

# Formulation différentielle dissipative d'un modèle de paroi absorbante en aéroacoustique

Céline Casenave, Emmanuel Montseny, Lionel Ségui

► **To cite this version:**

Céline Casenave, Emmanuel Montseny, Lionel Ségui. Formulation différentielle dissipative d'un modèle de paroi absorbante en aéroacoustique. *Comptes Rendus Mécanique*, Elsevier Masson, 2008, 336 (4), pp.398-403. <10.1016/j.crme.2007.12.004>. <hal-00833055>

**HAL Id: hal-00833055**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00833055>**

Submitted on 11 Jun 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Formulation différentielle dissipative d'un modèle de paroi absorbante en aéroacoustique

C. Casenave<sup>a</sup>, E. Montseny<sup>a</sup>, L. Ségui<sup>a</sup>

<sup>a</sup>LAAS-CNRS, 7 avenue du Colonel Roche, 31077 TOULOUSE Cedex 4- FRANCE

Reçu le \*\*\*\*\*; accepté après révision le +++++

Présenté par

---

## Résumé

On considère un modèle de matériau poreux dédié à la réduction de bruit des moteurs d'avions par absorption aux parois. Les paramètres de l'équation de propagation dans un tel milieu dépendent de la fréquence, ce qui se traduit, dans le domaine temporel, par la présence d'opérateurs de convolution. A partir de leurs symboles, on établit une nouvelle formulation de ces opérateurs à la fois locale en temps et dissipative. Le couplage du modèle ainsi obtenu avec un modèle standard d'aéroacoustique conduit à un système local en temps dont l'analyse et la simulation sont simplifiées, notamment par l'existence d'une fonctionnelle énergie garantissant la dissipativité globale. *Pour citer cet article : C. Casenave, E. Montseny, L. Ségui, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. X XXX (2006).*

## Abstract

**Dissipative differential formulation of an aeroacoustic absorbing porous wall model.** The problem under consideration relates to a particular model of porous wall devoted to aircraft motor noise reduction. Because parameters of the propagation equation are frequency dependent, the time-model of such a medium involves convolution operators. We introduce a new formulation of these operators based on their symbols, both time-local and dissipative. The coupling of this so-obtained model with a standard aeroacoustic one then leads to a time-local system whose analysis is simplified thanks to the existence of an energy functional in the sense of which the global dissipativity is insured. *To cite this article: C. Casenave, E. Montseny, L. Ségui, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. X XXX (2006).*

---

*Email addresses:* [casenave@laas.fr](mailto:casenave@laas.fr) (C. Casenave), [emontseny@laas.fr](mailto:emontseny@laas.fr) (E. Montseny), [lionel.segui@laas.fr](mailto:lionel.segui@laas.fr) (L. Ségui).

## Abridged English version

Aircraft motor noise reduction is currently an important challenge for aerospace industry. In [2], a specific porous wall was proposed for absorption of a wide part of the incident energy of acoustic waves. The frequency model of such a material is given by (1), where  $\widehat{u}$  and  $\widehat{P}$  denote the Fourier transform of the velocity and the pressure in the porous medium,  $e(x)$  denotes the thickness of the porous wall and the parameters  $\rho_{\text{eff}}(i\omega)$  and  $\chi_{\text{eff}}(i\omega)$ , expressed by (2), are respectively the so-called effective density of Pride *et al.* and the effective compressibility of Lafarge [5]. Boundary conditions (3) complete the model which is linked to the fluid medium by the following relations on the interface  $\Gamma$ :  $P|_{\Gamma}^{\text{fluid}} = P|_{z=0}$  and  $u|_{\Gamma}^{\text{fluid}} \cdot n = \phi u|_{z=0}$ , where  $n$  denotes the outgoing unit normal on  $\Gamma$ , and  $\phi > 0$  is the porosity coefficient. The terms  $w = u|_{z=0}$  and  $y := P|_{z=0}$  can be interpreted as the input and the output of system (1) respectively, while the mapping  $w \mapsto y$  defines the impedance operator of the porous wall. Because the parameters  $\rho_{\text{eff}}$  and  $\chi_{\text{eff}}$  are frequency dependent, their inverse Fourier transform are convolution operators, denoted  $\rho_{\text{eff}}(\partial_t)$  and  $\chi_{\text{eff}}(\partial_t)$ . Then the time-model of such a medium is not time-local. We present a new formulation of such operators based on an approach introduced in [4].

Consider a causal operator defined, on any continuous function  $w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , by  $w \mapsto \int_0^t h(t-s) w(s) ds$ . As  $H$  is causal, we have  $(H(\partial_t)(w - w^t))(t) = 0$ , where  $w^t(s) := \mathbf{1}_{]-\infty, t]}(s) w(s)$ . From this relation, we obtain the formulation (5) of  $H(\partial_t)w$ , which can be equivalently expressed under the form (8) with  $\Psi_w(t, p) := e^{pt} (\mathcal{L}w^t)(p)$ . It can be shown that for any  $p$  in the analyticity domain of  $H$ ,  $\Psi_w(t, p)$  is solution of the differential equation (7). From this result and by using standard techniques of complex analysis, we have:

**Proposition 0.1** *If  $H$  is analytic on  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  with a discrete set of singularities in  $\mathbb{R}^-$ , if in addition these singularities are either simple poles  $-\xi_k$  or branching points such that  $|H|$  is locally integrable, and if  $H(p) \rightarrow 0$  when  $p \rightarrow \infty$ , then:*

$$(H(\partial_t)w)(t) = \int_0^{+\infty} \mu^c(\xi) \psi(t, \xi) d\xi + \sum_k \alpha_k \psi(t, \xi_k)$$

where:

$$\mu^c \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^+), \quad \mu^c(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [H(-\xi - \varepsilon i) - H(-\xi + \varepsilon i)] \quad \xi - a\varepsilon,$$

$$\alpha_k = \text{Res}(H, -\xi_k);$$

Furthermore,  $\psi(t, \xi) = \Psi_w(t, -\xi)$  is the unique solution of the following Cauchy problem on  $(t, \xi) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^+$ :

$$\partial_t \psi(t, \xi) = -\xi \psi(t, \xi) + w(t), \quad \psi(0, \xi) = 0.$$

**Corollary 0.1** *By denoting  $\mu := \mu^c + \sum_k \alpha_k \delta_{\xi_k}$ , the operator  $w \mapsto y = H(\partial_t)w$  admits the input-output differential formulation:*

$$\begin{cases} \partial_t \psi = -\xi \psi + w, & (t, \xi) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^+, \quad \psi(0, \xi) = 0 \\ y = \int_0^{+\infty} \mu \psi d\xi. \end{cases}$$

We then consider the convolution operators  $H_1(\partial_t)$  and  $H_2(\partial_t)$  defined by the respective symbols  $H_1(p) := \frac{1}{p \rho_{\text{eff}}(p)}$  and  $H_2(p) := \frac{1}{p \chi_{\text{eff}}(p)}$ . These functions are analytic in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  and decreasing at infinity, and  $H_1$  and  $H_2$  have simple poles on  $\mathbb{R}^-$ ; then  $\mu_1$  and  $\mu_2$  respectively associated to  $H_1(\partial_t)$  and  $H_2(\partial_t)$  are measures. By rewriting (1) under the form:  $u = -H_1(\partial_t) \frac{\partial_z P}{e(x)}$ ,  $P = -H_2(\partial_t) \frac{\partial_z u}{e(x)}$  and by using the above results, we deduce the *time-local* model (15), defined on  $(t, z, x, \xi) \in \mathbb{R}^{*+} \times ]0, 1[ \times \Gamma \times \mathbb{R}^+$  and equivalent to (1,3,4) from the input-output point of view (e.g.  $w \mapsto y$ ).

Thanks to the positivity of measures  $\mu_1$  and  $\mu_2$ , the functional  $(\psi_1, \psi_2) \mapsto \|(\psi_1, \psi_2)\|_{\mu, x} = [\iint (\mu_1 |\psi_1|^2 + \mu_2 |\psi_2|^2) d\xi dz]^{\frac{1}{2}}$  defines a seminorm and then the functional  $E_x(\psi) = \frac{1}{2} \|(\psi_1, \psi_2)\|_{\mu, x}^2$  satisfies the balance (16) on any solution of (15). In (16), the two first terms of the right member are negative: they express the instantaneous dissipation of (15) for any given value of  $x$ , whereas the last term expresses the instantaneous exchanged power. Moreover, thanks to the property  $\psi(t=0) = 0$ , we deduce from (16) the positiveness of the quadratic form  $w \mapsto \mathcal{Q}_T(w) := \int_0^T wy dt$ : the passive feature of the absorbent wall is restored by model (15). Then, coupling this model with any passive dynamic one (in particular the aero-acoustic model studied in [3]) leads to a globally dissipative system in the sense of an energy functional defined from  $E_x(\psi)$  and the energy  $E_m$  of the model under consideration, in such a way that exchanges between the two systems are balanced.

Time local estimates deduced from (16) can be useful for mathematical analysis as well as for the construction of stable numerical schemes (see for example [1]). Also note that, thanks to its time-local nature, this new time-local formulation of the fluid medium - porous medium coupling enables to tackle control and identification problems.

## 1. Introduction

Le bruit des moteurs constitue une part importante des nuisances sonores produites par les aéronefs et sa réduction est à l'heure actuelle un enjeu important. Pour les zones chaudes comme les tuyères soumises à l'écoulement des gaz d'échappement, S. Gasser propose dans [2] de recouvrir les parois d'un matériau cellulaire de porosité semi-ouverte formé d'empilements de billes creuses de nickel soudées entre elles. Ce matériau présente de nombreux avantages : une bonne adaptation aux hautes températures, une bonne résistance aux chocs thermiques, un faible poids, une bonne tenue mécanique et une bonne absorption de l'énergie acoustique incidente. Une étude précise des propriétés acoustiques d'un tel matériau lui a permis d'obtenir par homogénéisation le modèle fréquentiel suivant, décrivant la propagation d'ondes acoustiques à l'intérieur du milieu poreux d'interface  $\Gamma = \{z = 0\} \times ]0, X[$  avec le milieu fluide et d'épaisseur  $e(x)$  :

$$\begin{cases} e(x) i\omega \rho_{\text{eff}}(i\omega) \hat{u} + \partial_z \hat{P} = 0 \\ e(x) i\omega \chi_{\text{eff}}(i\omega) \hat{P} + \partial_z \hat{u} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } (\omega, z, x) \in \mathbb{R} \times ]0, 1[ \times ]0, X[. \quad (1)$$

Les paramètres  $\rho_{\text{eff}}(i\omega)$  et  $\chi_{\text{eff}}(i\omega)$  désignent respectivement la densité effective de Pride *et al* et la compressibilité effective de Lafarge [5]; ils sont donnés par<sup>1</sup> :

$$\begin{cases} \rho_{\text{eff}}(i\omega) = \rho \left(1 + a \frac{(1 + b i\omega)^{\frac{1}{2}}}{i\omega}\right) \\ \chi_{\text{eff}}(i\omega) = \chi \left(1 - c \frac{i\omega}{i\omega + a' (1 + b' i\omega)^{\frac{1}{2}}}\right), \end{cases} \quad (2)$$

avec :  $\rho = \rho_0 \alpha_\infty$ ,  $\chi = \frac{1}{P_0}$ ,  $a = \frac{8\mu}{\rho_0 \Lambda^2}$ ,  $a' = \frac{8\mu}{\rho_0 \Lambda'^2}$ ,  $b = \frac{1}{2a}$ ,  $b' = \frac{1}{2a'}$ ,  $c = \frac{\gamma-1}{\gamma}$ , les paramètres physiques  $\rho_0$ ,  $P_0$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_\infty$ ,  $\Lambda$ ,  $\Lambda'$  désignant respectivement la densité et la pression au repos, la viscosité dynamique, le rapport des chaleurs spécifiques, la tortuosité, la longueur caractéristique à haute fréquence du problème visqueux incompressible et la longueur caractéristique à haute fréquence du problème thermique.

Le modèle (1) est complété par les conditions aux limites :

<sup>1</sup> La racine carrée est déterminée par la coupure standard  $\mathbb{R}^-$ .

$$\begin{cases} u|_{z=1} = 0 & (\text{réflexion totale en } z = 1) \\ u|_{z=0} = w. \end{cases} \quad (3)$$

Par ailleurs, le couplage avec le milieu fluide nécessite deux conditions de raccord à l'interface  $\Gamma : P|_{\Gamma}^{\text{fluide}} = P|_{z=0}$  et  $u|_{\Gamma}^{\text{fluide}} \cdot n = \phi u|_{z=0}$  où  $n$  est la normale unitaire sortante sur  $\Gamma$  et  $\phi > 0$  est le coefficient de porosité du matériau poreux. Les termes  $w = u|_{z=0}$  et

$$y := P|_{z=0} \quad (4)$$

peuvent donc s'interpréter respectivement comme l'*entrée* et la *sortie* du système (1), définissant un opérateur (d'impédance de la paroi poreuse) :  $w \mapsto y$ .

Les paramètres  $\rho_{\text{eff}}$  et  $\chi_{\text{eff}}$  dépendant de la fréquence  $\omega$ , le modèle équivalent à (1) obtenu par transformation de Fourier inverse ne peut être local en temps du fait de la présence d'opérateurs de convolution (causaux) associés à  $\rho_{\text{eff}}$  et  $\chi_{\text{eff}}$ , respectivement notés  $\rho_{\text{eff}}(\partial_t)$  et  $\chi_{\text{eff}}(\partial_t)$ . Dans de telles situations, on peut envisager d'utiliser par exemple des approximations de Padé de  $\rho_{\text{eff}}(i\omega)$  et  $\chi_{\text{eff}}(i\omega)$  dans le but de construire des lois différentielles approchées pour la réalisation de schémas numériques. Cependant, ce type de construction de nature purement formelle n'offre en pratique aucune garantie de stabilité, en particulier lorsque l'ordre d'approximation est élevé.

On propose en section 2 une formulation exacte de tels opérateurs au moyen d'un système différentiel entrée-sortie indexé par une variable auxiliaire continue  $\xi \in \mathbb{R}^+$ . Cette formulation permet ensuite, en section 3, l'obtention d'un nouveau modèle de paroi poreuse équivalent à (1,3,4) du point de vue de l'opérateur entrée-sortie  $w \mapsto y$  et de nature temps-locale. On montre que ce modèle est en outre consistant du point de vue de la dissipation au sens d'une fonctionnelle énergie explicitement connue.

## 2. Formulation différentielle d'opérateurs convolutifs causaux

Dans cette section est succinctement présenté un cas particulier, suffisant pour le problème considéré, d'une méthodologie introduite et développée dans [4] dans un cadre général.

On considère un opérateur causal défini, sur toute fonction continue  $w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , par  $w \mapsto \int_0^t h(t-s)w(s)ds$ , la fonction (réelle)  $h$  étant en outre supposée à croissance modérée. On note  $H$  la transformée de Laplace de  $h$ , appelée symbole de l'opérateur ainsi défini, noté  $H(\partial_t)$ .

Soit  $w^t(s) := \mathbf{1}_{]-\infty, t]}(s)w(s)$  la restriction de  $w$  à son passé et  $w_t(s) := w^t(t-s)$  l'histoire de  $w$  à l'instant  $t$ . De la causalité de  $H(\partial_t)$ , on déduit :  $(H(\partial_t)(w - w^t))(t) = 0$  pour tout  $t$ ; on a alors pour toute fonction  $w$  continue et à support borné :

$$(H(\partial_t)w)(t) = [\mathcal{L}^{-1}(H\mathcal{L}w)](t) = [\mathcal{L}^{-1}(H\mathcal{L}w^t)](t). \quad (5)$$

On définit :

$$\Psi_w(t, p) := e^{pt}(\mathcal{L}w^t)(p) = (\mathcal{L}w_t)(-p); \quad (6)$$

après calcul de  $\partial_t(\mathcal{L}w_t)$ , inversion Laplace et en utilisant la propriété (5), on montre :

**Lemma 2.1** 1. Pour tout  $p$  dans le domaine d'analyticité de  $H$ , la fonction  $\Psi_w$  est solution de l'équation différentielle :

$$\partial_t \Psi(\cdot, p) = p \Psi(\cdot, p) + w, \quad t > 0, \quad \Psi(0, p) = 0. \quad (7)$$

2. Pour tout  $b > 0$ ,

$$(H(\partial_t)w)(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} H(p) \Psi_w(t, p) dp. \quad (8)$$

Au moyen de techniques standard de l'analyse complexe (contour de Bromwich, théorème de Cauchy, lemme de Jordan), on montre à partir du lemme 2.1 :

**Proposition 2.1** *Si la fonction  $H$  est holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  et ne présente que des singularités isolées dans  $\mathbb{R}^-$  ; si ces singularités sont soit des pôles simples en  $-\xi_k$ , soit des points de branchement au voisinage desquels  $|H|$  est intégrable et si  $H(p) \rightarrow 0$  quand  $p \rightarrow \infty$ , alors :*

$$(H(\partial_t)w)(t) = \int_0^{+\infty} \mu^c(\xi) \psi(t, \xi) d\xi + \sum_k \alpha_k \psi(t, \xi_k) \quad (9)$$

où :

$$\mu^c \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+), \quad \mu^c(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [H(-\xi - \varepsilon i) - H(-\xi + \varepsilon i)] \quad \xi\text{-pp}, \quad (10)$$

$$\alpha_k = \text{Res}(H, -\xi_k), \quad (11)$$

et  $\psi(t, \xi) = \Psi_w(t, -\xi)$  est solution (unique) du problème d'évolution :

$$\partial_t \psi(t, \xi) = -\xi \psi(t, \xi) + w(t), \quad (t, \xi) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^+, \quad \psi(0, \xi) = 0. \quad (12)$$

**Corollaire 2.2** *En notant  $\mu := \mu^c + \sum_k \alpha_k \delta_{\xi_k}$ , l'opérateur  $w \mapsto y = H(\partial_t)w$  admet la formulation différentielle entrée-sortie<sup>2</sup> :*

$$\begin{cases} \partial_t \psi = -\xi \psi + w, & (t, \xi) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^+, \quad \psi(0, \xi) = 0 \\ y = \int_0^{+\infty} \mu \psi d\xi. \end{cases} \quad (13)$$

### 3. Modèle local en temps de la paroi absorbante

On considère les opérateurs convolutifs  $H_1(\partial_t)$  et  $H_2(\partial_t)$  définis par les symboles respectifs  $H_1(p) := \frac{1}{p \rho_{\text{eff}}(p)}$  et  $H_2(p) := \frac{1}{p \chi_{\text{eff}}(p)}$ . Ces fonctions sont décroissantes à l'infini et holomorphes respectivement dans  $\mathbb{C} \setminus ([-\infty, -2a[\cup\{\frac{a(1-\sqrt{17})}{4}\}])$  et  $\mathbb{C} \setminus ([-\infty, -2a'[\cup\{\frac{a'(1-\sqrt{(1+16(1-c)^2})}{4(1-c)^2}\}, 0])$ . Du fait de la présence de pôles d'ordre 1 de  $H_1$  et  $H_2$  sur  $\mathbb{R}^-$ , les objets  $\mu_1$  et  $\mu_2$  associés respectivement à  $H_1(\partial_t)$  et  $H_2(\partial_t)$  sont des mesures. Après calculs conformément à la proposition 2.1, on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_1(\xi) &= \frac{a}{\pi \rho} \frac{\sqrt{b\xi-1}}{\xi^2 + \frac{a\xi}{2} - a^2} \mathbf{1}_{\xi > 2a} + k_1 \delta_{\xi_1}(\xi), \\ \mu_2(\xi) &= \frac{a'c}{\pi \chi} \frac{\sqrt{b'\xi-1}}{\xi^2(1-c)^2 + \frac{a'\xi}{2} - a'^2} \mathbf{1}_{\xi > 2a'} + \frac{1}{\chi} \delta_0(\xi) + k_2 \delta_{\xi_2}(\xi), \end{aligned} \quad (14)$$

où  $\xi_1 = \frac{a(\sqrt{17}-1)}{4} > 0$ ,  $\xi_2 = \frac{a'(\sqrt{1+16(1-c)^2}-1)}{4(1-c)^2} > 0$ ,  $k_1 = \frac{\sqrt{17}-1}{\rho\sqrt{17}} > 0$  et  $k_2 = \frac{c(\sqrt{1+16(1-c)^2}-1)}{\chi(1-c)\sqrt{1+16(1-c)^2}} > 0$ .

En réécrivant le système (1) sous la forme :  $u = -H_1(\partial_t) \frac{\partial_z P}{e(x)}$ ,  $P = -H_2(\partial_t) \frac{\partial_z u}{e(x)}$  et en utilisant les résultats de la section 2, on en déduit le modèle suivant, défini sur  $(t, z, x, \xi) \in \mathbb{R}^{*+} \times ]0, 1[ \times ]0, X[ \times \mathbb{R}^+$  et équivalent du point de vue entrée-sortie<sup>3</sup> au système (1,3,4) :

<sup>2</sup> Le terme  $\int_0^{+\infty} \mu \psi d\xi$  désigne ici le produit  $\langle \mu, \psi \rangle$  dans la dualité fonctions continues - mesures.

<sup>3</sup> Le modèle (15) est une "réalisation d'état" de l'opérateur  $w \mapsto y$  caractérisant la paroi en tant qu'impédance.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \psi_1 = -\xi \psi_1 - \frac{1}{e(x)} \partial_z P \\ \partial_t \psi_2 = -\xi \psi_2 - \frac{1}{e(x)} \partial_z u \\ u(t, 1, x) = 0 \\ P(t, 0, x) = w(t, x) \\ y(t, x) = u(t, 0, x), \end{array} \right. \quad \text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} u := \int_0^{+\infty} \mu_1 \psi_1 d\xi \\ P := \int_0^{+\infty} \mu_2 \psi_2 d\xi. \end{array} \right. \quad (15)$$

Par ailleurs, les mesures  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont clairement *positives* ; par conséquent, la fonctionnelle  $(\psi_1, \psi_2) \mapsto \|(\psi_1, \psi_2)\|_{\mu, x} = [\int \int (\mu_1 |\psi_1|^2 + \mu_2 |\psi_2|^2) d\xi dz]^{\frac{1}{2}}$  est une semi-norme. On a alors :

**Theorem 3.1** *La fonctionnelle  $E_x(\psi) = \frac{1}{2} \|(\psi_1, \psi_2)\|_{\mu, x}^2$  vérifie, sur toute solution de (15) :*

$$\frac{dE_x(\psi)}{dt} = - \int_0^1 \int_0^{+\infty} \xi \mu_1 |\psi_1|^2 d\xi dz - \int_0^1 \int_0^{+\infty} \xi \mu_2 |\psi_2|^2 d\xi dz + \frac{1}{e(x)} w y. \quad (16)$$

**Preuve.**  $dE_x(\psi)/dt = - \sum_i \int_0^1 \int_0^{+\infty} \xi \mu_i |\psi_i|^2 d\xi dz - \frac{1}{e(x)} \int_0^1 P \partial_z u dz - \frac{1}{e(x)} \int_0^1 \partial_z P u dz$   
 $= - \sum_i \int_0^1 \int_0^{+\infty} \xi \mu_i |\psi_i|^2 d\xi dz - \frac{1}{e(x)} P(t, 1, x) u(t, 1, x) + \frac{1}{e(x)} P(t, 0, x) u(t, 0, x). \blacksquare$

Dans le bilan (16), les deux premiers termes, négatifs, représentent la dissipation instantanée de (15) à  $x$  fixé. Le dernier terme exprime la puissance instantanée échangée avec l'extérieur, dont découle en particulier (du fait que  $\psi(t=0) = 0$ ) la positivité de la forme quadratique  $w \mapsto \mathcal{Q}_T(w) := \int_0^T w y dt$  pour tout  $T > 0$  et tout  $x$  : la nature passive de la paroi absorbante est ainsi restituée par le modèle (15). Le couplage de ce dernier avec tout modèle dynamique de type passif (en particulier le modèle aéroacoustique étudié dans [3]) conduit par conséquent à un système globalement dissipatif pour une fonctionnelle énergie définie à partir de  $E_x(\psi)$  et de l'énergie  $E_m$  du modèle considéré de telle sorte que les transferts entre les deux sous-systèmes soient équilibrés. Plus précis que la simple positivité de l'opérateur  $\mathcal{Q}_T$ , le bilan (16) permet ainsi des estimations fines utiles tant pour l'analyse que pour la construction de schémas numériques stables [1]. Par sa nature locale en temps, cette formulation du système couplé milieu fluide-milieu poreux permet par ailleurs d'aborder les problèmes de contrôle et d'identification par les méthodes classiques.

A noter que concernant le problème (15), des approximations convergentes peuvent aisément être construites par discrétisation de la variable  $\xi$  et quadratures standard. On obtient ainsi des réalisations dynamiques approchées de la forme entrée-sortie :  $\dot{X} = \mathcal{A}X + \mathcal{B}w$ ,  $\tilde{y} = \mathcal{C}X$  où  $X(t) \in \mathbb{R}^N$ , de telle sorte que  $\tilde{y} \simeq y$  en un sens convenable [4].

## Références

- [1] C. Casenave, E. Montseny, *Time-local dissipative formulation and stable numerical schemes for a class of integrodifferential wave equations*, soumis au SIAM Journal on Applied Mathematics, 2007.
- [2] S. Gasser, *Etude des propriétés acoustiques et mécaniques d'un matériau métallique poreux modèle à base de sphères creuses de nickel*, PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2003.
- [3] P.-A. Mazet, Y. Ventribout, *Control of Aero-acoustic Propagations with Wall Impedance Boundary Conditions : Application to a Porous Material Model*, WAVES 2005, Brown University, Providence, June 20-24, 2005.
- [4] G. Montseny, *Représentation diffusive*, Hermes Science, 2005.
- [5] S. R. Pride, F.D. Morgan, A.F.Gangi, *Drag forces of porous-medium acoustics*, Phys. Rev. B. 47 (1993), 4964-4978.