\mathfrak{q}^*$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) : *On a la relation :* $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_\varphi] \cap \mathfrak{q}_\varphi = \{0\}$,

(ii) : *La forme linéaire* φ *est stable.*

4.2. On reprend les notations des parties précédentes. Rappelons que le couple $(\widehat{\mathfrak{h}}_0, \widehat{\Pi})$ a la propriété (P), d'après la proposition 2.4. On va construire une forme linéaire régulière sur $\mathfrak{b}$. Posons

$$\begin{aligned} u &= \sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} X_{-\varepsilon_K} = \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} (X_{-\varepsilon_K} + X_{-\varepsilon_{\theta K}}), \\ &= \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})} X_{-\varepsilon_K} + \sum_{K \in \mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} (X_{-\varepsilon_K} + X_{-\varepsilon_{\theta K}}). \end{aligned}$$

L'élément u appartient à $\mathfrak{n}_-$. Pour K dans $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$, on pose :

$$\Gamma_1^K = \{\alpha \in \Gamma_0^K \mid \varepsilon_K - \alpha \in \Delta'_+\}.$$

Lemme 4.2. — (i) *On a :* $\mathcal{K}(\widehat{\Pi}') = \mathcal{K}'(\widehat{\Pi}) \iff \forall K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi}),\ \Gamma_1^K = \emptyset$.

(ii) *Soit* K *dans* $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$ *tel que* $\Gamma_1^K \neq \emptyset$. *Alors* $\theta K \subsetneq K$. *En particulier,* K *appartient à* $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$.

Démonstration. — (i) Supposons $\mathcal{K}(\widehat{\Pi}') = \mathcal{K}'(\widehat{\Pi})$. Alors il résulte du lemme 2.5 (i) que, pour tout K dans $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$, l'ensemble Γ_1^K est vide. Réciproquement, si $\mathcal{K}(\widehat{\Pi}') \neq \mathcal{K}'(\widehat{\Pi})$, alors il existe L dans $\mathcal{K}(\widehat{\Pi}')$ tel que $\varepsilon_L \notin \mathcal{K}'(\widehat{\Pi})$. Posons $\beta = \varepsilon_L$. Il existe alors K dans $\mathcal{K}''$, tel que $\beta \in \Gamma_0^K$. Il est alors clair que $\alpha = \varepsilon_K - \beta$ appartient Γ_1^K.

(ii) Soit $K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$ tel que Γ_1^K est non vide et soit $\alpha \in \Gamma_1^K$. Alors il existe $\beta \in \Gamma_0^K$ tel que

$$\alpha + \beta = \varepsilon_K.$$

La relation

$$-\theta\alpha = \varepsilon_{\theta K} + \beta$$

assure alors la relation $\theta K \subset K$, d'après le lemme 2.2 (iv). L'égalité $\theta K = K$ est impossible car $\varepsilon_K + \beta$ n'est pas une racine, d'où (ii). ■

Lemme 4.3. — *Soit* x *un élément de* $\mathfrak{b}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) : *L'élément* x *s'écrit sous la forme*

$$x = h + \sum_{K \in \mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} \left(a_K (X_{\varepsilon_K} - X_{\varepsilon_{\theta K}}) + \sum_{\alpha \in \Gamma_1^K} a_\alpha X_\alpha \right),$$

avec h dans $\widehat{\mathfrak{a}}$ tel que $\varepsilon_K(h) = 0$, pour tout $K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$, et $a_K, a_\alpha \in \mathbb{C}$, pour tout $K \in \mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ et $\alpha \in \Gamma_1^K$,

(ii) : *Le crochet $[x, u]$ appartient au sous-espace $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{m}$.*

Remarque 3. — Notons que si $\mathfrak{m}$ est nul, $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ et ce lemme n'est rien d'autre que le lemme 2.5 de [**25**]*. La démonstration qui suit reprend d'ailleurs pour une large part celle de* [**25**].

Démonstration. — (i) $\Rightarrow$ (ii) : si (i) est vérifié, x s'écrit

$$x = h + \sum_{K \in \mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} \left(a_K (X_{\varepsilon_K} - X_{\varepsilon_{\theta K}}) + \sum_{\alpha \in \Gamma_1^K} a_\alpha X_\alpha \right),$$

avec h dans $\widehat{\mathfrak{a}}$ tel que $\varepsilon_K(h) = 0$, pour tout $K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$ et $a_K, a_\alpha \in \mathbb{C}$, pour tout $K \in \mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ et $\alpha \in \Gamma_1^K$. Posons $x' = h + \sum\limits_{K \in \mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} a_K (X_{\varepsilon_K} - X_{\varepsilon_{\theta K}})$ et $x'' = \sum\limits_{K \in \mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} \sum\limits_{\alpha \in \Gamma_1^K} a_\alpha X_\alpha$ de sorte que $x = x' + x''$. On a

$$[x'', u] = \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} \sum_{L \in \mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} \sum_{\alpha \in \Gamma_1^L} a_\alpha [X_\alpha, X_{-\varepsilon_K}].$$

Soit L, K dans $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$ et $\alpha \in \Gamma_1^L$. Si $K \neq L$, alors $[X_\alpha, X_{-\varepsilon_K}]$ appartient au sous-espace $\sum\limits_{\beta \in \Delta_+} \mathfrak{g}^\beta$ qui est contenu dans $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{m}$. Si $K = L$, alors l'élément $[X_\alpha, X_{-\varepsilon_L}]$ appartient à $\mathfrak{m}$, par définition de l'ensemble Γ_1^L. Par suite : $[x'', u] \in \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{m}$.

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
[x', u] &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} (-\varepsilon_K(h) X_{-\varepsilon_K} - \varepsilon_{\theta K}(h) X_{-\varepsilon_{\theta K}} + a_K (H_{\varepsilon_K} - H_{\varepsilon_{\theta K}})), \\
&= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} (-\varepsilon_K(h) X_{-\varepsilon_K} + \theta\varepsilon_K(h) X_{-\varepsilon_{\theta K}} + a_K (H_{\varepsilon_K} + \theta H_{\varepsilon_K})), \\
&= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} (-\varepsilon_K(h) X_{-\varepsilon_K} - \varepsilon_K(h) X_{-\varepsilon_{\theta K}} + a_K (H_{\varepsilon_K} + \theta H_{\varepsilon_K})), \\
&= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} (0 + a_K (H_{\varepsilon_K} + \theta H_{\varepsilon_K})).
\end{aligned}$$

On en déduit que $[x', u]$ appartient à $\widehat{\mathfrak{t}} \subset \mathfrak{m}$. Finalement, $[x, u]$ appartient à $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{m}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : l'élément x appartient à $\mathfrak{b}$. Puisque $\mathfrak{b} = \widehat{\mathfrak{a}} \oplus \sum\limits_{\alpha \in \widehat{\Delta}''_+} \mathfrak{g}^\alpha = \widehat{\mathfrak{a}} \oplus$

$\big(\sum_{K\in\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})}\sum_{\alpha\in\Gamma^K}\mathfrak{g}^\alpha\big)$, l'élément x s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} x = h \quad &+ \sum_{K\in\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})} a_{\varepsilon_K} X_{\varepsilon_K} \\ &+ \sum_{K\in\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} (a_{\varepsilon_K} X_{\varepsilon_K} + a_{\varepsilon_{\theta K}} X_{\varepsilon_{\theta K}}) + \sum_{K\in\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})}\sum_{\alpha\in\Gamma_0^K} a_\alpha X_\alpha, \end{aligned}$$

avec h dans $\widehat{\mathfrak{a}}$ et a_α dans $\mathbb{C}$, pour tout α de Δ''_+. On en déduit que le crochet $[x,u]$ s'écrit sous la forme :

$$[x,u] = \sum_{K\in\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})} a_{\varepsilon_K} H_{\varepsilon_K} + \sum_{K\in\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} (a_{\varepsilon_K} H_{\varepsilon_K} + a_{\varepsilon_{\theta K}} H_{\varepsilon_{\theta K}}) + Y,$$

où Y est un élément du sous-espace $\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{n}_-$. Pour K dans $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})$, la racine ε_K est réelle donc l'élément H_{ε_K} appartient à $\widehat{\mathfrak{a}}$. Pour K dans $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$, la projection de H_{ε_K} sur $\widehat{\mathfrak{a}}$ selon la décomposition $\widehat{\mathfrak{a}}\oplus\widehat{\mathfrak{t}}$ est $\dfrac{H_{\varepsilon_K}-\theta H_{\varepsilon_K}}{2}$. Par suite, de la relation $[x,u]\in\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}$, on tire la relation :

$$\sum_{K\in\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})} a_{\varepsilon_K} H_{\varepsilon_K} + \sum_{K\in\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} \Big(a_{\varepsilon_K}\frac{H_{\varepsilon_K}-\theta H_{\varepsilon_K}}{2} + a_{\varepsilon_{\theta K}}\frac{H_{\varepsilon_{\theta K}}-\theta H_{\varepsilon_{\theta K}}}{2}\Big) = 0.$$

Puisque les racines ε_K sont deux à deux fortement orthogonales, on a $\varepsilon_K(H_{\varepsilon_L})=0$, pour $L\neq K$ et il vient $a_{\varepsilon_K}=0$, pour tout K de $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})$. En utilisant de plus les relations $\theta H_{\varepsilon_K}=-H_{\varepsilon_{\theta K}}$ et $\theta H_{\varepsilon_{\theta K}}=-H_{\varepsilon_K}$, on obtient $a_{\varepsilon_K}+a_{\varepsilon_{\theta K}}=0$, pour tout K de $\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$. On en déduit que x s'écrit :

$$x = h + \sum_{K\in\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} a_{\varepsilon_K}(X_{\varepsilon_K}-X_{\varepsilon_{\theta K}}) + \sum_{K\in\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})}\sum_{\alpha\in\Gamma_0^K} a_\alpha X_\alpha.$$

Soit K un élément de $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$ et soit α dans $\Gamma_0^K\setminus\Gamma_1^K$. Alors la racine $\beta=\varepsilon_K-\alpha$ de Γ_0^K appartient à $\widehat{\Delta}''_+$. On a

$$\begin{aligned} [x,u] \quad &= \frac{1}{2}\Big(\lambda a_\alpha X_{-\beta} + a_\alpha \sum_{K'\in\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})\setminus\{K\}} [X_\alpha, X_{-\varepsilon_{K'}}] \\ &+ \sum_{K'\in\mathcal{K}''(\widehat{\Pi}),\gamma\in\Delta''_+\setminus\{\alpha\}} a_\gamma[X_\gamma, X_{-\varepsilon_{K'}}]\Big) - \sum_{K'\in\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} \varepsilon_{K'}(h)X_{-\varepsilon_{K'}} \\ &+ \sum_{K\in\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} a_{\varepsilon_K}\Big(\frac{H_{\varepsilon_K}+\theta H_{\varepsilon_K}}{2}\Big), \end{aligned}$$

où λ est un scalaire non nul.

Supposons par l'absurde $a_\alpha\neq 0$. On a $\beta\neq\varepsilon_{K'}$, pour K' dans $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$, car $\langle\beta,\varepsilon_K{}^\vee\rangle=1$ et $\langle\varepsilon_{K'},\varepsilon_K{}^\vee\rangle\in\{0,2\}$. Puisque la racine β appartient à $\widehat{\Delta}''_+$, l'élément

$\dfrac{1}{2}\lambda a_\alpha X_{-\beta}$ qui intervient dans l'expression précédente de $[x,u]$ est un élément non nul de $\mathfrak{n}_-$. Comme $[x,u]$ appartient à $\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{m}$, il existe nécessairement K' dans $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$ et γ dans $\widehat{\Delta}''_+\setminus\{\alpha\}$ tels que $\beta=\varepsilon_{K'}-\gamma$. On a : $K\neq K'$, car $\gamma\neq\alpha$. Soit K'' dans $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$ tel que γ appartient à $\Gamma^{K''}$. Or d'après le lemme 2.2, (iii) et (iv), la relation $\beta+\gamma=\varepsilon_{K'}$ entraîne que $K=K''$, puis que $K'=K$, d'où la contradiction.

On en déduit que a_α est nul, pour tout K dans $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$ et tout α dans $\Gamma_0^K\setminus\Gamma_1^K$. Il résulte alors du lemme 4.2 (ii) que x s'écrit sous la forme

$$x=h+\sum_{K\in\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})}\left(a_K(X_{\varepsilon_K}-X_{\varepsilon_{\theta K}})+\sum_{\alpha\in\Gamma_1^K}a_\alpha X_\alpha\right).$$

De l'égalité

$$[x,u]=-\sum_{K'\in\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})}\varepsilon_{K'}(h)X_{-\varepsilon_{K'}}+\sum_{K\in\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})}a_K(\frac{H_{\varepsilon_K}+\theta H_{\varepsilon_K}}{2}),$$

on tire la relation $\varepsilon_{K'}(h)=0$, pour tout K' de $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$, d'où (i). ∎

On note κ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Pour v un élément de $\mathfrak{g}$, on note φ_v la forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ définie par :

$$\varphi_v(y)=\kappa(v,y),$$

pour y dans $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{r}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}_{\varphi_v}$ désigne le stabilisateur dans $\mathfrak{r}$ de la restriction de φ_v à $\mathfrak{r}$. La proposition suivante décrit le stabilisateur dans $\mathfrak{b}$ de la forme linéaire φ_u.

Proposition 4.4. — *Le stabilisateur $\mathfrak{b}_{\varphi_u}$ de la restriction de φ_u à $\mathfrak{b}$ est donné par :*

$$\mathfrak{b}_{\varphi_u}=(\bigcap_{K\in\mathcal{K}(\widehat{\Pi})}\ker\varepsilon_{K|_{\hat{\mathfrak{a}}}})\oplus\sum_{\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})}\left(\mathbb{C}(X_{\varepsilon_K}-X_{\varepsilon_{\theta K}})\oplus\sum_{\alpha\in\Gamma_1^K}\mathbb{C}X_\alpha\right)$$

et on a :

$$\dim\mathfrak{b}_{\varphi_u}=\dim\widehat{\mathfrak{a}}-\#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})+\sum_{\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})}\#\Gamma_1^K.$$

Démonstration. — On a

$$\mathfrak{b}_{\varphi_u}=\{x\in\mathfrak{b}\mid\kappa(u,[x,y])=0,\ \forall y\in\mathfrak{b}\}=\{x\in\mathfrak{b}\mid[x,u]\in\mathfrak{b}^\perp\},$$

où $\mathfrak{b}^\perp$ désigne l'orthogonal de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$ pour la forme de Killing. La relation $\mathfrak{b}^\perp=\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{m}$ et le lemme 4.3 entraînent que l'élément x appartient à $\mathfrak{b}_{\varphi_u}$ si, et seulement si, il s'écrit sous la forme

$$x=h+\sum_{K\in\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})}\left(a_K(X_{\varepsilon_K}-X_{\varepsilon_{\theta K}})+\sum_{\alpha\in\Gamma_1^K}a_\alpha X_\alpha\right),$$

avec h dans $\widehat{\mathfrak{a}}$ tel que $\varepsilon_K(h) = 0$, pour tout $K \in \mathcal{K}^{''}(\widehat{\Pi})$ et $a_K, a_\alpha \in \mathbb{C}$, pour tout $K \in \mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ et $\alpha \in \Gamma_1^K$

On dispose de l'égalité : $\bigcap_{K\in\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} \ker \varepsilon_{K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}} = \bigcap_{K\in\mathcal{K}(\widehat{\Pi})} \ker \varepsilon_{K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}}$. En effet, pour K dans $\mathcal{K}^{'}(\widehat{\Pi})$, la racine ε_K est imaginaire donc s'annule sur $\widehat{\mathfrak{a}}$. La première assertion de la proposition est alors claire.

Montrons : $\dim(\bigcap_{K\in\mathcal{K}(\widehat{\Pi})} \ker \varepsilon_{K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}}) = \dim \widehat{\mathfrak{a}} - (\#\mathcal{K}_{\mathrm{réel}}(\widehat{\Pi}) + \#\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi}))$. Il suffit de montrer que la famille $\{\varepsilon_{K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}} \mid K \in \mathcal{K}_{\mathrm{réel}}(\widehat{\Pi}) \cup \mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})\}$ forme une base du sous-espace de $\widehat{\mathfrak{a}}^*$ engendré par les éléments $\varepsilon_{K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}}$, pour K dans $\mathcal{K}(\widehat{\Pi})$. Si K appartient à $\mathcal{K}^{'}(\widehat{\Pi})$, la racine ε_K est imaginaire donc s'annule sur $\widehat{\mathfrak{a}}$. Si K appartient à $\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$, alors pour tout H dans $\widehat{\mathfrak{a}}$, on a : $\varepsilon_{\theta K}(H) = -\theta\varepsilon_K(H) = \varepsilon_K(-\theta H) = \varepsilon_K(H)$, d'où $\varepsilon_{\theta K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}} = \varepsilon_{K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}}$. On en déduit que la famille précédente est génératrice. Montrons qu'elle est libre : soit

$$\sum_{K\in\mathcal{K}_{\mathrm{réel}}(\widehat{\Pi})} a_K \varepsilon_{K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}} + \sum_{K\in\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})} a_K \varepsilon_{K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}} = 0,$$

une combinaison linéaire nulle dans $\widehat{\mathfrak{a}}^*$. Puisque la famille $\{\varepsilon_K \mid K \in \mathcal{K}(\widehat{\Pi})\}$ est un ensemble de racines deux à deux fortement orthogonales, l'évaluation du membre de gauche dans l'expression précédente en l'élément $\dfrac{H_{\varepsilon_K} - \theta H_{\varepsilon_K}}{2} = \dfrac{H_{\varepsilon_K} + H_{\varepsilon_{\theta K}}}{2}$ de $\widehat{\mathfrak{a}}$, donne : $a_K = 0$, pour tout K de $\mathcal{K}_{\mathrm{réel}}(\widehat{\Pi})$ et tout K de $\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$. On a obtenu :

$$\begin{aligned}\dim \mathfrak{b}_{\varphi_u} &= (\dim \widehat{\mathfrak{a}} - \#\mathcal{K}_{\mathrm{réel}}(\widehat{\Pi}) - \#\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})) + \#\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi}) + \sum_{\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})} \#\Gamma_1^K \\ &= \dim \widehat{\mathfrak{a}} - \#\mathcal{K}_{\mathrm{réel}}(\widehat{\Pi}) + \sum_{\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})} \#\Gamma_1^K,\end{aligned}$$

d'où la proposition. ∎

Remarque 4. — L'expression de $\mathfrak{b}_{\varphi_u}$ obtenue dans la proposition précédente permet d'obtenir une condition nécessaire et suffisante pour que la restriction de φ_u à $\mathfrak{b}$ soit stable. Pour a et b dans $\mathbb{C}$ et K dans $\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$, on a :

$$[H, aX_{\varepsilon_K} + bX_{\varepsilon_{\theta K}}] = \varepsilon_K(H)(aX_{\varepsilon_K} + bX_{\varepsilon_{\theta K}}), \tag{10}$$

pour tout H dans $\widehat{\mathfrak{a}}$. En particulier, les éléments $X_{\varepsilon_K} - X_{\varepsilon_{\theta K}}$, pour K dans $\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$, appartiennent à l'intersection $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_{\varphi_u}] \cap \mathfrak{b}_{\varphi_u}$. De l'expression de $\mathfrak{b}_{\varphi_u}$ obtenue dans la proposition 4.4 et de la relation $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{n}$, on tire alors l'égalité :

$$[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_{\varphi_u}] \cap \mathfrak{b}_{\varphi_u} = \sum_{\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})} \mathbb{C}(X_{\varepsilon_K} - X_{\varepsilon_{\theta K}}).$$

Il résulte de la proposition 4.1 que la restriction de φ_u à $\mathfrak{b}$ n'est pas stable si l'ensemble $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ n'est pas vide. Réciproquement, il est clair que si l'ensemble $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide, alors φ_u à $\mathfrak{b}$-stable, d'après la proposition 4.4.

Posons

$$\mathfrak{r} = \sum_{\alpha\in\widehat{\Delta}'_+} \mathfrak{g}^{\alpha} \quad \text{et} \quad \mathfrak{r}_- = \sum_{\alpha\in\widehat{\Delta}'_+} \mathfrak{g}^{-\alpha}.$$

Ainsi on a : $\mathfrak{m} = \mathfrak{r}_- \oplus \widehat{\mathfrak{t}} \oplus \mathfrak{r}$. Posons aussi :

$$\widetilde{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b} \oplus \widehat{\mathfrak{t}} \oplus \mathfrak{r},$$

de sorte que $\widetilde{\mathfrak{b}}$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$. Posons enfin

$$\widetilde{u} = u + \sum_{K\in\mathcal{K}'(\widehat{\Pi})} X_{-\varepsilon_K}.$$

D'après la partie 2 de [**25**] ou d'après la remarque 4 appliquée au cas $\mathfrak{m} = 0$ (remarque 3), la restriction de la forme $\varphi_{\widetilde{u}}$ à $\widetilde{\mathfrak{b}}$ est stable pour $\widetilde{\mathfrak{b}}$. Notons que φ_u n'est rien d'autre que la restriction à $\mathfrak{b}$ de la forme linéaire $\varphi_{\widetilde{u}}$. On est désormais en mesure de démontrer la relation (1) annoncée en introduction :

Théorème 4.5. — *On a :*

$$\mathrm{ind}\,\mathfrak{b} \geq \mathrm{rg}\,\mathfrak{g} - \mathrm{rg}\,\mathfrak{k}.$$

De plus, l'égalité

$$\mathrm{ind}\,\mathfrak{b} = \mathrm{rg}\,\mathfrak{g} - \mathrm{rg}\,\mathfrak{k}$$

a lieu si, et seulement si, la condition $(*)$ *est satisfaite.*

Démonstration. — D'après la proposition 4.4 et la proposition 3.2, on a $\dim \mathfrak{b}_{\varphi_u} \geq \mathrm{rg}\ \mathfrak{g} - \mathrm{rg}\ \mathfrak{k}$. De plus, il résulte du lemme 4.2 (i) et de la proposition 3.2 que la relation $\dim \mathfrak{b}_{\varphi_u} = \mathrm{rg}\ \mathfrak{g} - \mathrm{rg}\ \mathfrak{k}$ a lieu si, et seulement si, la condition $\mathcal{K}(\widehat{\Pi}') = \mathcal{K}'(\widehat{\Pi})$ est remplie. Il suffit donc de prouver que la restriction de φ_u à $\mathfrak{b}$ est $\mathfrak{b}$-régulière.

Soit $\widetilde{B}$ le groupe adjoint algébrique de $\widetilde{\mathfrak{b}}$. Puisque $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\widetilde{\mathfrak{b}}$ contenu dans le radical nilpotent $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{r}$ de $\widetilde{\mathfrak{b}}$, il résulte de la proposition 40.6.3 de [**23**] que l'orbite de la forme linéaire $\varphi_{\widetilde{u}|_{\mathfrak{n}}} = \varphi_{u|_{\mathfrak{n}}}$ de $\mathfrak{n}^*$ sous l'action de $\widetilde{B}$ est ouverte dans $\mathfrak{n}^*$. Le dual de $\mathfrak{n}$ s'identifie via la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ au sous-espace $\mathfrak{n}_-$. On en déduit que l'ensemble

$$\widetilde{V} = \{v \in \widehat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}_- \mid (\varphi_{\mathrm{pr}_{\mathfrak{n}_-}(v)})_{|\mathfrak{n}} \in \widetilde{B}\cdot\varphi_{u|_{\mathfrak{n}}}\}$$

est un ouvert non vide de $\widehat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}_-$, où $\mathrm{pr}_{\mathfrak{n}_-}$ est la projection de $\widehat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}_-$ sur $\mathfrak{n}_-$ parallèlement à $\widehat{\mathfrak{a}}$. Par ailleurs, le dual de $\mathfrak{b}$ s'identifie à $\widehat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}_-$ via la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. On en déduit que l'ensemble

$$V = \{v \in \widehat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}_- \mid \varphi_{v|_{\mathfrak{b}}} \text{ est } \mathfrak{b}-\text{régulière}\}$$

est un ouvert non vide de $\widehat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}_-$. L'intersection $\widetilde{V} \cap V$ est alors non vide. Soit v dans cette intersection. Puisque v appartient à $\widetilde{V}$, il existe un élément ρ dans $\widetilde{B}$ tel que,

$$(\varphi_{\mathrm{pr}_{\mathfrak{n}_-}(v)})_{|\mathfrak{n}} = \rho(\varphi_{u|_{\mathfrak{n}}}).$$

En particulier, pour tout x dans $\mathfrak{n}$, on a :

$$\langle \mathrm{pr}_{\mathfrak{n}_-}(v), \rho(x) \rangle = \langle u, x \rangle.$$

Comme v appartient à V, on dipose par ailleurs des relations suivantes,

$$\dim \mathfrak{b}_{\varphi_v} = \mathrm{ind}\ \mathfrak{b} \leq \dim \mathfrak{b}_{\varphi_u}.$$

Il reste donc à prouver la relation, $\dim \mathfrak{b}_{\varphi_u} \leq \dim \mathfrak{b}_{\varphi_v}$. La sous-algèbre $\mathfrak{b}$ est un idéal de $\widetilde{\mathfrak{b}}$. Par suite, la sous-algèbre $\rho(\mathfrak{b}_{\varphi_u})$ est contenue dans $\mathfrak{b}$. Prouvons alors l'inclusion,

$$\rho(\mathfrak{b}_{\varphi_u}) \subset \mathfrak{b}_{\varphi_v}.$$

On en déduira le résultat, car $\dim \rho(\mathfrak{b}_{\varphi_u}) = \dim \mathfrak{b}_{\varphi_u}$. Cela revient à prouver la relation :

$$\langle [v, \rho(\mathfrak{b}_{\varphi_u})], \mathfrak{b} \rangle = \{0\}.$$

Puisque $[\widehat{\mathfrak{a}}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{n} \subset \mathfrak{b}^{\perp}$, cela revient à prouver la relation :

$$\langle [\mathrm{pr}_{\mathfrak{n}_-}(v), \rho(\mathfrak{b}_{\varphi_u})], \mathfrak{b} \rangle = \{0\}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \langle [\mathrm{pr}_{\mathfrak{n}_-}(v), \rho(\mathfrak{b}_{\varphi_u})], \mathfrak{b} \rangle &= \langle \mathrm{pr}_{\mathfrak{n}_-}(v), [\rho(\mathfrak{b}_{\varphi_u}), \mathfrak{b}] \rangle \\ &= \langle \mathrm{pr}_{\mathfrak{n}_-}(v), \rho([\mathfrak{b}_{\varphi_u}, \mathfrak{b}]) \rangle \\ &= \langle u, [\mathfrak{b}_{\varphi_u}, \mathfrak{b}] \rangle, \text{ car } [\mathfrak{b}_{\varphi_u}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{n} \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration, d'après ce qui précède. ■

4.3. La proposition suivante précise la remarque 4 :

Proposition 4.6. — *La sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ possède une forme linéaire stable si, et seulement si, l'ensemble $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide.*

Démonstration. — Si l'ensemble $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide, on a déjà noté (remarque 4) que la restriction de φ_u à $\mathfrak{b}$ est stable. Réciproquement, supposons que $\mathfrak{b}$ possède une forme linéaire stable et montrons que l'ensemble $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide. On reprend les notations de la démonstration du théorème 4.5 et on pose :

$$V' = \{v \in \widehat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}_- \mid \varphi_{v|_{\mathfrak{b}}} \text{ est } \mathfrak{b} - \text{stable}\}.$$

D'après l'hypothèse, l'ensemble V' est un ouvert non vide de $\widehat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}_-$ et l'intersection $V' \cap \widetilde{V}$ est alors non vide. Soit v dans cette intersection. Alors il existe un élément ρ dans $\widetilde{B}$ tel que,

$$(\varphi_{\mathrm{pr}_{\mathfrak{n}_-}(v)})_{|\mathfrak{n}} = \rho(\varphi_{u|_{\mathfrak{n}}}),$$

et il résulte de la démonstration du théorème 4.5 la relation,

$$\mathfrak{b}_{\varphi_v} = \rho(\mathfrak{b}_{\varphi_u}).$$

Par suite, $\varphi_{v|_\mathfrak{b}}$ est $\mathfrak{b}$-stable si, et seulement si, $\varphi_{u|_\mathfrak{b}}$ l'est, d'après la proposition 4.1. On déduit alors de la remarque 4, que l'ensemble $\mathcal{K}_{\rm comp}(\widehat{\Pi})$ est nécessairement vide. ■

5. Algèbres de Lie quasi-réductives

5.1. Soit $\mathfrak{q}$ une algèbre de Lie algébrique de centre $\mathfrak{z}$. La notion d'algèbre de Lie quasi-réductive a été introduite par M. Duflo pour son importance dans l'analyse sur les groupes de Lie. On en rappelle ici la définition.

Définition 5.1. — *On dit qu'une forme linéaire f de $\mathfrak{q}^*$ est* réductive *si l'image de la sous-algèbre $\mathfrak{q}_f/\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{q})$ par la représentation adjointe de $\mathfrak{q}$ est une sous-algèbre de Lie réductive.*

On dit que l'algèbre de Lie $\mathfrak{q}$ est quasi-réductive *si elle possède une forme linéaire réductive.*

Il est clair que si $\mathfrak{q}$ est réductive, alors $\mathfrak{q}$ est quasi-réductive ; en effet la forme linéaire nulle est réductive pour $\mathfrak{q}$.

Lemme 5.2. — *Une forme linéaire est régulière et réductive pour $\mathfrak{q}$ si, et seulement si, la sous-algèbre $\mathfrak{q}_f/\mathfrak{z}$ est un tore de $\mathfrak{q}$.*

Démonstration. — Si $\mathfrak{q}_f/\mathfrak{z}$ est un tore de $\mathfrak{q}$, alors f est $\mathfrak{q}$-stable donc f est $\mathfrak{q}$-régulière. De plus il est clair que f est réductive pour $\mathfrak{q}$.

Réciproquement, si f est $\mathfrak{q}$-régulière et $\mathfrak{q}$-réductive, alors $\mathfrak{q}_f$ est une sous-algèbre de Lie commutative, d'après [**26**]. Il est alors bien connu (voir par exemple [**23**], Théorème 20.5.10) que l'image de $\mathfrak{q}_f/\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{q})$ par la représentation adjointe de $\mathfrak{q}$ est une sous-algèbre de Lie réductive si, et seulement si, elle est formée d'éléments semi-simples. ■

Le théorème suivant est connu. On l'énonce sans démonstration :

Théorème 5.3. — *On suppose que $\mathfrak{q}$ est quasi-réductive. Alors l'ensemble des formes linéaires régulières et réductives pour $\mathfrak{q}$ est un ouvert dense de $\mathfrak{q}^*$ formé de formes linéaires $\mathfrak{q}$-stables.*

En particulier, une algèbre de Lie quasi-réductive possède une forme linéaire stable.

5.2. On reprend les notations des parties précédentes. La proposition suivante précise la proposition 4.6.

Proposition 5.4. — *La sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ est quasi-réductive si, et seulement si, l'ensemble $\mathcal{K}_{\rm comp}(\widehat{\Pi})$ est vide.*

Démonstration. — Si $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ n'est pas vide, $\mathfrak{b}$ ne possède pas de forme stable d'après la proposition 4.6. Il résulte donc du théorème 5.3 que $\mathfrak{b}$ n'est pas quasi-réductive. Réciproquement, si $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide, la restriction à $\mathfrak{b}$ de la forme φ_u est $\mathfrak{b}$-stable et son stabilisateur est une sous-algèbre commutative formée d'éléments semi-simples, d'après la proposition 4.4. La forme linéaire φ_u est donc réductive pour $\mathfrak{b}$ d'après le lemme 5.2, d'où la proposition. ■

La sous-algèbre $\mathfrak{m} \oplus \widehat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$. Les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ obtenues ainsi à partir d'une décomposition d'Iwasawa sont dites *minimales*. La proposition suivante est connue. On en redonne ici une démonstration.

Proposition 5.5. — *La sous-algèbre parabolique* $\mathfrak{m} \oplus \widehat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$ *de* $\mathfrak{g}$ *est quasi-réductive.*

Démonstration. — Montrons que la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{m}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$ de $\mathfrak{g}_0$ est quasi-réductive. Soit φ une forme linéaire $\mathfrak{q}_0$-régulière. Il suffit de prouver que son stabilisateur n'est formé que d'éléments semi-simples de $\mathfrak{g}_0$. Supposons par l'absurde le contraire. Comme le stabilisateur de φ dans $\mathfrak{q}_0$ est une algèbre de Lie algébrique, il contient les composantes nilpotentes et semi-simples de ses éléments. Par suite, il contient un élément nilpotent non nul x. La composante de x selon $\widehat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \mathfrak{m}_0$ dans la décomposition $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{m}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$ est donc un élément nilpotent de $\mathfrak{g}_0$. Comme $[\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0]$ est une sous-algèbre de Lie compacte de $\mathfrak{g}_0$ ([**9**], Chapitre VI), la sous-algèbre $[\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0]$ est formée d'éléments semi-simples de $\mathfrak{g}_0$. Il en résulte que x est contenu dans $\mathfrak{n}_0$.

Notons encore φ la forme linéaire sur $\mathfrak{q}$ obtenue à partir de φ par $\mathbb{C}$-linéarité. Soit alors v l'élément de $\mathfrak{m} \oplus \widehat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}_-$ qui s'identifie à φ par la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Il résulte de [**23**], Proposition 40.6.3, qu'il y a dans le dual de $\mathfrak{n}$ une $\mathfrak{q}$-orbite ouverte. Par suite, on peut supposer que v s'écrit sous la forme $v = u + v'$, avec v' dans $\mathfrak{m} \oplus \widehat{\mathfrak{a}}$. Rappelons que $u = \sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} X_{-\varepsilon_K}$ est introduit dans la partie 4. Puisque $[x, v']$ appartient à $\mathfrak{n}$, on a : $[x, u] \in \mathfrak{n}$. Il résulte alors de la démonstration de la proposition 4.4 que x est nul. On a ainsi obtenu une contradiction. ■

5.3. D'après la proposition 5.5, les sous-algèbres paraboliques minimales d'une algèbre de simple complexe sont quasi-réductives. Il n'est en général pas facile de savoir si une sous-algèbre parabolique est quasi-réductive. Les résultats obtenus, entre autres, dans [**15**] et [**6**] apportent de nombreuses réponses pour les cas classiques. Mais le problème demeure pour une large part dans les cas exceptionnels [**14**]. On donne dans ce paragraphe une caractérisation pour certaines sous-algébres paraboliques.

On suppose que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple complexe. On fixe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Soit alors Δ le système de racines associé à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, Δ_+ un système de racines positives de Δ, et Π la base de Δ_+. Soit $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre de Borel standard (relativement à Π) de $\mathfrak{g}$. Autrement dit, avec les notations des parties précédentes, on se place dans le cas où $\mathfrak{g}_0$ est une forme réelle split de $\mathfrak{g}$. On reprend alors les notations précédentes.

Notons E_Π le sous-espace de $\mathfrak{h}^*$ engendré par les éléments ε_K, pour K dans $\mathcal{K}(\Pi)$. Introduisons trois sous-ensembles dans Δ_+ :

$$\begin{aligned}\Delta_+^1 &= \Delta_+ \setminus E_\Pi \\ \Delta_+^2 &= \Delta_+ \cap \{\ \varepsilon_K\ ,\ K \in \mathcal{K}(\Pi)\ \} \\ \Delta_+^3 &= \Delta_+ \cap (E_\Pi \setminus \{\ \varepsilon_K\ ,\ K \in \mathcal{K}(\Pi)\ \})\end{aligned}$$

On a clairement :

$$\Delta_+ = \Delta_+^1 \cup \Delta_+^2 \cup \Delta_+^3.$$

Pour $\alpha \in \Delta_+$, on désigne par K_α l'unique élément K de $\mathcal{K}(\Pi)$ défini par le lemme 2.2 (ii) tel que $\alpha \in \Gamma^{K_\alpha}$, et par $\mathcal{K}'(\alpha)$ l'ensemble des éléments $M \in \mathcal{K}(\Pi)$ tels que $\varepsilon_M + \alpha$ est une racine. D'après le lemme 2.2, (iv), on a : $\forall M \in \mathcal{K}'(\alpha),\ M \subsetneq K_\alpha$. Notons $\Delta_+^{3'}$ l'ensemble des éléments α dans Δ_+^3 de la forme

$$\alpha = \frac{1}{2}(\varepsilon_{K_\alpha} - \varepsilon_{K'_\alpha}),$$

où K'_α appartient à $\mathcal{K}'(\alpha)$.

Lemme 5.6. — *Soit α dans Π, $L \in \mathcal{K}(\Pi)$, $M \in \mathcal{K}'(\alpha)$ et $\gamma \in \Delta_+$, $\gamma \neq \alpha$.*
(i) *$\varepsilon_L - \alpha$ est une racine si, et seulement si, $L = K_\alpha$,*
(ii) *si α appartient à $\Delta_+^{3'}$, alors $\mathcal{K}'(\alpha)$ est réduit à $\{K'_\alpha\}$,*
(iii) *si α appartient à $\Delta_+^3 \setminus \Delta_+^{3'}$, alors, pour tout $N \in \mathcal{K}(\Pi)$, $\varepsilon_M + \alpha \neq \varepsilon_N + \gamma$.*

Démonstration. — (i) Supposons $L \neq K_\alpha$. Si $\varepsilon_L - \alpha$ est une racine, il résulte de la définition de K_α que $\alpha - \varepsilon_L$ est une racine positive, ce qui est impossible puisque α appartient à la base Π.

(ii) Les tables 2 et 3 permettent de vérifier que l'ensemble $\Pi \cap \Delta_+^{3'}$ est non vide si, et seulement si, $\mathfrak{g}$ est de type F_4, C_l ou B_l, avec l impair. On vérifie alors pour chacun de ces cas l'assertion (ii). On reprend les notations des tables 2 et 3.

F_4 : $\Pi \cap \Delta_+^{3'} = \{\beta_3 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{K_3} - \varepsilon_{K_4})\}$, avec $K_3 = \{\beta_2, \beta_3\}$ et $K_4 = \{\beta_2\}$. L'assertion (ii) est alors claire.

C_l : $\Pi \cap \Delta_+^{3'} = \{\beta_i = \frac{1}{2}(\varepsilon_{K_i} - \varepsilon_{K_{i+1}}),\ 1 \leq i \leq l-1\}$, où $K_j = \{\beta_j, \ldots, \beta_l\}$, pour $j = 1, \ldots, l$. Comme $\varepsilon_{K_j} + \beta_i$ n'est pas une racine pour $j > i+1$, on a (ii) pour C_l.

B_l, l impair : $\Pi \cap \Delta_+^{3'} = \{\beta_l = \frac{1}{2}(\varepsilon_{K_l} - \varepsilon_{K_{l-1}})\}$, avec $K_{l-1} = \{\beta_{l-1}, \beta_l\}$ et $K_l = \{\beta_l\}$. L'assrtion (ii) est alors claire.

(iii) Supposons que la situation

$$\varepsilon_M + \alpha = \varepsilon_N + \gamma. \tag{11}$$

ait lieu, pour un certain N dans $\mathcal{K}(\Pi)$. D'après le lemme 2.2 (iv), les racines $\varepsilon_M + \alpha$ et $\varepsilon_N + \gamma$ appartiennent à $\Gamma_0^{K_\alpha}$. Comme $M \neq N$, il résulte alors de (i) que $\langle \alpha, \varepsilon_N^\vee \rangle$ est négatif ou nul, d'où $\langle \gamma, \varepsilon_N^\vee \rangle \in \{-2, -3\}$. Si $\langle \gamma, \varepsilon_N^\vee \rangle = -3$, alors $\mathfrak{g}$ est nécssairement de type G_2. Or la situation (11) n'a pas lieu dans G_2. Si $\langle \gamma, \varepsilon_N^\vee \rangle = -2$, alors $\mathfrak{g}$ est nécessairement de type B_l, C_l ou F_4. On vérifie alors, grâce aux tables 2 et 3, que la situation (11) n'a pas lieu dans chacun de ces types. ∎

Le lemme suivant, présenté dans [**24**] (Lemme 4.5) et démontré dans [**5**] (Lemme 1.12.2), intervient dans la démonstration du théorème 5.8.

Lemme 5.7. — *Soit V un espace vectoriel de dimension finie, V' un hyperplan de V, Φ une forme bilinéaire sur V, et Φ' sa restriction à V'. On note N et N' les noyaux de Φ et Φ'.*

(i) *Si $N \subset N'$, alors N est un hyperplan de N',*

(ii) *Si $N \not\subset N'$, on a $N' = N \cap V'$, et N' est un hyperplan de N.*

Pour $S \subset \Pi$, on désigne par $\mathfrak{p}_S$ la sous-algèbre parabolique *standard* (relativement à Π) $\mathfrak{p}_S = \mathfrak{l}_S \oplus \mathfrak{u}_S$, où $\mathfrak{l}_S = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^S} \mathfrak{g}^\alpha$ est la partie Levi de $\mathfrak{p}_S$, et où $\mathfrak{u}_S = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \Delta^S} \mathfrak{g}^\alpha$ est son radical nilpotent. Comme les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées aux sous-algèbres paraboliques standards, il suffit de considérer les sous-algèbres paraboliques standards. Dans le théorème suivant une donne une description des sous-algèbres paraboliques quasi-réductives standards pour $S = \{\alpha\}$, avec $\alpha \in \Pi$.

Théorème 5.8. — *Soit α une racine simple. Alors la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_{\{\alpha\}}$ est quasi-réductive si, et seulement si, α appartient à $\Delta_+^1 \cup \Delta_+^2 \cup \Delta_+^{3'}$.*

Démonstration. — Pour simplifer les notations, notons $\mathfrak{q}$ la sous-algèbre $\mathfrak{p}_{\{\alpha\}}$, $\mathfrak{l}_\mathfrak{q}$ sa partie Levi, et $\mathfrak{u}_\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^\perp$ son radical nilpotent.

Si α appartient $\Delta_+^1 \cup \Delta_+^2$, $\mathfrak{p}_\alpha$ est quasi-réductive d'après la démonstration de la proposition 4.4 de [**23**]. Supposons que α appartient à $\Delta_+^{3'}$. La sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\beta \in \Delta_+} \mathfrak{g}^\beta$ est un hyperplan de $\mathfrak{q}$. Posons $u = \sum_{K \in \mathcal{K}(\Pi)} X_{-\varepsilon_K}$. Le stabilisateur de φ_u dans $\mathfrak{b}$ est donné par la relation suivante :

$$\mathfrak{b}_{\varphi_u} = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(\Pi)} \ker \varepsilon_K,$$

d'après [**25**] ou d'après la proposition 4.4. Par conséquent, $\mathfrak{b}_{\varphi_u}$ est contenu dans le stabilisateur $\mathfrak{q}_{\varphi_u}$ de φ_u, car $[u, \mathfrak{b}_{\varphi_u}] = \{0\}$. Il résulte alors du lemme 5.7 que $\mathfrak{b}_{\varphi_u}$ est un hyperplan de $\mathfrak{q}_{\varphi_u}$. Montrons que $X_{-\alpha} + bX_\alpha$ appartient à $\mathfrak{q}_{\varphi_u}$, où b est à définir. Puisque α appartient à $\Delta_+^{3'}$, on a $\alpha = \frac{1}{2}(\varepsilon_{K_\alpha} - \varepsilon_{K'_\alpha})$, pour K'_α dans $\mathcal{K}'(\alpha)$. De plus, d'après le lemme 5.6 (i), $\varepsilon_M - \alpha$ est une racine si, et seulement si, $M = K_\alpha$. Par suite, on a :

$$\begin{aligned}[u, X_{-\alpha} + bX_\alpha] &= \sum_{M\in\mathcal{K}(\Pi)} [X_{-\varepsilon_M}, X_{-\alpha}] + b \sum_{M\in\mathcal{K}(\Pi)} [X_{-\varepsilon_M}, X_\alpha] \\ &= \lambda X_{-(\varepsilon_L+\alpha)} + b\mu X_{-(\varepsilon_K-\alpha)},\end{aligned}$$

où λ et μ sont des complexes non nuls. Puisque $\varepsilon_L + \alpha = \varepsilon_K - \alpha$, on peut choisir b de sorte que $[u, X_{-\alpha} + bX_\alpha] = 0$. Par conséquent la relation

$$\mathfrak{q}_{\varphi_u} = \mathbb{C}(X_{-\alpha} + bX_\alpha) \oplus \mathfrak{b}_{\varphi_u},$$

a lieu, pour $\mathfrak{b}_{\varphi_u}$ un hyperplan $\mathfrak{q}_{\varphi_u}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{q}_{\varphi_u}$ est abélienne, car α appartient à E_Π. De plus, $\mathfrak{q}_{\varphi_u}$ est formé d'éléments semi-simples. Ainsi φ_u est $\mathfrak{q}$-réductive, d'après le lemme 5.2 et $\mathfrak{q}$ est quasi-réductive.

Réciproquement, supposons que α appartienne à $\Delta_+^3 \setminus \Delta_+^{3'}$. Supposons par l'absurde que $\mathfrak{q}$ est quasi-réductive. On cherche à aboutir à une contradiction. Le radical nilpotent $\mathfrak{u}_\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{q}$ est un idéal de $\mathfrak{b}$ contenu dans le radical nilpotent $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{b}$. Soit B le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{b}$. Il résulte de la proposition 40.6.3 de [**23**] que la B-orbite de la forme linéaire $\varphi_{u|_{\mathfrak{u}_\mathfrak{q}}}$ est un ouvert dense de $\mathfrak{u}_\mathfrak{q}^*$. Le dual de $\mathfrak{u}_\mathfrak{q}$ s'identifie via la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ au sous-espace $\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}_-} = \sum\limits_{\beta\in\Delta_+\setminus\{\alpha\}} \mathfrak{g}^{-\beta}$. Par suite, l'ensemble

$$\widetilde{W} = \{w \in \mathfrak{b}_- \oplus \mathfrak{g}^\alpha \mid (\varphi_{\mathrm{pr}_{\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}_-}}(w)})_{|\mathfrak{u}_\mathfrak{q}} \in B \cdot \varphi_{u|_{\mathfrak{u}_\mathfrak{q}}}\}$$

est un ouvert dense de $\mathfrak{b}_- \oplus \mathfrak{g}^\alpha$, où $\mathrm{pr}_{\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}_-}}$ est la projection de $\mathfrak{q}_-$ sur $\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}_-}$ selon la décomposition $\mathfrak{q}_- = \mathfrak{l}_\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{u}_{\mathfrak{q}_-}$.

Par ailleurs, puisque le dual de $\mathfrak{q}$ s'identifie via la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{q}_- = \mathfrak{b}_- \oplus \mathfrak{g}_\alpha$, l'ensemble

$$W = \{w \in \mathfrak{b}_- \oplus \mathfrak{g}_\alpha \mid \varphi_w \text{ est } \mathfrak{q} - \text{régulière et } \mathfrak{q} - \text{réductive}\}$$

est un ouvert dense de $\mathfrak{b}_- \oplus \mathfrak{g}_\alpha$, d'après l'hypothèse. L'intersection $W \cap \widetilde{W}$ est alors non vide. Soit w dans cette intersection. On montre alors sans difficulté que w peut s'écrire sous la forme :

$$w = u + aX_{-\alpha} + h + bX_{+\alpha},$$

avec a, b dans $\mathbb{C}$ et h dans $\mathfrak{h}$. Comme α appartient à E_Π, on a $[\mathfrak{b}_{\varphi_u}, w] = \{0\}$, d'où l'inclusion $\mathfrak{b}_{\varphi_u} \subset \mathfrak{q}_{\varphi_w}$. Il résulte alors du lemme 5.7 que $\mathfrak{b}_{\varphi_u}$ est un hyperplan de $\mathfrak{q}_{\varphi_w}$. Soit alors x dans $\mathfrak{q}$ tel que l'on ait la décomposition :

$$\mathfrak{q}_{\varphi_w} = \mathbb{C}x \oplus (\bigcap_{K\in\mathcal{K}(\Pi)} \ker \varepsilon_K).$$

Puisque w appartient à W, $\mathfrak{q}_{\varphi_w}$ est une algèbre de Lie abélienne formée d'éléments semi-simples. En particulier, la composante $x_{\mathfrak{l}_\mathfrak{q}}$ de x sur $\mathfrak{l}_\mathfrak{q}$ dans la décomposition $\mathfrak{q} = \mathfrak{l}_\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{u}_\mathfrak{q}$ est semi-simple. L'élément x s'écrit,

$$x = \lambda X_{-\alpha} + H + \mu X_\alpha + x_{\mathfrak{u}_\mathfrak{q}},$$

avec λ, μ dans $\mathbb{C}$, H dans $\mathfrak{h}$ et $x_{\mathfrak{u}_\mathfrak{q}}$ dans $\mathfrak{u}_\mathfrak{q}$. Si λ était nul, alors μ serait nul aussi, car la composante de x selon $\mathfrak{l}_\mathfrak{q}$ est semi-simple. Par suite, la relation $[x, w] \in \mathfrak{q}^\perp$ impliquerait que $x_{\mathfrak{u}_\mathfrak{q}}$ appartient à $\mathfrak{q}_{\varphi_w}$. Il en résulterait que $x_{\mathfrak{u}_\mathfrak{q}}$ est un élément non nul de $\mathfrak{u}_\mathfrak{q}$, car $\bigcap_{K\in\mathcal{K}(\Pi)} \ker \varepsilon_K$ et $\mathbb{C}x$ sont en somme directe. Ceci serait alors en contradication avec le fait que $\mathfrak{q}_{\varphi_w}$ n'est formé que d'éléments semi-simples. Par suite $\lambda = 0$ et on obtient de la même manière que μ n'est pas nul. D'après le lemme 5.6 (i), on a alors

$$\begin{aligned}[x, w] &= -\lambda \sum_{L\in\mathcal{K}'(\alpha)} [X_{-\varepsilon_L}, X_{-\alpha}] + \sum_{L\in\mathcal{K}(\Pi)} \varepsilon_K(H) X_{-\varepsilon_K} - \mu[X_{-\varepsilon_{K_\alpha}}, X_\alpha] \\ &\quad +(a\alpha(H) + \lambda\alpha(h))X_{-\alpha} + (a\mu - b\lambda)H_\alpha + (-b\alpha(H) - \mu\alpha(h))X_\alpha \\ &\quad +[x_{\mathfrak{u}_\mathfrak{q}}, w].\end{aligned}$$

Puisque $[x, w]$ appartient à $\mathfrak{u}_\mathfrak{q}$, l'élément $[X_{-\varepsilon_{K_\alpha}}, X_\alpha]$ de $\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}_-}$ doit être compensé. Supposons qu'il se compense grâce au terme $[x_{\mathfrak{u}_\mathfrak{q}}, w]$. Alors, il existe $M \in \mathcal{K}(\Pi)$ et $\beta \in \Delta_+ \setminus \{\alpha\}$ tels que

$$\varepsilon_{K_\alpha} - \alpha = \varepsilon_M - \beta.$$

Comme $M \neq K_\alpha$, on a $\langle \beta, \varepsilon^\vee_{K_\alpha}\rangle = -1$. Par conséquent, M appartient à $\mathcal{K}'(\alpha)$, car $\varepsilon_{K_\alpha} + \beta = \varepsilon_M + \alpha$ est une racine. Ceci est en contradiction avec le lemme 5.6 (ii). Ce qui précède prouve alors qu'il existe un élément L dans $\mathcal{K}^{'}(\alpha)$ tel que $\varepsilon_{K_\alpha} - \alpha = \varepsilon_L + \alpha$. Par suite, $\alpha = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_{K_\alpha} - \varepsilon_L)$, ce qui est absurde car α n'appartient pas à $\Delta_+^{3'}$. On a ainsi obtenu une contradiction. ■

Dans la table 4, on a représenté en noire, pour chaque type d'algèbre de Lie simple complexe $\mathfrak{g}$, les racines simples α telles que $\mathfrak{p}_{\{\alpha\}}$ est une sous-algèbre quasi-réductive. On ommet ici les calculs qui ont été effectués pour établir cette table. Ces calculs sont détaillés dans [**14**].

Par ailleurs, le théorème 5.8 peut permettre de décider dans certains cas si la condition $(*)$ est satifaite (voir le cas de EVI).

6. Calculs explicites dans les algèbres de Lie simples réelles

On suppose dans cette partie que $\mathfrak{g}_0$ est une algèbre de Lie simple réelle.

6.1. Considérons les propriétés suivantes :

(A) : L'indice de $\mathfrak{b}$ est donné par la relation : ind $\mathfrak{b} = \mathrm{rg}\ \mathfrak{g} - \mathrm{rg}\ \mathfrak{k}$. Autrement dit l'indice est additif dans la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b}$.

(B) : La sous-algèbre $\mathfrak{b}$ possède une forme stable.

(B)' : La sous-algèbre $\mathfrak{b}$ est quasi-réductive.

(C) : Il y a dans le dual $\mathfrak{b}^*$ de $\mathfrak{b}$ une $\mathfrak{b}$-orbite ouverte. Autrement dit l'indice de $\mathfrak{b}$ est nul.

D'après les propositions 4.6 et 5.4, les conditions (b) et (b)' sont équivalentes. En outre, d'après les parties précédentes, on dispose de critères simples pour chacune de ces conditions. Précisément, avec les notations des parties précédentes, on a :
$\mathfrak{b}$ vérifie **(A)** si, et seulement, si $\mathcal{K}(\widehat{\Pi}^{'}) = \mathcal{K}^{'}(\widehat{\Pi})$ (Théorème 4.5),
$\mathfrak{b}$ vérifie **(B)** ou **(B)'** si, et seulement, si $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide (Propositions 4.6 et 5.4) et,
$\mathfrak{b}$ vérifie **(C)** si, et seulement, si ($\mathcal{K}(\widehat{\Pi}^{'}) = \mathcal{K}^{'}(\widehat{\Pi})$ et $\mathrm{rg}\ \mathfrak{g} = \mathrm{rg}\ \mathfrak{k}$) (Théorème 4.5).

Il est clair que la condition **(C)** implique la condition **(B)**. En effet, si l'indice de $\mathfrak{b}$ est nul, alors il existe un élément de $\mathfrak{b}^*$ dont le stabilisateur est nul. Si **(B)** est vérifiée, alors l'ensemble $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide, d'après ce qui précède. Il résulte alors du lemme 4.2 (ii) que la condition $\mathcal{K}(\widehat{\Pi}^{'}) = \mathcal{K}^{'}(\widehat{\Pi})$ est automatiquement remplie. La condition **(A)** est alors satisfaite, d'après ce qui précède. Par suite, **(B)** implique **(A)**.

6.2. On cherche maintenant pour quels types d'algèbres de Lie simples réelles la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ vérifie les conditions **(A)**, **(B)**, **(B)'** ou **(C)**. D'après la classification des algèbres de Lie simples réelles obtenue par exemple dans [**9**], Théorème 6.105, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ est isomorphe à l'une des algèbres de Lie simples réelles de la liste suivante :

(a) : L'algèbre de Lie $\mathfrak{s}^{\mathbb{R}}$, où $\mathfrak{s}$ est simple complexe de type A_n, pour $n \geq 1$, B_n, pour $n \geq 2$, C_n, pour $n \geq 3$, D_n, pour $n \geq 4$, E_6, E_7, E_8, F_4 ou G_2,

(b) : La forme réelle compacte d'une algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ comme en **(a)**,

(c) : Les algèbres de matrices classiques :
- $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, avec $n \geq 2$,
- $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H})$, avec $n \geq 2$,
- $\mathfrak{su}(p,q)$, avec $p \geq q > 0$, $p+q \geq 2$,
- $\mathfrak{so}(p,q)$, avec $p > q > 0$, $p+q$ impair, $p+q \geq 5$, ou $p > q > 0$, $p+q$ pair, $p+q \geq 8$,
- $\mathfrak{sp}(p,q)$, avec $p \geq q > 0$, $p+q \geq 3$,
- $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$, avec $n \geq 3$,
- $\mathfrak{so}^*(2n)$, avec $n \geq 4$,

(d) : Les 12 algèbres de Lie simples exceptionnelles non complexes, non compactes EI, EII, $EIII$, EIV, EV, EVI, $EVII$, $EVIII$, EIX, FI, FII et G.

Si la condition $(*)$ est satisfaite, alors le cardinal de $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ est donné par la formule suivante :

$$\#\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi}) = k_{\mathfrak{g}} - k_{\mathfrak{m}} + \mathrm{rg}\ \mathfrak{g} - \mathrm{rg}\ \mathfrak{k} - \dim \widehat{\mathfrak{a}}, \qquad (12)$$

d'après la proposition 3.2, car $k_{\mathfrak{m}} = \#\mathcal{K}(\widehat{\Pi}')$. La relation (12) permettra, lorsque la condition **(A)** est remplie, de voir si $\mathfrak{b}$ satisfait de plus aux conditions **(B)** et **(B)'**.

(a) Cas des formes réelles compactes d'algèbres de Lie simples complexes. — Si $\mathfrak{g}_0$ est la forme réelle compacte d'une algèbre de Lie simple complexe, alors $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_0$ et la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ est nulle.

(b) Cas des algèbres de Lie réelles sous-jacentes à une algèbre de Lie simple complexe. — Si $\mathfrak{g}_0$ est l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à une algèbre de Lie simple complexe, $\mathfrak{g}_0$ est de la forme $\mathfrak{s}^{\mathbb{R}}$ avec $\mathfrak{s}$ simple complexe. Soit $\mathfrak{u}_0$ une forme réelle compacte de $\mathfrak{s}$. La décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ s'écrit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}_0 \oplus i\mathfrak{u}_0$ et θ est la conjugaison complexe relative à $\mathfrak{u}_0$. Ici, l'algèbre $\mathfrak{k}_0$ est la forme réelle compacte $\mathfrak{u}_0$, d'où $\mathrm{rg}\ \mathfrak{k}_0 = \mathrm{rg}\ \mathfrak{u}_0 = \mathrm{rg}\ \mathfrak{s}$. On a de plus, $\mathrm{rg}\ \mathfrak{g}_0 = \mathrm{rg}\ \mathfrak{g} = 2\ \mathrm{rg}\ \mathfrak{s}$. Soit $\mathfrak{c}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{u}_0$. Alors on a : $\widehat{\mathfrak{a}}_0 = i\mathfrak{c}_0$ et $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{c}_0$. Notons que la sous-algèbre de Cartan $\widehat{\mathfrak{h}}_0 = \widehat{\mathfrak{a}}_0 \oplus i\widehat{\mathfrak{a}}_0$ est à la fois maximalement compact et maximalement non-compact. Puisque $\mathfrak{m}_0$ est une sous-algèbre abélienne, la condition $(*)$ est remplie. La relation (12) donne alors : $\#\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi}) = 2k_{\mathfrak{s}} - 0 + 2\mathrm{rg}\ \mathfrak{s} - \mathrm{rg}\ \mathfrak{s} - \mathrm{rg}\ \mathfrak{s} = 2k_{\mathfrak{s}} \neq 0$. D'après la proposition 4.6 et le théorème 4.5, la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ ne possède pas de forme stable et son indice est égal à $\mathrm{rg}\ \mathfrak{s}$. Ainsi $\mathfrak{g}_0$ satisfait à la condition **(A)**, mais ne satisfait pas aux conditions **(B)**, **(B)'** et **(C)**.

6.3. (c) et (d) Cas des algèbres de Lie simples réelles, non complexes, non compactes. — On suppose que l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_0$ est l'une des algèbres de la liste **(c)** ou **(d)**.

On utilise ici les données de [**9**], Appendice C. Soit K le sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Lorsque le quotient G/K est hermitien symétrique, il résulte par exemple de [**21**] que le dual de $\mathfrak{b}$ possède une $\mathfrak{b}$-orbite ouverte. La condition **(C)** est alors satisfaite. On utilise en outre les notations et les données des tables 2 et 3 pour étudier la condition **(A)**.

On regroupe dans la table 5 les données nécessaires concernant $\mathfrak{g}_0$ qui permettent d'étudier les conditions **(A)**, **(B)**, **(B)'** et **(C)**. En particulier, ces données permettent de calculer le cardinal de $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ selon la formule (12), lorsque la condition $(*)$ est remplie.

- Pour $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, avec $n \geq 2$, $\mathfrak{su}(p,p)$, avec $p \geq 1$, $\mathfrak{so}(p,p)$, $p \geq 1$, $\mathfrak{so}(2p, 2p+1)$, avec $p \geq 1$, $\mathfrak{so}(2p, 2p-1)$, $\mathfrak{so}(2p-1, 2p+1)$, $p \geq 1$, $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$, avec $n \geq 1$, EI, EII, EV, $EVIII$, FI et G, la sous-algèbre $\mathfrak{m}$ est abélienne donc la condition $(*)$ est remplie. On étudie alors les conditions **(B)** et **(B)'** grâce à la formule (12). La condition **(C)** est en outre satisfaite dès que $\mathrm{rg}\ \mathfrak{g} = \mathrm{rg}\ \mathfrak{k}$.

- $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$, avec $n \geq 2$: ici $\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{su}(2)^n$. L'ensemble Π' a $n \geq 2$ composantes connexes. Il résulte alors de la table 2 que la condition $(*)$ n'est pas remplie.

– $\mathfrak{su}(p,q)$, avec $1 \leq p \leq q$: puisque G/K est Hermitien symétrique, la condition **(C)** est satisfaite.

– $\mathfrak{so}(2p,2q+1)$, avec $1 \leq p \leq q$: $\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{so}(2q-2p+1)$. Si $q > p$, on a $\Pi^{'} = \{\beta_{2p+1},\dots,\beta_{p+q}\}$. D'après la table 2, la condition $(*)$ est remplie. La condition **(C)** est de plus satisfaite car rk $\mathfrak{g} =$ rk $\mathfrak{k}$.

  Si $p = q$, alors $\mathfrak{m}$ est abélienne ; la condition $(*)$ est remplie et **(C)** est alors satisfaite.

– $\mathfrak{so}(2p,2q+1)$, avec $p > q \geq 0$: $\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{so}(2p-2q-1)$. Si $p-q-1 \geq 2$, alors on a $\Pi^{'} = \{\beta_{2p+2},\dots,\beta_{p+q}\}$, donc la condition $(*)$ n'est pas remplie.

  Si $p = q+1$, alors $\mathfrak{m}$ est abélienne ; la condition $(*)$ est remplie et **(C)** est alors satisfaite.

  Si $p = q+2$, alors $\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{so}(3)$ et $\Pi' = \{\beta_l\}$. La condition $(*)$ n'est pas remplie d'après la table 2, car $l = 2q+2$ est pair.

– $\mathfrak{sp}(p,q)$, avec $1 \leq p \leq q$: $\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{su}(2)^p \oplus \mathfrak{sp}(q-p)$. Dès que $p > 1$ ou $q-p \geq 1$, alors Π' n'est pas connexe. Il résulte alors de la table 2 que la condition $(*)$ n'est pas remplie.

  Si $p = q = 1$, alors $\mathfrak{g}$ est de type B_2 et $\Pi' = \{\beta_2\}$; la condition $(*)$ n'est donc pas remplie.

– $\mathfrak{so}(2p+1,2q+1)$, avec $0 \leq p \leq q$, sauf $\mathfrak{so}(1,1)$ et $\mathfrak{so}(1,3)$: $\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{so}(2q-2p)$. Si $q-p \geq 4$, alors $\Pi^{'} = \{\beta_{2p},\dots,\beta_{p+q+1}\}$, donc la condition $(*)$ n'est pas remplie.

  Si $p = q$, alors $\mathfrak{m}$ est abélienne ; la condition $(*)$ est donc remplie et on a rk $\mathfrak{g} -$ rk $\mathfrak{k} = 1 > 0$, donc **(C)** n'a pas lieu. Étudions la condition **(B)** : on a, d'après la relation (12) :

$$\begin{aligned}\#\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi}) &= k_{\mathfrak{g}} - k_{\mathfrak{m}} + \mathrm{rg}\ \mathfrak{g} - \mathrm{rg}\ \mathfrak{k} - \dim \widehat{\mathfrak{a}},\\ &= 2p - 0 + 2p + 1 - 2p - (2p+1) = 0,\end{aligned}$$

  donc **(B)** a lieu.

  Si $q = p+1$, alors $\mathfrak{m}$ est abélienne ; la condition $(*)$ est donc remplie et on a rk $\mathfrak{g} -$ rk $\mathfrak{k} = 1 > 0$, donc **(C)** n'a pas lieu. Étudions la condition **(B)** : on a, d'après la relation (12) :

$$\begin{aligned}\#\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi}) &= k_{\mathfrak{g}} - k_{\mathfrak{m}} + \mathrm{rg}\ \mathfrak{g} - \mathrm{rg}\ \mathfrak{k} - \dim \widehat{\mathfrak{a}},\\ &= 2p + 2 - 0 + 2p + 2 - (2p+1) - (2p+1) = 2 \neq 0,\end{aligned}$$

donc **(B)** n'a pas lieu non plus.

Si $q = p + 2$, alors $\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{so}(4)$ est de type $A_1 \times A_1$. On a $\Pi' = \{\beta_{l-1}, \beta_l\}$, donc la condition $(*)$ n'est pas remplie, d'après la table 2, car $l = 2p + 3$ est impair.

Si $q = p + 3$, alors $\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{so}(6)$ est de type A_3. On a $\Pi' = \{\beta_{l-2}, \beta_{l-1}, \beta_l\}$, donc la condition $(*)$ n'est pas remplie, d'après la table 2, car $l = 2p + 4$ est pair.

- $\mathfrak{so}(2p, 2q)$, avec $1 \leq p \leq q$, sauf $\mathfrak{so}(2,2)$: $\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{so}(2q - 2p)$. Si $q - p \geq 4$, alors $\Pi^{'} = \{\beta_{2p+1}, \ldots, \beta_{p+q}\}$, donc la condition $(*)$ est remplie.

  Si $q = p$ ou si $q = p + 1$, alors $\mathfrak{m}$ est abélienne et la condition $(*)$ est remplie.

  Si $q = p + 2$, $\mathfrak{m}$ est de type $A_1 \times A_1$. On a $\Pi' = \{\beta_{l-1}, \beta_l\}$. Alors $(*)$ est remplie d'après la table 2, car $l = 2p + 2$ est pair.

  Si $q = p + 3$, $\mathfrak{m}$ est de type A_3. On a $\Pi' = \{\beta_{l-2}, \beta_{l-1}, \beta_l\}$. Alors $(*)$ est remplie d'après la table 2, car $l = 2p + 3$ est impair.

  Dans tous les cas la condition $(*)$ est remplie et la condition **(C)** est de plus satisfaite car $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g} = \mathrm{rk}\,\mathfrak{k}$.

- $\mathfrak{so}^*(2n)$: puisque G/K est Hermitien symétrique, la condition **(C)** est satisfaite.

- $EIII$: puisque G/K est Hermitien symétrique, la condition **(C)** est satisfaite.

- EIV : $\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{so}(8)$. On a $\Pi^{'} = \{\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\}$ donc la condition $(*)$ n'est pas remplie, d'après la table 3.

- EVI : $\Pi^{'}$ est formé de 3 racines deux à deux fortement orthogonales. D'après la proposition 5.5, la sous-algèbre $\mathfrak{m} \oplus \widehat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$ est quasi-réductive. On utilise alors la table 4 pour en déduire que $\Pi^{'} \subset \{\beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_7\}$. La condition $(*)$ est alors remplie, d'après la table 3.

- $EVII$, EIX : $\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{so}(8)$. On a $\Pi^{'} = \{\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\}$. Il résulte alors de la table 3 que la condition $(*)$ est remplie.

- FII : $\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{so}(7)$. On a $\Pi^{'} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, donc la condition $(*)$ n'est pas remplie d'après la table 3.

Dans la table 5, on donne, pour chaque algèbre des listes **(c)** et **(d)**, le type du complexifié $\mathfrak{g}$ et son rang, la sous-algèbre $\mathfrak{k}_0$ et son rang, la dimension de $\widehat{\mathfrak{a}}$, $k_{\mathfrak{g}}$, la sous-algèbre $\mathfrak{m}_0$ et $k_{\mathfrak{m}}$. Dans la dernière colonne, on indique la propriété la plus forte satisfaite par $\mathfrak{b}$. La mention «rien» signifie que l'indice n'est pas additif dans la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b}$.

Les cas de EI et $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ montrent que la condition **(B)** n'implique pas **(C)**. Le cas de $\mathfrak{so}(2p-1, 2p+1)$, $p \geq 1$ et des algèbres de Lie simples complexes montrent que la condition **(A)** n'implique pas **(B)**.

Références

[1] N. Bourbaki. *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6.* Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 2002. Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley.

[2] R. Brylinski and B. Kostant. The variety of all invariant symplectic structures on a homogeneous space and normalizers of isotropy subgroups. In *Symplectic geometry and mathematical physics (Aix-en-Provence, 1990)*, volume 99 of *Progr. Math.*, pages 80–113. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991.

[3] J. Carmona. Structure Symplectique sur les Orbites Ouvertes de Certains Groupes Résolubles et Espaces Hermitiens Symétriques. 1973.

[4] V. Dergachev and A. Kirillov. Index of Lie algebras of seaweed type. *J. Lie Theory*, 10(2) :331–343, 2000.

[5] J. Dixmier. *Enveloping algebras*, volume 11 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Revised reprint of the 1977 translation.

[6] A. Dvorsky. Index of parabolic and seaweed subalgebras of $\mathfrak{so}_n^*$. *Linear Algebra and its Applications*, 374 :127–142, 2003.

[7] C. Quitté G. Grélaud and P. Tauvel. *Bases de Chevalley et* $\mathfrak{sl}_2$*-Triplets des Algèbres de Lie Simples Exceptionnelles.* Université de Poitiers, 1980.

[8] A. Joseph. On semi-invariants and index for biparabolic (seaweed) algebras. I. *J. Algebra*, 305(1) :487–515, 2006.

[9] A. W. Knapp. *Lie groups beyond an introduction*, volume 140 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 2002.

[10] Y. Kosmann and S. Sternberg. Conjugaison des sous-algèbres d'isotropie. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, 279 :777–779, 1974.

[11] T. Levasseur and J. T. Stafford. The kernel of an homomorphism of Harish-Chandra. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 29(3) :385–397, 1996.

[12] A. Moreau. Indice du normalisateur du centralisateur d'un élément nilpotent dans une algèbre de lie semi-simple. *Bulletin de la S.M.F*, 134(1) :83–117, 2006.

[13] A. Moreau. Indice et décomposition de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple réelle. *J. Algebra*, 303(1) :382–406, 2006.

[14] A. Moreau. Quasi-Reductive Subalgebras of Seaweed Type in a Semisimple Lie Algebras. *Preprint*, 2007.

[15] D. I. Panyushev. Inductive formulas for the index of seaweed Lie algebras. *Mosc. Math. J.*, 1(2) :221–241, 303, 2001.

[16] D. I. Panyushev. The index of a Lie algebra, the centralizer of a nilpotent element, and the normalizer of the centralizer. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 134(1) :41–59, 2003.

[17] M. Raïs. La représentation coadjointe du groupe affine. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 28(1) :xi, 207–237, 1978.

[18] M. Raïs. L'indice des produits semi-directs $E \times_\rho \mathfrak{g}$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 287(4) :A195–A197, 1978.

[19] M. Raïs. Notes sur l'Indice des Algèbres de Lie. 2006.

[20] R. W. Richardson, Jr. Deformations of Lie subgroups and the variation of isotropy subgroups. *Acta Math.*, 129 :35–73, 1972.

[21] H. Rossi and M. Vergne. Fonctions holomorphes de carré sommable sur un domaine de Siegel et étude de la série discrète holomorphe. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 275 :A17–A20, 1972.

[22] R. Steinberg. Regular elements of semisimple algebraic groups. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (25) :49–80, 1965.

[23] P. Tauvel. Sur les éléments réguliers dans les algèbres de Lie réductives. *Bull. Sci. Math. (2)*, 113(1) :51–83, 1989.

[24] P. Tauvel and R. W. T. Yu. Sur l'indice de certaines algèbres de Lie. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 54(6) :1793–1810 (2005), 2004.

[25] P. Tauvel and R. W. T. Yu. *Lie algebras and algebraic groups.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[26] Patrice Tauvel. Sur les éléments réguliers dans les algèbres de Lie réductives. *Bull. Sci. Math. (2)*, 113(1) :51–83, 1989.

[27] G. Warner. *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. I.* Springer-Verlag, New York, 1972. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 188.

[28] O. S. Yakimova. The index of centralizers of elements in classical Lie algebras. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 40(1) :52–64, 96, 2006.

[29] R. W. T. Yu. On the sum of the index of a parabolic subalgebra and of its nilpotent radical. *Preprint*, 2006.

Anne Moreau, Université Paris 7, Institut de Mathématiques de Jussieu, Théorie des groupes, Case 7012, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France • *E-mail :* moreaua@math.jussieu.fr

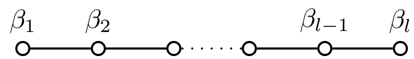
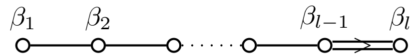
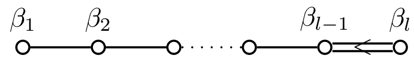
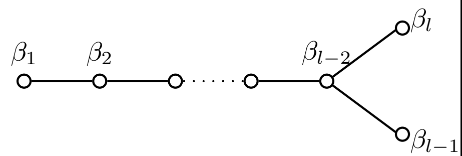
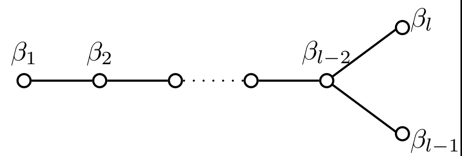
$A_l,\ l\geq 1$		$\left\{\beta_i+\cdots+\beta_{i+(l-2i+1)}\ ,\ 1\leq i\leq \left[\frac{l+1}{2}\right]\right\}.$
B_l, $l\geq 2$		$\{\beta_i+2\beta_{i+1}+\cdots+2\beta_l\ ,\ 1\leq i\leq l-1,\ i \text{ impair }\}$ $\cup\{\beta_i\ ,\ 1\leq i\leq l,\ i\text{ impair }\}.$
$C_l,\ l\geq 3$ $l\geq 3$		$\{2\beta_i+\cdots+2\beta_{l-1}+\beta_l\ ,\ 1\leq i\leq l-1\}$ $\cup\ \{\beta_l\}.$
$D_l,\ l$ pair $l\geq 3$		$\{\beta_i+2\beta_{i+1}+\cdots+2\beta_{l-2}+\beta_{l-1}+\beta_l, 1\leq i\leq l-3,\ i\text{ impair }\}$ $\cup\{\beta_i\ ,\ 1\leq i\leq l,\ i\text{ impair }\}\ \cup\ \{\beta_l\}.$
$D_l,\ l$ impair $l\geq 5$		$\{\beta_i+2\beta_{i+1}+\cdots+2\beta_{l-2}+\beta_{l-1}+\beta l\ ,\ 1\leq i\leq l-3,\ i\text{ impair }\}$ $\cup\{\beta_i\ ,\ 1\leq i\leq l-2,\ i\text{ impair }\}\ \cup\ \{\beta_{l-2}+\beta_{l-1}+\beta_l\}.$

TABLE 2. $\{\varepsilon_K\ ,\ K\in\mathcal{K}(\Pi)\}$ pour les algèbres de Lie simples classiques.

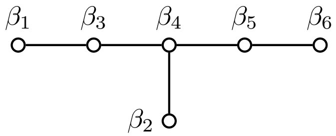
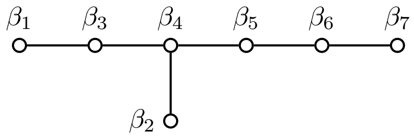
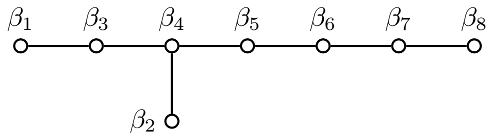
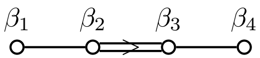
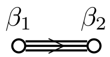
E_6		$\begin{pmatrix} 1&2&3&2&1\\ &&2&& \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ &&0&& \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&1&1&1&0\\ &&0&& \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ &&0&& \end{pmatrix}$.
E_7		$\begin{pmatrix} 2&3&4&3&2&1\\ &&2&&& \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&1&2&2&2&1\\ &&1&&& \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0&1&2&1&0&0\\ &&1&&& \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1\\ &&0&&& \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ &&1&&& \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ &&0&&& \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0\\ &&0&&& \end{pmatrix}$
E_8		$\begin{pmatrix} 2&4&6&5&4&3&2\\ &&3&&&& \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2&3&4&3&2&1&0\\ &&2&&&& \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&1&2&2&2&1&0\\ &&1&&&& \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0&1&2&1&0&0&0\\ &&1&&&& \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&0\\ &&0&&&& \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ &&1&&&& \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0\\ &&0&&&& \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0\\ &&0&&&& \end{pmatrix}$
F_4		$(\ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 2\ )$, $(\ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ )$, $(\ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 0\ )$, $(\ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ )$.
G_2		$(\ 2\ \ 3\ )$, $(\ 1\ \ 2\ )$.

TABLE 3. $\{\varepsilon_K\ ,\ K \in \mathcal{K}(\Pi)\}$ pour les algèbres de Lie simples exceptionnelles.

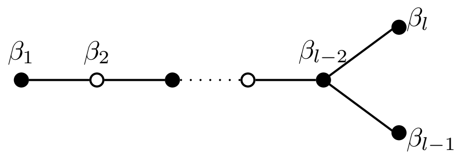
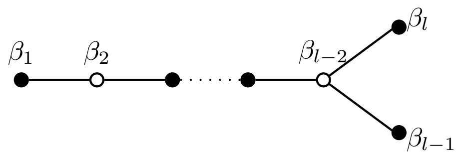
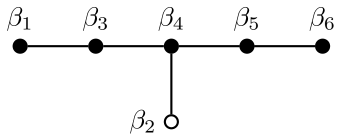
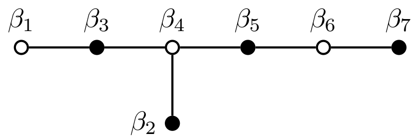
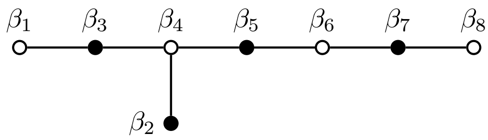
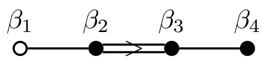
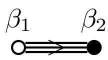
A_l, $l \geq 1$	
B_l, $l \geq 2$, l impair	
B_l, $l \geq 2$, l pair	
C_l, $l \geq 3$	
D_l, $l \geq 5$, l impair	
D_l, $l \geq 4$, l pair	
E_6	
E_7	
E_8	
F_4	
G_2	

TABLE 4. Sous-algèbres paraboliques quasi-réductives associées à une racine simple (Théorème 5.8)

$\mathfrak{g}_0$:	rg $\mathfrak{g}$:	$\mathfrak{k}_0$:	rg $\mathfrak{k}$:	$\dim \widehat{\mathfrak{a}}$:	$k_{\mathfrak{g}}$:	$\mathfrak{m}_0$:	$k_{\mathfrak{m}}$:	$\mathfrak{b}$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}), n \geq 2$	$n-1$	$\mathfrak{so}(n)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$n-1$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	0	0	**(B)** si $n > 2$, **(C)** si $n = 2$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H}), n \geq 2$	$2n-1$	$\mathfrak{sp}(n)$	n	$n-1$	n	$\mathfrak{su}(2)^n$	n	rien
$\mathfrak{su}(p,q), 1 \leq p < q$	$p+q-1$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p) \oplus \mathfrak{u}(q))$	$p+q-1$	p	$\left[\frac{p+q}{2}\right]$	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(q-p)$	$\left[\frac{q-p}{2}\right]$	**(C)**
$\mathfrak{so}(2p,2q+1)$, $1 \leq p \leq q$	$p+q$	$\mathfrak{so}(2p) \oplus \mathfrak{so}(2q+1)$	$p+q$	$2p$	$p+q$	$\mathfrak{so}(2q-2p+1)$	$q-p$	**(C)**
$\mathfrak{so}(2p,2q+1)$, $0 \leq q < p$,	$p+q$	$\mathfrak{so}(2p) \oplus \mathfrak{so}(2q+1)$	$p+q$	$2q+1$	$p+q$	$\mathfrak{so}(2p-2q-1)$	$p-q-1$	rien si $p \neq q+1$, **(C)** si $p = q+1$.
$\mathfrak{sp}(p,q), 1 \leq p \leq q$	$p+q$	$\mathfrak{sp}(p) \oplus \mathfrak{sp}(q)$	$p+q$	p	$p+q$	$\mathfrak{su}(2)^p \oplus \mathfrak{sp}(q-p)$	q	rien
$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}), n \geq 1$	n	$\mathfrak{u}(n)$	n	n	n	0	0	**(C)**
$\mathfrak{so}(2p+1,2q+1)$, $1 \leq p < q$, sauf $\mathfrak{so}(1,1)$ ou $\mathfrak{so}(1,3)$	$p+q+1$	$\mathfrak{so}(2p+1) \oplus \mathfrak{so}(2q+1)$,	$p+q$	$2p+1$	$2\left[\frac{p+q+1}{2}\right]$	$\mathfrak{so}(2q-2p)$	$2\left[\frac{q-p}{2}\right]$	rien si $q \geq p+2$, **(A)** si $q = p+1$, **(B)** si $q = p$.
$\mathfrak{so}(2p,2q)$, $1 \leq p \leq q$, sauf $\mathfrak{so}(2,2)$	$p+q$	$\mathfrak{so}(2p) \oplus \mathfrak{so}(2q)$	$p+q$	$2p$	$2\left[\frac{p+q}{2}\right]$	$\mathfrak{so}(2q-2p)$	$2\left[\frac{q-p}{2}\right]$	**(C)**
$\mathfrak{so}^*(2n), n \geq 3$	n	$\mathfrak{u}(n)$	n	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$2\left[\frac{n}{2}\right]$	$\mathfrak{su}(2)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ si n paire et, $\mathfrak{su}(2)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \oplus \mathbb{R}$ sinon	$\left[\frac{n}{2}\right]$	**(C)**
EI	6	$\mathfrak{sp}(4)$	4	6	4	0	0	**(B)**
EII	6	$\mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2)$	6	4	4	$\mathbb{R}^2$	0	**(C)**
$EIII$	6	$\mathfrak{so}(10) \oplus \mathbb{R}$	6	2	4	$\mathfrak{su}(4) \oplus \mathbb{R}$	2	**(C)**
EIV	6	$\mathfrak{f}_4$	4	2	4	$\mathfrak{so}(8)$	4	rien
EV	7	$\mathfrak{su}(8)$	7	7	7	0	0	**(C)**
EVI	7	$\mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2)$	7	4	7	$\mathfrak{su}(2)^3$	3	**(C)**
$EVII$	7	$\mathfrak{e}_6 \oplus \mathbb{R}$	7	3	7	$\mathfrak{so}(8)$	4	**(C)**
$EVIII$	8	$\mathfrak{so}(16)$	8	8	8	0	0	**(C)**
EIX	8	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	8	4	8	$\mathfrak{so}(8)$	4	**(C)**
FI	4	$\mathfrak{sp}(3) \oplus \mathfrak{su}(2)$	4	4	4	0	0	**(C)**
FII	4	$\mathfrak{so}(9)$	4	1	4	$\mathfrak{so}(7)$	3	rien
G	2	$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$	2	2	2	0	0	**(C)**

TABLE 5. Données concernant les algèbres de Lie simples réelles, non complexes, non compactes.