Appariement: des modèles de Lloyd Shapley à la conception de marchés d'Alvin Roth

Francoise Forges, Guillaume Haeringer, Vincent Iehlé

Appariement: des modèles de Lloyd Shapley à la conception de marchés d'Alvin Roth.

Françoise Forges[*] Guillaume Haeringer[†] Vincent Iehlé[‡]

Résumé

Alvin Roth et Lloyd Shapley ont reçu en 2012 le prix de sciences économiques de la Banque Royale de Suède à la mémoire d'Alfred Nobel, pour leurs travaux sur l'organisation centralisée de certains marchés économiques, qui dépendent de l'appariement d'agents de deux types distincts (des élèves et des écoles, par exemple). Shapley est le co-auteur, avec David Gale, de l'article fondateur du domaine, qui propose un algorithme pour atteindre un appariement stable. Roth a dirigé la restructuration de la procédure d'affectation des internes dans les hôpitaux aux Etats Unis et la conception d'un marché lié à la transplantation de reins. Après avoir rendu compte de ces contributions, nous évoquons aussi le rôle déterminant de Shapley en théorie des jeux.

Mots clefs : appariement, conception de marché, jeu coopératif, stabilité.
Classification JEL : C71, C78, D47

[*]Université Paris-Dauphine, LEDa et CEREMADE. Membre de l'Institut Universitaire de France.

[†]Universitat Autònoma de Barcelona et Barcelona GSE. Professeur Invité à Stanford.
Guillaume Haeringer remercie le Gouvernement de Catalogne (SGR2009-419) et le Ministère Espagnol de la Science et de l'Innovation (projet "Consolidated Group-C" ECO2008-04756 et FEDER).

[‡]Université Paris-Dauphine, LEDa et CEREMADE.

Matching: from Lloyd Shapley's models to Alvin Roth's market design.

Summary

Alvin Roth and Lloyd Shapley have received in 2012 the Sveriges Riksbank prize in economic sciences in memory of Alfred Nobel, for their work on the centralized organization of some economic markets, which rely on the matching of agents of two different types (students and schools, for instance). Shapley is the co-author, with David Gale, of the seminal paper of the area, which proposes an algorithm to reach a stable matching. Roth directed the reform of the entry level labor market for American physicians (the National Resident Matching Program) and the design of a market for kidney transplants. After having surveyed these contributions, we also give an account of Shapley's leading role in game theory.

Keywords: matching, market design, cooperative game, stability.
JEL classification: C71, C78, D47

1 Introduction

Certaines relations économiques se fondent sur l'"appariement" d'agents de deux types distincts : élèves et écoles, internes et hôpitaux, donneurs et receveurs d'organe, etc. Qu'est-ce qui caractérise un appariement satisfaisant ? Dans quelle mesure une organisation centralisée peut-elle y parvenir ? Ce sont les questions auxquelles ont répondu Alvin Roth et Lloyd Shapley dans les travaux qui ont été récompensés récemment par le prix de sciences économiques à la mémoire d'Alfred Nobel.

Lloyd Shapley, actif depuis le début des années 1950, est un digne successeur de von Neumann et Morgenstern : il a représenté divers marchés économiques sous la forme épurée de jeux, pour lesquels il a conçu des concepts de solution élégants. Compte tenu des circonstances qui nous motivent, nous nous devons d'évoquer d'abord l'article fondateur dans lequel David Gale, décédé en 2008, et Lloyd Shapley proposent une première propriété désirable des appariements : la "stabilité". Partis de l'exemple de l'admission des étudiants dans les universités, Gale et Shapley (1962) délaissent rapidement les détails de ce marché pour une métaphore : le mariage. Leur modèle se réduit à un ensemble d'hommes et de femmes et aux préférences de chacun sur les individus de sexe opposé. Ils construisent un algorithme (connu sous le nom d'"acceptation différée") qui se décline en deux versions, suivant que ce sont les hommes qui font des propositions aux femmes ou le contraire, et qui produit des couples "stables" au sens suivant : il n'existe pas un homme et une femme qui seraient plus heureux d'être mariés ensemble, plutôt que de rester chacun avec le conjoint qui leur a été attribué.

Au début des années 1980, Alvin Roth s'interroge sur la mise en œuvre de l'algorithme de Gale et Shapley : peut-il servir de base à un mécanisme, auquel les agents doivent d'abord révéler leurs préférences ? Oui et non, répond Roth (1982a), qui établit qu'un seul type d'agents (celui qui fait des propositions à l'autre dans l'algorithme) sera incité à être sincère. En pratique, cette propriété est en fait suffisante si les "préférences" d'une des catégories des agents à apparier reposent sur des critères objectifs et ne peuvent donc faire l'objet de manipulations. Parallèlement, Roth mène une étude de cas afin de mieux comprendre les caractéristiques des "marchés" d'appariement. Dans un article publié dans *Journal of Political Economy* en 1984, il considère la procédure centralisée d'affectation des internes dans les hôpitaux utilisée par l'Association Américaine de Médecine, un cadre dans lequel l'approche de Gale et Shapley (1962) paraît directement applicable. Bien plus, Roth découvre que les médecins, guidés essentiellement par l'objectif de trouver des affectations stables, utilisent un algorithme voisin de celui de Gale et Shapley depuis les années 1950, c'est-à-dire bien avant la publication de l'article fondateur.

Au-delà de sa contribution à l'histoire des idées, Roth (1984) fait comprendre comment des marchés, jusque-là ignorés, peuvent être réorganisés grâce aux outils de la théorie de l'appariement. Et parmi ces outils figure le mécanisme issu de l'algorithme de Gale et Shapley, qui garantit à la fois stabilité et sincérité pour les participants. Par la suite, Roth est amené à combiner ce nouveau regard sur les marchés avec une démarche d'ingénieur. L'Association Américaine de Médecine fait en effet appel à lui en 1995 lorsqu'elle est confrontée à un nouveau phénomène : de nombreux jeunes internes sont mariés et cherchent un poste en couple. Après avoir montré que la théorie de l'appariement, fondée sur l'existence garantie d'appariements stables, ne peut s'étendre à ce cas de figure, Roth parvient à mettre au point un algorithme qui intègre malgré tout la nouvelle contrainte. Cet algorithme, performant en pratique, est encore en vigueur aujourd'hui et assure le pourvoi des 20000 postes d'internes américains chaque année (Roth et Peranson (1999)).

Nous montrerons dans la section 3 que le cas de l'affectation des internes n'est qu'un premier exemple : Roth continue, aujourd'hui encore, à concrétiser l'approche de Gale et Shapley en entrant de plus en plus dans les détails du monde réel, ce qui fait évoluer son activité de conseiller vers celle de "designer" de marchés. Avant d'y venir, nous consacrerons la section 2 à l'algorithme de Gale et Shapley et à ses propriétés. Comme il l'a expliqué à l'occasion du colloque organisé en son honneur à Stony Brook en 2007, David Gale avait formulé la conjecture selon laquelle il existe toujours un appariement stable dans le problème du mariage et l'avait soumise à plusieurs collègues. Lloyd Shapley fournit immédiatement une réponse constructive, sous la forme de l'algorithme d'acceptation différée, et Gale et Shapley publièrent ensemble le résultat dans *American Mathematical Monthly.*

L'originalité de l'article consiste à introduire dans le problème de l'appariement les préférences des agents sur leurs partenaires possibles. Ce faisant, Gale et Shapley formalisent un nouvelle propriété, qui deviendra centrale dans l'analyse des appariements : la stabilité. Ils sont conscients de la distance qui sépare le problème concret de l'admission à l'université du modèle épuré du mariage : "Even a rough answer to the [original college admission] question would require going into matters which are nonmathematical, and such discussion would be out of place in a journal of mathematics. It is our opinion, however, that some of the ideas introduced here might usefully be applied to certain phases of the admissions problem". Mais comme publication de mathématique, l'article de Gale et Shapley est tout à fait remarquable, dans la mesure où il ne requiert la connaissance ni de théorèmes, ni de formules et ne nécessite ni calculs, ni représentations géométriques. Comme les auteurs le disent eux-mêmes : “Finally, we call attention to one additional aspect of the preceding analysis which may be of interest to teachers of mathematics. This is the fact that our result provides a handy counterexample to some of the stereotypes which non-mathematicians believe mathematics to be concerned with”. Ils poursuivent en se demandant ce qui définit les mathématiques et concluent : “The answer, it appears, is that any argument which is carried out with sufficient precision is mathematical”. Quoi qu'il en soit, la littérature qui a fait suite à l'article de Gale et Shapley s'est, pendant près de deux décennies, confinée à des considérations purement théoriques, attirant davantage les mathématiciens appliqués et les informaticiens que les économistes.

Comme on l'a mentionné ci-dessus, l'étude de cas menée par Roth (1984) et son travail de conseiller auprès de l'Association Américaine de Médecine marquent le début d'un va et vient fructueux entre la théorie et la pratique de l'appariement. Roth et ses collaborateurs participent, à Boston puis à New York, à la réforme de la procédure de répartition des élèves dans les écoles publiques. L'équipe de Roth s'attaque ensuite à la mise en place d'un mécanisme approprié pour l'allocation des reins. Comme nous l'expliquerons dans la section 3, le modèle de Gale et Shapley, qui distingue deux types d'agents, convient mal à ce cadre. De façon stylisée, on fait face à des paires formées d'un donneur et d'un demandeur d'organe (par exemple, un couple marié ou deux membres d'une même famille), mais la transplantation ne peut se faire au sein de la paire pour des raisons d'incompatibilité. Il s'agit donc de procéder à une réallocation des reins entre les paires. La référence théorique pertinente est un article de Shapley et Scarf (1974) sur des économies d'échange avec biens indivisibles. Là encore, il faut mentionner David Gale, à qui l'on doit l'algorithme du “cycle d'échange optimal” (“top trading cycle”), qui joue un rôle crucial dans Shapley et Scarf (1974).

Le compte rendu des travaux d'Alvin Roth nous force à nous concentrer, dans la section 3, sur des cas américains. Cependant, l'expérience de la France est tout à fait exemplaire en matière de procédures d'affectation centralisées et respectueuses des préférences des individus. Depuis 2010, de telles procédures sont utilisées à grande échelle pour l'entrée des élèves dans les collèges et les lycées comme pour l'entrée des étudiants de première année dans l'enseignement supérieur (universités, classes préparatoires, BTS, etc.)[1]. Pour les lycées par exemple, le système est centralisé au niveau de

[1] Les enjeux de la réforme de la carte scolaire sont analysés dans Fack et Genet (2010a).

chaque académie qui recueille les souhaits des élèves et définit les critères de classement des lycées (proximité du domicile, dossier scolaire, critères sociaux, etc.). Chaque année, les vœux de dizaines de milliers de futurs lycéens sont ainsi enregistrés et traités automatiquement dans chaque académie (78000 voeux pour 33000 candidats dans l'académie de Lyon en 2012). Hiller et Tercieux (2012) montrent que la procédure en vigueur est conforme à la version de l'algorithme de Gale et Shapley qui favorise les lycées. Le recrutement des maîtres de conférences dans toutes les sections du Conseil National des Universités (CNU) fait, lui aussi, l'objet d'un mécanisme d'appariement centralisé, qui met en relation les classements des comités de sélection des différentes universités et les voeux exprimés par les candidats. Haeringer et Iehlé (2010) expliquent comment chaque nouveau maître de conférences conclut avec son département d'accueil un mariage à la Gale et Shapley.

Si notre article a pour point de départ le prix de la Banque de Suède, centré sur la formalisation et la concrétisation des modèles d'appariement, il nous donne aussi l'occasion d'honorer en Shapley l'un des pères de la théorie des jeux. Nous consacrons donc notre dernière section à une évocation de ses contributions, au-delà des deux articles mentionnés ci-dessus. Le nom de Shapley est indissociable du concept de "valeur" qu'il a proposé pour les jeux de coalitions ou "jeux coopératifs" définis par von Neumann et Morgenstern (1944) (Shapley (1953a)). Il a également conçu, au même moment, le premier modèle d'optimisation dynamique à horizon infini : les jeux stochastiques (Shapley (1953b)).[2] Là aussi, il suit le programme des fondateurs de la théorie des jeux en s'en tenant aux jeux à somme nulle. Cependant, contrairement à la première contribution, la seconde restera méconnue au point d'être redécouverte. D'autres exemples illustreront le rôle discret mais déterminant que Shapley a joué dans l'élaboration de la théorie des jeux actuelle ; on lui doit la consolidation d'un concept de solution majeur pour les jeux coopératifs, le "cœur", dont la stabilité de Gale et Shapley (1962) est en fait un cas particulier ; il est l'un des théoriciens des jeux qui a élaboré la caractérisation des équilibres de Nash des jeux non-coopératifs répétés, connue sous le nom de "folk theorem" ; il a également développé, au fil d'une série d'articles en collaboration avec Martin Shubik, un modèle de jeux de marché qui permet d'expliquer la formation des prix et de donner des fondements stratégiques à la concurrence parfaite.

[2]Les premiers développements de la programmation dynamique, dans les années 1950, s'en tiennent à l'horizon fini (voir Bellman (1952)).

2 L'algorithme de Gale et Shapley

L'objectif principal de cette section est de présenter l'algorithme originel de Gale et Shapley, décrit dans le cadre imagé du mariage. Nous montrerons que cet algorithme permet dans une large mesure de définir un mécanisme d'appariement satisfaisant, qui réponde à trois exigences : stabilité, optimalité et absence de manipulation[3]. Les résultats présentés témoigneront de la robustesse du mécanisme dérivé de l'algorithme, bien au-delà du cadre initial de Gale et Shapley (1962), qui n'envisageait pas de comportement stratégique de la part des individus à marier. Nous présenterons ensuite le modèle, plus général, d'admission des étudiants dans les universités, traité également par Gale et Shapley (1962). Enfin, nous décrirons brièvement deux autres modèles d'appariement influents, proposés par Shapley et Shubik (1972) et Shapley et Scarf (1974).

Aussi représentatifs qu'ils soient, les résultats détaillés ci-dessous ne rendent pas complètement compte du développement considérable de la théorie de l'appariement suite à l'article fondateur de Gale et Shapley. Les contributions principales de la littérature sont répertoriées dans l'ouvrage de Roth et Sotomayor (1990), qui a également largement participé au développement du champ, et auquel nous renvoyons le lecteur intéressé[4].

2.1 Le modèle du mariage

Le modèle du mariage de Gale et Shapley (1962) consiste tout d'abord en un ensemble (fini) de *femmes* W et un ensemble (fini) d'*hommes* M, qui définissent les deux types d'individus que l'on veut associer par paire, en l'occurence, marier. Chaque individu v est caractérisé par une relation de préférence stricte, transitive et complète, P_v, définie sur les individus de sexe opposé et lui-même (cette dernière option décrit la possibilité de rester célibataire). Ainsi $m_3 P_w m_2 P_w w P_w m_1$ indique que w préfère être mariée à m_3 plutôt qu'à m_2, mariée à m_2 plutôt que de rester célibataire, et rester célibataire plutôt que d'être mariée à m_1. Alternativement, on représente simplement la préférence P_w d'une femme w sous forme d'un classement des hommes et d'elle-même. On écrira ainsi $P_w := m_3, m_2, w, m_1 \ldots$

Un *appariement* μ est une configuration possible de couples d'individus

[3]La présentation s'inspire notamment de la revue de littérature de Roth (2008), préparée à l'occasion de sa conférence en l'honneur de David Gale à Stony Brook en 2007.

[4]Le colloque *"Roth and Sotomayor : Twenty Years After"* organisé à l'Université Duke en 2010 témoigne d'ailleurs du rôle clé de l'ouvrage.

de sexe opposé (et de célibataires) de la population considérée $W \cup M$. Formellement, un appariement est une fonction $\mu : W \cup M \to W \cup M$, qui associe un *partenaire* $\mu(v)$ à chaque individu v et satisfait les conditions suivantes : (i) pour chaque femme $w \in W$, $\mu(w) \in M \cup \{w\}$, (ii) pour chaque homme $m \in M$, $\mu(m) \in W \cup \{m\}$, (iii) pour chaque individu $v \in M \cup W$, $\mu(\mu(v)) = v$. Les conditions (i) et (ii) assurent que chaque individu est marié à un individu de sexe opposé ou reste célibataire, tandis que (iii) garantit que les couples sont cohérents (le partenaire $\mu(v)$ de v dans l'appariement μ est lui-même apparié à v par μ)[5].

Un *mécanisme centralisé d'appariement* associe un appariement à chaque profil de préférences des individus. Pour un profil de préférences quelconque, il n'y a priori aucune raison de trouver un appariement qui puisse satisfaire simultanément tous les individus (la femme préférée entre toutes par un homme peut très bien lui préférer un autre homme !). L'enjeu est précisément de pouvoir accorder "au mieux" les préférences *déclarées* par les agents des deux types, suivant des critères que nous décrirons au fur et à mesure dans les prochaines sections.

2.2 L'algorithme

L'algorithme de Gale et Shapley privilégie d'emblée un type d'individus, qui fait des propositions de mariage à l'autre. Supposons que les hommes soient favorisés ; *l'algorithme d'acceptation différée* fonctionne alors de la manière suivante :

> **Etape 1** : Chaque homme m demande en mariage la femme qu'il préfère entre toutes, selon sa relation de préférence P_m. Si m préfère rester célibataire, il le reste *définitivement* : la procédure s'arrête pour lui.
>
> Chaque femme choisit l'homme qu'elle préfère parmi ceux qui l'ont demandée en mariage et est appariée *temporairement* à cet homme (ou à elle-même si elle préfère rester célibataire). Les autres offres sont rejetées.
>
> **Etape 2,3. . .** : Chaque homme dont la proposition a été refusée à l'étape précédente fait une proposition à son partenaire préféré (une femme ou lui-même) parmi ceux qui ne l'ont pas en-

[5]L'appariement peut laisser quelques célibataires, par exemple, si un même nombre d'hommes et de femmes n'est pas disponible.

core rejeté. Si ce partenaire préféré est lui-même, il reste *définitivement* célibataire : la procédure s'arrête pour lui.

Chaque femme choisit le partenaire qu'elle préfère, en considérant tous ceux qui viennent de la demander en mariage ainsi que le partenaire auquel elle était appariée à l'étape précédente. La femme est appariée *temporairement* au partenaire choisi. Les autres offres sont rejetées.

On répète cette étape jusqu'à ce que chaque homme soit apparié à une femme ou à lui-même. Si tel est le cas, tous les appariements temporaires deviennent *définitifs* (c'est-à-dire, prennent la forme de mariages).

L'algorithme produit un appariement unique. Il s'arrête effectivement après un nombre fini d'étapes, puisque le nombre d'individus est fini et que chaque homme ne peut demander la même femme en mariage plusieurs fois. L'appariement ainsi obtenu est appelé *appariement de Gale et Shapley "en faveur des hommes"* (et *appariement de Gale et Shapley "en faveur des femmes"* si la version de l'algorithme privilégie les femmes).

L'exemple qui suit illustre le fonctionnement de l'algorithme.

Exemple 1. On considère 3 hommes et 3 femmes, c'est-à-dire $M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, dont les préférences sont représentées par les classements suivants :

P_{m_1}	P_{m_2}	P_{m_3}	P_{w_1}	P_{w_2}	P_{w_3}
w_2	w_1	w_1	m_1	m_3	m_1
w_1	w_2	w_2	m_2	m_1	m_2
m_1	w_3	w_3	m_3	m_2	m_3
w_3	m_2	m_3	w_1	w_2	w_3

Etape 1 : m_1 fait une proposition à w_2, tandis que m_2 et m_3 font tous les deux une proposition à w_1. La femme w_2 ne reçoit qu'une proposition, elle est donc appariée *temporairement* à m_1. La femme w_1 a classé m_2 devant m_3, m_3 est donc rejeté et m_2 est apparié *temporairement* à w_1.

Etape 2 : m_3 (rejeté en première étape) fait une proposition à son second choix, w_2. La femme w_2 a maintenant le choix entre les candidats m_1 et m_3, m_1 est donc rejeté et m_3 apparié *temporairement* à w_2.

Etape 3 : m_1 (rejeté en deuxième étape) fait une proposition à w_1 qui a maintenant le choix entre m_2 et m_1, m_2 est donc rejeté et m_1 est apparié *temporairement* à w_1

Etape 4 : m_2 (rejeté en troisième étape) fait une proposition à w_2. qui a maintenant le choix entre m_3 et m_2. Comme m_3 est le mieux classé, m_2 est rejeté et m_3 reste apparié *temporairement* à w_2.

Etape 5 : m_2 (rejeté en quatrième étape) fait une proposition à w_3 qui n'a pas de partenaire homme *temporaire*, m_2 est donc apparié *temporairement* à w_3.

Tous les individus sont appariés, l'algorithme s'arrête et produit l'appariement de Gale et Shapley en faveur des hommes. Les partenaires de m_1, m_2 et m_3 sont donc respectivement w_1, w_3, w_2 (et inversement).

2.3 Stabilité

L'un des objectifs annoncés par Gale et Shapley est d'étudier la "stabilité" des mariages qui résultent de leur algorithme. Leur concept de stabilité repose sur deux conditions minimales.

D'une part, un appariement μ est *individuellement rationnel* si chaque individu v qui ne reste pas célibataire préfère effectivement être marié avec son partenaire $\mu(v)$, c'est-à-dire : $\mu(v)P_v v$ ou bien $\mu(v) = v$. On dira que le partenaire $\mu(v)$ de chaque individu v doit être *acceptable* pour v. D'autre part, un couple (w, m) *bloque* l'appariement μ si m et w préfèrent tous deux se marier ensemble à rester chacun avec leur partenaire dans l'appariement μ, c'est-à-dire : $mP_w\mu(w)$ et $wP_m\mu(m)$. Un appariement μ est *stable* s'il est individuellement rationnel et s'il n'existe pas de couple qui bloque μ[6].

Gale et Shapley démontrent un premier résultat fondamental :

> ***Gale et Shapley (1962)*** *Dans tout modèle de mariage, quelles que soient les préférences des individus, il existe un appariement stable. Plus précisément, l'appariement résultant de l'algorithme d'acceptation différée, en faveur des hommes, est stable (et de même pour l'algorithme en faveur des femmes).*

La preuve du résultat suit immédiatement de deux propriétés de l'algorithme d'acceptation differée. Premièrement, l'algorithme produit un appariement qui n'associe jamais un homme et une femme qui ne soient pas mutuellement acceptables, de sorte que l'appariement final est individuellement rationnel. Deuxièmement, si un homme n'est pas apparié à une femme qu'il préfère à son partenaire dans l'appariement, il a nécessairement fait une proposition à cette femme à une certaine étape de l'algorithme et a

[6] Cette forme de stabilité est plus généralement prise en compte par le concept de "cœur". Nous y reviendrons dans la section 4.1.

été rejeté ensuite par la femme, qui a accepté l'offre d'un partenaire qu'elle classait mieux. Ce couple ne peut donc pas bloquer l'appariement.

On peut vérifier facilement dans l'exemple 1 que l'appariement obtenu par l'algorithme de Gale et Shapley est bien stable. Pour fixer les idées, on voit par exemple que l'appariement $\{(m_1, w_1), (m_2, w_2), (m_3, w_3)\}$ est bloqué par le couple (m_3, w_2) car chacun préfèrerait son nouveau partenaire à celui qui est prévu par cet appariement.

2.4 Structure des appariements stables et optimalité

Une analyse plus approfondie de l'algorithme suggère un deuxième résultat, plus fort que le premier. Gale et Shapley observent que le choix du type d'individus qui fait des propositions joue un rôle clé dans l'appariement final produit par l'algorithme. Le modèle d'appariement suppose seulement que chaque individu a une préférence sur ses partenaires possibles, mais il est très facile d'en déduire des préférences sur les appariements : un individu préfère un appariement μ à un appariement μ' s'il préfère son partenaire dans μ à son partenaire dans μ'. Gale et Shapley montrent que, pour les individus qui font des propositions dans l'algorithme, leur appariement correspond à un élément maximal (au sens de ces préférences induites) de l'ensemble des appariements stables. En d'autres termes,

> ***Gale et Shapley (1962)*** *Les préférences des individus étant fixées, l'appariement résultant de l'algorithme d'acceptation différée, en faveur des hommes, est préféré par chaque homme à tout autre appariement stable, et c'est le seul appariement stable dans ce cas (de même, mutatis mutandis, pour les femmes).*

Il faut souligner que la propriété de maximalité précédente, quoique très forte, n'est vraie que relativement aux appariements *stables*.

On peut aussi s'interroger sur la Pareto-optimalité de l'appariement de Gale et Shapley. Dans l'exemple 1, le seul appariement stable est donné par $\{(m_1, w_1), (m_2, w_3), (m_3, w_2)\}$ et c'est donc l'appariement produit par l'algorithme d'acceptation différée, quel que soit le type d'individus qui fait les propositions. L'appariement stable est clairement Pareto-dominé (pour les hommes) par l'appariement $\{(m_1, w_2), (m_2, w_3), (m_3, w_1)\}$, mais ce dernier n'est pas stable. Roth (1982a) montre que l'appariement de Gale et Shapley en faveur d'un type d'individus est néanmoins *faiblement* Pareto-optimal pour les individus de ce type, c'est-à-dire qu'il n'existe pas, par exemple, d'appariement qui soit préféré strictement par tous les hommes à l'appariement de Gale et Shapley en faveur des hommes. Néanmoins, on ne peut pas renforcer cette Pareto-optimalité au-delà de ce qu'annonce sa formulation : l'algorithme de Gale et Shapley en faveur des hommes peut très bien produire un appariement qui marie tous les hommes sauf un à la femme placée en dernière position dans leur préférence (voir Kesten (2007) pour des exemples significatifs).

L'existence des appariements stables et optimaux en faveur des hommes ou des femmes, suivant la version de l'algorithme choisie, suggère également que l'ensemble des appariements stables possède une structure mathématique tout à fait particulière. Pour le voir, considérons deux appariements stables μ et μ' ; pour chaque homme m, choisissons le partenaire préféré par m entre ses partenaires dans μ et μ'. On vérifie d'abord que l'on constitue ainsi un appariement ; notons-le ν[7]. On vérifie ensuite que le nouvel appariement ν est encore stable. De même, l'appariement ν', symétrique de ν, obtenu en mariant chaque homme m avec le partenaire qu'il apprécie le moins, entre ses partenaires dans μ et μ', est également stable. Formellement, les appariements stables forment un *treillis.* Le lecteur peut se reporter à Knuth (1976) ou Roth et Sotomayor (1990) pour les détails mathématiques.

L'exemple suivant donne une illustration simple de la structure des appariements, en montrant en particulier comment les appariements sont ordonnés, selon les préférences des agents (ici, contrairement à l'exemple 1, l'ensemble des appariements stables n'est pas réduit à un seul élément).

Exemple 2.

P_{m_1}	P_{m_2}	P_{m_3}	P_{w_1}	P_{w_2}	P_{w_3}
w_2	w_1	w_1	m_1	m_3	m_1
w_1	w_2	w_2	m_3	m_1	m_2
w_3	w_3	w_3	m_2	m_2	m_3
m_1	m_2	m_3	w_1	w_2	w_3

Il existe 2 appariements stables :

$$\mu = \{(m_1, w_2), (m_2, w_3), (m_3, w_1)\}, \quad \mu' = \{(m_1, w_1), (m_2, w_3), (m_3, w_2)\}.$$

Chaque homme préfère son partenaire dans μ à son partenaire dans μ' (et inversement pour chaque femme), m_2 et w_3 étant toutefois indifférents entre les deux appariements. L'appariement de Gale et Shapley en faveur des hommes correspond à μ, celui des femmes est donné par μ'.

[7]Formellement, pour chaque homme m, $\nu(m)$ est le partenaire que m préfère, entre $\mu(m)$ et $\mu'(m)$.

2.5 Manipulation stratégique

On se place maintenant dans le cadre d'un mécanisme d'appariement, mis en place par un planificateur qui propose un appariement sur la base des préférences déclarées par les individus. Le mécanisme est stable s'il produit un appariement stable pour tout profil de préférences. Il est *non manipulable* par un des deux types d'individus si tous les individus de ce type ont intérêt à révéler leur vraies préférences au planificateur. Plus précisément, on considère le jeu stratégique suivant : l'ensemble des joueurs est $W \cup M$, les stratégies de chaque joueur sont les préférences qu'il peut déclarer (c'est-à-dire ses classements des partenaires possibles) et l'issue du jeu est, pour chaque joueur, son partenaire dans l'appariement déterminé par le mécanisme à partir des déclarations de tous les joueurs. Le mécanisme est non manipulable, disons, pour les hommes, si déclarer sa vraie préférence est une stratégie dominante pour chaque homme dans le jeu précédent.

Un premier résultat négatif établit que dans le modèle du mariage, la stabilité et l'absence de manipulation stratégique ne sont pas conciliables.

> ***Roth (1982a)*** *Dans le modèle du mariage, il n'existe pas de mécanisme stable qui soit non manipulable par les deux types d'individus.*

L'article fondateur de 1962 ne traite pas explicitement la question de la manipulation stratégique éventuelle. Mais de nouveau, l'algorithme de Gale et Shapley, s'il est choisi comme mécanisme d'appariement, apporte une réponse satisfaisante, en garantissant que le type d'individus favorisé par l'algorithme n'ait pas intérêt à mentir sur ses préférences.

> ***Dubins et Freedman (1981), Roth (1982a)*** *Dans le modèle du mariage, le mécanisme de Gale et Shapley en faveur des hommes est non manipulable par les hommes (et de même, mutatis mutandis, pour les femmes).*

Plus généralement, Dubins et Freedman (1981) montrent aussi que les hommes n'ont pas intérêt à manipuler le mécanisme de Gale et Shapley, même s'ils peuvent former des coalitions et modifier conjointement leur préférences[8]. Les deux résutats précédents impliquent qu'une manipulation profitable du mécanisme de Gale et Shapley ne peut provenir que du type d'individus qui ne fait pas de proposition, c'est-à-dire, dans le traitement

[8]Voir aussi Demange, Gale et Sotomayor (1987) pour les limites d'une manipulation profitable.

précédent, les femmes. En reprenant l'exemple 2, on peut construire une telle manipulation. Rappelons que l'appariement de Gale et Shapley en faveur des hommes est $\{(m_1, w_2), (m_2, w_3), (m_3, w_1)\}$, et considérons maintenant la manipulation suivante de la part de w_1 : $P'_{w_1} = m_1, m_2, m_3, w_1$, c'est-à-dire que w_1 déclasse m_3 au profit de m_2. En reprenant les étapes de l'algorithme, on voit qu'en étape 1, m_3 sera alors rejeté par w_1 au profit de m_2 ; le partenaire éconduit demandera alors en étape 2 la femme w_2 évinçant m_1 d'une possible union avec w_2 ; m_1 choisit alors w_1 à l'étape 3 et lui sera apparié définitivement. La femme w_1 est ainsi mariée à m_1, qui est strictement préféré au partenaire élu, m_3, si elle avait déclaré ses vraies préférences (supposées être celles de l'exemple 2).

Au premier abord, la réponse apportée par Dubins et Fredman (1981) et Roth (1982a) n'est que partiellement convaincante car le résultat laisse une porte ouverte à une manipulation stratégique du mécanisme de la part d'un type d'individus. On peut cependant se satisfaire d'un tel résultat. En premier lieu, même quand elle existe, la manipulation demeure un exercice très difficile puisqu'elle requiert de la part du manipulateur une connaissance précise des préférences des autres joueurs et du mécanisme. C'est notamment l'argument avancé par Roth et Rothblum (1999) pour justifier l'utilisation courante du mécanisme de Gale et Shapley. Dans le même esprit, Ehlers (2008) montre qu'il n'existe plus de possibilité de manipulation profitable si l'information disponible pour les agents est suffisamment limitée. Kojima et Pathak (2009) considèrent, eux, la taille du marché comme effet principal[9]. Ils montrent que les incitations des agents pour ne pas déclarer leurs vraies préférences disparaissent à mesure que le nombre d'agents sur le marché croît. Enfin, en dépassant le simple cadre du modèle du mariage, on observe aussi des marchés d'appariement centralisés où l'un des côtés du marché n'est pas *stratégique*, comme dans le problème de la carte scolaire par exemple, qui sera développé en section 3.3. Dans ce cas, contrôler l'absence de manipulation stratégique d'un seul côté du marché est suffisant.

Kesten (2007) décrit le type de tension qui existe si l'on prend également en compte le critère d'optimalité. Il montre qu'il n'est pas possible qu'un mécanisme d'appariement Pareto-domine le mécanisme de Gale et Shapley pour un type d'individus, tout en étant optimal et non manipulable pour les individus de ce type. Son résultat renforce l'idée que le mécanisme de Gale et Shapley, même s'il ne réunit pas simultanément la stabilité, l'optimalité et l'absence de manipulation stratégique, reste néanmoins difficile à surclasser sur la base de ces trois propriétés.

[9]Voir aussi Abdulkadiroğlu, Pathak et Roth (2009) et Ergin et Erdil (2008).

2.6 Admission dans les universités

Gale et Shapley (1962) traitent également du modèle plus général d'admission d'étudiants dans les universités. Le modèle est identique à celui du mariage à la différence près que chaque université C_i peut désormais être appariée à $q_i \geq 1$ étudiants, où q_i représente la capacité d'accueil de C_i. Les préférences des deux côtés du marché sont définies comme précédemment, et un appariement est une fonction qui associe à chaque étudiant au plus une université et à chaque université, un nombre d'étudiants au plus égal à sa capacité d'accueil (toutes les places ne sont pas nécessairement pourvues).

On déduit immédiatement l'analogue de l'algorithme d'acceptation différée pour ce cas de figure. Dans la version naturelle qui favorise les étudiants (dans laquelle ceux-ci posent donc leur candidature), la seule différence notable est la prise en compte de la capacité d'accueil de chaque université dans le choix de garder temporairement ou rejeter un étudiant à une étape donnée[10]. L'algorithme produit un appariement stable ; les définitions et les résultats énoncés précédemment se généralisent aisément[11].

Roth (1985) donne au modèle une dimension supplémentaire, qui n'est pas prise en compte dans l'article originel de Gale et Shapley. En toute généralité, on peut effectivement supposer que les préférences des universités soient définies sur les groupes d'étudiants, et non plus simplement comme des classements d'étudiants pris séparément les uns à la suite des autres. Roth (1985) montre que certains résultats du modèle du mariage ne sont plus valides dans le cadre de l'admission dans les universités. En particulier, le résultat de Dubins et Freedman (1981) et Roth (1982a) énoncé précédemment ne s'applique plus : il n'existe pas de mécanisme pour lequel révéler ses vraies préférences soit une stratégie dominante pour les universités[12].

Pour finir, nous mentionnons explicitement un résultat déjà valable dans le modèle du mariage, mais qui prend tout son sens ici. Roth (1986a) observe qu'aux Etats Unis, le système centralisé d'affectation des internes dans les hôpitaux (qui s'assimilent, respectivement, aux étudiants et aux universités) ne permet pas aux hôpitaux situés en zone rurale de pourvoir tous leurs postes. Le *théorème des hôpitaux de campagne* de Roth (1986a) montre que le problème est insoluble si l'exigence de stabilité du mécanisme est maintenue.

[10] Si la capacité d'accueil est dépassée d'une unité, l'étudiant le moins bien classé est rejeté.

[11] Voir Roth et Sotomayor (1990) pour une présentation détaillée.

[12] Voir aussi Roth et Sotomayor (1989).

Roth (1986a) *L'ensemble des candidats recrutés et des postes occupés est le même dans tous les appariements stables. Par ailleurs, un hôpital qui ne pourvoit pas tous ses postes dans l'un des appariements stables recrute exactement les mêmes candidats dans tout appariement stable.*

Ce résultat est une bonne nouvelle pour les internes en quête d'un poste : ceux-ci ne doivent pas s'inquiéter d'un changement de la règle d'admission dans les hôpitaux, pour autant que le nouveau mécanisme mis en place soit stable. Kojima (2012) propose une généralisation du résultat de Roth, qui tient compte de la possibilité de discrimination positive par système de quotas.

Nous verrons en détails dans la section 3.3, au travers de contributions comme celle d'Abdukadiroğlu et Sönmez (2003), comment le modèle d'admission dans les universités de Gale et Shapley (1962) a joué un rôle déterminant pour les procédures d'affectation des élèves dans les écoles.

2.7 Deux autres modèles d'appariement de Shapley

2.7.1 Appariement avec transferts.

Shapley et Shubik (1972) considèrent un marché déjà envisagé par Shapley (1955) et qui comporte, comme celui de Gale et Shapley (1962), deux types d'agents. Plutôt que des femmes et des hommes en quête d'âme sœur, les agents sont maintenant des proprétaires, qui possèdent chacun une maison à vendre, et des acheteurs potentiels, qui souhaitent chacun acquérir une maison. La nouveauté du modèle de Shapley et Shubik (1972), par rapport au modèle du mariage, est que les agents ont maintenant la possibilité d'effectuer des transferts monétaires. Leurs préférences sont donc définies de manière cardinale. En notant W (resp., M) l'ensemble des vendeurs (resp., des acheteurs), on peut considérer les groupes d'agents $S \subseteq W \cup M$, formés de vendeurs et d'acheteurs et calculer le paiement maximal $v(S)$ que peut obtenir S. Un individu seul ne peut dégager de profit, de sorte que $v(\{i\}) = 0$ pour $i \in W \cup M$. De même, un groupe d'agents S constitué exclusivement de vendeurs ($S \subseteq W$) ou d'acheteurs ($S \subseteq M$) aura un paiement nul ($v(S) = 0$). Cependant, une paire $(w, m) \in W \times M$, formée d'un vendeur et d'un acheteur, peut obtenir un paiement global $v(\{w, m\}) \geq 0$, qui devra être partagé entre w et m. De manière générale, $v(S)$ correspondra au paiement maximal que S peut obtenir à l'issue de transactions bilatérales entre les vendeurs et les acheteurs de S. Shapley et Shubik (1972) définissent ainsi un jeu coopératif, *à utilité transférable*, un modèle que nous étudierons plus en détails dans la section 4.1. Ils montrent qu'il existe toujours des appariements stables, c'est-à-dire que le "cœur" du jeu v est non-vide (voir également la section 4.1). Tout comme ci-dessus en l'absence de transferts, les appariements stables ont une structure remarquable.

Crawford et Knoer (1981), puis Kelso et Crawford (1982), proposent des applications marquantes du modèle. Les premiers adaptent l'algorithme d'acceptation différée au cadre d'un marché du travail, dans lequel les entreprises peuvent embaucher plusieurs employés, tout comme les universités admettent plusieurs étudiants. Crawford et Knoer (1981) posent les bases d'un mécanisme d'enchères stable, qui décrit un processus d'ajustement salarial, cet ajustement se faisant au fil des étapes de l'algorithme modifié de Gale et Shapley. Kelso et Crawford (1982) raffinent la nature des préférences des entreprises en les faisant porter sur tous les groupes possibles d'employés, de manière à tenir compte des complémentarités éventuelles entre les employés. L'introduction de ce type de préférences complique sensiblement l'analyse. Kelso et Crawford observent en particulier que les employés doivent rester dans une certaine mesure substituables vis à vis de chaque entreprise si l'on veut maintenir la stabilité du mécanisme d'ajustement salarial. L'hypothèse de substituabilité, que Roth (1985) identifie sous une forme différente dans un marché sans transferts, garantit que si un sous-groupe d'employés quitte une entreprise suite à une offre salariale plus avantageuse d'un concurrent, l'entreprise ne renoncera pas forcément aux employés qui n'ont pas été débauchés[13].

2.7.2 Allocation de biens indivisibles.

Shapley et Scarf (1974) considèrent une économie d'échange dans laquelle les biens sont indivisibles. Ce sont, par exemple, des maisons, comme dans le modèle de Shapley et Shubik (1972). Cependant, les agents sont maintenant tous des propriétaires, qui possèdent initialement chacun une maison ; chacun a des préférences sur l'ensemble des maisons mais n'a l'usage que d'une seule. Le modèle se distingue doublement de celui de Shapley et Shubik (1972) : d'une part, le marché n'est plus bilatéral ; d'autre part, les agents ne peuvent plus effectuer de transferts monétaires. Néanmoins, la notion de stabilité introduite ci-dessus se transpose sans difficulté. Supposons qu'une allocation de toutes les maisons disponibles soit proposée à l'ensemble des agents. Un groupe d'agents S "bloque" cette proposition s'il existe une réallocation au sein de S des maisons initialement possédées par

[13]Voir aussi Hatfield et Milgrom (2005) qui unifient les théories de l'appariement et des enchères, et Hatfield et Kojima (2007).

les membres de S qui soit préférée à la proposition par chaque membre de S. Une répartition est *stable* si aucun groupe d'agents S ne la bloque. Suivant la terminologie qui sera précisée dans la section 4.2, le modèle de Shapley et Scarf (1974) définit un jeu coopératif *à utilité non-transférable*, dont les allocations stables forment le *cœur*. Shapley et Scarf démontrent que ce cœur est non vide en utilisant une procédure de cycle d'échange optimal ("top trading cycle"), attribuée à David Gale. Un cycle d'échange optimal pour un ensemble de propriétaires R consiste en un sous-groupe de R que l'on peut réordonner de manière à ce que chaque propriétaire préfère la maison de son successeur à toutes les maisons disponibles dans R. La procédure repose sur la possibilité de partitionner l'ensemble de tous les propriétaires N en groupes $S_1, S_2, \ldots, S_k$ de telle sorte que S_1 soit un cycle pour N, S_2 un cycle pour $N \setminus S_1$, S_3 un cycle pour $N \setminus \big(S_1 \cup S_2\big)$, etc. En réalisant les échanges à l'intérieur de chaque cycle, on obtient une allocation dans le cœur du jeu associé (qui est également une allocation concurrentielle de l'économie).

Les propriétés du mécanisme correspondant au cycle d'échange optimal sont étudiées par Roth et Postlewaite (1977), Roth (1982b) et Abdulkadiroğlu et Sönmez (1999). Roth (1982b) établit notamment que le mécanisme est non manipulable par les agents. Une version du mécanisme pour des marchés avec deux types d'individus est déduite par Abdulkadiroğlu et Sönmez (2003) et appliquée au problème de carte scolaire[14]. Enfin, Roth, Sönmez and Ünver (2004, 2005a, 2005b) montrent que le modèle de Shapley et Scarf (1974) est également pertinent pour décrire le marché d'échange de reins (cf section 3.4), qu'ils proposent de réorganiser en utilisant un mécanisme de cycle d'échange optimal.

3 Appariement et marchés : l'approche d'Alvin Roth

Comme on l'a indiqué dans l'introduction, une étape majeure dans le développement de la théorie de l'appariement fut la publication, en 1984, d'un article d'Alvin Roth sur le recrutement des internes en médecine aux Etats-Unis. Au début du vingtième siècle, la compétition entre les hôpitaux pour le recrutement des futurs médecins était si intense que les hôpitaux proposaient des offres d'emploi à certains étudiants de faculté de médecine dès leur troisième année d'études, c'est-à-dire bien avant leur entrée sur le marché. Les hôpitaux

[14] Voir aussi Haeringer et Klijn (2009).

avaient donc peu d'information sur la qualité des étudiants et les étudiants, de leur côté, devaient fréquemment décider d'accepter ou de refuser une offre avant de connaître toutes les offres finalement disponibles. A partir des années 1940, l'Association Américaine de Médecine fit plusieurs tentatives pour organiser le marché du recrutement des futurs médecins et, en 1952, mit en place un marché centralisé où les étudiants devaient envoyer leur classement des hôpitaux (et les hôpitaux devaient envoyer leur classement des étudiants). Une fois la collecte des préférences terminée, un algorithme était utilisé pour apparier étudiants et hôpitaux.

C'est en étudiant l'organisation de ce marché que Roth découvrit que l'algorithme mis en place était en fait équivalent à l'algorithme d'*acceptation différée* de Gale et Shapley, plus de dix ans avant sa publication ! En étudiant minutieusement les débats qui avaient amené à la mise au point de cet algorithme, Roth observa qu'une des préoccupations majeures était de pouvoir produire des appariements stables. Ce travail a ouvert la voie à un programme de recherche innovateur qui permettait non seulement d'étudier des problèmes nouveaux mais aussi de modifier profondément l'attitude du chercheur en économie théorique.

3.1 De la théorie à la pratique

Un des aspects les plus intéressants de la théorie de l'appariement est la très grande simplicité du modèle de Gale et Shapley. Comme nous l'avons vu précédemment, le modèle de base consiste simplement en deux populations d'agents, dans lesquelles chaque individu a une relation de préférence sur les partenaires possibles. S'il est certain que la préférence d'un étudiant pour un hôpital plutôt qu'un autre peut dépendre de plusieurs facteurs comme la localisation, le salaire proposé ou le prestige, ces considérations sont tout simplement ignorées dans le modèle standard d'appariement. Cette très grande simplicité permet donc de rendre compte d'un très grand nombre de situations.

Cependant, la simplicité du modèle de Gale et Shapley ne garantit en rien sa pertinence en tant qu'outil pour l'analyse de situations réelles ou pour l'élaboration d'institutions qui génèrent ces appariements. Par ailleurs, le modèle de Gale et Shapley donne une place prépondérante au concept de stabilité, suggérant ainsi qu'il s'agit du "concept d'équilibre" (si cher aux économistes) le plus approprié pour les problèmes d'appariement. Les deux premiers problèmes auxquels Roth se consacra furent précisément d'identifier le type de marché pertinent pour la théorie de l'appariement et de vérifier si le concept de stabilité était la clé pour comprendre le fonctionnement de ces marchés.

Les marchés d'appariement se différencient essentiellement des marchés "classiques" par la présence de rigidités très fortes des deux côtés du marché. Prenons par exemple le cas des internes en médecine et des hôpitaux. Dans l'analyse économique traditionnelle, les producteurs offrent un bien homogène, dans le sens où tous les producteurs offrent le même bien. Cela n'est pas le cas pour les étudiants en médecine et les hôpitaux. Bien qu'il s'agisse *in fine* d'une place d'interne en médecine, les futurs médecins ne sont en général pas indifférents entre les places proposées par les différents hôpitaux : certaines institutions sont préférées à d'autres. Une deuxième différence essentielle repose sur la périodicité de ce marché qui ne fonctionne pas de manière permanente : chaque année, une cohorte de nouveaux étudiants arrive sur le marché à la recherche d'un poste d'interne en médecine, avec le but de commencer à travailler le plus tôt possible après la sortie de l'université. Il existe donc implicitement une date limite pour effectuer des transactions.

Le modèle de Gale et Shapley, avec son algorithme d'*acceptation différée,* prône implicitement la mise en place d'un marché centralisé, c'est-à-dire d'une institution centrale qui demande aux acteurs d'indiquer leurs préférences et calcule un appariement à partir de ces préférences. L'alternative consiste en un marché *décentralisé*, où chaque acteur cherche individuellement un partenaire. Roth a donc initié un programme de recherche dont le but était de voir si un marché d'appariement décentralisé pouvait fonctionner de manière optimale, en dépit de la présence des rigidités typiques déjà mentionnées.

Pour répondre à cette question, il fut nécessaire de considérer les moindres détails inhérents à ce type de situation et l'un de ces détails fut précisément qu'une tentative de transaction, qu'elle aboutisse ou non, nécessite du temps. Typiquement, lorsqu'un candidat reçoit une offre d'embauche de la part d'un employeur, celle-ci est accompagnée d'un délai pendant lequel l'offre reste valable, et bien évidemment, tant que le candidat n'a pas donné sa réponse, l'employeur ne peut offrir ce même poste à un autre candidat. L'ajout d'une date limite pour l'ensemble du marché peut alors compliquer considérablement les choix stratégiques de la part des étudiants et des employeurs, amenant les hôpitaux et les étudiants à prendre des décisions non-optimales. En collaboration avec Xing (1994, 1997), Roth a étudié plusieurs marchés spécialisés (internes en psychologie, championnats universitaires de football, étudiants en MBA, etc.) et a montré que des contraintes fortes sur le calendrier peuvent empêcher un marché d'appariement décentralisé de produire des affectations optimales. Un candidat peut, par exemple, recevoir une offre qui, bien qu'acceptable, ne soit pas sa préférée, et faire face à un délai relativement court pour décider de l'accepter ou de la refuser. Dans une telle situation, beaucoup de candidats peuvent être tentés d'accepter l'offre, ne sachant pas s'ils vont recevoir de meilleures offres à une date ultérieure. Du côté des employeurs, leurs chances d'embaucher les candidats qu'ils préfèrent peuvent se réduire considérablement si ces derniers acceptent "trop tôt" les offres d'autres employeurs. Nous pouvons alors observer des situations où l'appariement final est instable, avec un hôpital et un candidat qui se préfèrent mutuellement mais ont, chacun de leur côté, accepté préalablement une transaction avec un partenaire moins bien classé. Ainsi, les travaux menés par Roth suggèrent fortement que les marchés d'appariement ne sont pas à même de fonctionner de manière optimale en présence de frictions importantes, justifiant par là-même le développement d'institutions centralisées. Cependant, il restait une seconde question essentielle : celle de savoir si la stabilité de l'appariement est le concept pertinent pour ce type de marché.

Suite à ses travaux sur le marché des internes en médecine aux Etats-Unis, Roth (1991) commença à étudier le marché des internes en médecine au Royaume Uni. A l'instar du marché américain, le marché britannique de recrutement des internes en médecine était exposé à des défaillances notoires. A la fin des années 1960, il a été décidé d'y instaurer une procédure centralisée de recrutement sur le modèle américain. Cependant, au lieu d'organiser un seul et unique marché, les autorités médicales britanniques laissèrent à chaque région le soin de choisir l'algorithme utilisé pour apparier étudiants et hôpitaux en fonction des préférences soumises. De façon surprenante, seules certaines régions adoptèrent un algorithme produisant des appariements stables. L'intuition de Roth était que les appariements instables provoqueraient un mécontentement croissant, tant et si bien que les autorités des régions ayant adopté un mécanisme instable seraient amenées à modifier leurs règles d'appariement. L'étude empirique de l'évolution du marché britannique confirma largement cette intuition. Une expérience en laboratoire menée avec John Kagel (2000) a corroboré les conclusions de cette étude.

3.2 Une démarche d'ingénieur

Si les études de situations réelles menées par Roth ont permis de montrer que le modèle proposé par Gale et Shapley était pertinent, elles en ont aussi montré les limites. Au début des années 1990, le mécanisme d'affectation mis en place par l'Association Américaine de Médecine faisait face à une situation nouvelle qui n'avait pas été prévue par la théorie : de plus en plus de couples d'étudiants cherchaient une place d'interne soit dans le même hôpital, soit dans des hôpitaux proches. Le mécanisme en vigueur ne permettant pas alors de chercher une place "en couple", un nombre croissant d'étudiants mariés désertait le mécanisme en cherchant un employeur par leurs propres moyens. L'on savait depuis Gale et Shapley qu'il existe toujours un appariement stable lorsque chaque étudiant peut s'apparier avec *un seul* hôpital et chaque hôpital peut s'apparier avec *un seul* étudiant. Si les hôpitaux peuvent embaucher plusieurs étudiants, alors il existe aussi au moins un appariement stable (si les hôpitaux ont des préférences "raisonnables"). Cependant, plusieurs travaux théoriques ont montré qu'en présence de couples, il n'existe pas nécessairement d'appariement stable : le théorème de Gale et Shapley n'est plus vrai[15]. Adoptant une démarche d'ingénieur, Roth et Peranson (1999) ont mis au point un mécanisme pour l'Association Américaine de Médecine permettant aux couples de chercher conjointement un poste dans un hôpital. Quand bien même l'on sait que, théoriquement, il n'existe pas d'algorithme qui résolve le problème d'appariement avec couples de manière certaine, les modifications apportées par Roth et Peranson se sont avérées performantes, suggérant ainsi que dans la pratique, les configurations où les appariements stables n'existent pas en présence de couples sont rares et négligeables, voire inexistantes. De plus, Kojima, Pathak et Roth (2010) ont montré récemment que le mécanisme proposé par Roth et Peranson, bien que n'étant pas parfait d'un point de vue théorique, retrouve les propriétés du modèle standard lorsque la situation considérée concerne un nombre suffisamment grand d'acteurs.

3.3 La carte scolaire

La théorie de l'appariement a pris une importance encore plus grande lorsque Abdulkadiroğlu et Sönmez (2003) ont montré que le modèle d'appariement de Gale et Shapley pouvait apporter une solution au problème de la "carte scolaire", ou plus précisément au problème de la répartition des enfants dans les écoles primaires et secondaires lorsque l'on donne aux parents la possibilité d'exprimer des vœux sur la future école de leur enfant. Si, mathématiquement, le problème de la répartition des élèves est identique au modèle du mariage de Gale et Shapley, il n'en est pas moins différent quant aux interprétations en termes de bien-être. Dans le problème standard de la répartition des enfants dans les écoles publiques, seuls les parents ont des préférences. Les écoles, quant à elles, ne sont pas en général considérées comme des joueurs actifs, leurs "préférences" n'intervenant pas

[15] Voir par exemple les contributions de Dutta et Massó (1997), Klaus et Klijn (2005).

dans l'analyse du bien-être. Dans beaucoup de situations, les écoles n'ont en fait qu'un ordre de priorité sur les élèves, qui dépend de facteurs divers (proximité avec le lieu de résidence, présence de frères ou sœurs dans l'école, etc.) déterminés par les autorités compétentes. En d'autres termes, le problème de la carte scolaire consiste essentiellement en un problème d'élicitation des préférences des parents. Cet aspect a une conséquence très importante si l'on considère l'algorithme d'*affectation différée*. Comme on l'a vu dans la section 2.5, Roth (1982a) et Dubins et Freedman (1981) ont démontré que dans le mécanisme dérivé de l'algorithme de Gale et Shapley, révéler ses vraies préférences est une stratégie dominante pour le type d'individu privilégié par l'algorithme. L'utilisation de l'algorithme de Gale et Shapley dans ce contexte est donc naturelle puisqu'elle permet de simplifier radicalement la question du choix d'une stratégie optimale de la part des parents tout en calculant une répartition stable.

Afin de motiver leur approche, Abdulkadiroğlu et Sönmez ont analysé le mécanisme utilisé pour les écoles de Boston. Ils ont montré que la théorie de l'appariement menait à un mécanisme plus performant que celui qui était alors en place. Cet article, bien qu'ayant été publié dans une revue académique, a reçu l'attention du quotidien *Boston Globe*, lançant ainsi un débat sur le problème de la répartition des enfants dans les écoles de la ville. C'est finalement en 2008 que la ville de Boston décida d'utiliser le mécanisme d'*acceptation différée* en lieu et place du mécanisme utilisé jusqu'alors sous les conseils de Roth, Pathak, Abdulkadiroğlu et Sönmez (2005)[16]. Peu de temps après, la ville de New York, toujours sur les conseils de Roth et de ses collaborateurs, opta également pour ce même mécanisme, déclenchant ainsi une vague de réformes à travers les États-Unis[17].

Le travail d'ingénierie mené par Roth et ses collaborateurs lors de la mise au point des mécanismes de Boston et de New York a ouvert la voie à de nouvelles questions théoriques. La littérature sur la carte scolaire constitue aujourd'hui l'un des domaines les plus actifs de la théorie de l'appariement.

3.4 Le marché lié à la transplantation des reins

Parallèlement à l'étude de la carte scolaire, Roth, en collaboration avec Sönmez et Ünver (2004, 2005a, 2005b), a commencé à étudier le marché des organes.

Afin de mieux cerner la spécificité de ce type de marché, rappelons tout

[16]L'ancien mécanisme est justement appelé dans la littérature le “mécanisme de Boston”.

[17]Voir Abdulkadiroğlu, Pathak, Roth (2005, 2009) et Pathak et Sönmez (2008).

d'abord le point de vue de Roth sur le statut des prix sur les marchés d'appariement. Contrairement aux marchés classiques où le prix observé est une statistique suffisante pour identifier une situation d'équilibre entre offre et demande, le prix sur un marché d'appariement (s'il y en a) n'est qu'une des composantes de cet équilibre. En fait, "choisir et être choisi" est, selon Roth, l'une des caractéristiques essentielles des marchés d'appariement. Un exemple typique utilisé par Roth dans son cours de doctorat pour illustrer cette maxime est celui de l'inscription dans une université aux États-Unis. Il est bien connu que les frais d'inscription sont élevés outre-atlantique. Cependant, le fait qu'un étudiant puisse se permettre de payer ces frais ne garantit pas qu'il puisse étudier dans une université comme Harvard, Stanford ou Princeton. Il faut qu'il soit admis, ou, en d'autres termes, choisi par l'université dans laquelle il souhaite s'inscrire. De même, le fait qu'une université admette un étudiant n'implique pas forcément qu'il viendra étudier dans cette université : il faut que cet étudiant choisisse l'université en question. L'on pourra objecter que la capacité de financement d'un étudiant influencera considérablement ses choix d'études. Il en est de même pour le problème de la carte scolaire. Bien qu'il s'agisse d'écoles publiques, et donc gratuites pour les parents, vivre près d'une école augmente les chances d'y être admis, et donc les prix du marché immobilier sont susceptibles d'influencer la répartition finale chaque fois que le critère géographique détermine (partiellement ou complètement) l'ordre de priorité des élèves dans les écoles[18].

Un cas extrême où les prix n'ont pas d'influence est celui des marchés d'organes, puisque la plupart des pays ont légiféré en interdisant le commerce de ce type de biens[19]. Selon Roth, même en l'absence de prix, la transmission d'organes relève de l'organisation d'un marché, puisque l'on est en présence d'une offre (les donneurs d'organes) et d'une demande (les patients). Le cas des transplantations de rein fut vite perçu comme étant un terrain idéal pour la théorie de l'appariement.

Pour un malade en déficience rénale, il y a deux moyens d'obtenir un rein : un donneur décédé (dont les deux reins sont disponibles) et un donneur vivant (qui ne donne qu'un rein). Il arrive que pour certains malades, un de leurs proches soit disposé à donner un rein, mais que malheureusement le rein du donneur ne soit pas compatible avec le receveur. Cependant, le chirurgien peut se trouver en présence de deux couples patient-donneur incompatibles, tandis que le rein du premier donneur est compatible avec le système immunologique du second patient et de même entre le deuxième

[18] Voir Fack et Grenet (2010b) pour une analyse dans le contexte français.

[19] Actuellement seule la République Islamique d'Iran autorise la vente et l'achat de reins.

patient et le premier donneur, offrant ainsi la possibilité d'une transplantation croisée. On peut obtenir ainsi un échange de rein entre patients et donneurs, sans avoir besoin de faire intervenir une transaction financière (et donc un prix). Si l'on reformule ce problème d'échange de rein de manière abstraite, on retrouve le modèle du marché avec indivisibilité de Shapley et Scarf (1974) que l'on a évoqué dans la section 2.7.2. C'est sur cette constatation que Roth, Sönmez et Ünver ont commencé leurs travaux sur les échanges de reins en modifiant l'algorithme du cycle d'échange optimal proposé par Gale dans les années 1970 (voir section 2.7.2).

Certains urologues avaient déjà procédé à des transplantations croisées. Mais la contribution de Roth et ses co-auteurs a ouvert la possibilité de résoudre le problème de manière globale, pour une large population. Un des exemples les plus probants est le développement d'un programme d'échange de reins à grande échelle pour la Nouvelle Angleterre aux États-Unis. Le cadre proposé par Roth a permis par ailleurs d'étudier certaines questions identifiées par le corps médical et pour lesquelles on avait peu de réponses. Une de ces questions concerne le problème de la simultanéité des échanges. En effet, une des contraintes imposées par les échanges croisés est d'opérer simultanément les deux donneurs et les deux receveurs afin d'éviter qu'un des donneurs ne se rétracte après que "son" patient a reçu le rein de l'autre donneur. Cela signifie donc que pour k paires patient-donneur il faut $2 \times k$ salles d'opération et autant d'équipes chirurgicales. Les contraintes matérielles font qu'il est difficile d'aller au-delà de trois paires lors d'un échange croisé. En utilisant la distribution des groupes sanguins dans la population, Roth, Sönmez et Ünver (2007) ont montré que le nombre de transplantations augmentait peu si l'on arrivait à réaliser des échanges impliquant trois paires patient-donneur, et que cette augmentation devenait négligeable dès que l'on allait au-delà.

4 D'autres contributions de Lloyd Shapley

Comme on l'a dit dans l'introduction, l'article de Gale et Shapley (1962) et les autres travaux de Lloyd Shapley mentionnés ci-dessus (Shapley et Shubik (1972), Shapley et Scarf (1974)) ne sont qu'un tout petit échantillon de ses contributions à la théorie des jeux. Nous en évoquons quelques autres dans cette section.

4.1 Jeux coopératifs à utilité transférable

Plus que d'autres théoriciens des jeux actifs au début des années 1950 (tels que Nash, par exemple), Shapley apparaît comme un successeur de von Neumann et Morgenstern (1944). Ceux-ci voient les jeux à n joueurs comme un affrontement entre coalitions, c'est-à-dire, entre sous-groupes de joueurs $S \subseteq N = \{1, ..., n\}$. Ils supposent que les joueurs peuvent effectuer des transferts d'utilité et résument le jeu par une "fonction caractéristique" v, qui associe un montant $v(S)$ à chaque coalition S. On interprète $v(S)$ comme le montant que la coalition S pourrait se garantir si elle était autonome. Par exemple, partant d'un jeu sous forme stratégique à n joueurs, von Neumann et Morgenstern définissent $v(S)$ comme la somme maximale d'utilités que S peut assurer à ses membres, quelle que soit la stratégie de la coalition complémentaire $N \setminus S$. Le modèle de marché bilatéral de Shapley et Shubik (1972), décrit dans la section 2.7.1, fournit un meilleur exemple de jeu coopératif à utilité transférable, dans la mesure où le profit d'une paire vendeur-acheteur est d'emblée défini indépendamment des transactions des autres agents.

von Neumann et Morgenstern (1944) proposent leur "solution" pour les jeux décrits par une fonction caractéristique. Celle-ci consiste en des ensembles d'utilités qui satisfont une double notion de stabilité - interne et externe - assez complexe ; aucun théorème n'en garantit l'existence au début des années 1950[20]. Shapley (1953a) relève le défi de mesurer par un simple nombre $\varphi_i(v)$ le pouvoir relatif du joueur i dans un jeu v. Il définit ainsi la valeur $\varphi(v)$ d'un jeu v sous la forme d'un vecteur $(\varphi_i(v))_{i \in N}$ de $\mathbb{R}^n$. Il identifie une liste de propriétés désirables (des "axiomes") que doit satisfaire une telle valeur : efficience ($\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$), symétrie (si les joueurs i et j jouent le même rôle dans le jeu v, $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$), normalisation (si la fonction caractéristique v est telle que le joueur i soit nul, c'est-à-dire n'apporte rien à aucune coalition S, $\varphi_i(v) = 0$), additivité (pour des fonctions caractéristiques v et w, $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$). Shapley (1953a) démontre qu'il existe une et une seule fonction $\varphi(v)$, définie sur l'ensemble de tous les jeux v à n joueurs, qui satisfasse aux quatre propriétés précédentes : la "valeur". Celle-ci s'exprime, pour chaque joueur i, comme l'espérance de sa contribution marginale aux coalitions qui le précèdent, les joueurs étant rangés dans un ordre aléatoire. Beaucoup d'autres caractérisations axiomatiques de la valeur de Shapley (qui ne font pas toutes apparaître explicitement l'exigence d'additivité) sont disponibles dans la littérature (voir Winter

[20] Un contre-exemple de Lucas (1969) montrera finalement que l'existence d'une solution de von Neumann et Morgenstern n'est pas garantie en général.

(2002) et Monderer et Samet (2002)).

Shapley et Shubik (1954) ont d'emblée l'idée de recourir à la valeur pour mesurer le pouvoir relatif de partis politiques lors d'une élection. Ils adoptent la fonction caractéristique v suivante : $v(S) = 1$ pour une coalition S de partis politiques qui a obtenu un nombre de voix lui assurant la majorité (éventuellement qualifiée), $v(S) = 0$ sinon. Shapley et Shubik définissent alors l'indice de pouvoir du parti i comme sa valeur (de Shapley) $\varphi_i(v)$. Cet indice est utilisé dans de nombreuses études appliquées (voir Salanié (2005) et Lebreton et Van der Straeten (2012) pour des exemples récents). Une autre mesure du pouvoir d'un parti politique couramment utilisée en pratique est l'indice Banzhaf. Dubey et Shapley (1979) en ont fourni une caractérisation axiomatique (voir Straffin (1995) pour plus de détails).

La valeur de Shapley s'est avérée utile dans d'autres contextes, comme le partage optimal de coûts (voir Young (1995)). Elle a été généralisée dans plusieurs directions, comme l'illustrent les six chapitres (53 à 58) du tome III du *Handbook of Game Theory* (Aumann et Hart (2002)) et l'ouvrage coordonné par Roth (1988), qui lui sont exlusivement consacrés. Avant d'évoquer deux extensions importantes de Shapley (1953a), restons encore dans le cadre des jeux à utilité transférable.

Le concept de solution le plus connu pour les jeux décrits par une fonction caractéristique v est sans doute le cœur[21]. Celui-ci se décrit comme l'ensemble des allocations $x = (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$ réalisables pour les n joueurs (c'est-à-dire telles que $\sum_{i \in N} x_i \leq v(N)$) qu'aucune coalition S ne peut bloquer, en proposant une allocation $(y_i)_{i \in S}$ réalisable pour S (c'est-à-dire telle que $\sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$) qui améliore le sort de tous les membres de S (c'est-à-dire telle que $y_i > x_i$ pour tout $i \in S$). Par exemple, les allocations stables de Shapley et Shubik (1972) (voir section 2.7.1) correspondent au cœur d'un jeu approprié, dans lequel les coalitions viables sont constituées de paires vendeur-acheteur. Dans ce modèle, le cœur est non-vide, mais dans beaucoup de jeux très simples, comme le jeu de majorité à trois personnes, ce n'est pas le cas. Un résultat très connu de Shapley (1967), établi indépendamment par Bondareva (1963), fournit une condition élégante, nécessaire et suffisante pour que le cœur d'un jeu à utilité transférable soit non-vide : le jeu doit être "balancé". Shapley (1971) identifie également la classe des jeux "convexes", dans lesquels le cœur est toujours non-vide et se décrit facilement. Un même résultat positif s'applique aux jeux de marché coopératifs de Shapley et Shu-

[21] On fait d'ordinaire remonter à Edgeworth (1881) l'idée du cœur. Le concept a été formalisé notamment par Shapley (1955) et Gillies (1959), avant d'être consolidé par Shapley et Shubik.

bik (1969, 1975), qui sont engendrés par des économies d'échange à utilité transférable. Shapley et Shubik montrent notamment que le cœur d'un jeu de marché correspond exactement aux équilibres concurrentiels des économies qui engendrent ce jeu.

4.2 Jeux coopératifs à utilité non-transférable

On a défini ci-dessus la valeur de Shapley et le cœur pour un jeu à utilité transférable (UT), dans lequel les joueurs peuvent effectuer des transferts illimités d'utilité entre eux. C'est une hypothèse très forte, qui n'a pas sa place dans la représentation de nombreux marchés, comme celui de l'échange de reins. Le modèle de Shapley et Scarf (1974) évoqué dans la section 2.7.2 constitue donc un bon exemple. Une fonction caractéristique plus générale, à utilité non-transférable (UNT), associe un *sous-ensemble* $V(S)$ de $\mathbb{R}^S$ à chaque coalition S. L'ensemble $V(S)$ contient les vecteurs d'utilité que pourraient atteindre les membres de la coalition S si celle-ci était autonome.

Shapley (1969) propose une procédure de transferts fictifs entre les joueurs qui permet d'étendre tout concept de solution défini pour les jeux à utilité transférable aux jeux à utilité non-transférable, en particulier d'obtenir une "valeur de Shapley UNT" à partir de la valeur de Shapley (1953a). Harsanyi (1963) avait auparavant proposé une autre solution qui étende la valeur de Shapley (1953a) aux jeux coopératifs UNT. Roth (1980) émet des réserves à l'égard des deux extensions précédentes en produisant des exemples où elles conduisent à des prédictions contre-intuitives. Ces critiques n'empêchent pas Aumann (1985) de caractériser la "valeur de Shapley UNT" par une liste de propriétés qu'il juge désirables. Roth (1986) revient à la charge, Aumann lui répond, mais le débat est loin d'être clos et se prolonge, aujourd'hui encore, à l'occasion de l'extension de la valeur UNT en information incomplète. Owen (1972) et Maschler et Owen (1989, 1992) proposent une autre manière d'étendre la valeur de Shapley (1953a). McLean (2002) présente en détails les différentes notions de valeur pour les jeux UNT (voir aussi Myerson (1991)).

Shapley s'est également intéressé au cœur dans les jeux UNT. Contrairement à la valeur de Shapley, ce concept de solution peut sans difficulté se définir dans les jeux UNT exactement de la même manière que dans les jeux UT. Le problème, qui restera ouvert longtemps, est d'étendre le théorème de Bondareva (1963) et Shapley (1967). Scarf (1967) identifie une condition suffisante en démontrant que le cœur d'un jeu UNT balancé est non-vide sous des hypothèses générales (en particulier, même si les ensembles $V(S)$ ne sont pas convexes). Cependant, la condition n'est pas suffisante et la démonstration de Scarf est complexe. Shapley et Vohra (1991) proposent une démonstration beaucoup plus simple, à partir de théorèmes de point fixe. L'approche directe de Shapley et Vohra (1991) marque une étape dans l'identification d'une condition généralisée de "balancement", nécessaire et suffisante pour la non-vacuité du cœur d'un jeu UNT. Une telle condition sera obtenue par Predtetchinski et Herings (2004) et Bonnisseau et Iehlé (2007).

Shapley a proposé une autre approche du cœur d'un jeu UNT, basée sur sa procédure de transferts fictifs qui, comme on l'a vu ci-dessus, a été appliquée à la valeur. Il obtient ainsi le "cœur intérieur", un ensemble d'allocations inclus dans le cœur, qui coïncide avec celui-ci dans le cas UT. Ce concept de "cœur intérieur", déjà proposé par Shapley et Shubik (1975) en vue d'une extension de leurs résultats aux économies d'échange classiques, est traité de façon systématique dans Qin (1994) (voir aussi Myerson (1991))[22].

4.3 Jeux coopératifs non-atomiques

Un tout autre chantier naît de la nécessité d'appliquer la valeur à des situations de concurrence parfaite, qui font intervenir une infinité d'agents individuellement négligeables. Aumann et Shapley (1974) introduisent ainsi une nouvelle classe de jeux coopératifs, les jeux "non-atomiques", dans lesquels une coalition S s'identifie à un sous-ensemble (borélien) de l'intervalle $[0,1]$ et la fonction caractéristique v devient une mesure (non-atomique). Aumann et Shapley (1974) établissent l'existence et l'unicité d'une "valeur" pour une classe particulière des jeux non-atomiques qu'ils viennent de définir. Ils proposent aussi une formule, connue sous le nom de "formule diagonale", qui généralise celle de Shapley (1953a) en exprimant la valeur de chaque joueur infinitésimal en termes de ses contributions marginales. Ces résultats sont à l'origine d'une théorie du partage optimal des coûts qui se réfère explicitement aux "prix d'Aumann et Shapley".

L'extension des travaux entamés par Aumann et Shapley fait l'objet d'une littérature abondante (voir Neyman (2002)). Les résultats les plus généraux sont dûs à Mertens (1980, 1988), qui démontre l'existence d'une valeur satisfaisant encore la "formule diagonale" mais qui est définie sur un espace contenant des jeux discontinus et une classe importante de jeux non-différentiables[23]. Hart (2002) montre comment la valeur des jeux non-

[22] Qin (1994) se réfère à des notes de cours de Shapley de 1984. Françoise Forges se souvient également du cœur intérieur comme l'un des thèmes abordés par Shapley dans ses cours au CORE à l'automne 1982.

[23] L'ultime article de Jean-François Mertens "A random partitions approach to the va-

atomiques offre de nouveaux fondements à l'équilibre concurrentiel, en accord avec l'agenda initial d'Aumann et Shapley. Mertens (2002b) ouvre de nouvelles perspectives d'application.

4.4 Jeux non-coopératifs à horizon infini

En sus du célèbre article sur la valeur, Shapley publie en 1953 un autre article fondateur, consacré à un tout autre modèle, les "jeux stochastiques". Ces jeux sont parfois présentés aujourd'hui comme une version interactive de l'optimisation dynamique (qui est menée par un seul décideur) ou même des chaînes de Markov (où il n'y a pas de décideur du tout). Si cette description dissimule des différences importantes entre les modèles de Shapley et de Bellman, elle a au moins le mérite de suggérer d'emblée d'innombrables applications concrètes des jeux stochastiques.[24]

Pour définir un jeu stochastique à deux joueurs, à somme nulle, Shapley (1953b) se donne un ensemble (fini) K d'états de la nature, une distribution de probabilité p sur K et un ensemble (fini) d'actions A^i pour chaque joueur $i = 1, 2$. Un état de la nature initial k_1 est d'abord sélectionné suivant p et annoncé aux deux joueurs. Ensuite, à chaque étape $t = 1, 2, ...$, les joueurs choisissent simultanément une action avant d'être tous deux informés de ces choix. L'état de la nature courant k_t et la paire d'actions $a_t = (a_t^1, a_t^2)$ des joueurs à l'étape t déterminent l'utilité $u(k_t, a_t)$ du joueur 1 à l'étape t, ainsi que la probabilité $p(k_{t+1}|k_t, a_t)$ de l'état de la nature k_{t+1} à l'étape $t + 1$. Les distributions de probabilité $p(.|k_t, a_t)$ forment un élément essentiel du jeu, que l'on désigne sous le nom de "probabilité de transition".

Shapley (1953b) démontre l'existence d'une "valeur" (cette fois, au sens du "minimax" de von Neumann et Morgenstern (1944)) dans tout jeu stochastique de la forme ci-dessus, en supposant que les utilités dans le jeu à horizon infini sont évaluées grâce à un facteur d'actualisation. Sous cette dernière hypothèse, les méthodes de Shapley permettent d'établir également l'existence d'un équilibre de Nash dans les jeux stochastiques à somme non-nulle. Les développements de l'article de Shapley (1953b) sont considérables, comme le montrent les chapitres de Mertens (2002a) et Vieille (2002) dans

lue" porte sur la valeur des jeux non-atomiques. Il a été présenté (par Abraham Neyman) au titre de la conférence "von Neumann", lors du congrès mondial de théorie des jeux en juillet 2012.

[24] Shapley (1953b) propose un modèle dans lequel l'horizon peut d'emblée être infini et les décideurs optimisent leurs paiements actualisés. Il indique que, s'il n'y a qu'un seul décideur, c'est un modèle de "programmation dynamique" et fait référence à Bellman (1952). Mais ce dernier suppose l'horizon fini, une hypothèse qu'il maintiendra largement au long des années 1950.

le *Handbook of Game Theory*. Les recherches, encore en cours dans le cas à somme non-nulle, visent à éprouver la robustesse des solutions obtenues pour un facteur d'actualisation donné et à étendre les résultats à des espaces d'états et d'actions aussi généraux que possible.

On vient de le voir, Shapley a proposé, dès le début des années 1950, le premier modèle de décision à horizon infini. Il n'est donc pas étonnant qu'il se soit aussi intéressé aux jeux dynamiques les plus simples, obtenus en répétant, d'étape en étape, un même jeu sous forme stratégique[25]. Shapley (1964) s'interroge sur la convergence d'un processus d'apprentissage, connu sous le nom de "fictitious play", dans lequel à chaque étape t, chaque joueur calcule la distribution empirique des actions des autres, pour les $t-1$ premières étapes, et optimise en conséquence, de façon myope. Au début des années 1960, on sait que ce processus converge vers un équilibre de Nash du jeu initial, supposé à somme non-nulle, dans le cas de deux joueurs qui n'ont chacun que deux actions possibles[26]. Shapley (1964) réduit l'espoir de généraliser ce résultat en construisant un contre-exemple dans lequel chaque joueur dispose de trois actions. Quelque trente ans plus tard, peut-être à la faveur d'un regain d'intérêt pour les processus d'apprentissage myope, Monderer et Shapley (1996a) établissent la convergence du "fictitious play" dans les *jeux de potentiel*, une classe de jeux à n joueurs aux propriétés remarquables à laquelle nous reviendrons ci-dessous.

Dès le milieu des années 1970, Shapley étudie également les jeux infiniment répétés du point de vue de joueurs rationnels, qui optimisent sur le long terme. Dans un article écrit en 1976, mais qui ne sera publié que bien plus tard, Aumann et Shapley proposent une caractérisation des utilités d'équilibre de Nash de tout jeu infiniment répété sous la forme des utilités réalisables et individuellement rationnelles du jeu initial. On reconnaît là le résultat connu aujourd'hui sous le nom de "folk theorem"[27]. Le fameux théorème a donc bel et bien fait partie de la tradition orale de la théorie des jeux, mais son origine n'est peut-être pas aussi obscure qu'on le prétend souvent.

[25] Un tel jeu dynamique peut se voir comme un jeu stochastique dans lequel l'ensemble des états de la nature est réduit à un seul élément.

[26] La convergence est aussi assurée dans tous les jeux à somme nulle.

[27] Rubinstein avait, de son côté, établi une version du résultat au même moment. Les articles seront finalement publiés (voir Aumann et Shapley (1995) et Rubinstein (1995)), précédés d'un avant-propos commun d'Aumann, Rubinstein et Shapley qui en retrace l'histoire.

4.5 D'autres jeux non-coopératifs

Nous avons déjà illustré plusieurs fois le talent de Shapley pour modéliser des marchés spécifiques sous forme de jeux coopératifs. Shapley et Shubik (1977) ont également développé un modèle de jeux de marché non-coopératifs, qui vise à expliquer comment les décisions des agents sur les marchés déterminent les transactions et en particulier, les prix. Shapley et Shubik partent d'une économie d'échange qui comprend n agents et k biens. Chaque agent, $i = 1, ..., n$, dispose d'une dotation initiale ω_i^ℓ de chaque bien $\ell = 1, ..., k$. Le bien k joue le rôle de numéraire, tandis que, pour chacun des autres biens $\ell = 1, ..., k-1$, un marché est ouvert, sur lequel on peut échanger le bien ℓ contre du numéraire. Dans le jeu de marché de Shapley et Shubik, chaque joueur i peut être actif sur chacun des marchés $\ell = 1, ..., k-1$ en proposant une quantité q_i^ℓ de bien ℓ à vendre et/ou une offre de numéraire $b_i^\ell \geq 0$ destinée à l'achat de bien ℓ. Une stratégie du joueur i consiste donc en un vecteur $(q_i^\ell, b_i^\ell)_{1\leq\ell\leq k-1}$ tel que $q_i^\ell \leq \omega_i^\ell$ et $\sum_{1\leq\ell\leq k-1} b_i^\ell \leq \omega_i^k$. Un $n-$uplet de stratégies détermine, sur chaque marché ℓ, des offres agrégées $q^\ell = \sum_{1\leq i\leq n} q_i^\ell$, pour le bien et $b^\ell = \sum_{1\leq i\leq n} b_i^\ell$, pour le numéraire, de sorte que le prix du bien ℓ se calcule comme $p^\ell = b^\ell/q^\ell$. Au terme des échanges, l'agent i détient une quantité $x_i^\ell = \omega_i^\ell - q_i^\ell + b_i^\ell/p^\ell$ de bien ℓ ($\ell = 1, ..., k-1$) et une quantité $x_i^k = \omega_i^k - \sum_{1\leq\ell\leq k-1} b_i^\ell + \sum_{1\leq\ell\leq k-1} q_i^\ell p^\ell$ de numéraire.

Dans le jeu de marché stratégique qui vient d'être décrit, chaque agent peut jouer un rôle déterminant dans les prix et allocations associés à un équilibre de Nash. Une question importante est la convergence de ces prix et allocations vers des solutions concurrentielles de l'économie d'échange lorsque le nombre d'agents s'accroît au point que chacun d'eux devient négligeable. Shapley et Shubik apportent une première réponse, largement positive, qui sera suivie d'une série d'autres[28].

La règle qui fixe les prix et les quantités échangées à partir des décisions décentralisées des agents, comme la représentation du caractère négligeable des individus, a donné lieu à de multiples variantes. Par exemple, nous avons sous-entendu ci-dessus que chaque agent pouvait être à la fois vendeur et acheteur sur un même marché, mais on pourrait imposer à chacun d'être actif d'un seul côté de chaque marché. Dans la même veine, on pourrait contraindre les agents à vendre la totalité de leur dotation initiale sur chaque marché ($q_i^\ell = \omega_i^\ell$, $\ell = 1, ..., k-1$), quitte à la racheter en partie. Des variantes plus substantielles, notamment en quête de fondements pour l'émergence d'une monnaie, ne fixent pas de numéraire au départ et envisagent différents

[28] Voir par exemple Giraud (2003).

scénarios pour appréhender les contraintes budgétaires (vente à découvert, faillite, etc.)[29].

Shapley a aussi proposé (sans laisser d'article) un modèle de "comptoirs" qui se libère du numéraire en dédiant un marché à chaque *paire* de biens (ℓ, m). La stratégie de chaque agent prend alors la forme d'une matrice $k \times k$ dont l'élément (ℓ, m) est la quantité de bien ℓ que l'agent offre contre du bien m. Une agence calcule alors un prix pour chaque bien de manière à en équilibrer l'offre et la demande. Plus précisément, les prix sont calculés afin que la valeur de la quantité totale demandée de bien ℓ soit égale à la valeur totale de tous les biens offerts en échange de bien ℓ. Cette manière de procéder garantit d'emblée un prix pour chaque bien, par opposition à une méthode qui se contenterait de prix relatifs, établis pour chaque bien en fonction des autres[30].

Pour ce qui est de modéliser la concurrence parfaite des agents dans le cadre des jeux de marché stratégiques, une approche standard, sous-entendue ci-dessus, est de répliquer à l'infini les agents du jeu de marché à n joueurs. Dubey et Shapley (1994) suivent une autre voie, déjà évoquée dans le cadre coopératif de la valeur de Shapley, qui consiste à introduire un *continuum* de joueurs. Ils partent d'un jeu de marché à la Shapley et Shubik, mais non-atomique, et parviennent ainsi à établir, sous des conditions adéquates, l'*équivalence* des équilibres de Nash du jeu et des équilibres concurrentiels de l'économie d'échange sous-jacente.

Les jeux de marché ne sont pas les seuls jeux non-coopératifs statiques qui aient retenu l'attention de Shapley. Sans tenter de dresser une liste, on doit au moins citer les jeux "de potentiel" de Monderer et Shapley (1996a, 1996b), évoqués ci-dessus à l'occasion de l'apprentissage myope. Dans ces jeux, le calcul des équilibres de Nash se ramène à un problème d'optimisation assez simple, qui revient essentiellement à maximiser une fonction, le "potentiel" du jeu. Considérons par exemple un duopole de Cournot dans lequel la demande inverse est affine et les fonctions de coût, propres à chaque entreprise, sont différentiables. Le potentiel P de ce jeu est une fonction $P(a_1, a_2)$ des paires de quantités produites, obtenue à partir des fonctions de profit des entreprises[31], telle que toute paire $a^* = (a_1^*, a_2^*)$ qui maximise P est un équilibre de Nash du jeu de duopole. Monderer et Shapley (1996b) démontrent notamment que, sous des hypothèses appropriées, un jeu de po-

[29] Shapley lui-même s'intéresse à la question, comme en témoigne son article de 1994 avec Dubey.

[30] Le modèle des comptoirs de Shapley a été formalisé par Sahi et Yao (1989) (voir à nouveau Giraud (2003) pour plus de détails).

[31] Monderer et Shapley (1996b) en donnent l'expression précise.

tentiel possède un équilibre de Nash (en stratégies pures).

5 En guise de conclusion

Dans cet article, nous nous sommes limités aux contributions d'Alvin Roth et de Lloyd Shapley qui touchent à l'organisation de marchés. Pour Shapley, nous avons largement débordé du problème spécifique de l'appariement d'agents de deux types distincts, mais ne sommes pas pour autant parvenus à être exhaustifs, loin de là. En particulier, nous n'avons pas essayé de couvrir les travaux réalisés par Shapley après le milieu des années 1990. Pour Roth, le thème du "design" de marchés nous a permis d'évoquer les contributions les plus récentes, mais nous avons passé sous silence de nombreux articles consacrés notamment à la théorie de la négociation et largement étoffés de vérifications expérimentales.

Les contributions de Roth sur les marchés d'appariement s'inscrivent aussi dans une réflexion de fond sur la définition et le fonctionnement d'un marché. Si le marché est bien au cœur de la question économique de l'allocation de ressources rares, son rôle ne se limite pas à garantir l'existence d'un système de prix. Roth propose plutôt de voir le marché comme un ensemble de caractéristiques (telles que les acteurs, les transactions possibles...) assorti d'un mécanisme, éventuellement sans prix, qui alloue correctement les ressources sur ce marché. Roth (2007) parvient ainsi à s'interroger sur des marchés dont l'idée même répugne aux agents concernés. L'assurance-vie au début du XIXème siècle fournit un exemple qui paraît surprenant à l'heure actuelle[32], mais la consommation humaine de viande chevaline fait toujours l'objet d'un interdit en Californie. Si l'on adopte la démarche de Roth, certains marchés, comme celui des reins, deviennent concevables alors même que des contraintes très fortes pèsent sur les échanges.

Nous avons suivi, au fil d'une soixantaine d'années, le cheminement de l'étude de l'appariement, d'abord purement théorique, puis appliquée, et finalement, aujourd'hui, faite plutôt d'allées-venues fructueuses entre la recherche universitaire et la résolution de problèmes concrets. Tout au long de ce processus, de l'article fondateur de Gale et Shapley aux dispositifs mis en place par Roth pour la transplantation de reins, les chercheurs ont fait fi des idées préconçues, pratiquant le raisonnement mathématique sans faire appel à des théorèmes et organisant des marchés économiques sans faire appel à des prix. Roth et ses collaborateurs invitent les économistes à dépasser leurs

[32]L'idée de mettre un prix sur la vie et de "parier" sur la date de sa mort choquait les législateurs de l'époque – voir Roth (2007) pour plus de détails.

préjugés plus largement encore.

Références

[1] Abdulkadiroğlu, A. et T. Sönmez (1999), "House allocation with existing tenants", *Journal of Economic Theory* 88(2), 233–260.

[2] Abdulkadiroğlu, A. et T. Sönmez (2003), "School choice : a mechanism design approach", *American Economic Review* 93(3), 729–747.

[3] Abdulkadiroğlu, A., P. Pathak et A. Roth (2005), "The New York City high school match", *American Economic Review* 95(2), 364–367.

[4] Abdulkadiroğlu, A., P. Pathak et A. Roth (2009), "Strategy-proofness versus efficiency in matching with indifferences : redesigning the NYC High School match", *American Economic Review* 99(5), 1954–78.

[5] Abdulkadiroğlu, A., P. Pathak, A. Roth et T. Sönmez (2005), "The Boston public school match", *American Economic Review* 95(2), 368–371.

[6] Aumann, R. (1985), "An axiomatization of the non-transferable utility value", *Econometrica* 53, 599–612.

[7] Aumann, R. (1986), "On the non-transferable utility value : rejoinder", *Econometrica* 54, 985-989.

[8] Aumann, R. et S. Hart (1995) (sous la direction de), *Handbook of Game Theory* II, North Holland.

[9] Aumann, R. et S. Hart (2002) (sous la direction de), *Handbook of Game Theory* III, North Holland.

[10] Aumann, R. et L. Shapley (1974), *Values of Non Atomic Games*, Princeton University Press.

[11] Aumann, R., et L. Shapley (1995), "Long-term competition : a game-theoretic analysis", in N. Megiddo (sous la direction de), *Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler*, New York : Springer-Verlag, 1-15.

[12] Bellman (1952), "On the theory of dynamic programming", *Proceedings of National Academy of Science* 38, 716-719.

[13] Bondareva, O. (1963), "Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games" (en russe), Problemy Kybernetiki 10, 119–139.

[14] Bonnisseau, J.-M. et V. Iehlé (2007), "Payoff-dependent balancedness and cores", *Games and Economic Behavior* 61(1), 1–26.

[15] Crawford, V. et E. Knoer (1981), "Job matching with heterogeneous firms and workers", *Econometrica* 49(2), 437–450.

[16] Demange, G., D. Gale et M. Sotomayor (1987), "A further note on the stable matching problem", *Discrete Applied Mathematics* 16(3), 217–222.

[17] Dubey, P. et L. Shapley (1979), "Mathematical properties of the Banzhaf power index", *Mathematics of Operations Research* 4, 99-132.

[18] Dubey, P. et L. Shapley (1994), "Noncooperative general exchange with a continuum of traders : two models", *Journal of Mathematical Economics* 23(3), 253-293.

[19] Dubins, L.E. et D.A. Freedman (1981), "Machiavelli and the Gale-Shapley algorithm", *American Mathematical Monthly* 88, 485–494.

[20] Dutta, B. et J. Massó (1997), "Stability of matchings when individuals have preferences over colleagues", *Journal of Economic Theory* 75(2), 464–475.

[21] Edgeworth, F. (1881), *Mathemathical Psychics : an Essay on the Mathematics to the Moral Sciences*, London : Kegan Paul.

[22] Ehlers, L. (2008), "Truncation strategies in matching markets", *Mathematics of Operations Research* 33(2), 327–335.

[23] Erdil, A. et H. Ergin (2008), "What's the matter with tie-breaking ? Improving efficiency in school choice", *American Economic Review* 98(3), 669–89.

[24] Fack, G. et J. Grenet (2010a), "Que peut-on attendre de la réforme de la sectorisation en France ? Quelques enseignements des politiques de choix scolaire", *Revue d'Economie Politique* 120(5), 709–737.

[25] Fack, G. et J. Grenet (2010b), "When do better schools raise housing prices ? Evidence from Paris public and private schools", *Journal of Public Economics*, 94 (1–2), 59-77.

[26] Gale, D. et L. Shapley (1962), "College admissions and the stability of marriage", *American Mathematical Monthly* 69(1), 9–15.

[27] Gillies, D. (1959), "Solutions to general non-zero-sum games", in A. Tucker et D. Luce (sous la direction de), *Contributions to the Theory of Games* IV (Annals of Mathematics Studies 40), Princeton : Princeton University Press, 47–85.

[28] Giraud, G. (2003), "Strategic market games : an introduction", *Journal of Mathematical Economics* 39(5), 355–375.

[29] Haeringer, G. et V. Iehlé (2010), "Enjeux stratégiques du concours de recrutement des enseignants-chercheurs", *Revue Economique* 61(4), 697–721.

[30] Haeringer, G. et F. Klijn (2009), "Constrained school choice", *Journal of Economic Theory* 144(5), 1921–1947.

[31] Harsanyi, J. (1963), "Simplified bargaining model for the n-person cooperative game", *International Economic Review* 4, 194-220.

[32] Hart, S. (2002), "Values of perfectly competitive economies", *Handbook of Game Theory* III, Chapter 57, 2169-2184.

[33] Hatfield, J. et F. Kojima (2010), "Substitutes and stability for matching with contracts", *Journal of Economic Theory* 145(5), 1704–1723.

[34] Hatfield, J. et P. Milgrom (2005), "Matching with contracts", *American Economic Review* 95(4), 913–935.

[35] Hiller, V. et O. Tercieux (2012), "Choix d'école en France : une évaluation de la procédure Affelnet", Document de travail.

[36] Kagel, J. et A. Roth. (2000), "The dynamics of reorganization in matching markets : a laboratory experiment motivated by a natural experiment", *The Quarterly Journal of Economics* 115(1), 201–235.

[37] Kelso, A. et V. Crawford (1982), "Job matching, coalition formation, and gross substitutes", *Econometrica* 50(6), 1483–1504.

[38] Kesten, O. (2010), "School choice with consent", *The Quarterly Journal of Economics* 125(3), 1297–1348.

[39] Klaus, B. et F. Klijn (2005), "Stable matchings and preferences of couples", *Journal of Economic Theory* 121(1), 75–106.

[40] Knuth, D.E. (1981), *Mariages Stables et leurs Relations avec d'Autres Problèmes Combinatoires.* Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, Québec.

[41] Kojima, F. (2012), "The rural hospital theorem revisited", *International Journal of Economic Theory* 8(1), 67–76.

[42] Kojima, F. et P. Pathak (2009), "Incentives and stability in large two-sided matching markets", *American Economic Review* 99(3), 608–27.

[43] Kojima, F., P. Pathak et A. Roth (2010), "Matching with couples : stability and incentives in large markets", NBER Working Papers 16028, National Bureau of Economic Research, Inc.

[44] Le Breton, M. et K. van der Straeten (2012), "Alliances électorales entre deux tours de scrutin : le point de vue de la théorie des jeux coopératifs et une application aux élections régionales de mars 2010", IDEI Working Paper, n°710, à paraître dans la *Revue Economique.*

[45] Lucas, W. (1969), "The proof that a game may not have a solution", *Transactions of the American Mathematical Society* (American Mathematical Society) 136, 219–229.

[46] Maschler, M. et G. Owen, G. (1989), "The consistent Shapley value for hyperplane games", *International Journal of Game Theory* 18, 389–407.

[47] Maschler, M. et G. Owen (1992), "The consistent Shapley value for games without side payments", in : Selten, R. (sous la direction de), *Rational Interaction*, Springer-Verlag, 5–11.

[48] Mertens, J.-F. (1980), "Values and derivatives", *Mathematics of Operations Research* 5, 523-552.

[49] Mertens, J.-F. (1988), "The Shapley value in the non differentiable case", *International Journal of Game Theory* 17, 1–65.

[50] Mertens, J.-F. (2002a), "Stochastic games", *Handbook of Game Theory* III, Chapter 47, 1809-1-832.

[51] Mertens, J.-F. (2002b), "Some other economic applications of the value", *Handbook of Game Theory* III, Chapter 58, 2185–2201.

[52] Monderer, D. et D. Samet (2002), "Variations on the Shapley Value", *Handbook of Game Theory* III, Chapter 54, 2055–2076.

[53] Monderer, D. et L. Shapley (1996a), "Fictitious play property for games with identical interests", *Journal of Economic Theory*, 68(1), 258–265.

[54] Monderer, D. et L. Shapley (1996b), "Potential games", *Games and Economic Behavior*, 14(1), 124–143.

[55] McLean, R. (2002), "Values of non-transferable utility games", *Handbook of Game Theory* III, Chapter 55, 2077-2120.

[56] Myerson, R. (1991), *Game Theory : Analysis of Conflict*, Harvard University Press.

[57] von Neumann, J. et O. Morgenstern (1944), *Game Theory and Economic Behavior*, Princeton : Princeton University Press.

[58] Neyman, A. (2002), "Values of games with infinitely many players", *Handbook of Game Theory* III, Chapter 56 : 2121-2167.

[59] Owen, G. (1972), "Values of games without side payments", *International Journal of Game Theory* 1, 95–109.

[60] Pathak, P. et T. Sönmez (2008), "Leveling the playing field : Sincere and sophisticated players in the Boston mechanism", *American Economic Review* 98(4), 1636–52.

[61] Predtetchinski, A. et P.J.-J. Herings (2004), "A necessary and sufficient condition for non-emptiness of the core of a non-transferable utility game", *Journal of Economic Theory* 116, 84–92.

[62] Qin, C.-Z. (1994), "The inner core of an N-person game", *Games and Economic Behavior* 6, 431–444.

[63] Roth, A. (1980), "Values for games without sidepayments : some difficulties with current concepts", *Econometrica* 48, 457-465.

[64] Roth, A. (1982a) "The economics of matching : stability and incentives", *Mathematics of Operations Research* 7, 617–628.

[65] Roth, A. (1982b), "Incentive compatibility in a market with indivisible goods", *Economics Letters* 9(2), 127–132.

[66] Roth, A. (1984), "The evolution of the labor market for medical interns and residents : A case study in game theory", *Journal of Political Economy* 92(6), 991–1016.

[67] Roth, A. (1985), “The college admissions problem is not equivalent to the marriage problem”, *Journal of Economic Theory* 36(2), 277–288.

[68] Roth, A. (1986a), “On the allocation of residents to rural hospitals : A general property of two-sided matching markets”, *Econometrica* 54(2), 425–27.

[69] Roth, A. (1986b), “On the non-transferable utility value : a reply to Aumann”, *Econometrica* 54, 981-984.

[70] Roth, A. (1988) (sous la direction de), *The Shapley Value, Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge : Cambridge University Press.

[71] Roth, A. (1991), “A natural experiment in the organization of entry-level labor markets : regional markets for new physicians and surgeons in the United Kingdom”, *American Economic Review* 81(3), 415–440.

[72] Roth, A. (2007), “Repugnance as a constraint on markets”, *Journal of Economic Perspectives* 21(3), 37–58.

[73] Roth, A. (2008), “Deferred acceptance algorithms : history, theory, practice, and open questions”, *International Journal of Game Theory* 36(3), 537–569.

[74] Roth, A. et E. Peranson (1999), “The redesign of the matching market for american physicians : Some engineering aspects of economic design”, *American Economic Review* 89(4), 748–780.

[75] Roth, A. et A. Postlewaite (1977), “Weak versus strong domination in a market with indivisible goods”, *Journal of Mathematical Economics* 4(2), 131–137.

[76] Roth, A. et U.G. Rothblum (1999), “Truncation strategies in matching markets–in search of advice for participants”, *Econometrica* 67(1), 21–44.

[77] Roth, A., T. Sönmez et U. Ünver (2004), “Kidney exchange”, *The Quarterly Journal of Economics* 119(2), 457–488.

[78] Roth, A., T. Sönmez et U. Ünver (2005a), “A kidney exchange clearinghouse in New England”, *American Economic Review* 95(2), 376–380.

[79] Roth, A., T. Sönmez et U. Ünver (2005b), “Pairwise kidney exchange”, *Journal of Economic Theory* 125(2), 151–188.

[80] Roth, A., T. Sönmez et U. Ünver (2007), "Efficient kidney exchange : coincidence of wants in markets with compatibility-based preferences", *American Economic Review* 97(3), 828–851.

[81] Roth, A. et M. Sotomayor (1989), "The college admissions problem revisited", *Econometrica* 57(3), 559–70.

[82] Roth, A. et M. Sotomayor (1990), *Two-Sided Matching : A Study in Game-Theoretic Modelling and Analysis*. Econometric Society Monographs. Cambridge University Press.

[83] Roth, A. et X. Xing (1994), "Jumping the gun : imperfections and institutions related to the timing of market transactions", *American Economic Review* 84(4), 992–1044.

[84] Roth, A. et X. Xing (1997), "Turnaround time and bottlenecks in market clearing : decentralized matching in the market for clinical psychologists", *Journal of Political Economy* 105(2), 284–329.

[85] Rubinstein, A. (1995), "Equilibrium in supergames", in N. Megiddo (sous la direction de), *Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler*, New York : Springer-Verlag, 17-27.

[86] Sahi, S. et S. Yao (1989), "The non-cooperative equilibria of a trading economy with complete markets and consistent prices", *Journal of Mathematical Economics* 18(4), 325–346.

[87] Salanié, B. (2005), "La France dans l'Europe des 27", http ://bsalanie.blogs.com/economie_sans_tabou/2005/04/le_poids_de_la_.html

[88] Scarf, H. (1967), "The core of an N-person game", *Econometrica* 35, 50–69.

[89] Shapley, L. (1953a), "A Value for n-person games", in H. Kuhn et A. Tucker (sous la direction de), *Contributions to the Theory of Games* II (Annals of Mathematical Studies 28), Princeton : Princeton University Press, 307–317.

[90] Shapley, L. (1953b), "Stochastic games", *Proceedings of National Academy of Science* 39, 1095–1100.

[91] Shapley, L. (1955), "Markets as cooperative games", Technical Report P629, The Rand Corporation.

[92] Shapley, L. (1964), "Some topics in two-person games", in M. Dresher, L. Shapley, and A. Tucker (sous la direction de), *Advances in Game Theory*, Princeton : Princeton University Press.

[93] Shapley, L. (1967), "On balanced sets and cores", *Naval Research Logistics Quarterly* 14, 453–460.

[94] Shapley, L. (1969), "Utility comparisons and the theory of games", in : Guilbaud, G. (sous la direction de), *La Decision*, CNRS, 251–263.

[95] Shapley, L. (1971), "Cores of convex games", *International Journal of Game Theory* 1, 11–26.

[96] Shapley, L. et H. Scarf (1974), "On cores and indivisibility", *Journal of Mathematical Economics* 1, 23–37.

[97] Shapley, L. et M. Shubik (1954), "A method for evaluating the distribution of power in a committee system", *American Political Science Review* 48, 787–792.

[98] Shapley, L. et M. Shubik (1969), "On market games", *Journal of Economic Theory* 1, 9–25.

[99] Shapley, L. et M. Shubik (1972), "The assignment game I : the core", *International Journal of Game Theory* 1, 111–130.

[100] Shapley, L. et M. Shubik (1975), "Competitive outcomes in the core of market games", *International Journal of Game Theory* 4, 229–237.

[101] Shapley, L. et M. Shubik (1977), "Trade using one commodity as a means of payment", *Journal of Political Economy* 85(5), 937–968.

[102] Shapley, L. et R. Vohra (1991), "On Kakutani's fixed point theorem, the K-K-M-S theorem and the core of a balanced game", *Economic Theory* 1, 108–116.

[103] Straffin, P. (1995), "Power and stability in politics", *Handbook of Game Theory* II, Chapter 32, 1127-1151.

[104] Vieille, N. (2002), "Stochastic games : recent results", *Handbook of Game Theory* III, Chapter 48, 1833-1050.

[105] Winter, E. (2002), "The Shapley value", *Handbook of Game Theory* III, Chapter 53, 2025-2054.

[106] Young, P. (1995), "Cost allocation", *Handbook of Game Theory* II, Chapter 34, 1193-1235.