THEORIE DE LA MESURE DANS LES LIEUX REGULIERS ou LES INTERSECTIONS CACHEES DANS LE PARADOXE DE BANACH-TARSKI

Leroy Olivier

THÉORIE DE LA MESURE DANS LES LIEUX RÉGULIERS

ou

LES INTERSECTIONS CACHÉES DANS LE PARADOXE DE BANACH-TARSKI

Olivier Leroy

PREAMBULE

La disparition brutale d'Olivier Leroy en avril 1996 a privé la communauté mathématique d'un esprit brillant(*) mais bien méconnu.

Le texte qui suit est la transcription fidèle d'un manuscrit qu'il avait rédigé en 1995 à la suite de deux exposés donnés au séminaire AGATA sur le problème de la mesure dans les lieux. D'autres travaux sur le même sujet ont été laissés en chantier par O.Leroy, en particulier une amorce de théorie de l'intégration, mais nous ne présentons ici, pour l'instant, que la partie consacrée à la mesure.

Nous avons pris l'initiative de compléter le texte original par : une introduction, les notes en bas de page, des ajouts entre doubles crochets ([[...]]), ainsi qu'une annexe (sous-espaces et sous-lieux d'un espace topologique).

Montpellier le 20 mai 1998

Jean Malgoire, Christine Voisin

(*) voir par exemple : A. Grothendieck, Récoltes et Semailles, Tome II, note 96, pages 409 à 413.

INTRODUCTION

Il est bien connu que l'axiome du choix implique l'existence de parties non mesurables pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ ainsi que l'existence de décompositions “paradoxales” de la boule unité de $\mathbb{R}^3$ (Banach-Tarski). Ceci est généralement interprété comme le prix à payer pour les nombreux services rendus par cet axiome (*).

La théorie proposée par Olivier Leroy montre que l'on peut avoir simultanément l'axiome du choix et “tout est mesurable” ! Elle se place dans le cadre des *lieux* (terme français choisi par l'auteur comme traduction de l'anglais *locales*) qui sont des cas particuliers de topos au sens de Grothendieck : un lieu est simplement un ensemble ordonné qui a les propriétés formelles de l'ensemble ordonné des ouverts d'un espace topologique. Les lieux ont déjà fait l'objet de nombreuses études (cf (**) et son abondante bibliographie).

Un des aspects remarquables de cette théorie (en particulier pour ceux, nombreux, qui ont une méfiance systématique pour les généralisations...) est qu'elle s'applique de manière pertinente aux espaces topologiques habituels dans lesquels elle fait apparaître des “sous-espaces non classiques” (des sous-lieux) ; avec pour conséquence que l'intersection (aux sens des sous-lieux) de sous-espaces ordinaires n'est plus forcément un sous-espace ordinaire. (***)

Le résultat le plus frappant est sans doute que le prolongement naturel de la mesure extérieure de Lebesgue (sur $[0,1]$ par exemple) à *tous* les sous-lieux de $[0,1]$ est une *mesure σ-additive extérieurement régulière* ! ! !

Les partitions (ensemblistes) “paradoxales” qui donnaient des parties non mesurables au sens de Lebesgue ne sont plus des partitions au sens des lieux : il y a des intersections cachées ...

(*) par exemple, comme nous l'avait fait remarquer Olivier Leroy, la moyennabilité des groupes abéliens : i.e. l'existence de mesures additives (ou densité) invariantes par translations, de masse totale 1, définies sur l'ensemble de *toutes* les parties.

(**) Sheaves in Geometry and Logic. S.Mac Lane & I.Moerdijk. Springer 92.

(***) on a par exemple un sous-lieu de $\mathbb{R}$ (appelé *lieu générique de* $\mathbb{R}$) qui est l'intersection des ouverts denses et qui est encore dense (bien que sans point !).

TABLE DES MATIERES

I - SOUS-TOPOS DANS LES ESPACES TOPOLOGIQUES

1 - Reconstitution d'un espace topologique à partir de ses ouverts.

Vocabulaire et notation. On dit qu'un espace E est *irréductible* s'il est non-vide et s'il n'existe pas dans E deux ouverts non-vides disjoints. D'autre part, on appelle *point générique* de E tout point x tel que $\overline{\langle x\rangle} = E$. Enfin, on dit que E est *sobre* si toute partie fermée irréductible de E admet un point générique et un seul.
(en particulier : 1) tout espace séparé est sobre, puisque tout fermé irréductible se réduit à un point, 2) Si A est un anneau commutatif unifère, Spec A est sobre).

Tous les espaces considérés dans la suite sont supposés sobres. Pour tout espace E, on notera $O(E)$ l'ensemble des ouverts de E ordonné par inclusion.

Proposition 1. *Etant donnés deux espaces sobres E, F et une application croissante $\varphi : O(E) \longrightarrow O(F)$, les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) Il existe une unique application continue $f : F \longrightarrow E$ telle que $f^{-1}(V) = \varphi(V)$ pour tout ouvert V de E.

b) $\varphi(\emptyset) = \emptyset$, $\varphi(E) = F$, et φ commute aux intersections finies et aux réunions quelconques.

(En particulier si F se réduit à un point, on obtient une description de l'ensemble des points de E en termes de l'ensemble des ouverts.)

Cette proposition montre qu'on peut plonger la catégorie des espaces (sobres) et applications continues dans une catégorie plus large de "lieux" (*loci en anglais*) (*).

Définition 1. Un lieu E consiste en la donnée d'un ensemble ordonné $(O(E), \subset)$, ([[dont les éléments sont appelés *ouverts*]]) qui a les propriétés suivantes :

a) Il existe un plus petit élément O_E (ou $\emptyset$) et un plus grand élément 1_E (ou E par abus de notation)

b) Toute famille (V_i) d'éléments de $O(E)$ a une borne supérieure, ([[appelée *réunion*]]), et notée $\underset{i}{\cup} V_i$.

c) Tout couple U, V d'éléments de $O(E)$ a une borne inférieure, ([[appelée *intersection* de U et V]]), et notée $U \cap V$.

(*) ou encore *locales*.

d) Pour toute famille (V_i) d'éléments de $O(E)$ et tout $W \in O(E)$, on a

$$W \cap (\bigcup_i V_i) = \bigcup_i (W \cap V_i)$$

(En d'autres termes, $O(E)$ est un *treillis distributif complet*).

Définition 2. Etant donnés deux lieux E, F un morphisme $f : E \longrightarrow F$ est une application croissante $f^* : O(F) \longrightarrow O(E)$ telle que

a) $f^*(O_F) = O_E$, $f^*(1_F) = 1_E$

b) f^* commute aux intersections finies et aux unions quelconques.

Pour tout $U \in O(E)$, l'ensemble des $V \in O(F)$ tels que $f^*(V) \subset U$ a donc un plus grand élément qu'on notera $f_*(U)$.

On a la relation d'adjonction

$$f^*(V) \subset U \Longleftrightarrow V \subset f_*(U)$$

Elle implique que f^* est entièrement déterminée par f_*.

Commentaire. La structure de lieu est équivalente à celle de topos (de Grothendieck) *engendré par ses ouverts* ; les morphismes de lieux s'identifient aux morphismes (géométriques) de topos. D'après la proposition 1, on a une équivalence naturelle entre la catégorie des espaces sobres et applications continues, et une sous-catégorie pleine de la catégorie des lieux.

2 - Notion de sous-lieu.

Lemme 1 et définition. *Pour tout morphisme de lieux $f : E \longrightarrow F$, les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) f^* est surjective

(ii) f_* est injective

(iii) $f^* f_* = 1_{O(E)}$ *[[*Les compositions sont notées par juxtaposition.*]]*

On appellera plongement *tout morphisme de lieux ayant ces propriétés.*

Preuve : découle immédiatement de la relation d'adjonction entre f^* et f_*.

Remarque. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue entre espaces sobres. Pour que f soit un plongement (en tant que morphisme de lieux) il faut et il suffit qu'elle soit un homéomorphisme de E sur un sous-espace de F.

Preuve. La condition est suffisante par définition de la topologie induite.

Inversement, supposons que f soit un plongement. Soit x, x' deux points de E tels que $f(x) = f(x')$. Alors $f_*(E - \overline{\langle x \rangle}) = f_*(E - \overline{\langle x' \rangle})$, d'où $\overline{\langle x \rangle} = \overline{\langle x' \rangle}$ puisque f_* est injective, et $x = x'$ puisque E est sobre. Donc l'application $x \mapsto f(x)$ est une bijection de l'ensemble des points de E sur un ensemble de points de F. Puisque f^* est surjective, c'est un homémorphisme sur le sous-espace correspondant.

Lemme 2. *Soient $i : X \longrightarrow E$ un plongement et $f : Y \longrightarrow E$ un morphisme de lieux. Pour que f se factorise par i, il faut et il suffit que $f_* f^*(V) \supset i_* i^*(V)$ pour tout $V \in O(E)$.*

Corollaire : *deux plongements $i : X \longrightarrow E$ et $j : Y \longrightarrow E$ sont isomorphes si et seulement si $i_* i^* = j_* j^*$.*

Preuve du lemme 2 : Condition nécessaire. Pour tout $V \in O(E)$, on a $V \subset f_* f^*(V)$ par adjonction entre f_* et f^*. Soit $g : Y \longrightarrow Y$ tel que $f = ig$. On a successivement

$$\begin{aligned} V &\subset i_* g_* g^* i^*(V) \\ i^*(V) &\subset g_* g^* i^*(V) \qquad \text{par adjonction} \\ i_* i^*(V) &\subset i_* g_* g^* i^*(V) = f_* f^*(V) \end{aligned}$$

Condition suffisante. On a $f^* f_* f^* = f^*$: en effet, si $V \in O(E)$, on a $V \subset f_* f^*(V)$, donc $f^*(V) \subset f^* f_* f^*(V)$. D'autre part, l'inclusion $f_* f^*(V) \subset f_* f^*(V)$ donne par adjonction $f^* f_* f^*(V) \subset f^*(V)$. Supposons maintenant $i_* i^* \subset f_* f^*$. Alors

$$f^*(V) = f^* i_* i^*(V)$$

pour tout $V \in O(E)$: en effet

$$V \subset i_* i^*(V) \Longrightarrow f^*(V) \subset f^* i_* i^*(V)$$

et d'autre part

$$i_* i^*(V) \subset f_* f^*(V) \Longrightarrow f^* i_* i^*(V) \subset f^* f_* f^*(V) = f^*(V)$$

Par conséquent, étant donnés $V, W \in O(E)$, la relation $i^*(V) = i^*(W)$ implique $f^*(V) = f^*(W)$. Puisque i^* est surjective, il existe donc une application et une seule $g^* : O(X) \longrightarrow O(Y)$ telle que $g^* i^* = f^*$. Puisque f^* et i^* commutent aux intersections finies et aux réunions, il en est de même pour g^*, cqfd.

Lemme 3. *Soient E un lieu et $e : O(E) \longrightarrow O(E)$ une application croissante. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(a) il existe un lieu X et un morphisme $f : X \longrightarrow E$ telque $e = f_* f^*$.

(a bis) idem avec un plongement

(b) e est idempotent, pour tout $U, V \in O(E)$, $e(U) \supset U$, et $e(U \cap V) = e(U) \cap e(V)$.

Preuve. (a) $\Longrightarrow$ (b). Les deux premières propriétés de b) ont été établies dans la démonstration du lemme précédent ; d'autre part f_* commute aux inf quelconques pour tout morphisme de lieux f, puisque c'est l'adjointe à droite de f^*.

(b) $\Longrightarrow$ (a bis). Soit Ω l'ensemble des $V \in O(E)$ tels que $e(V) = V$; c'est aussi l'image de l'application e. Prouvons que Ω est un treillis distributif complet pour l'ordre induit.

1) Si $U, V \in \Omega$, alors $e(U \cap V) = e(U) \cap e(V) = U \cap V$, donc $U \cap V \in \Omega$.

2) Soient (V_i) une famille d'éléments de Ω et W un élément de Ω. On a :

$$\begin{aligned} \forall i \in I, \quad V_i \subset W &\Longleftrightarrow \bigcup_i V_i \subset W \\ &\Longleftrightarrow e(\bigcup_i V_i) \subset W \end{aligned}$$

donc $e(\bigcup_i V_i)$ est borne supérieure de la famille (V_i) dans Ω.

3) Enfin, avec les mêmes notations, on a

$$W \cap e(\bigcup_i V_i) = e(W) \cap e(\bigcup_i V_i) = e(W \cap (\bigcup_i V_i)) = e(\bigcup_i (W \cap V_i))$$

d'où la distributivité.

On peut donc définir un lieu X par $O(X) = \Omega$; nous avons aussi démontré que l'application $e : O(E) \longrightarrow \Omega$ qui est surjective est l'image inverse pour un morphisme de lieux $i : X \longrightarrow E$ qui est un plongement. Etant donnés $V \in O(E)$ et $W \in \Omega$, on a

$$e(V) \subset W \Longleftrightarrow V \subset W$$

donc i_* est l'inclusion $\Omega \longrightarrow O(E)$, d'où $i_* i^* = e$.

3 - Définition d'un sous-lieu ; inclusion.

Un sous-lieu X d'un lieu E consiste en la donnée d'une application

$$e_X : O(E) \longrightarrow O(E)$$

ayant les propriétés équivalentes du lemme 3 (projecteur associé). On "matérialise" le lieu correspondant par

$$O(X) = \mathrm{Im}(e_X) = \{V \in O(E) \mid e_X(V) = V\}$$

le plongement $i_X : X \longrightarrow E$ étant donné par $i_X^*(V) = e_X(V),\ (i_X)_*(U) = U$.

Le lemme 2 justifie la définition de *l'inclusion* entre sous-lieux :

$$X \subset Y \quad \text{si} \quad e_X \supset e_Y$$

4 - Réunions et intersections.

Proposition et définition. *Soient $(X_i)_i$ une famille de sous-lieux de E et $(e_i)_i$ les projecteurs associés. Pour tout $V \in O(E)$, soit $e(V)$ la réunion des $W \in O(E)$ qui sont contenus dans tous les $e_i(V)$. Alors*

i) e est le projecteur associé à un sous-lieu X de E

ii) un sous-lieu Z de E contient X si et seulement si il contient tous les X_i .

X est encore appelé la réunion des X_i et noté $\bigcup_i X_i$.

Preuve de i). Puisque $V \subset e_i(V)$ pour tout i, on a $V \subset e(V)$. Pour prouver que e est idempotent, on remarque que

$$e_i(e(V)) \subset e_i(e_i(V)) = e_i(V)$$

Enfin, étant donnés $U, V, W \in O(E)$

$$\begin{aligned} W \subset e(U \cap V) &\Longleftrightarrow W \subset e_i(U \cap V) \quad \text{pour tout } i \\ &\Longleftrightarrow W \subset e_i(U) \cap e_i(V) \quad \text{pour tout } i \\ &\Longleftrightarrow W \subset e(U) \cap e(V) \end{aligned}$$

Preuve de ii). Si $X_i \subset Z$ pour tout i, alors $e_Z \subset e_i$ pour tout i, donc $e_Z \subset e = e_Y$. Inversement, $X_i \subset Y$ pour tout i puisque $e \subset e_i$.

On appelle Y la réunion des X_i

On a donc aussi une intersection notée $\cap X_i$: *c'est la réunion des sous-lieux contenus dans tous les* X_i. Je ne connais pas de formule générale pour le projecteur associé à une intersection (voir cependant Lemme 10). On démontrera plus loin que

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

quels que soient les sous-lieux X, Y, Z de E (ce n'est pas immédiat). Mais l'intersection n'est pas distributive par rapport aux réunions infinies (*).

5 - Images directes.

Soit $f : E \longrightarrow F$ un morphisme de lieux. L'application $f_* f^* : O(F) \longrightarrow O(F)$ est le projecteur associé à un sous-lieu $\mathrm{Im}(f)$ de F. D'après le lemme 2, $\mathrm{Im}(f)$ est le plus petit sous-lieu de F par lequel f se factorise. Pour tout sous-lieu X de E, on définira l'image directe de X par

$$f(X) = \mathrm{Im}(f\, i_X)$$

[[voir note ci-dessous (**)]]

Lemme 4. *Les images directes sont transitives : étant donnés deux morphismes de lieux* $f : E \longrightarrow F, g : F \longrightarrow G$ *et un sous-lieu* X *de* E, *on a*

$$(gf)(X) = g(f(X)).$$

(*) Contre exemple : soit $\gamma_{\mathbb{R}}$ le lieu générique de $\mathbb{R}$ (cf plus loin en 11) ; comme $\mathbb{R}$ est sans point isolé on a $\gamma_{\mathbb{R}} \cap [\{x\}] = \emptyset$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. D'où

$$\gamma_{\mathbb{R}} \cap \Big(\bigcup_{x\in\mathbb{R}} [\{x\}]\Big) = \gamma_{\mathbb{R}} \neq \emptyset = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} (\gamma_{\mathbb{R}} \cap [\{x\}]) .$$

(**) on a la formule fort utile

$$e_{f(X)} = f_* e_X f^*$$

En effet : $\quad (f i_X)_* (f i_X)^* = f_* (i_X)_* (i_X)^* f^* = f_* e_X f^*$

Preuve. Soit $Y = f(X)$, et considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ {\scriptstyle i_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_Y} \\ E & \xrightarrow[f]{} & F \end{array}$$

Puisque Y est le plus petit sous-lieu de F par lequel fi_X se factorise, on a $\mathrm{Im}(u) = Y$, d'où $u_*u^*(V) = V$ pour tout $V \in O(Y)$. Si $h = gfi_X$, on a donc

$$h_*h^* = g_*(i_Y)_*u_*u^*(i_Y)^*g^* = g_*(i_Y)_*(i_Y)^*g^*$$

Lemme 5. *Pour tout morphisme de lieux $f : E \longrightarrow F$ et toute famille (X_i) de sous-lieux de E, on a*

$$f(\bigcup_i X_i) = \bigcup_i f(X_i)$$

[[voir une autre preuve dans la note ci-dessous :(*)]]

(*) On a

$$\forall i, \quad e_{f(X_i)} = f_* e_{X_i} f^* \quad \text{et} \quad e_{f(\bigcup_i X_i)} = f_* e_{\bigcup_i X_i} f^*$$

On a par définition de $e_{\bigcup_i f(X_i)}$: pour tous W, W' ouverts de F,

$$\begin{aligned} W' \subset e_{\bigcup_i f(X_i)}(W) &\Longleftrightarrow \forall i, \quad W' \subset (e_{f(X_i)})(W) \\ &\Longleftrightarrow \forall i, \quad W' \subset (f_* e_{X_i} f^*)(W) \\ &\Longleftrightarrow \forall i, \quad f^*(W') \subset e_{X_i}(f^*(W)) \\ &\Longleftrightarrow \quad f^*(W') \subset (e_{\bigcup_i X_i}(f^*(W)) \\ &\Longleftrightarrow \quad W' \subset f_*(e_{\bigcup_i X_i})(f^*(W)) \\ &\Longleftrightarrow \quad W' \subset (e_{f(\bigcup_i X_i)})(W) \end{aligned}$$

d'où : $\qquad f(\bigcup_i X_i) = \bigcup_i f(X_i)$.

Preuve. On définit la somme disjointe S des lieux X_i par

$$O(S) = \Pi_i O(X_i)$$

Les inclusions $u_i : X_i \longrightarrow S$ étant données par $u_i^* = pr_i$. Les plongements $X_i \longrightarrow E$ donnent un morphisme $u : S \longrightarrow E$

$$u^*(V) = (e_{X_i}(V))_i$$

La réunion des X_i est l'image de u :

en effet, pour tout $(W_i)_i \in O(S)$ et tout $V \in O(E)$, on a

$$\begin{aligned} V \subset u_*((W_i)_i) &\Longleftrightarrow u^*(V) \subset (W_i)_i \\ &\Longleftrightarrow (e_{X_i}(V)) \subset (W_i)_i \\ &\Longleftrightarrow V \subset W_i \quad \text{pour tout } i \end{aligned}$$

Donc $u_* u^*(V)$ est le plus grand élément de $O(E)$ contenu pour tout i dans $e_{X_i}(V)$.

Notons T la somme disjointe des $f(X_i)$ et $v : T \longrightarrow F$ le morphisme naturel. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u"'] & T \arrow[d, "v"] \\ E \arrow[r, "f"'] & F \end{tikzcd}$$

on a

$$\begin{aligned} f(\bigcup_i X_i) &= f(\operatorname{Im} u) = \operatorname{Im}(fu) \qquad \text{(lemme 4)} \\ &= \operatorname{Im}(vf') = v(\operatorname{Im} f') \qquad \text{(lemme 4)} \\ &= v(T) = \bigcup_i f(X_i) \end{aligned}$$

6 - Images réciproques.

Soient $E \xrightarrow{f} F$ un morphisme de lieux et Y un sous-lieu de f. D'après le lemme 5, l'ensemble des sous-lieux X de E tels que $f(X) \subset Y$ a un plus grand élément que nous noterons $f^{-1}(Y)$. Plus généralement, pour qu'un morphisme de la forme $h : A \longrightarrow E$ se factorise par $f^{-1}(Y)$, il faut et il suffit que fh se factorise par Y : en effet

$$\operatorname{Im} h \subset f^{-1}(Y) \Longleftrightarrow f(\operatorname{Im} h) \subset Y \Longleftrightarrow \operatorname{Im}(fh) \subset Y$$

Autrement dit, on a le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(Y) & \longrightarrow & Y \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ E & \longrightarrow & F \end{array}$$

[[voir note ci-dessous :(*)]]

7 - Sous-lieux ouverts.

Soient E un lieu et $U, H \in O(E)$. Nous noterons $e_U(H)$ le plus grand $W \in O(E)$ tel que $W \cap U \subset H$. On vérifie que e_U est le projecteur associé à un sous-lieu que nous noterons provisoirement $[U]$. Les deux lemmes suivants permettrons d'enlever les crochets.

Lemme 6. a) *Pour tout sous-lieu X de E et tout $U \in O(E)$*

$$X \subset [U] \Longleftrightarrow e_X(U) = 1_E$$

(*) i) Si i_X désigne l'inclusion d'un sous-lieu X dans E et Z un autre sous-lieu, on la formule $i^{-1}(Z) = Z \cap X$ comme cas particulier d'image inverse.
ii) On vérifie aussi sans difficulté la commutation des images inverses aux intersections quelconques :

$$f^{-1}(\bigcap_i (X_i)) = \bigcap_i f^{-1}(X_i)$$

b) Etant donnés $U, V \in O(E)$ on a

$$[U \cap V] = [U] \cap [V], \qquad e_{U \cap V} = e_U e_V = e_V e_U \quad \text{et} \quad U \subset V \Longleftrightarrow [U] \subset [V]$$

c) Pour toute famille (V_i) d'éléments de $O(E)$, on a

$$\bigcup_i [V_i] = [\bigcup_i V_i]$$

d) Pour tout morphisme de lieux $f : E \longrightarrow F$ et tout $V \in O(F)$ on a

$$f^{-1}([V]) = [f^*(V)]$$

Preuve.

a) Si $X \subset [U]$, alors $1_E = e_U(U) \subset e_X(U)$. Inversement, si $e_X(U) = 1_E$, alors pour tout $H \in O(E)$

$$e_U(H) \subset e_X(e_U(H)) = e_X(U \cap e_U(H)) = e_X(U \cap H) \subset e_X(H)$$

b) Si $U \subset V$, alors pour tout $H \in O(E)$

$$e_V(H) \cap U \subset e_V(H) \cap V \subset H$$

donc $e_V(H) \subset e_U(H)$, d'où $[U] \subset [V]$.

Inversement, si $[U] \subset [V]$, alors $1_E = e_V(V) \subset e_U(V)$, donc $U \subset V$.

Pour tous $W, H \in O(E)$ on a

$$\begin{aligned} W \subset e_{U \cap V}(H) &\Longleftrightarrow W \cap U \cap V \\ &\Longleftrightarrow W \cap U \subset e_V(H) \\ &\Longleftrightarrow W \subset e_U(e_V(H)) \end{aligned}$$

donc $e_{U \cap V} = e_U e_V$.

Si X est un sous-lieu de E contenu dans $[U]$ et $[V]$ on a donc pour tout $H \in O(E)$

$$e_X(H) = e_X e_X(H) \supset e_X e_V(H) \supset e_U e_V(H) = e_{U \cap V}(H)$$

donc $[U] \cap [V] \subset [U \cap V]$; et on a déjà prouvé l'inclusion inverse.

c) Posons $X = \underset{i}{\cup}[V_i]$ et $U = \underset{i}{\cap} V_i$. Pour tout $W, H \in O(E)$ on a

$$\begin{aligned} W \subset e_X(H) &\Longleftrightarrow \forall i,\ W \subset e_{V_i}(H) \\ &\Longleftrightarrow \forall i,\ W \cap V_i \subset H \\ &\Longleftrightarrow W \cap U \subset H \\ &\Longleftrightarrow W \subset e_U(H) \end{aligned}$$

d) Posons $U = f^*(V)$. Prouvons que $f([U]) \subset [V]$. Soit g la composée $[U] \longrightarrow E \longrightarrow F$. Pour tout $H \in O(E)$ on a

$$f^*(e_V(H)) \cap U = f^*(e_V(H) \cap V) = f^*(H \cap V) \subset f^*(H)$$

donc $f^*(e_V(H)) \subset e_U f^*(H)$ d'où $e_V(H) \subset f_* e_U f^*(H) = g_* g^*(H)$.

Inversement, soit X un sous-lieu de E tel que $f(X) \subset [V]$. Soit $h = f i_X$ la restriction de f à X. On a

$$1_F = e_V(V) \subset h_* h^*(V)$$

donc

$$1_E = f^*(1_F) \subset h^*(V) = e_X(f^*(V))$$

d'où $X \subset [f^*(V)]$ d'après (a).

Lemme 7. *Soient X un sous-lieu de E et $U \in O(E)$. Pour tout $V \in O(E)$*

$$V \subset e_X(U) \Longleftrightarrow [V] \cap X \subset [U].$$

Preuve. Soit i le plongement de X dans E. On a

$$\begin{aligned} V \subset e_X(U) &\Longleftrightarrow V \subset i_* i^*(U) \\ &\Longleftrightarrow i^*(V) \subset i^*(U) \\ &\Longleftrightarrow X \cap [V] \subset X \cap [U] \qquad \text{lemme 6, b) et d)} \\ &\Longleftrightarrow X \cap [V] \subset [U]. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc identifier $O(E)$ à une partie de l'ensemble $SL(E)$ des sous-lieux de E, stable par intersections finies et réunions quelconques, et nous parlerons simplement d'"ouverts" de E. Le lemme 7 permet de faire tous les "calculs" dans $SL(E)$.

8 - Sous-lieux fermés.

Etant donné un ouvert V de E, nous définissons le complémentaire $E-V$ par

$$e_{E-V}(H) = H \cup V \quad \text{pour tout ouvert } H.$$

Lemme 8. *Pour tout sous-lieu X de E*

$$\begin{aligned} V \cup X = E \quad &\Longleftrightarrow \quad E - V \subset X \\ V \cap X = \emptyset \quad &\Longleftrightarrow \quad X \subset E - V \end{aligned}$$

(**Corollaire :** $(E - U = E - V) \implies U = V$)

Preuve. a) Pour tout ouvert H de E on a

$$\begin{aligned} e_X(H) \subset e_X(H \cup V) &= e_X(H \cup V) \cap e_V(H \cup V) \\ &= e_{X \cup V}(H \cup V) \end{aligned}$$

donc si $X \cup V = E$, $e_X(H) \subset H \cup V = e_{E-V}(H)$.

Inversement, prouvons que $V \cup (E - V) = E$. Pour tout ouvert H

$$\begin{aligned} e_V(H) \cap e_{E-V}(H) &= (e_V(H) \cap V) \cup (e_V(H) \cap H) \\ &\subset H \cup H = H \end{aligned}$$

b) On a $V \cap (E - V) = \emptyset$. En effet, si X est un sous-lieu contenu dans V et $E - V$, alors pour tout ouvert H on a

$$\begin{aligned} e_X(H) = e_X e_X(H) &\supset e_V e_{E-V}(H) \\ &= e_V(H \cup V) = E \end{aligned}$$

Le reste de la proposition découle du lemme suivant appliqué à $g = i_X$.

Lemme 9. *Pour tout morphisme de lieux $g : A \longrightarrow E$, on a*

$$g^{-1}(E - V) = A - g^{-1}(V).$$

Preuve. Soient $h : B \longrightarrow F$ un morphisme de lieux et W un ouvert de F. Pour que h se factorise que $F - W$, il faut et il suffit que $h^{-1}(W) = \emptyset$. En effet,

$$\begin{aligned} h \text{ se factorise par } F-W &\Longleftrightarrow h_*h^*(U) \supset e_{F-W}(U) \quad \forall U \in O(E) \\ &\Longleftrightarrow h^*(U) \supset h^* e_{F-W}(U) \quad \forall U \in O(F) \\ &\Longleftrightarrow h^*(U) \supset h^*(U \cup W) = h^*(U) \cup h^*(W) \quad \forall U \in O(F) \\ &\Longleftrightarrow h^*(W) = \emptyset \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} h : B \longrightarrow A \text{ se factorise par } \quad A - g^{-1}(V) &\Longleftrightarrow h^{-1}g^{-1}(V) = \emptyset \\ &\Longleftrightarrow gh \text{ se factorise par } \quad E - V \\ &\Longleftrightarrow h \text{ se factorise par } \quad g^{-1}(E-V) \end{aligned}$$

Lemme 8 bis. $X \cup (E - V) = E \Longleftrightarrow V \subset X$,
$X \cap (E - V) = \emptyset \Longleftrightarrow X \subset V$.

Preuve. a) $V \subset X$ veut dire : $e_X(H) \subset e_V(H)$, ou encore : $e_X(H) \cap V \subset H$, pour tout $H \in O(E)$.

$X \cup (E - V) = E$ veut dire $e_X(H) \cap (H \cup V) = H$, ce qui revient au même.

b) Si $X \subset V$, alors $X \cap (E - V) = \emptyset$ puisque $V \cap (E - V) = \emptyset$.
Si $X \cap (E - V) = \emptyset$, alors $\emptyset = i_X^{-1}(E - V) = X - i_X^{-1}(V)$,
donc $i_X^{-1}(V) = X$, d'où $X \subset V$.

Remarques : a) Pour toute famille $(V_i)_i$ d'ouverts de E, on a

$$E - \bigcup_i V_i = \bigcap_i (E - V_i)$$

En effet, soit $V = \bigcup_i V_i$. Pour tout sous-lieu X de E

$$\begin{aligned} X \subset E - V &\Longleftrightarrow e_X(H) \supset H \cup V \quad \text{pour tout } h \\ &\Longleftrightarrow e_X(H) \supset H \cup V_i \quad \text{pour tout } h \text{ et tout } i \\ &\Longleftrightarrow X \subset E - V_i \quad \text{pour tout } i. \end{aligned}$$

b) Quels que soient les ouverts V, W on a

$$E - (V \cap W) = (E - V) \cup (E - W)$$

En effet, si $F = E - (V \cap W)$, on a pour tout ouvert H

$$\begin{aligned} e_F(H) = H \cup (V \cap W) &= (H \cup V) \cap (H \cup W) \\ &= e_{E-V}(H) \cap e_{E-W}(H) \end{aligned}$$

Les complémentaires des ouverts ont donc bien les propriétés générales des fermés d'un espace topologique. L'application $U \longmapsto E - U$ est une bijection décroissante entre les ouverts et les fermés, elle transforme les intersections finies en réunions finies et les réunions en intersection.

9 - Intersections des sous-lieux avec les ouverts et les fermés.

On n'a pas de formule générale pour le projecteur associé à l'intersection de deux sous-lieux, cependant

Lemme 10. *Soit X un sous-lieu de E.*
Pour tout ouvert U on a : $\quad e_{U \cap X} = e_U e_X$
et pour tout fermé F : $\quad e_{F \cap X} = e_X e_F$.

Preuve. a) Etant donnés des ouverts V et H

$$\begin{aligned} V \subset e_{X \cap U}(H) &\Longleftrightarrow V \cap X \cap U \subset H \\ &\Longleftrightarrow V \cap U \subset e_X(H) \\ &\Longleftrightarrow V \subset e_U e_X(H) \end{aligned}$$

b) Pour tout ouvert H, on a

$$e_X e_F(H) \subset e_{X \cap F}\, e_{X \cap F}(H) = e_{X \cap F}(H)$$

Il suffit donc de vérifier que $e = e_X e_F$ est le projecteur associé à un sous-lieu. Soit V l'ouvert complémentaire de F. Pour tout ouvert H, on a

$$\begin{aligned} e(H) &= e_X(V \cup H) \\ e_F e(H) &= e_X(V \cup H) \cup V = e_X(V \cup H) \end{aligned}$$

et donc $ee(H) = e(H)$. Les autres propriétés sont évidentes.

[[voir corollaire ci-dessous(*)]]

(*) **Corollaire :** *Soient V et W deux ouverts de E et X un sous-lieu, alors on a :*

$$X \cap (V \cup W) = (X \cap V) \cup (X \cap W)$$

(La vérification est immédiate.)

Lemme 11. *Soient X, Y, L trois sous-lieux de E. Si L est ouvert ou fermé, alors*

$$L \cap (X \cup Y) = (L \cap X) \cup (L \cap Y)$$

Preuve. Posons $M = L \cap (X \cup Y)$, $N = (L \cap X) \cup (L \cap Y)$. Si L est ouvert, on a pour tout ouvert H

$$\begin{aligned} e_M(H) =& e_L e_{X \cup Y}(H) = e_L(e_X(H) \cap e_Y(H) \\ &= e_L e_X(H) \cap e_L e_Y(H) \\ &= e_{L \cap X}(H) \cap e_{L \cap Y}(H) = e_N(H) \end{aligned}$$

et si L est fermé

$$\begin{aligned} e_M(H) &= e_{X \cup Y} e_L(H) = e_X e_L(H) \cap e_Y e_L(H) \\ &= e_{X \cap L}(H) \cap e_{Y \cap L}(H) = e_N(H) \end{aligned}$$

10 - Intérieur, extérieur, adhérence, frontière.

On a encore pour un sous-lieu quelconque X de E la tripartition usuelle en intérieur, frontière et extérieur.

Définitions :

$\operatorname{Int} X =$ plus grand ouvert contenu dans X

$\overline{X} =$ plus petit fermé contenant X

$\partial X = \overline{X} \cap (E - \operatorname{Int} X)$

Ext $X =$ plus grand ouvert de E disjoint de X.

Commentons la définition de l'extérieur. On montrera plus loin que l'ensemble des sous-lieux Y de E tels que $X \cup Y = E$ a un plus petit élément X^c. Mais celui-ci n'est pas nécessairement disjoint de X (i.e. X n'a pas toujours un "complémentaire") et son intérieur peut être strictement plus grand que l'extérieur de X.

Vérifions les relations usuelles entre $\operatorname{Int} X$, $\operatorname{Ext} X$, $\overline{X}$ et ∂X.

1) $\overline{X} = E - \operatorname{Ext} X$ (immédiat)

2) $\partial X = E - (\operatorname{Int} X \cup \operatorname{Ext} X)$ parce que

$$\begin{aligned} \overline{X} \cap (E - \operatorname{Int} X) &= (E - \operatorname{Ext} X) \cap (E - \operatorname{Int} X) \\ &= E - (\operatorname{Ext} X \cup \operatorname{Int} X) \end{aligned}$$

3) $\operatorname{Int} X \cup \partial X = \overline{X}$: soit e le projecteur associé à $\operatorname{Int} X \cup (E - \operatorname{Ext} X \cup \operatorname{Int} X))$. On a pour tout ouvert H

$$\begin{aligned} e(H) &= e_{\operatorname{Int} X}(H) \cap (H \cup \operatorname{Ext} X \cup \operatorname{Int} X) \\ &= H \cup (e_{\operatorname{Int} X}(H) \cap \operatorname{Ext} X) \cup (e_{\operatorname{Int} X}(H) \cap \operatorname{Int} X) \end{aligned}$$

Le dernier terme est contenu dans H ; d'autre part, $\operatorname{Ext} X \subset e_{\operatorname{Int} X}(H)$ puisque $\operatorname{Ext} X \cap \operatorname{Int} X = \emptyset$. Donc

$$e(H) = H \cup \operatorname{Ext} X.$$

4) $\operatorname{Ext} X \cup \partial X = E - \operatorname{Int} X$. En effet

$$\begin{aligned} \operatorname{Int} X \cap (\operatorname{Ext} X \cup \partial X) &= (\operatorname{Int} X \cap \operatorname{Ext} X) \cup (\operatorname{Int} X \cap \partial X) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Int} X \cup \operatorname{Ext} X \cup \partial X &= \operatorname{Ext} X \cup \overline{X} \quad \text{d'après (3)} \\ &= E \end{aligned}$$

5) X dense $\iff e_X(\emptyset) = \emptyset$.

11 - Lieu générique, "l'intersection des complémentaires".

Pour tout ouvert H de E, soit

$$e_\gamma(H) = \operatorname{Int} \overline{H} = \operatorname{Ext}(\operatorname{Ext}(H))$$

L'application e_γ est le projecteur associé à un sous-lieu $\gamma = \gamma(E)$:

Il est clair que $H \subset e_\gamma(H)$. Comme $e_\gamma(H) \subset \overline{H}$ on a $\overline{e_\gamma(H)} \subset \overline{H}$ d'où $e_\gamma e_\gamma = e_\gamma$.

Prouvons que pour tout couple d'ouverts H, K

$$e_\gamma(H \cap K) = e_\gamma(H) \cap e_\gamma(K)$$

Puisque $\overline{H \cap K} \subset \overline{H} \cap \overline{K}$, l'inclusion $\supset$ est claire.
Inversement, soit V un ouvert contenu dans $\overline{H} \cap \overline{K}$. Puisque $V \subset \overline{H}$, alors $H \cap V$ est dense dans V ; de même $K \cap V$ est dense dans V. Donc $H \cap K \cap V$ est dense dans V, d'où $V \subset \overline{H \cap K}$.

Proposition 1 et définition. *$\gamma(E)$ est le plus petit sous-lieu dense de E. On l'appellera lieu générique de E.*

Preuve. a) $\gamma(E)$ est dense dans E. En effet, soit V un ouvert de E disjoint de $\gamma(E)$. On a $\gamma(E) \subset E - V$, donc

$$e_\gamma(\emptyset) \supset e_{E-V}(\emptyset) = V$$

or $e_\gamma(\emptyset) = \emptyset$.

b) Soit X un sous-lieu dense de E. Il faut montrer que pour tout ouvert H de E, on a $e_X(H) \subset \overline{H}$. Soit $V = e_X(H) \cap \mathrm{Ext}\, H$. On a $V \cap X \subset H$ et $V \cap H = \emptyset$, d'où $V \cap X = \emptyset$, et $V = \emptyset$.

Soit X un sous-lieu contenu dans tous les *ouverts* denses. Soient H un ouvert de E et $V = H \cup \mathrm{Ext}\, H$, qui est dense. On a :

$e_V(H) = \mathrm{Ext}\ (\mathrm{Ext}\, H) = \mathrm{Int}\, \overline{H} = e_\gamma(H)$, donc $e_X(H) \supset e_\gamma(H)$.

Par conséquent, $\gamma(E)$ est ainsi l'intersection de tous les ouverts denses.

Lemme 12. *Pour tout fermé F de E, on a*

$$\gamma(E) \cap F = \gamma(E) \cap \mathrm{Int}\, F.$$

Preuve. Soit V l'ouvert complémentaire de F. D'après le lemme 9, $\gamma(E) \cap F$ est le sous-lieu de $\gamma(E)$ complémentaire de $\gamma(E) \cap V$. Soit $W = \mathrm{Int}\, F = \mathrm{Ext}\, V$. Puisque $V \cup W$ est dense dans E, on a $\gamma(E) \subset V \cup W$, donc(*)

$$(\gamma(E) \cap V) \cup (\gamma(E) \cap W) = \gamma(E)$$

$$V \cap W = \emptyset$$

et d'après le lemme 8, $\gamma(E) \cap W$ est le complémentaire de $\gamma(E) \cap V$ dans $\gamma(E)$.

(*) corollaire lemme 10.

II - IMAGE RECIPROQUE D'UNE REUNION

1) Il s'agit de démontrer la proposition suivante :
Etant donnés un morphisme de lieux $Y \xrightarrow{f} X$ *et deux sous-lieux* A, B *de* X, *on a*

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

——

Lemme 1. *Soient* U *un ouvert de* X *et* F *le fermé complémentaire. Soient* $X' = U \sqcup F$ *la somme disjointe de* U *et* F, *et* $p : X' \longrightarrow X$ *le morphisme canonique. L'application* $A \longmapsto p^{-1}(A)$ *est une bijection entre sous-lieux de* X *et sous-lieux de* X'.

Preuve. 1) Soit A un sous-lieu de X. D'après le lemme 9 appliqué à l'inclusion $A \hookrightarrow X$, on a

$$A = (A \cap U) \cup (A \cap F)$$

or

$$(A \cap U) \cup (A \cap F) = p(p^{-1}(A))$$

2) Soient B un sous-lieu de U et C un sous-lieu de F. D'après le corollaire du lemme 10, on a

$$U \cap (B \cup C) = (U \cap B) \cup (U \cap C)$$

donc $U \cap (B \cup C) = B$

$$F \cap (B \cup C) = (F \cap B) \cup (F \cap C)$$

donc $F \cap (B \cup C) = C$.

Par conséquent $p^{-1}p(A') = A'$ pour tout sous-lieu A' de X'.

2) L'algèbre de Boole $b(X)$ engendrée par les ouverts.

Pour toute famille finie $U_1, \ldots, U_n$ d'ouverts de X, soit $At(U_1, \ldots, U_n)$ l'ensemble des sous-lieux non-vides de la forme

$$H_1 \cap \ldots \cap H_n$$

avec $H_i = U_i$ ou $H = X - U_i$.

Soit $b(U_1, \ldots, U_n)$ l'ensemble des réunions (y compris $\emptyset$) de sous-lieux appartenant à $At(U_1, \ldots, U_n)$.

Corollaire 1 du lemme 1. *Soient X' la somme disjointe des sous-lieux appartenant à $At(U_1, \ldots, U_n)$ et $X' \xrightarrow{p} X$ le morphisme naturel. L'application $A \longmapsto p^{-1}(A)$ est une bijection entre sous-lieux de X et sous-lieux de X' (et* donc commute aux réunions*).*

Corollaire 2. *$b(U_1, \ldots, U_n)$ est stable par unions et intersections dans l'ensemble des sous-lieux de X, et c'est une algèbre de Boole pour ces opérations.*

Lemme 2. *Pour tout $H \in b(U_1, \ldots, U_n)$ on a $f^{-1}(H) \in b(f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_n))$, et l'application*

$$\begin{gathered} H \longmapsto f^{-1}(H) \\ b(U_1, \ldots, U_n) \longrightarrow b(f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_n)) \end{gathered}$$

est un morphisme d'algèbre de Boole.

Preuve. Si H appartient à $At(U_1, \ldots, U_n)$ alors $f^{-1}(H)$ est vide ou dans $At(f^{-1}(U_1), \ldots f^{-1}(U_n))$ d'après le lemme 9. Soit Y' la somme disjointe des atomes sur $f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_n)$. On a donc un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & X' \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

d'où le résultat d'après les deux corollaires précédents.

Soit maintenant $b(X)$ l'ensemble des sous-lieux de X qui sont dans $b(U_1, \ldots, U_n)$ pour au moins une famille finie d'ouverts $U_1, \ldots, U_n$.

Proposition 1. *a) $b(X)$ est stable par intersections et unions (finies) dans l'ensemble des sous-lieux de X et c'est une algèbre de Boole.*

b) Pour tout $H \in b(X)$, on a $f^{-1}(H) \in b(Y)$, et l'application $H \longmapsto f^{-1}(H)$ est un morphisme d'algèbres de Boole $b(X) \longrightarrow b(Y)$.

c) si A, B sont deux sous-lieux de X et si $H \in b(X)$, alors $H \cap (A \cup B) = (H \cap A) \cup (H \cap B)$.

Preuve. Le point a) résulte de

$$b(U_1, \ldots, U_n) \cup b(V_1, \ldots V_p) \subset b(U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_p)$$

Le point (b) est le lemme 2. Point (c) : corollaire 1 du lemme 1.

Lemme 3. *Tout sous-lieu de X est intersection filtrante de sous-lieux de $b(X)$.*

Preuve. Soit A un sous-lieu de X. Pour tout ouvert V de X, soit l'élément de $b(X)$ suivant :

$$D_V = V \cup (X - e_A(V))$$

D_V appartient $b(X)$; on va montrer que

$$A = \bigcap_V D_V$$

d'où le résultat puisque $b(X)$ est stable par intersections finies.

a) $A \subset D_V$ pour tout ouvert V de X. On a, pour tout ouvert W de X,

$$\begin{aligned} e_{D_V}(W) &= e_V(W) \cap (W \cup e_A(V)) \\ &= W \cup (e_V(W) \cap e_A(V)) \end{aligned}$$

or $e_A(V) \cap A \subset V$, donc

$$e_V(W) \cap e_A(V) \cap A \subset e_V(W) \cap V \subset W$$

et

$$e_V(W) \cap e_A(V) \subset e_A(W)$$

b) Soit A' l'intersection de D_V. Pour tout ouvert V, on a

$$e_{A'}(V) \supset e_{D_V}(V) = V \cup (e_V(V) \cap e_A(V)) = e_A(V)$$

donc $A' \subset A$.

Lemme 4. *Soient A un sous-lieu de X et (B_i) une famille de sous-lieux de X. On a* (*) :

$$A \cup (\bigcap_i B_i) = \bigcap_i (A \cup B_i)$$

Preuve. $\subset$ est évidente. Supposons $\supset$ fausse. D'après la le lemme 3 il existe alors $H \in b(X)$ tel que $I = A \cup (\bigcap_i B_i)$ soit inclus dans H et $J = \bigcap_i (A \cup B_i)$ ne soit pas inclus dans H

Soit K le complémentaire de H dans $b(X)$. On a

$$I \cap K = \emptyset \quad J \cap K \neq \emptyset$$

d'après la proposition 1, b appliquée aux inclusions $I \hookrightarrow X$, $J \hookrightarrow X$. Or

$$\begin{aligned} K \cap (A \cup B_i) &= (K \cap A) \cup (K \cap B_i) \quad (\text{prop.1, c}) \\ &= K \cap B_i \end{aligned}$$

(*) Remarque : si X est un lieu, l'ensemble des sous-lieux de X, noté $S(X)$ muni de l'inclusion *n'est pas* un lieu en général : en effet (cf [I,4]) l'intersection n'est pas en général distributive par rapport aux unions quelconques. Le lemme ci-dessus montre que $S(X)$ devient un lieu lorsqu'on le munit de la relation d'ordre $\supset$. Le contre-exemple de [I,4] montre que ce lieu n'est pas en général booléen (contrairement à ce qui ce passe en topologie "ordinaire").

Les formules déjà établies entrainent que l'application qui à tout ouvert U de X associe $X \setminus [U]$ définit un morphisme de lieu $q_X : S(X) \longrightarrow X$. De plus si X et Y sont deux lieux et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de lieux l'application "image inverse" de $S(Y)$ dans $S(X)$ définit un morphisme de lieux F rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} S(X) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "q_X"'] & S(Y) \arrow[d, "q_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Autrement dit $X \mapsto S(X)$ définit un foncteur de la catégorie des lieux dans elle-même, et la famille $(q_X : S(X) \longrightarrow X)_X$ un morphisme de ce foncteur dans le foncteur identité.

d'où $\quad K \cap J \subset \bigcap_i B_i \subset I, \quad K = \emptyset, \quad H = X, \quad J \subset H, \quad$ contradiction.

Corollaire. *Si* $(A_i)_i$ *et* $(B_j)_j$ *sont deux familles de sous-lieux de* X, *alors*

$$(\bigcap_i A_i) \cup (\bigcap_j B_j) = \bigcap_{i,j} (A_i \cup B_j).$$

Preuve. Posons $A = \bigcap_i A_i$, $B = \bigcap_j B_j$.

Le lemme 4 donne

$$A \cup B = \bigcap_j A \cup B_j$$

et aussi $A \cup B_j = \bigcap_i A_i \cup B_j$ d'où le résultat.

---

3) Fin de la preuve du résultat principal.

Posons :

$$A = \bigcap_i H_i, \quad B = \bigcap_j K_j, \quad \text{avec} \quad H_i, K_j \in b(X)$$

On a

$$\begin{aligned}
f^{-1}(A) &= \bigcap_i f^{-1}(H_i) \\
f^{-1}(B) &= \bigcap_j f^{-1}(K_j) \\
f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(\bigcap_{i,j} (H_i \cup K_j)) && \text{(cor. lemme 4)} \\
&= \bigcap_{i,j} f^{-1}(H_i \cup K_j) \\
&= \bigcap_{i,j} (f^{-1}(H_i) \cup (f^{-1}(K_j) && \text{(prop.1, b)} \\
&= (\bigcap_i f^{-1}(H_i)) \cup (\bigcap_j f^{-1}(K_j)) && \text{(cor. lemme 4)} \\
&= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).
\end{aligned}$$

III - THEORIE DE LA MESURE DANS LES LIEUX REGULIERS

1. Définitions.

Définition 1. Nous appellerons mesure (bornée) sur un lieu E toute application
$\mu : \mathrm{Ouv}(E) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ayant les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \mu(\emptyset) &= 0 \\ U \subset V &\Longrightarrow \mu(U) \leq \mu(V) \\ \mu(U \cup V) &= \mu(U) + \mu(V) - \mu(U \cap V) \\ \mu(\bigcup_i V_i) &= \sup_i \mu(V_i) \text{ pour toute famille filtrante croissante} \end{aligned}$$

(Si E est un espace à *base dénombrable*, on démontre que cette notion est équivalente à celle de mesure borélienne (positive bornée)).

On prolonge la mesure à l'ensemble des sous-lieux par

$$\mu(X) = \inf\{\mu(V) \mid V \text{voisinage de } X\}$$

Lemme 1. *Pour toute suite croissante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-lieux de E on a*

$$\mu(\bigcup_n X_n) = \sup_n \mu(X_n).$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, et prenons une suite (ε_n) à termes > 0 telle que $\Sigma\varepsilon_n < \varepsilon$. Pour tout n, soit V_n un voisinage de X_n tel que $\mu(V_n) - \mu(X_n) < \varepsilon_n$.

Posons $W_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} V_k$, $W = \bigcup\limits_n W_n = \bigcup\limits_n V_n$. On a

$$\mu(W_n) - \mu(X_n) \leq \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k$$

(vérification par récurrence :

$$\begin{aligned} \mu(W_{n+1}) &= \mu(W_n) + \mu(V_{n+1}) - \mu(W_n \cap V_{n+1}) \\ &\leq \mu(W_n) + \mu(V_{n+1}) - \mu(X_n) \\ &\text{(puisque } W_n \cap V_{n+1} \text{ est un voisinage de } X_n) \\ &\leq \mu(W_n) - \mu(X_n) + \mu(X_{n+1}) + \varepsilon_{n+1}.) \end{aligned}$$

et donc

$$\mu(W)(=\sup\mu(W_n)) \leq \varepsilon + \sup\mu(X_n)$$

Ceci implique $\mu(\cup X_n) \leq \sup\limits_n \mu(X_n)$; l'inégalité inverse est triviale.

Définition 2. Un lieu est *régulier* si pour tout ouvert U de E, les ouverts V tels que $\overline{V} \subset U$ recouvrent $U(*)$.

Nous supposons désormais que le lieu E est régulier.

Le but de cette section est d'établir deux résultats sans équivalent dans la théorie classique.

1) *Additivité stricte* pour la mesure des sous-lieux

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

2) *Réduction* : Pour tout sous-lieu A de E, l'ensemble des sous-lieux A' de A tel que $\mu(A') = \mu(A)$ a un *plus petit élément* $R_\mu(A)$.

2. Restriction d'une mesure à un sous-lieu.

Lemme 2. *Tout sous-lieu de E est intersection de ses voisinages.*

Preuve. Soit A un sous-lieu de E. Il suffit de montrer que

$$e_A(H) = \bigcup_V e_V(H), \quad (V \text{ voisinage de } A)$$

Soit W un ouvert tel que $\overline{W} \subset K = e_A(H)$. L'ouvert

$$V = (E - \overline{W}) \cup H$$

est un voisinage de A. En effet

$$\begin{aligned} A \cap V &= (A \cap (E - \overline{W})) \cup (A \cap H) \\ &= (A \cap (E - \overline{W})) \cup (A \cap K) \\ &= A \cap (K \cup (E - \overline{W})) = A \cap E = A. \end{aligned}$$

(*) Si X est un espace régulier alors le lieu associé est régulier ; Voir V, corollaire à la proposition 5.

Or $W \cap V = W \cap H \subset H$ donc

$$W \subset e_V(H)$$

Puisque $e_A(H)$ est recouvert par les W tels que $\overline{W} \subset e_A(H)$, la proposition est démontrée.

Lemme 3. *Pour tout ouvert U de E, on a*

$$\mu(U) + \mu(E - U) = \mu(E).$$

Preuve. Soit (V_α) la famille des voisinages de $E - U$, et posons $W_\alpha = \mathrm{Ext}(V_\alpha)$. Les W_α forment une famille filtrante croissante dont la réunion est U, d'où

$$\mu(U) = \sup \mu(W_\alpha)$$

or $\mu(W_\alpha) + \mu(V_\alpha) \leq \mu(E)$, d'où $\mu(U) + \mu(E - U) \leq \mu(E)$.

Lemme 4. *Pour tout ouvert U de E et tout sous-lieu A on a*

$$\mu(A) = \mu(A \cap U) + \mu(A \cap (E - U)).$$

Preuve. Soit W un voisinage de A. La restriction de μ à $\mathrm{Ouv}(W)$ est une mesure, donc d'après le lemme 3

$$\begin{aligned} \mu(W) &= \mu(W \cup U) + \mu(W \cap (E - U)) \\ &\geq \mu(A \cap U) + \mu(A \cap (E - U) \end{aligned}$$

donc

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap U) + \mu(A \cap (E - U)).$$

Corollaire 1. *Etant donnés deux ouverts U, V de E et un sous-lieu A, on a*

$$\mu(A \cap (U \cup V)) = \mu(A \cap U) + \mu(A \cap V) - \mu(A \cap U \cap V)$$

Preuve. D'après le lemme 4 on a

$$\mu(A \cap (U \cup V)) = \mu(A) - \mu(A \cap (E - U) \cap (E - V))$$

d'autre part

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A\cap U) + \mu(A\cap(E-U))\\ &= \mu(A\cap U\cap V) + \mu(A\cap U\cap(E-V)) + \mu(A\cap(E-U)\cap V)\\ &+ \mu(A\cap(E-U)\cap(E-V))\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mu(A\cap(U\cup V)) &= \mu(A\cap U\cap V)) + \mu(A\cap U\cap(E-V) + \mu(A\cap(E-U)\cap V)\\ &= \mu(A\cap U) + \mu(A\cap(E-U)\cap V)\\ &= \mu(A\cap U) + \mu(A\cap(E-U)\cap V) + \mu(A\cap U\cap V) - \mu(A\cap U\cap V)\\ &= \mu(A\cap U) + \mu(A\cap V) - \mu(A\cap U\cap V)\end{aligned}$$

Lemme 5. *Pour toute famille filtrante croissante (V_α) d'ouverts de E et tout sous-lieu A, on a*

$$\mu(A\cap(\bigcup_\alpha V_\alpha) = \sup_\alpha \mu(A\cap V_\alpha)$$

Corollaire. Restriction d'une mesure.

Soient A un sous-lieu de A et $i : A \longrightarrow E$ l'inclusion. L'application :

$$\begin{aligned}V &\longmapsto \mu(i(V))\\ \mathrm{Ouv}\,(A) &\longrightarrow \mathbb{R}^+\end{aligned}$$

est une mesure sur A.

Preuve du lemme 5.

$\geq$: parce que $A\cap(\cup V_\alpha) \supset A\cap V_\alpha$

$\leq$: soit $\varepsilon > 0$ et W un voisinage de A tel que $\mu(W) - \mu(A) < \varepsilon$.

Pour tout α on a

$$\begin{aligned}\mu(A\cap V_\alpha) + \mu(A\cap(E-V_\alpha)) &= \mu(A) \qquad \text{(lemme 4)}\\ \mu(W\cap V_\alpha) + \mu(W\cap(E-V_\alpha) &= \mu(W)\end{aligned}$$

donc $\mu(W\cap V_\alpha) \leq \mu(A\cap V_\alpha) + \varepsilon$

$$\begin{aligned}\mu(A\cap UV_\alpha) &\leq \mu(W\cap(UV_\alpha)) = \sup \mu(W\cap V_\alpha)\\ &\leq \sup \mu(A\cap V_\alpha) + \varepsilon\end{aligned}$$

3. Sous-lieux réduits et additivité de la mesure.

Proposition 1 et définition. *Pour tout sous-lieu A de E, l'ensemble des sous-lieux $A' \subset A$ tel que $\mu(A') = \mu(A)$ admet un plus petit élément $R_\mu(A)$ ("μ-réduction"). On dira que A est μ-réduit si $A = R_\mu(A)$.*

Quitte à restreindre la mesure, on peut supposer $A = E$.

Preuve. Pour tout ouvert U de E, soit $e_\mu(U)$ la réunion des ouverts $V \supset U$ tels que $\mu(V) = \mu(U)$. Si V et V' sont deux tels ouverts, alors

$$\begin{aligned}\mu(V \cup V') &= \mu(V) + \mu(V') - \mu(V \cap V') \\ &= \mu(U) + \mu(U) - \mu(U) = \mu(V)\end{aligned}$$

donc d'après l'axiome des réunions filtrantes

$$\mu(e_\mu(U)) = \mu(U)$$

Nous prouvons maintenant que e_μ est le projecteur associé à un sous-lieu.

1) $U \subset V \Longrightarrow e_\mu(U) \subset e_\mu(V)$. En effet

$$\mu(V \cup e_\mu(U)) = \mu(V) + \mu(U) - \mu(V \cap e_\mu(U)) = \mu(V).$$

2) $e_\mu(e_\mu(U)) = e_\mu(U)$ évident

3) $e_\mu(U \cap V) = e_\mu(U) \cap e_\mu(V)$, en effet

$$\begin{aligned}\mu(e_\mu(U) \cap e_\mu(V)) &= \mu(U) + \mu(V) - \mu(e_\mu(U) \cup e_\mu(V)) \\ &\leq \mu(U) + \mu(V) - \mu(U \cup V) = \mu(U \cap V)\end{aligned}$$

d'où $e_\mu(U) \cap e_\mu(V) \subset e_\mu(U \cap V)$; l'autre inclusion est triviale.

Soit R le sous-lieu de E défini par e_μ. On va montrer que les voisinages de R sont exactement les ouverts V tels que $\mu(V) = \mu(E)$ d'où en particulier $\mu(R) = \mu(E)$.

(a) Soit V un voisinage de R. Pour tout ouvert W, on a

$$\mathrm{Int}(W \cup (E - V)) = e_V(W) \subset e_\mu(W).$$

Si $W = V$, cela donne $E = e_\mu(V)$, donc $\mu(V) = \mu(E)$.

(b) Soit V un ouvert de E tel que $\mu(V) = \mu(E)$. Pour tout ouvert H de E, on a

$$\begin{aligned}\mu(V \cap H) &= \mu(V) + \mu(H) - \mu(V \cup H) = \mu(E) + \mu(H) - \mu(E)\\ &= \mu(H)\end{aligned}$$

Si $H = e_V(W)$, on a $V \cap H = W \cap H$, d'où

$$\mu(e_V(W)) = \mu(W) \quad \text{et} \quad e_V(W) \subset e_\mu(W).$$

Soit maintenant X un sous-lieu de E tel que $\mu(X) = \mu(E)$. Pour tout voisinage V de X, on a $\mu(V) = \mu(E)$, donc V est un voisinage de R, d'où $R \subset X$ d'après le lemme 2.

Lemme 6. *Pour toute suite décroissante (V_n) d'ouverts de E, on a*

$$\mu(\cap V_n) = \inf \mu(V_n).$$

Preuve. Posons $I = \bigcap\limits_n V_n$, $F_n = E - V_n$, $G = \bigcup\limits_n F_n$. On a $G \cup I = E$. En effet

$$\begin{aligned}G \cup (\bigcap_n V_n) &= \bigcap_n (G \cup V_n) \qquad \text{(voir chap. II, lemme 4)}\\ &\supset \bigcap_n (F_n \cup V_n) = E.\end{aligned}$$

Par conséquent $\mu(I) \geq \mu(E) - \mu(G)$.
Or $\mu(G) = \sup \mu(F_n)$ donc

$$\begin{aligned}\mu(I) &\geq \inf(\mu(E) - \mu(F_n))\\ &= \inf \mu(V_n) \qquad \text{(Lemme 3)}\end{aligned}$$

d'où l'égalité puisque $I \subset V_n$ pour tout n

Lemme 7 (et principal). *Pour toute famille filtrante décroissante (A_i) de sous-lieux de E, on a*

$$\mu(\bigcap_i A_i) = \inf_i \mu(A_i).$$

Preuve. Soit (V_α) la famille filtrante des voisinages des A_i. On a

$$\begin{gathered}\bigcap_\alpha V_\alpha = \bigcap_i A_i\\ \inf \mu(V_\alpha) = \inf \mu(A_i)\end{gathered}$$

Prenons une suite croissante (α_n) telle que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(V_{\alpha_n}) = \inf_{\alpha} \mu(V_\alpha) \text{ (noté } \lambda).$$

Soit $I = \cap V_n$. D'après le lemme 6,

$$\mu(I) = \lambda$$

On va montrer que $R_\mu(I) \subset V_\alpha$ pour tout α, ce qui achèvera la démonstration. Il suffit d'établir

$$\mu(V_\beta \cap I) = \mu(I) \quad \text{pour tout } \beta$$

Or $\mu(V_\beta \cap I) = \inf\limits_n \mu(V_\beta \cap V_{\alpha_n})$.

Soit $\gamma \geq \beta, \alpha_n$. On a

$$\mu(V_\beta \cap V_{\alpha_n}) \geq \mu(V_\gamma) \geq \lambda, \qquad \text{cqfd.}$$

Théorème 1. *Quels que soient les sous-lieux A, B de E, on a*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

Preuve. Soient (V_α) la famille des voisinages de A et (W_β) celle des voisinages de B. On a

$$\mu(A \cup B) = \inf \mu(V_\alpha \cup W_\beta)$$

et d'après le lemme 7 et le lemme 2

$$\mu(A \cap B) = \inf \mu(V_\alpha \cap W_\beta)$$

donc

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \inf(\mu(V_\alpha \cup W_\beta) + \mu(V_\alpha) \cap W_\beta)) \\ &= \inf(\mu(V_\alpha) + \mu(W_\beta) = \mu(A) + \mu(B) \qquad \text{cqfd} \end{aligned}$$

Corollaire. *Supposons que E soit un espace topologique. Soit A un sous-espace de E et B le sous-espace complémentaire. Si le sous-topos $A \cap B$ est vide (ou plus généralement de mesure nulle) alors A est mesurable.*

4. Support fin d'une mesure.

Théorème 2 - 1re version(*). *L'ensemble des sous-lieux μ-réduits de E, ordonné par inclusion, est une algèbre de Boole complète. Elle constitue donc l'ensemble des ouverts d'un lieu $B(E,\mu)$. L'application $V \longmapsto R_\mu(V)$ définit un morphisme $B(E,\mu) \xrightarrow{\varphi} E$. La mesure des sous-lieux définit une mesure sur $B(E,\mu)$.*

La preuve résulte des lemmes suivants.

Lemme 8. *Toute réunion de sous-lieux μ-réduits de E est μ-réduite.*

Preuve. Soit (A_i) une famille de sous-lieux μ-réduit et $A = \underset{i}{\cup} A_i$. Soit $A' \subset A$ tel que $\mu(A') = \mu(A)$. Pour tout indice i on a

$$\begin{aligned}\mu(A_i \cap A') &= \mu(A_i) + \mu(A') - \mu(A_i \cup A') \\ &= \mu(A_i) + \mu(A) - \mu(A) = \mu(A_i).\end{aligned}$$

donc $A_i \cap A' = A_i$ puisque A_i est μ-réduit, d'où $A_i \subset A$ et $A' = A$.

Lemme 9. *De toute famille de sous-lieux réduits de E on peut extraire une famille dénombrable qui a la même réunion.*

Preuve. Quitte à ajouter les réunions finies, on peut supposer qu'il s'agit d'une famille *filtrante* croissante (A_i). Soit (i_n) une suite croissante d'indices telle que

$$\lim_n \mu(A_{i_n}) = \sup_i \mu(A_i) \quad \text{(noté } \lambda).$$

Posons $B = \underset{n}{\cup} A_{i_n}$. Je dis que $A_j \subset B$ pour tout j. Il suffit de montrer que $\mu(A_j \cap B) \geq \mu(A_j)$. Or

$$\begin{aligned}\mu(A_j \cap B) &\geq \sup\ \mu(A_j \cap A_{i_n}) \\ \mu(A_j \cap A_{i_n}) &= \mu(A_j) + \mu(A_{i_n}) - \mu(A_j \cup A_{i_n}) \\ &\geq \mu(A_j) + \mu(A_{i_n}) - \lambda\end{aligned}$$

et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_{i_n}) - \lambda = 0$.

Corollaire. *Pour toute famille filtrante croissante (A_i) de sous-lieux μ-réduits de E on a*

$$\mu(\underset{i}{\cup} A_i) = \sup \mu(A_i)$$

(*) Il n'y a pas de 2me version

(résulte du lemme précédent en appliquant le lemme 1).

Lemme 10. *Pour tout sous-lieu A de E, il existe un sous-lieu B tel que*

$$\mu(A \cap B) = 0$$
$$\mu(A \cup B) = \mu(E)$$

Preuve. Soit (V_n) une suite décroissante de voisinage de A telle que

$$\mu(A) = \lim \mu(V_n)$$

et posons

$$B_n = E - V_n$$
$$B = \bigcup_n B_n$$

On a $\mu(B) = \sup_n \mu(B_n) = \sup_n \mu(E) - \mu(V_n) = \mu(E) - \mu(A)$ donc

$$\mu(B) + \mu(A) = \mu(E)$$

Et aussi

$$\mu(A \cup B) = \sup_n \mu(A \cup B_n) = \mu(A) + \sup_n \mu(B_n)$$
$$= \mu(A) + \mu(B)$$

D'où $\mu(A \cap B) = 0$ d'après le théorème 1.

Etant donnés deux sous-lieux μ-réduits A, B de E, posons

$$A \cap B = R_\mu(A \cap B) = \text{le plus grand sous-lieu } \mu\text{-réduit contenu dans } A \text{ et } B$$

Lemme 11. *Pour tout sous-lieu μ-réduit A et toute famille filtrante croissante (B_i) de sous-lieux μ-réduits, on a*

$$A \cap (\bigcup_i B_i) = \bigcup_i (A \cap B_i).$$

Preuve. D'après le lemme 9, il existe une famille dénombrable (i_n) telle que

$$\bigcup_n B_{i_n} = \bigcup_i B_i \quad \text{noté } B$$
$$\bigcup_n (A \cap B_{i_n}) = \bigcup_i (A \cap B_i) \quad \text{noté } C$$

On a alors

$$\begin{aligned}\mu(A\cup B) &= \lim_n \mu(A\cup B_{i_n})\\ &= \lim_n(\mu(A)+\mu(B_{i_n})-\mu(A\cap B_{i_n})\\ &= \mu(A)+\mu(B)-\mu(C)\end{aligned}$$

donc $\mu(C)=\mu(A\cap B)$, d'où $C=A\cap B$.

La preuve du théorème 2 découle maintenant de la propriété de distributivité

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

valable quel que soient les sous-lieux A, B, C de E .

IV - ZONES D'ENCHEVETREMENT

1. Zones d'enchevêtrement. Proposition 1. *a) Tout sous-lieu d'un lieu booléen est ouvert.[[voir preuve ci-dessous(*).]]*

b) Tout sous-lieu de E [[lieu quelconque]] est réunion de ses sous-lieux booléens.

c)Tout sous-lieu booléen B est égal au lieu générique de son adhérence.

Preuve de b. Soient A un sous-lieu de E et B la réunion des sous-lieux booléens de A. Si $B \neq A$, il existerait un sous-lieu C tel que $B \cap C = \emptyset$ et $A \cap C \neq \emptyset$ (Preuve : soit V un ouvert tel que $e_B(V) \neq e_A(V)$. On prend $C = e_B(V) \cap (E - e_A(V))$. On a $\gamma(A \cap C) \cap B = \emptyset$, or $\gamma(A \cap C) \subset B$ par définition.

Preuve de c. Soit F l'adhérence de B. Puisque B est dense dans F, on a $\gamma(F) \subset B$, et donc $\gamma(F)$ est un ouvert de B ; son complémentaire dans B est intersection de B et d'un ouvert V de F. On a

$$\emptyset = V \cap B \cap \gamma(F) = V \cap \gamma(F)$$

donc $V = \emptyset$, d'où $\gamma(F) = B$.

Définition. Soient A et B deux sous-lieux de E. Appelons *zone d'enchevêtrement de A et B* tout fermé F tel que $A \cap F$ et $B \cap F$ soient denses dans F.

Proposition 2. *Il existe une zone d'enchevêtrement $\varepsilon(A, B)$ qui contient toutes les autres.*

Preuve. Soit (F_α) la famille des zones d'enchevêtrement de A et B , et C sa réunion. L'adhérence de $A \cap C$ contient $A \cap F_\alpha$, donc F_α, pour tout α. Mme chose pour B. Donc $\overline{C}$ est une zone d'enchevêtrement, cqfd.

Proposition 3. $\overline{A \cap B} = \varepsilon(A, B)$.

Preuve. Soit $F = \varepsilon(A, B)$. Puisque $A \cap F$ et $B \cap F$ sont denses dans B, ils contiennent $\gamma(F)$, donc $A \cap B$ est dense dans F.

2. Critères de complémentabilité.

(*) Un lieu booléen étant régulier, tout sous-lieu est l'intersection de ses voisinages ouverts donc aussi fermés donc tout sous-lieu est fermé donc ouvert. . . .

Proposition et définition 4. *Soit X un sous-lieu d'un lieu E. L'ensemble des sous-lieux Y de E tel que $X \cup Y = E$ a un plus petit élément X^c. Soit F l'adhérence de $X \cap X^c$. $X \cap F$ est d'intérieur vide relativement à F. [[Si $X \cap X^c = \emptyset$ alors on dit alors que X possède un complémentaire (X^c) ou que X est complémenté]].*

Corollaire. *Pour que X ait un complémentaire il faut et il suffit que pour tout fermé $F \neq \emptyset$ tel que $X \cap F$ soit dense dans F, on ait $\mathrm{Int}_F(X \cap F) \neq \emptyset$.*

Preuve de la proposition 4. Soit V un ouvert de E tel que $V \cap F \subset X \cap F$. Soit Y le complémentaire de $V \cap F$. On a $Y \cup X = E$, donc $X^c \subset Y$ et $X^c \cap V \cap F = \emptyset$, or $X^c \cap F$ est dense dans F, donc $V \cap F = \emptyset$.

Preuve du corollaire.

Condition nécessaire. Soit F un fermé tel que $X \cap F$ soit dense dans F. Alors X^c n'est pas dense dans F, sinon $\gamma(F) \subset X \cap X^c$ donc il existe un ouvert V tel que $V \cap X^c = \emptyset$ et $V \cap F \neq \emptyset$.

Condition suffisante : immédiat.

On suppose maintenant que E est un *espace*.

Lemme 1. *Tout sous-lieu complémenté est un sous-espace.*

Lemme 2. *Pour tout sous-espace X de E, X^c est le complémentaire ponctuel de X.*

Proposition 5. *Pour qu'un sous-lieu de E soit complémenté, il faut et il suffit que ce soit un sous-espace et qu'il n'ait pas de zone d'enchevêtrement avec son complémentaire ensembliste.*

Preuve. Soit X un sous-lieu de E. Si $X \cap X^c = \emptyset$, alors tout point de E est soit dans X soit dans X^c. Soit Y, (resp Y') le sous-espace formé des points de X (resp. X^c). On a

$$\begin{aligned} Y \cup Y' &= E, \quad Y \subset X \\ Y \cap Y' &= \emptyset, \quad Y' \subset X^c \end{aligned}$$

donc $Y = X$ et $Y' = X^c$; ceci prouve directement la proposition.

V - ANNEXE : SOUS-ESPACES ET SOUS-LIEUX D'UN ESPACE

1. Sous-lieu associé à un sous-espace.

Notations. On fixe pour la suite un espace (topologique...) E. Le lieu associé à E sera noté $[E]$ et de même, pour tout sous-espace X de E, le sous-lieu de $[E]$ associé à X sera noté $[X]$. Si on note i l'inclusion de X dans E, le sous-lieu $[X]$ est défini par le projecteur $i_* i^*$ et donc par la formule :

$$\forall V, W, \text{ouverts de } E \qquad W \subset e_{[X]}(V) \Longleftrightarrow W \cap X \subset V$$

Remarque 1 : comparez avec le lemme 7 (ch I).
Remarque 2 : la trace sur X définit une bijection canonique entre les ouverts de $[X]$, (i.e. les ouverts de $[E]$ fixes par $e_{[X]}$) et les ouverts de X.

Proposition 1. *Soient X et Y deux sous-espaces de E et U un ouvert de E alors :*

a) $X \subset Y \Longrightarrow [X] \subset [Y]$.

b) $X \subset U \Longleftrightarrow [X] \subset [U]$.

c) Si E vérifie que tout sous-espace est intersection de ses voisinages (par exemple si E est séparé ou simplement à points fermés) alors on a l'équivalence :

$$X \subset Y \Longleftrightarrow [X] \subset [Y].$$

Preuve. Le a) est clair. Pour b) l'implication directe est donnée par a) ; pour la réciproque nous avons les équivalences :

$$\begin{aligned} [X] \subset [U] \Longleftrightarrow \quad & e_{[U]} \subset e_{[X]} \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall V, W \in O(E), \quad W \subset e_{[U]}(V) \Longrightarrow W \subset e_{[X]}(V) \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall V, W \in O(E), \quad W \cap U \subset V \Longrightarrow W \cap X \subset V \end{aligned}$$

En particulier si on prend $W = E$, $V = U$ on a : $X \subset U$.

Pour c) nous avons (comme ci-dessus) les équivalences :

$$\begin{aligned} [X] \subset [Y] \Longleftrightarrow \quad & e_{[Y]} \subset e_{[X]} \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall V, W \in O(E), \quad W \subset e_{[Y]}(V) \Longrightarrow W \subset e_{[X]}(V) \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall V, W \in O(E), \quad W \cap Y \subset V \Longrightarrow W \cap X \subset V \end{aligned}$$

Posant alors $W = E$ on en déduit :

$$[X] \subset [Y] \Longrightarrow \quad \forall V \in O(E), \quad Y \subset V \Longrightarrow X \subset V$$

Et donc si tout sous-espace de E est intersection de ses voisinages on a :
$[X] \subset [Y] \quad \Longrightarrow \quad X \subset Y.$

Remarque 3 : si E vérifie les hypothèses de b) on a une injection (croissante) de l'ensemble des sous-espaces de E dans l'ensemble des sous-lieux de $[E]$. On a en général plus de sous-lieux que de sous-espaces : par exemple si E est séparé non vide sans point isolé alors le lieu générique de E (voir Chap I, par.11) ne correspond à aucun sous-espace car il n'a pas de point et il est dense).

2. Intersections avec des ouverts et des fermés.

Proposition 2. *Soit U un ouvert de E, et X un sous-espace. On a la formule :*

$$[U \cap X] = [U] \cap [X]$$

Preuve : On a d'une part (cf I. lemme 10), $e_{[U]\cap[X]} = e_{[U]}e_{[X]}$ d'où

$$W \subset e_{[U]\cap[X]}(V) \Longleftrightarrow W \cap U \subset e_{[X]}(V) \Longleftrightarrow (W \cap U) \cap X \subset V$$

que l'on peut encore écrire sous la forme : $W \cap (U \cap X) \subset V$ et ceci est équivalent à $W \subset e_{[U\cap X]}(V)$.

Pour les fermés de E on a :

Proposition 3 : *Soit $F = E \setminus U$ un fermé de E alors :*
i) Le sous-lieu $[F]$ est égal à $[E] \setminus [U]$.
ii) Soit X un sous-espace de E, on a $[X \cap F] = [X] \cap [F]$.

Preuve : laissée au lecteur…

3. Union de sous-espaces et union de sous-lieux.

Proposition 4. *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces de E, on a la formule :*

$$\bigcup_i [X_i] = [\bigcup_i X_i]$$

(autrement dit : le sous-lieu associé à une union de sous-espaces est l'union des sous-lieux.)

Preuve : par définition d'une union de sous-lieux on a

$$\begin{aligned} \forall U, V \in O(E) \qquad V \subset e_{\underset{i}{\cup}[X_i]}(U) &\iff \forall i, \quad V \subset e_{[X_i]}(U) \\ &\iff \forall i, \quad V \cap X_i \subset U \\ &\iff \underset{i}{\cup}(V \cap X_i) \subset U \\ &\iff V \cap (\underset{i}{\cup} X_i) \subset U \\ &\iff V \subset e_{[\underset{i}{\cup} X_i]}(U) \end{aligned}$$

Remarque 4 : Si X et Y sont deux sous-espaces on a seulement :

$$[X \cap Y] \subset [X] \cap [Y]$$

Par exemple dans $\mathbb{R}$, les sous-espaces $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont ensemblistement disjoints mais étant deux parties denses de $\mathbb{R}$, les sous-lieux associés $[\mathbb{Q}]$ et $[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]$ sont denses dans $[\mathbb{R}]$ et ont donc une intersection dense (car elle contient le lieu générique. . .).

Proposition 5. *Soit X un sous-espace de E alors on a :*

$$\operatorname{Ext}[X] = [\operatorname{Ext} X], \quad \overline{[X]} = [\overline{X}], \quad [\operatorname{Int} X] \subset \operatorname{Int}[X], \quad \text{et} \quad \partial[X] \subset [Fr(X)].$$

De plus si E vérifie que tout sous-espace est intersection de ses voisinages alors on a $\operatorname{Int}[X] = [\operatorname{Int} X]$ *et* $\partial[X] = [Fr(X)]$.

($\partial[X] = \overline{[X]} \cap (E \setminus \operatorname{Int}[X])$ (voir Chap. I, par. 10) ; $Fr(X) = \overline{X} \cap (E \setminus \operatorname{Int} X) = \overline{E} \setminus \operatorname{Int} E$).

Preuve : $\operatorname{Ext} X$ est le plus grand ouvert U tel que $U \cap X = \emptyset$; donc la proposition 2 nous dit précisément que cela est équivalent à $[U] \cap [X] = \emptyset$, d'où $\operatorname{Ext}[X] = [\operatorname{Ext} X]$.
Pour l'adhérence on a
$\overline{[X]} = [E] \setminus \operatorname{Ext}[X] = [E] \setminus [\operatorname{Ext} X] = [E \setminus \operatorname{Ext} X] = [\overline{X}]$.
L'intérieur de $[X]$ est le plus grand ouvert inclus dans $[X]$; si U est un ouvert de E alors $U \subset X \Longrightarrow [U] \subset [X]$ d'où $\operatorname{Int}[X] \subset [\operatorname{Int} X]$
L'inclusion ci-dessus entraine $\partial[X] \subset [Fr(X)]$.
Le cas où E vérifie que tout sous-espace est intersection de ses voisinages est alors clair.

Corollaire. *Si E est un espace topologique alors :*

$$E \quad \text{est régulier} \quad \Longrightarrow \quad [E] \quad \text{est régulier}$$

Application. L'énoncé précédent entraine que l'on peut appliquer les théorèmes du chapitre III aux mesures boréliennes finies positives sur les espaces réguliers ; par exemple à $\mathbb{S}^1$ muni de la mesure angulaire sur les ouverts . . .