Seiberg-Witten invariants and real curves

Damien Gayet

Invariants de Seiberg-Witten et courbes réelles

Damien Gayet

30 avril 2004

Abstract

On a compact oriented four-manifold with an orientation preserving involution c, we count solutions of Seiberg-Witten equations, which are moreover symmetrical in relation to c, to construct "real" Seiberg-Witten invariants. Using Taubes' results, we prove that on a symplectic almost complex manifold with an antisymplectic and antiholomorphic involution, this invariants are not all trivial, and that the canonical bundle is represented by a real holomorphic curve.

Résumé

Sur une varit compacte de dimension 4 oriente possdant une involution c prservant l'orientation, nous comptons les solutions symtriques par rapport c des quations de Seiberg-Witten pour dfinir des invariants "rels" de Seiberg-Witten. Dans le cas d'une varit symplectique presque complexe munie d'une involution antisymplectique et antiholomorphe, nous utilisons les rsultats de Taubes pour dmontrer d'une part que les invariants rels ne sont pas tous nuls, d'autre part que le fibr canonique de la varit est reprsent par une courbe relle holomorphe.

Code matière AMS : 14P25, 53D05, 57R57.

0.1 Introduction

Peu aprs l'apparition dans [Wi] des invariants de Seiberg-Witten, Taubes montre que ces invariants ne sont pas tous triviaux sur une varit symplectique. Il en dduit, entre autres, l'existence de courbes J-holomorphes représentant le fibr canonique de la varit.

Le but de cet article est d'établir une version *relle* de ces rsultats, c'est dire d'obtenir des courbes non seulement holomorphes, mais aussi invariantes par une structure relle sur la varit symplectique. Plus prcisment, considrons une varit symplectique relle (X, ω, J, c), o ω et une forme symplectique, J une structure presque complexe compatible avec ω, et c une involution J-antiolomorphe et antisymplectique. Nous dmontrons le rsultat suivant :

Théorème 1 *Soit (X, ω, J, c) une varit de dimension 4 symplectique compacte relle, vrifiant $b_+ > 1$. Alors le fibr canonique est reprsent par une courbe J-holomorphe invariante par c, a priori singulire.*

Pour cela, nous nous plaons plus gnralement dans une varit riemannienne (X, g) de dimension 4 oriente munie d'une involution c isomtrique et prservant l'orientation. Nous dfinissons d'abord la notion de structure de Spin^c c-relle. Sur ces structures, la diffrentielle dc agissant sur le fibr des repres orthonorms orients se relve en une involution antilinaire. Cette structure est ncessaire pour pouvoir construire des courbes relles. En effet, dans une varit presque complexe relle, la structure standard tordue par un fibr en cercles reprsent par une courbe J-holomorphe relle est c-relle. Il est facile de constater que la structure standard tordue par le fibr canonique vrifie cette condition ncessaire.

Nous considérons alors les solutions "symtriques" par rapport c des quations de Seiberg-Witten. L'espace des solutions, tout comme dans le cas classique, jouit de proprits d'invariance, de lissit, de compacit, d'orientabilit, et permet de dfinir un invariant $SW(\mathfrak{s}, c) \in \mathbb{Z}$ indpendant de la mtrique pour laquelle c est isomtrique, et vrifiant pour tout diffomorphisme f de la varit $SW(f^*\mathfrak{s}, fcf^{-1}) = SW(\mathfrak{s}, c)$.

Dans le cas d'une varit presque complexe symplectique relle, la dmonstration par Taubes du cas classique s'adapte notre situation et permet de dmontrer que l'invariant rel est non nul pour la structure standard, twist ou non par le fibr canonique.

Pour construire une courbe J-holomorphe reprsentant le fibr canonique, Taubes utilise une suite de dformations des quations classiques. L'invariant tant indiffrent ces dformations, sa non trivialit implique chaque tape l'existence d'une solution. En remarquant qu'une solution dfinit entre autres une section du fibr canonique (dans le cas twist), Taubes montre ensuite que que la suite du lieu des zros de ces sections converge vers une courbe J-holomorphe. Sans aucun effort supplmentaire que celui de constater que cette suite de zros est invariante dans notre cas par l'involution c, nous obtenons le thorme 1.

Perspectives. Taubes [Ta2] a en fait tabli que les invariants de Seiberg-Witten sur une varit symplectique sont gaux un certain type d'invariants de Gromov-Witten. Ceux-ci compte le nombre de courbes J-holomorphes de degr fix passant par un certain nombre de points fixes. Dans un travail à venir, nous esprons montrer de faon analogue que les invariants rels que nous avons construits sont gaux à un certain type d'invariants de Welschinger [We], comptant des courbes J-holomorphes relles.

Rsum des parties de l'article. Dans la premire partie, nous construisons les invariants rels de Seiberg-Witten, dans un cadre gnral. Nous expliquons d'abord quelles sont les structures de Spin^c c-relles. Ensuite nous montrons que l'involution se relve aux objets naturellement associs une structure de Spin^c c-relle : espaces de spineurs, espace des connexions sur l'espace des spineurs. Nous dfinissons les quations relles de Seiberg-Witten, puis nous tudions les proprits de l'espace des solutions, en particulier sa dimension. Dans la deuxime partie, nous montrons d'une part que dans une varit symplectique relle, les invariants construits ne sont pas tous nuls, et d'autre part que quand l'invariant d'une structure de Spin^c est non nul, on peut associer celle-ci une courbe J-holomorphe relle.

1 Construction d'un invariant réel de Seiberg-Witten

Soit X une variété lisse de dimension 4 orientée, munie d'une involution c lisse préservant l'orientation. Il existe toujours une structure riemanienne compatible avec cette situation topologique :

Lemme 1 *L'ensemble Met(X, c) des métriques riemaniennes pour lesquelles c est une isométrie est un convexe non vide.*

Démonstration . Il est clair que $\mathrm{Met}(X, c)$ est un convexe. Montrons qu'il est non vide. L'ensemble des mtriques riemannienne sur X de volume 1 est un convexe compact, et l'application continue qui une mtrique g associe le tir en arrire c^*g laisse cet ensemble invariant. En effet,

$$\int_X vol_{c^*g}(x) = \int_X \det d_x c\ .vol_g(c(x)) = \int_X \det d_x c\ .\det d_{c(x)} c\ .vol_g(x) = \int_X vol_g(x).$$

Le thorme de Schauder implique maintenant le rsultat. □

1.1 Structures relles

1.1.1 Une remarque clairante pour la suite

Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une application lisse dfinie sur le plan complexe. Si f est holomorphe, l'involution antilinaire $\kappa(f)$ dfinie par $\kappa(f)(z) = \bar{f}(\bar{z})$ est galement holomorphe. Si de plus f est invariante par κ, alors le lieu des zros de f est une sous-vart analytique complexe relle, c'est dire invariante par conjugaison. La suite de cette section explique comment construire des quivalents de κ sur un fibr en droites, puis sur les objets associs une structure de Spin^c.

1.1.2 Fibrs en cercles c-rels

Soit Q un fibr principal en cercles. Il nous faut savoir quand il est possible de relever c en une involution antilinaire sur Q. Pour cela, nous avons besoin des groupes et du faisceau suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &= \{f \in \Gamma(X, \mathrm{U}(1))\} \\
r\mathcal{G} &= \{f \in \Gamma(X, \mathrm{U}(1)),\ f \circ c = f\} \\
r\mathcal{G}_\alpha &= \{f \in \Gamma(U_\alpha, \mathrm{U}(1)),\ f \circ c = f\}
\end{aligned}$$

Remarque : Sans perte de gnralit, on a suppos et on supposera toujours que les ouverts de trivialisation U_α sont invariants par c.

Lemme 2 *Soit Q un U(1)-fibr principal sur X. L'application $c : X \to X$ se relve en une application $c_Q : Q \to c^*Q$ vrifiant*

$$c_Q(\lambda\psi) = \bar{\lambda} c_Q(\psi)$$

pour toute application $\lambda \in \mathcal{G}$ et toute section $\psi \in \Gamma(Q)$ si et seulement si $c^*Q \otimes Q$ est trivial en tant qu'lment de $H^1(X, \mathcal{G})$. Il existe une telle application involutive si et seulement si $c^*Q \otimes Q$ est trivial en tant qu'lment de $H^1(X, r\mathcal{G})$. Dans ce dernier cas, l'ensemble de telles involutions est isomorphe $r\mathcal{G}$.

Démonstration . Si $h_{\alpha\beta} \in \mathrm{U}(1)$ sont les fonctions de transition de $Q \in H^1(X, \mathrm{U}(1))$, le fibr $c^*Q \otimes Q$ a pour fonctions de transitions $h_{\alpha\beta}(c)h_{\alpha\beta}$. Ces fonctions sont des lments du faisceau $r\mathcal{G}$, et donc dfinissent un lment de $H^1(X, r\mathcal{G})$.

Maintenant, soient ϵ_α des trivialisations locales de Q, telles que $\epsilon_\alpha = h_{\alpha\beta}\epsilon_\beta$. Si l'involution se relve, il existe des fonctions $\kappa_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathrm{U}(1))$ telles que $c_Q(\epsilon_\alpha) = \kappa_\alpha \epsilon_\alpha(c)$. On a alors

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(c)\kappa_\beta = \kappa_\alpha h_{\alpha\beta},$$

ce qui montre que le cocycle $\{h_{\alpha\beta}(c)h_{\alpha\beta}\}$ est nul dans $H^1(X, \mathrm{U}(1))$, et donc que $c^*Q = -Q$. Si maintenant l'application c_Q est une involution, on a $\kappa_\alpha \in r\mathcal{G}_\alpha$, ce qui signifie cette fois que le cocycle $\{h_{\alpha\beta}(c)h_{\alpha\beta}\}$ est nul dans $H^1(X, r\mathcal{G})$. La rciproque suit la voie inverse. Enfin, soit c_Q un relvement involutif de c Q. Il est facile de vrifier que toute autre relvement involutif est un produit de c_Q par un lment de $r\mathcal{G}$. □

Définition 1 *Un fibr Q est dit c-rel s'il existe une involution antilinaire de Q dans c^*Q.*

Les propositions suivantes montrent que cette dfinition est naturelle :

Proposition 1 *Soit (X, J) une varit presque complexe, et c une involution J-antiholomorphe. Si C est une courbe J-complexe plonge dans (X, J), invariante par c, alors le U(1)-fibr associ est c-rel.*

Démonstration . Supposons d'abord que J est intgrable. Soient (f_α) des applications holomorphes irréductibles dfinissant localement C. L'antiholomorphie de c implique que $\bar{f}_\alpha(c)$ est holomorphe, et l'invariance de C par c implique que f_α et $\bar{f}_\alpha(c)$ s'annulent en même temps. Il existe donc des applications g_α holomorphes ne s'annulant pas et des entiers positifs m, telles que $\bar{f}_\alpha(c) = g_\alpha f_\alpha^m$. On a donc aussi

$$f_\alpha = \bar{g}_\alpha(c)\bar{f}_\alpha^m(c) = \bar{g}_\alpha(c) g_\alpha^m f_\alpha^{m^2}.$$

L'application $\bar{g}_\alpha(c)g_\alpha^m$ est holomorphe, donc l'égalité n'est possible que si $m = 1$. De plus $g_\alpha \bar{g}_\alpha(c)$ vaut 1 en dehors de C et donc partout. On a donc $g_\alpha/|g_\alpha| \in r\mathcal{G}_\alpha$. Maintenant, le cocycle

$$\{h_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{|f_\alpha|}\frac{|f_\beta|}{f_\beta}\}$$

dfinit le fibr en cercles associ C, et puisque $h_{\alpha\beta}(c)h_{\alpha\beta} = g_\beta/|g_\beta|.|g_\alpha|/g_\alpha$, le fibr est c-rel.

Le cas gnral se ramne au cas intgrable aprs avoir remarqu qu'il est possible de construire une structure presque complexe intgrable sur U_α gale J aux points de C. □

Proposition 2 *Soit (X, J) une varit presque complexe munie d'une involution J-antiholomorphe. Alors le fibr anticanonique K^{-1} est c-rel.*

Démonstration . Le fibr K^{-1} est identifi aux 2-covecteurs complexes de type $(0, 2)$. L'application $c_{K^{-1}}$ qui envoie ω sur $\overline{\omega} \circ dc^{-1}$ relve c, prserve K^{-1}, est antilinaire et involutive. □

1.1.3 Une involution sur $\mathrm{Spin}^c(X)$

Un fibr en cercles Q est c-rel si, entre autres, $c^*Q = -Q$. Avant de dfinir la notion de structure de Spin^c c-relle, nous rappelons la construction de l'involution sur $\mathrm{Spin}^c(X)$ envoyant une structure de Spin^c $\mathfrak{s}$ de fibr dterminant Q sur la structure de Spin^c $-\mathfrak{s}$ de fibr dterminant $-Q$.

Discussion locale. Ce paragraphe reprend l'exposé de Morgan dans son livre [Mo], pp. 100-102. Définissons d'abord la conjugaison complexe sur l'algèbre de Clifford complexe $Cl(4) \otimes \mathbb{C}$. Elle applique simplement e sur $\bar{e}$. Par induction sur $\mathrm{Spin}^c(4) \subset Cl(4) \otimes \mathbb{C}$, on obtient la conjugaison sur $\mathrm{Spin}^c(4)$.

On sait que $Cl(4)$ est isomorphe en tant qu'algèbre à $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{H})$, où $\mathbb{H}$ est le corps des quaternions. Cet ensemble agit sur $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ par multiplication matricielle quaternionique à gauche, tandis que l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ agit à droite par multiplication à droite par i. Maintenant, la multiplication à droite par j définit une application τ de $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ dans lui-même vérifiant pour tout $e \in Cl(4) \otimes \mathbb{C}$ et tout $s \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$

$$\tau(e \cdot s) = \bar{e} \cdot \tau(s).$$

Globalisation. Soit maintenant P le SO(4)-fibré principal des repères orthonormés directs. Si $\mathfrak{s}$ une structure de Spin^c, $\mathfrak{s}$ est un revêtement double de $P \times_X Q$, o Q est le U(1)-fibr dterminant de $\mathfrak{s}$. L'application induisant l'identit sur P et la conjugaison complexe sur Q dfinit par tir en arrire une nouvelle structure de Spin^c note $-\mathfrak{s}$. On remarque que le fibr dterminant de $-\mathfrak{s}$ est $-Q$. Il existe alors une application antilinéaire

$$\tau : \mathfrak{s} \to -\mathfrak{s}.$$

Cette application définit un isomorphisme antilinéaire

$$\tau_S : S(\mathfrak{s}) \to S(-\mathfrak{s}),$$

où $S(\mathfrak{s})$ est le fibré de spineurs $\mathfrak{s} \times_{\mathrm{Spin}^c(4)} \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} = S^+ \oplus S^-$. On a de plus par construction

$$\tau_S(e \cdot \psi) = \bar{e} \cdot \tau_S(\psi)$$

pour toute section e de $Cl(TX) \otimes \mathbb{C} \simeq TX \otimes \mathbb{C}$ et toute section ψ de $S(\mathfrak{s})$. Enfin, τ_S prserve la dcompostion en spineurs positifs et ngatifs.

1.1.4 Structures de Spin^c réelles

La diffrentielle dc définit un morphisme $dc : P \to c^*P$ relevant $c : X \to X$. Appelons $\mathcal{C}_\mathfrak{s}$ l'ensemble des relèvements de dc à $\mathfrak{s}$ antilinéaires.

Proposition 3 *Soit $\mathfrak{s}$ une structure de Spin^c et Q son fibré déterminant. Si Q est c-rel, $\mathfrak{s}$ définit naturellement un élément μ de $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$, tel que $\mu = 0$ si et seulement si $c^*\mathfrak{s} = -\mathfrak{s}$. Dans ce cas $\mathcal{C}_\mathfrak{s} \neq \emptyset$, et il existe un lment $\epsilon(\mathfrak{s}) \in \mathbb{Z}_2$ tel que $\forall c_\mathfrak{s} \in C_\mathfrak{s}$, $c_\mathfrak{s}^2 = \epsilon(\mathfrak{s}) Id$.*

Démonstration . Soit e_α une trivialisation de P, et $g_{\alpha\beta}$ les fonctions de transition valeurs dans SO(4) vrifiant $e_\beta = e_\alpha g_{\alpha\beta}$. Nommons de plus $\tilde{e}_\alpha$ des trivialisations du fibr $\mathfrak{s}$, $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ les fonctions de transitions de $\mathfrak{s}$ et $h_{\alpha\beta} = \det \tilde{g}_{\alpha\beta}$ celles de Q. Supposons enfin que les $\tilde{e}_\alpha$(resp. $\tilde{g}_{\alpha\beta}$) sont des relevés de e_α (resp. $g_{\alpha\beta}$). Soit k_α des applications valeurs dans SO(4), telles que

$$d_x c(e_\alpha) = e_\alpha(c(x)) k_\alpha^{-1}(x),$$

et κ_α des applications appartenant $r\mathcal{G}_\alpha$ telles que

$$h_{\alpha\beta}(c) = \kappa_\alpha^{-1}\bar{h}_{\alpha\beta}\kappa_\beta.$$

Choisissons des relevés arbitraires $\tilde{k}_\alpha$ à $\mathrm{Spin}^c(4)$ des fonctions $k_\alpha \times \kappa_\alpha$. Les cocycles

$$\tilde{k}_\alpha^{-1}(\tilde{g}_{\alpha\beta}\bar{h}_{\alpha\beta})\tilde{k}_\beta$$

et $\tilde{g}_{\alpha\beta}(c)$ ont même image par projection sur $\mathrm{SO}(4) \times \mathrm{U}(1)$, si bien qu'ils ne diffrent que d'un signe $\mu_{\alpha\beta}$. Leur rapport dfinit donc un lment $\{\mu_{\alpha\beta}\} \in H^1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Si μ est nul, il existe des constantes $\eta_\alpha \in \{\pm 1\}$ telles que $\mu_{\alpha\beta} = \eta_\alpha/\eta_\beta$. Alors l'application

$$c_{\mathfrak{s}}(\tilde{e}_\alpha) = \tilde{e}_\alpha(c)\tilde{k}_\alpha^{-1}\eta_\alpha$$

est bien définie. En projetant sur les deux facteurs $\mathrm{SO}(4)$ et $\mathrm{U}(1)$, on constate que $c_{\mathfrak{s}}^2 = \pm\mathrm{Id}$. □

Définition 2 *Sous les hypothse de la proposition prcdente, on dira que* $\mathfrak{s}$ *est c-relle si* $\epsilon(\mathfrak{s}) = 1$.

1.1.5 Structure relle et fibr de spineurs

Proposition 4 *Soit* $\mathfrak{s}$ *une structure de* $Spin^c$ *c-relle. Alors il existe une isométrie antilinaire* $\kappa_S : \Gamma(S) \to \Gamma(S)$ *stable pour les deux sous-fibrs* S^+ *et* S^-*, et induisant sur* $\Gamma(End(S)) \simeq \Omega^*(X, \mathbb{C})$ *le tir en arrire barr :*

$$\kappa_\Omega(\omega) = \overline{c^*\omega}.$$

Démonstration . On a vu qu'il existait une application anticomplexe $\tau_S : S(\mathfrak{s}) \to S(-\mathfrak{s})$ induisant la conjugaison sur les formes complexes sur X. Puisque $\mathfrak{s}$ est relle, on a d'autre part $-\mathfrak{s} = c^*\mathfrak{s}$, ce qui donne un isomorphisme $\nu_S : S(-\mathfrak{s}) \to S(c^*\mathfrak{s})$ tel que pour tout champ de vecteur e,

$$\nu_S(e \cdot \psi) = dc(e) \cdot \nu_S(\psi).$$

Au total, on obtient une application $c_S : S(\mathfrak{s}) \to S(c^*\mathfrak{s})$ telle que l'application

$$\begin{array}{rcl} \kappa_S : \Gamma(S) & \to & \Gamma(S) \\ \kappa_S(\psi) & = & c_S \circ \psi \circ c \end{array}$$

vérifie, en identifiant de facon naturelle TX avec T^*X,

$$\kappa_S(\omega \cdot \psi) = \kappa_\Omega(\omega) \cdot \kappa_S(\psi).$$

Enfin par construction l'application laisse stable les deux composantes $S^\pm$ de S. □

1.1.6 Involution sur l'espace des connexions

Commenons par l'espace $\mathcal{A}(Q)$ des connexions unitaires d'un $\mathrm{U}(1)$-fibr Q.

Proposition 5 *Soit* Q *un* $U(1)$*-fibr principal c-rel. Alors il existe une involution antilinaire* $\kappa_{\mathcal{A}}$ *de* $\mathcal{A}(Q)$ *dans lui-même, telle que la courbure* $F_{\kappa_{\mathcal{A}}(A)}$ *vrifie*

$$F_{\kappa_{\mathcal{A}}(A)} = \kappa_\Omega(F_A).$$

Démonstration . Soit$A$ une connexion hermitienne sur Q. Si ϵ_α est une trivialisation locale de Q, il existe des 1-formes A_α valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $A\epsilon_\alpha = iA_\alpha\epsilon_\alpha$. Par ailleurs, puisque Q est c-rel, il existe des fonctions κ_α valeurs dans $r\mathcal{G}_\alpha$ telles que $c_Q\epsilon_\alpha(c) = \epsilon_\alpha\kappa_\alpha^{-1}$. Soit $\kappa_{\mathcal{A}}(A)$ la connexion dfinie par

$$\kappa_{\mathcal{A}}(A)\epsilon_\alpha = (-ic^*A_\alpha + d\log\kappa_\alpha)\epsilon_\alpha.$$

On vrifie facilement que cette connexion est bien dfinie et qu'elle est involutive. La courbure de A est $F_A = d(iA_\alpha) = d(iA_\beta)$, et donc la courbure de son image est $d(-ic^*A_\alpha) = \kappa_\Omega(F_A)$. □

Rappelons la proposition suivante :

Proposition 6 *Soit $\mathfrak{s}$ une structure de Spin^c et Q son fibr dterminant, ainsi qu'une connexion unitaire A sur Q. Alors il existe une unique connexion ∇_A sur l'espace des spineurs induisant la connexion de Levi-Civit ∇ sur P et la connexion A sur Q.*

Lemme 3 *Soit $\mathfrak{s}$ une structure de Spin^c c-réelle, et Q son fibré déterminant. Pour toute connexion $A \in \mathcal{A}(Q)$ on a les relations de commutation suivantes :*

$$\nabla = \kappa_\Omega \nabla \kappa_\Omega,$$
$$\nabla_{\kappa_{\mathcal{A}}(A)} = \kappa_S \nabla_A \kappa_S.$$

Démonstration . Soient (e_i) une section orthonorme de TX sur U_α. La connexion de Levi-Civit s'crit

$$\nabla e_i = \sum_{i=1}^{4} \omega_{ij} e_j,$$

o ω_{ij} sont des 1-formes valeurs relles. Composons par le tir en arrire de c :

$$c^* \nabla e_i = \sum c^* \omega_{ij} c^* e_j.$$

Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4 *Soient $e'_i = c^* e_i$. Si ω'_{ij} est l'ensemble des 1-formes dfinissant la connexion de Levi-Civit dans la base orthonorme e'_i, alors on a $\omega'_{ij} = c^* \omega_{ij}$.*

Démonstration . En effet, si $\nabla e_j(e_i) = \sum \Gamma^k_{ij} e_k$, avec

$$\Gamma^k_{i,j} = \frac{1}{2} g^{il} (g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l}),$$

o g^{il} dfinit la mtrique duale et $g_{jl,k} = dg_{jl}(e_k)$. Dans la trivialisation e'_i, les g'_{ij} gaux g_{ij} car c est une isomtrie, et donc $g'_{jl,k} = c^* g_{jl,k}$. Au total, on constate que $\Gamma^{k'}_{ij} = c^* \Gamma^k_{ij}$. $\square$

Grâce ce lemme, on obtient donc aisment que $\kappa_\Omega \nabla \kappa_\Omega = \nabla$. Maintenant soit $A \in \mathcal{A}(Q)$. La connexion spinorielle ∇_A s'crit en coordonnes

$$\nabla_A = A_\alpha \mathrm{Id} + \sum_{i=1}^{4} \omega_{i,j} e_i \cdot e_j,$$

o $\cdot$ est la multiplication de Clifford. Grâce au rsultat sur la connexion de Levi-Civit, il est alors ais de constater que $\nabla_{\kappa_{\mathcal{A}}(A)} = \kappa_S \nabla_A \kappa_S$. $\square$

1.2 Equations relles de Seiberg-Witten

Les quations que nous dfinissons sont celles de Seiberg-Witten, mais nous imposons aux inconnues, c'est--dire un spineur positif et une connexion, d'être invariants par l'involution relle. Rappelons, avant de dcrire l'espace des solutions, les quations classiques.

1.2.1 Les structures supplmentaires

Formes autoduales. Rappelons que si $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est une base orthonormale locale directe, l'toile de Hodge est dfinie de la faon suivante :

$$* : \Lambda^2 TX \to \Lambda^2 TX$$
$$e_i \wedge e_j \to e_r \wedge e_s$$

o (i, j, r, s) est une permutation paire de (1,2,3,4). Par ailleurs via l'isomorphisme entre $\Lambda^* TX \otimes \mathbb{C}$ et End(S), le sous-espace $\Lambda^2_+ TX \otimes i\mathbb{R}$ s'identifie avec les endomorphismes de S^+ hermitiens de trace nulle.

Oprateur de Dirac. Soit ψ un spineur, c'est dire une section du fibr S, et ∇_A une connexion sur S. La drive $\nabla_A\psi$ est une section de $\Gamma(T^*X\otimes S)$. On peut, en utilisant l'identification entre $T^*X\otimes\mathbb{C}$ et $\mathrm{End}(S)$, dfinir maintenant l'oprateur de Dirac $D_A:\Gamma(S)\to\Gamma(S)$. L'oprateur envoie une section de $S^\pm$ sur une section de $S^\mp$. En coordonnes, on trouve

$$D_A\psi=\sum_{i=1}^{4}e_i\cdot\nabla_{e_i}\psi.$$

L'application quadratique q. Soit ψ un spineur positif, c'est dire une section de S^+. Le spineur dfinit une 2-forme autoduale $q(\psi)$ à valeurs complexes pures (ou un endomorphisme de S^+ hermitien de trace nulle) en posant

$$q(\psi)=\psi\otimes\bar{\psi}-\frac{|\psi|^2}{2}\mathrm{Id}.$$

Dans une base locale de S^+, si $\psi=(\alpha,\beta)$, on a

$$q(\psi)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}|\alpha|^2-|\beta|^2 & 2\alpha\bar{\beta}\\ 2\bar{\alpha}\beta & -(|\alpha|^2-|\beta|^2)\end{pmatrix}.$$

1.3 Les quations

Soit X une varit compacte oriente riemannienne munie d'une structure de Spin^c. On appelle Q le fibr dterminant associ, et $\Gamma^+\times\mathcal{A}$ le produit $\Gamma(S^+)\times\mathcal{A}(Q)$. Pour toute 2-forme h autoduale, les quations perturbes de Seiberg-Witten ont pour inconnues un spineur positif ψ et une connexion unitaire A sur Q :

$$\begin{array}{rcl}(\psi,A)&\in&\Gamma^+\times\mathcal{A}\\ D_A\psi&=&0\\ F_A^+&=&q(\psi)+ih,\end{array}$$

o F_A^+ est la partie autoduale de la courbure de la connexion A.

1.4 Les quations relles

Les quations relles de Seiberg-Witten que nous dfinissons sont les mêmes, sauf que l'on impose ψ et A d'être invariants par les involution κ_S et $\kappa_{\mathcal{A}}$ construites prcdemment ; si

$$\begin{array}{rcl}r\Gamma^\pm&=&\{\psi\in\Gamma^\pm,\ \kappa_S\psi=\psi\}\\ r\mathcal{A}&=&\{A\in\mathcal{A}(Q),\ \kappa_{\mathcal{A}}(A)=A\}\\ a\Omega^*&=&\{\omega\in\Omega^*(X,\mathbb{R}),\ \kappa_\Omega\omega=-\omega\}\end{array}$$

les quations $E_h(\mathfrak{s},c)$ sont dfinies par

$$\begin{array}{rcl}(\psi,A)&\in&r\Gamma^+\times r\mathcal{A}\\ D_A\psi&=&0\\ F_A^+&=&q(\psi)+ih,\end{array}$$

o h est une 2-forme auto-duale anti-c-relle, c'est dire $h\in a\Omega^2_+$. On notera $M_h(\mathfrak{s},c)$ l'ensemble des solutions de $E_h(\mathfrak{s},c)$.

Groupe de jauge. Le sous-groupe $r\mathcal{G}\subset\mathcal{G}$ agit sur l'espace $r\Gamma^+\times r\mathcal{A}$ de la faon suivante :

$$f\ .\ (\psi,A)=(g\psi,\ A+gd(g^{-1})).$$

Il est facile de vrifier qu'il laisse invariant $M_h(\mathfrak{s},c)$. Par ailleurs le stabilisateur d'un lment (ψ,A) est trivial si ψ n'est pas le spineur nul, et est gal $\mathbb{Z}_2$ sinon. Dans le premier cas on dira que le couple (ψ,A) est irréductible. Enfin, on note $\mathcal{M}_h(\mathfrak{s},c)$ l'ensemble des classes d'quivalences de $M_h(\mathfrak{s},c)$ sous l'action de $r\mathcal{G}$.

1.5 Proprits de l'ensemble des solutions

1.5.1 Le thorme principal

Définition 3 *On appelle $a\mathcal{H}^1$ (resp. $a\mathcal{H}^2_+$) l'espace des 1-formes (resp. 2-formes autoduales) relles harmoniques anti-c-relles, i.e $a\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}^1 \cap a\Omega^1$ (resp. $a\mathcal{H}^2_+ = \mathcal{H}^2_+ \cap a\Omega^2$).*

Théorème 2 *Soit $(X,\ c,\ g)$ une varit relle compacte telle que $\dim a\mathcal{H}^2_+ > 0$. Alors pour toute 2-forme h anti-c-relle autoduale gnrique, et toute structure de Spin^c c-relle $\mathfrak{s}$, l'espace $\mathcal{M}_h(\mathfrak{s}, c)$ est une varit compacte oriente de dimension*

$$d = \dim a\mathcal{H}^1 - \dim a\mathcal{H}^2_+ + \frac{1}{8}(c_1(Q)^2 - \tau),$$

o τ est la signature de X et Q le fibr dterminant de $\mathfrak{s}$.

Si d est strictement positive, choisissons un point base dans X, et soit $r\mathcal{G}_0$ l'ensemble des lments de $r\mathcal{G}$ valant 1 en ce point. Soit $\mathcal{M}^0_h(\mathfrak{s}, c)$ le quotient de $M_h(\mathfrak{s}, c)$ par ce sous-groupe. Alors la projection $\mathcal{M}^0$ sur $\mathcal{M}$ dfinit un fibr U(1)-principal. Notons μ la premire classe de Chern de ce fibr. Nous pouvons maintenant dfinir les invariants rels de Seiberg-Witten.

Définition 4 • *Si la dimension d ci-dessus est strictement ngative ou impaire, $SW_h(\mathfrak{s}, c) = 0$.*
• *Si d est nul, $SW_h(\mathfrak{s}, c)$ est le nombre le nombre d'lments de $\mathcal{M}_h(\mathfrak{s}, c)$ compts avec leur signe.*
• *Si d est strictement positive et paire,*

$$SW_h(\mathfrak{s}, c) = \int_{\mathcal{M}_h(\mathfrak{s},c)} \mu^{d/2},$$

Proposition 7 *Si $\dim a\mathcal{H}^2_+ > 1$, l'invariant dfini ci-dessus est indpendant de la perturbation h et de la mtrique pour laquelle c est isomtrique. On appelle $SW(\mathfrak{s}, c)$ cet entier relatif. De plus, si f est un diffomorphisme sur X on la relation :*

$$SW(\mathfrak{s}, fcf^{-1}) = SW(f^*\mathfrak{s}, c).$$

Nous allons dmontrer ce thorme en plusieurs temps. D'abord nous analyserons les problmes d'indices, ensuite celui de la transversalit, et enfin celui de la compacit.

1.5.2 L'indice

Le lemme suivant, bas sur les relations de covariances du lemme 3, tablit la covariance des quations de Seiberg-Witten sous l'action des involutions κ_S et$\kappa_{\mathcal{A}}$.

Lemme 5 *Soit l'application f dfinie par*

$$\begin{array}{rcl} f : \Gamma^+ \times \mathcal{A} \times \Omega^2_+ & \to & \Gamma^- \times i\Omega^2_+ \\ (\psi,\ A,\ h) & \mapsto & (D_A\psi,\ F^+_A - q(\psi) - ih). \end{array}$$

On a alors $f \circ (\kappa_S, \kappa_{\mathcal{A}}, \kappa_\Omega) = (\kappa_S, \kappa_\Omega) \circ f$. On peut donc dfinir par restriction l'application :

$$f_r : r\Gamma^+ \times r\mathcal{A} \times a\Omega^2_+ \to r\Gamma^- \times ia\Omega^2_+,$$

Démonstration du lemme. Rappelons en effet que $\nabla_A\psi$ est valeurs dans $T^*X \otimes S^+$, et D_A fait simplement agir multiplication de Clifford de T^*X sur S^+. On a donc

$$D_A = A_\alpha \cdot \mathrm{Id} + \sum_{i=1}^{4} \omega_{i,j} \cdot e_i \cdot e_j.$$

Grâce au lemme 3, on obtient que $\kappa_S D_A = D_A \kappa_S$. Pour la deuxime coordonne de l'application, il suffit d'abord de remarquer que d'une part $F_A = dA_\alpha$, ensuite que $(\kappa_\Omega F)^+ = \kappa_\Omega(F^+)$ puisque c est une isomtrie. Montrons enfin que $q \circ \kappa_S = \kappa_\Omega \circ q$. On a $q(\psi) = \psi \otimes \bar{\psi} - |\psi|^2\mathrm{Id}$, ce qui donne

$$q(\kappa_S\psi) = \kappa_S\psi \otimes \overline{\kappa_S\psi} - |\kappa_S\psi|^2\mathrm{Id} = \kappa_\Omega(\psi \otimes \bar{\psi}) - c^*|\psi|^2\kappa_\Omega(\mathrm{Id}) = \kappa_\Omega(q(\psi)).$$

□

Etudions maintenant la linarisation de f_r. Remarquons d'abord les galits suivantes concernant les tangents :

$$\begin{aligned} T(r\Gamma^+ \times r\mathcal{A} \times a\Omega^2_+) &= r\Gamma^+ \times ia\Omega^1 \times a\Omega^2_+ \\ T(r\Gamma^- \times ia\Omega^2_+) &= r\Gamma^- \times ia\Omega^2_+. \end{aligned}$$

La linarisation de f_r donne :

$$\begin{aligned} df_r : T(r\Gamma^+ \times r\mathcal{A} \times a\Omega^2_+) &\rightarrow T(r\Gamma^- \times ia\Omega^2_+) \\ (\psi', a, h') &\mapsto (D_A(\psi') - ia \cdot \psi \ ; \ (ida)^+ - 2q(\psi, \psi') - ih'). \end{aligned}$$

L'algbre de Lie du groupe de jauge $r\mathcal{G}$ est par ailleurs $ia\Omega^0$. Nous avons donc calculer l'indice du complexe suivant, tir de la linarisation en une solution (ψ, A) de l'action de $r\mathcal{G}$ et des quations relles de Seiberg-Witten :

$$ia\Omega^0 \rightarrow r\Gamma^+ \times ia\Omega^1 \times a\Omega^2 \xrightarrow{df_r} r\Gamma^- \times ia\Omega^2_+,$$

la premire fiche tant donne par $f \mapsto (-f\psi,\ 2df,\ 0)$. L'indice d'un oprateur ne dpendant que de la partie principale de l'oprateur, le complexe elliptique prcdent se rsume en la somme de deux complexes, $a\Omega^0 \overset{d}{\rightarrow} a\Omega^1 \overset{d^+}{\rightarrow} a\Omega^2_+$, et $0 \rightarrow r\Gamma^+ \overset{D_A}{\rightarrow} r\Gamma^-$.

Afin de calculer l'indice du second complexe, on remarque que la mutliplication complexe droite sur Γ^+ envoyant ψ sur $\psi.i$ envoie $r\Gamma^\pm$ sur $a\Gamma^\pm$. Cette application est linaire et inversible, et commute avec l'oprateur D_A. On obtient donc Ind $D_{A|r\Gamma^+} = \frac{1}{2}$Ind D_A.

En ce qui concerne l'indice du premier complexe, nous avons le

Lemme 6 *L'indice du complexe* $a\Omega^0 \overset{d}{\rightarrow} a\Omega^1 \overset{d^+}{\rightarrow} a\Omega^2_+$ *est gal* $-\dim a\mathcal{H}^1 + \dim a\mathcal{H}^2_+$.

Démonstration . L'indice du complexe est gal la somme alterne des dimensions des groupes de cohomologie associs la suite. Le premier groupe est simple calculer : si f est une fonction vrifiant la fois $df = 0$ et $c^*f = -f$, f est la constante nulle.

Si α appartient coker $d_{|a\Omega^0} \cap \ker d^+$, alors α est orthogonale $d(a\Omega^0)$. Si f est une fonction quelconque valeurs relles, $f = f_r + f_a$, o $c^*f_r = f_r$ et $c^*f_a = -f_a$. On a alors

$$(\alpha, df) = (\alpha, df_r) = (c^*\alpha, c^*df_r) = (-\alpha, df_r) = 0.$$

Cela signifie que $\delta\alpha = \star d \star \alpha = 0$. Puisque $2d^+\alpha = d\alpha + d \star \alpha$, α est en fait harmonique. Le second groupe de cohomologie est donc $a\mathcal{H}^1$.

Calculons maintenant le troisime groupe de cohomologie du complexe. Si $\omega \in a\Omega^2_+$ est dans coker $d^+_{|a\Omega^1}$, on dmontre comme prcdemment qu'il est en fait orthogonal $d^+\Omega^1(X, \mathbb{R})$, ce qui ajout l'autodualit de ω implique que ω est harmonique, et que le troisime groupe est $a\mathcal{H}^2_+$. □

1.6 Transversalit

Tout comme dans le cas classique, on dmontre d'abord grâce au thorme de Sard-Smale que pour une perturbation h gnrique, $\mathcal{M}_h(\mathfrak{s}, c)$ est une varit lisse de la dimension d, aux points *irrductibles.* L'lment vrifier dans notre cas est que df_r est surjective aux solutions irrductibles de $E_h(\mathfrak{s}, c)$. Ensuite, l'limination des solutions irrductibles se fait par le lemme suivant, o la condition $\dim a\mathcal{H}^2_+ > 0$ est utilise.

Lemme 7 *Si* $\dim a\mathcal{H}^2_+ > 0$*, alors pour toute perturbation* h *gnrique, pour toute structure* $\mathfrak{s}$ *de Spin*^{c} *relle, il n'y a pas de solution rductible de* $E_h(\mathfrak{s}, c)$*.*

Démonstration . S'il existait une solution rductible, on aurait $F_A^+ = ih$, avec A et ih c-rels. En crivant $A = A_0 + ia$, avec $a \in a\Omega^1$ et A_0 une connexion base sur le fibr dterminant, on constate que l'image par F_A^+ de l'ensemble des solutions relles rducibles est un espace affine. Si la perturbation autoduale ih est orthogonale cette image, on dmontre comme précédemment que h est harmonique. La codimension de l'image est donc $\dim a\mathcal{H}^2_+$. □

1.7 Orientation

Nous renvoyons au livre de Morgan [Mo] pour la discussion sur l'orientation dans le cas classique, et qui s'applique *mutatis mutandis* notre situation. Nous ne donnons que la

Proposition 8 *Le choix d' orientations sur* $a\mathcal{H}^1$ *et sur* $a\mathcal{H}^2_+$ *dtermine une orientation sur* $\mathcal{M}_h(\mathfrak{s}, c)$ *pour toute perturbation* h.

1.8 Compacit

La compacit des varits $\mathcal{M}_h(\mathfrak{s}, c)$ se dduit de la compacit du cas classique en remarquant que la condition d'être c-rel est une condition ferme.

1.9 Une involution dans la thorie

Tout comme dans le cas classique, on a grâce l'involution sur $\mathrm{Spin}^c(X)$ dcrite au paragraphe 1.1.3 la

Proposition 9 *Soit* $\mathfrak{s}$ *une structure de Spin*^{c} *c-relle. Alors* $-\mathfrak{s}$ *est aussi c-relle, et de plus* $SW(\mathfrak{s}, c) = \pm SW(-\mathfrak{s}, c)$.

Démonstration . Si $c_\mathfrak{s}$ est une involution antilinaire dfinie sur $\mathfrak{s}$, et τ est l'application antilinaire dfinie prcdemment de $\mathfrak{s}$ dans $-\mathfrak{s}$, alors $c_{-\mathfrak{s}} = \tau \circ c_\mathfrak{s} \circ \tau$ dfinit une structure relle sur $-\mathfrak{s}$. De plus l'application

$$\begin{array}{rcl} \Gamma^+(\mathfrak{s}) \times \mathcal{A}(Q) & \to & \Gamma^+(-\mathfrak{s}) \times \mathcal{A}(-Q) \\ (\psi, A) & \mapsto & (\tau_S(\psi),\ A^*) \end{array}$$

induit un isomophisme entre les solutions de $SW_h(\mathfrak{s}, c)$ et celles de $SW_{-h}(-\mathfrak{s}, c)$. On en dduit le rsultat. $\square$

2 Calcul de l'invariant pour une varit symplectique

Comme dans le cas classique, les travaux de Taubes [Ta1] permettent de calculer les invariants rels de Seiberg-Witten pour certaines structures de Spin^c sur une varit symplectique relle.

2.1 Structures de Spin sur une varit symplectique

2.1.1 Stucture canonique

Soit (X, ω, J) une varit symplectique munie d'une structure presque complexe J compatible avec ω, c'est dire $g = \omega(., J.)$ est une mtrique riemanienne. Grâce J, le groupe de transformation SO(4) de P se rduit U(2) et permet de dfinir une structure naturelle de Spin^c $\mathfrak{s}_0$. En effet, le plongement $j : \mathrm{U}(2) \to \mathrm{Spin}^c(4)$ dfini par

$$j(A) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \det A \end{matrix} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

permet de relever les fonctions de transitions $g_{\alpha\beta} \in \mathrm{U}(2)$ des fonctions de transitions $\tilde{g}_{\alpha\beta} \in \mathrm{Spin}^c(4)$ dfinissant une structure de Spin^c $\mathfrak{s}_0$, de fibr dterminant le fibr anticanonique $K^{-1} = \Lambda^{0,2}$. Toutes les autres structures de Spin^c se dduisent de la canonique par la

Proposition 10 *Soit* $\mathcal{L}$ *un fibr U(1)-principal sur* X*, et* L *son fibr en droites complexes associ. Alors* $\mathfrak{s}_0 \otimes \mathcal{L}$ *est une structure de Spin*^{c} *et on a les relations :*

$$\begin{array}{rcl} S^+(L) & = & L \oplus K^{-1} \otimes L \\ S^-(L) & = & \Lambda^{0,1} \otimes L, \\ \det S^\pm(L) & = & K^{-1} \otimes L^2. \end{array}$$

De plus, toute structure de Spin^c *est de la forme prcdente.*

2.1.2 Structures relles

Nous pouvons, dans ce cadre, expliciter quelques structures naturelles. Donnons d'abord l'action de l'algbre de Clifford $\Omega(X, \mathbb{C})$ sur $S^{\pm}(L)$. Si e est un champ de vecteur de TX qu'on identifie avec son dual par la mtrique, et $s \in \Omega^{0,*}$, on a

$$e.s = \sqrt{2}(e^{0,1} \wedge s - e^{0,1} \angle \psi),$$

o $\angle$ est l'oprateur de contraction.

Ensuite soit ∇_C la connexion de Chern sur TX. Cette connexion vrifie $\nabla_C g = 0$ ainsi que $\nabla_C J = 0$. Sa torsion est exactement le tenseur de Nijenhuis, si bien que ∇_C est la connexion de Levi-Civit dans le cas Kähler. ∇_C induit donc une connexion A_0 sur le fibr anticanonique.

Supposons maintenant que la varit symplectique est relle, c'est dire qu'il existe une involution c antisymplectique et J-antiholomorphe. Grâce la proposition prcdente, on a le

Lemme 8 *Soit $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0 \otimes \mathcal{L}$ une structure de Spin^c. Alors $\mathfrak{s}$ est c-relle si et seulement si $\mathcal{L}$ est c-relle. En particulier, $\mathfrak{s}_0$ est c-relle, et la connexion ∇_{A_0} est c-réelle. Enfin, l'oprateur de Dirac D_{A_0} vrifie :*

$$\begin{array}{rcl} D_{A_0} : \Omega^0 \oplus \Omega^{0,2} & \to & \Omega^{0,1} \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \bar{\partial}\alpha + \bar{\partial}^*\beta \end{array}$$

Démonstration . Si $\kappa_{\mathcal{L}}$ est une involution c-relle sur $\mathcal{L}$, l'application

$$\begin{array}{rcl} \kappa_S : \Gamma^{\pm}(L) & \to & \Gamma^{\pm}(L) \\ \omega \otimes s & \mapsto & \kappa_\Omega(\omega) \otimes \kappa_{\mathcal{L}}(s) \end{array}$$

est une involution antilinaire. En remarquant que l'action de l'algbre explicitée plus haut commute avec κ_Ω, on trouve que $\kappa_\Omega(\omega \cdot \psi) = \kappa_\Omega(\omega) \cdot \kappa(\psi)$.

La connexion de Chern ∇_C est proportionnelle $\nabla + \frac{1}{2}J\nabla J$. On en dduit que tout comme la forme de Levi-Civit, ∇_C commute avec κ_Ω. En utilisant le lemme 3, on trouve que $\kappa_{\mathcal{A}}(A_0) = \kappa_S A_0 \kappa_S = \kappa_\Omega A_0 \kappa_\Omega = \kappa_\Omega^2 A_0 = A_0$, et donc que A_0 est relle. Enfin, on trouvera dans [Ni] tous les dtails concernant la forme de Chern ainsi que la dmonstration de l'galit entre D_{A_0} et $\bar{\partial} + \bar{\partial}^*$. □

2.2 Calcul de l'indice

Rappelons que la dimension de l'espace des solutions relles est est gale $-\dim a\mathcal{H}^1 + \dim a\mathcal{H}^2_+ + \frac{1}{2}\text{Ind } D_A$. Dans le cas d'une structure relle sur une varit symplectique, on a un calcul simple de la premire partie de l'indice :

Lemme 9 *Soit (X, ω, J, c) une varit symplectique relle compacte de dimension 4. On a $\dim a\mathcal{H}^1 = \frac{1}{2}b_1$ et $\dim a\mathcal{H}^2_+ = \frac{1}{2}(1 + b_+)$.*

Démonstration . Pour calculer la dimension de $a\mathcal{H}^1$, remarquons que l'application

$$\alpha \mapsto J^*\alpha = \star(\omega \wedge \alpha)$$

tablit un isomorphisme entre $a\Omega^1$ et $r\Omega^1$. En effet, si $c^*\alpha = \alpha$, on a $c^*(J^*\alpha) = -J^*c^*\alpha = -J^*\alpha$. Maintenant si α est harmonique, $J^*\alpha$ l'est aussi, car ω est harmonique. On a donc la dcomposition

$$\mathcal{H}^1 = a\mathcal{H}^1 \oplus r\mathcal{H}^1.$$

Cela implique d'une part que b_1 est pair, d'autre part que $\dim a\mathcal{H}^1 = \frac{1}{2}b_1$.

Il nous reste donc calculer la dimension de $a\mathcal{H}^2_+$. Pour cela, rappelons la dcomposition des 2-formes autoduales :

$$\Omega^2_+(X, \mathbb{R}) = \Omega^0(X, \mathbb{R}) \ . \ \omega \oplus \Omega^{0,2},$$

o ω est la forme symplectique et $\Omega^{0,2}$ l'espace (ici considr comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$) des (0,2)-formes complexes sur X. Puisque c est J-antiholomorphe, l'application $\alpha \mapsto c^*\alpha$ envoie $\Omega^{0,2}$ sur

$\Omega^{2,0} = \Omega^{0,2}$ en tant que espaces rels. Si $\alpha \in \Omega^{2,0}$ est anti-c-relle et ferme, $J^*\alpha$ est c-relle, ferme et reste dans $\Omega^{2,0}$. On a donc un isomorphisme d'espace rels :

$$\Omega^{2,0} \cap \ker d = a\Omega^{2,0} \cap \ker d \oplus r\Omega^{2,0} \cap \ker d.$$

L'galit $c^*\omega = -\omega$ implique alors que $a\mathcal{H}^2_+ \cap \mathbb{R}\omega = \mathbb{R}\omega$. On a donc $\dim a\mathcal{H}^2_+ = 1 + \frac{1}{2}\dim(\Omega^{2,0} \cap \ker d)$. Sachant que $\dim \mathcal{H}^2_+ = 1 + \dim(\Omega^{2,0} \cap \ker d)$, on obtient $\dim a\mathcal{H}^2_+ = \frac{1}{2}(1 + b_+)$. □

2.3 Calcul effectifs des invariants

Nous pouvons noncer maintenant le thorme principal concernant les varits symplectiques :

Théorème 3 *Soit (X, ω, J, c) une varit symplectique compacte relle, vrifiant $b_+ > 1$, et K son fibr canonique. Alors $SW(\mathfrak{s}_0, c) = \pm 1$ et $SW(\mathfrak{s}_0 \otimes K, c) = \pm 1$.*

Démonstration . Remarquons d'abord que la proposition 8 nous permet de ne dmontrer que la premire galit. La preuve est prcisment celle du cas classique. Il faut simplement remarquer que les perturbations choisies dans la preuve et la ou les solutions élémentaires trouvées sont c-relles. Nous rappelons uniquement les ides de la dmonstrations qui suffisent à établir le résultat.

La perturbation h choisie est $ih = F^+_{A_0} - \frac{i}{4}\rho^2\omega$, o ρ est une constante strictement positive destine être trs grande. La connexion A_0 est c-réelle, donc $\kappa_\Omega(F^+_{A_0}) = F^+_{A_0}$. Puisque de plus c définit une structure réelle sur la variété symplectique, on a $\kappa_\Omega(\omega) = -\omega$, et donc la perturbation choisie est c-relle. Les quations tudies sont donc, dans le cas plus gnral o L n'est pas forcment triviale :

$$\begin{array}{rcl}(\psi, A) & \in & r\Gamma^+ \times r\mathcal{A} \\ D_A\psi & = & 0 \\ F^+_A & = & q(\psi) + F^+_{A_0} - \dfrac{i}{4}\rho^2\ \omega,\end{array}$$

Sur le fibr dterminant $Q = K^{-1} \otimes L^2$, une connexion A peut s'crire $A = A_0 \otimes B^2$, o B est une connexion sur L. On utilise B comme nouvelle variable au lieu de A. Les quations dans le cas symplectique presque complexe se transforment en :

$$\begin{array}{rcl}((\alpha, \beta), B) & \in & r\Omega^0(L) \oplus r\Omega^{0,2}(L) \times r\mathcal{A}(L) \\ \bar{\partial}_B\alpha + \bar{\partial}^*_B\beta & = & 0 \\ (F^+_B)^{(1,1)} = \dfrac{i}{8}(|\alpha|^2 - |\beta|^2 - i\rho^2)\omega & \text{et} & F^{(0,2)}_B = \dfrac{\bar{\alpha}\beta}{4}.\end{array}$$

Si comme dans l'nonc L est triviale, on a une solution manifestement invariante par κ_S et $\kappa_{\mathcal{A}}$ de ces équations :

$$((\alpha, \beta), B) = ((\rho, 0), d).$$

On démontre (cf. [Ta1]) que pour ρ assez grand, c'est l'unique solution modulo l'action de $\mathcal{G}$. Or deux solutions c-réelles $\mathcal{G}$-équivalentes sont nécessairement $r\mathcal{G}$-équivalentes, ce qui finit de démontrer le théorème. □

Nous parasitons le difficile thorme de Taubes pour dmontrer :

Théorème 4 *Soit (X, ω, J, c) une varit symplectique compacte relle, vrifiant $b_+ > 1$ et L un fibr en droite c-rel sur X. Si $SW(\mathfrak{s}_0 \otimes \mathcal{L}, c) \neq 0$, et $\mathcal{L} \neq 0$, alors il existe une courbe J-holomorphe relle (a priori singulière et non connexe) reprsentant le fibr $\mathcal{L}$.*

Démonstration . Les arguments de Taubes dvelopps dans [Ta1] s'appliquent entirement notre situation. Il faut simplement traduire gomtriquement le fait qu'on a des solutions relles.

Si l'invariant de Seiberg-Witten réel $SW(\mathfrak{s}, c)$ est non nul, alors pour toute perturbation définie comme ci-dessus, c'est à dire pour toute suite ρ_n tendant vers l'infini, il existe une solution rélle aux équations $((\alpha_n, \beta_n), B_n)$. Taubes montre d'une part que la courbure F_{B_n} converge au sens des courants vers une courbe J-holomorphe C a priori singulire et non connexe. D'autre part il montre que le lieu des zéros de α_n tend au sens de Hausdorff vers C. Les α_n tant des sections du fibr $\mathcal{L}$, C est Poincar duale $\mathcal{L}$.

On sait de plus que le spineur (α_n, β_n) est invariant par $\kappa_S = \kappa_\Omega \otimes \kappa_\mathcal{L}$. En particulier $\kappa_\mathcal{L} \alpha_n = \alpha_n$, ce qui implique que pour tout n, le lieu des zéros de α_n est invariant par c. La limite au sens de Hausdorff, en l'occurence C, l'est aussi, et le théorème est démontré. □

Corollaire 1 *Soit (X, ω, J, c) une varit symplectique compacte relle, vrifiant $b_+ > 1$. Alors le fibr canonique est reprsent par une courbe relle.*

Références

[Mo] J.W. Morgan, *The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds*, Mathematical notes, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1996.

[Ni] L.I. Nicolaescu, *Notes on Seiberg-Witten theory*, Graduate Studies in Math. vol. 28, AMS, Providence, 2000.

[Ta1] C. Taubes, *SW $\Rightarrow$ GW : from the Seiberg-Witten invariant and symplectic forms*, J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), p. 845-919.

[Ta2] C. Taubes, *SW = GW : Counting curves and connections*, J. Diff. Geom. 52 (1999), p. 453-609.

[We] J-Y. Welschinger *Invariants of real symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry*, arXiv : mathAG/0303145 v1, 12 Mar 2003.

[Wi] E. Witten *Monopoles and 4-manifolds*, Math. Res. Lett. 1 (1994), p. 769-796.

D. Gayet : Mathmatique, Bâtiment 425, Université de Paris Sud, 91405 Orsay Cedex France.

E-mail : damien.gayet@math.u-psud.fr