Comparación de medidas de cambio de productividad. Las aproximaciones de Malmquist y Luenberger en una aplicación al mercado de seguros.

Gustavo Ferro, Carlos A. Romero

▶ **To cite this version:**

Gustavo Ferro, Carlos A. Romero. Comparación de medidas de cambio de productividad. Las aproximaciones de Malmquist y Luenberger en una aplicación al mercado de seguros.. 2011. hal-00597946

HAL Id: hal-00597946
https://hal.science/hal-00597946

Preprint submitted on 2 Jun 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

COMPARACIÓN DE MEDIDAS DE CAMBIO DE PRODUCTIVIDAD. LAS APROXIMACIONES DE MALMQUIST Y LUENBERGER EN UNA APLICACIÓN AL MERCADO DE SEGUROS

Gustavo Ferro

Instituto de Economía UADE y CONICET

Carlos A. Romero

Instituto de Economía UADE

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar los avances en la medición de productividad a través de números índices e indicadores, y proveer un ejemplo centrado en el sector asegurador argentino en años recientes. Se presentan formalmente las metodologías para estimar cambios de productividad mediante índices de Malmquist e indicadores de Luenberger, y se realiza una comparación empírica de las mismas para ilustrar sobre sus diferencias teóricas. Para ello, se utiliza información del mercado de seguros de la Argentina, donde la elección del sector no es casual: se trata de un mercado atomizado, donde la regulación no fija cantidades, y hay también flexibilidad para modificar la mezcla de insumos. De los resultados obtenidos, se puede conjeturar 1) que en muestras donde la variabilidad de la eficiencia es alta se pueden ver afectadas las comparaciones aproximadas, y 2) que a menor eficiencia es más difícil realizar comparaciones entre indicadores.

Abstract

The objective of this paper is to present advances in productivity measures through index numbers and indicators, as well as to provide an example centered in the Argentinean insurance sector in recent years. The methodologies to estimate productivity changes by means of Malmquist Indexes and Luenberger Indicators are formally presented, and an empirical comparison is made to illustrate on their theoretical differences. In doing so, information of the insurance market in Argentina is used; the choice of the sector is not casual: its an atomized market, where regulation do not set output, and where it is also flexibility to modify the input mix. Of the results, we can conjecture that: 1) in samples where the variability of the efficiency is high, the approximate comparisons could be affected, and 2) between less efficient units it is hard to make comparisons between indicators.

Comparación de medidas de cambio de productividad. Las aproximaciones de Malmquist y Luenberger en una aplicación al mercado de seguros.

Gustavo Ferro[1] y Carlos A. Romero[2]

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es presentar los avances en la medición de productividad a través de números índices e indicadores, y proveer un ejemplo centrado en el sector asegurador argentino en años recientes.

El desarrollo de indicadores e índices de productividad ha sido bastante lento. Entre el trabajo pionero de Malmquist (1953) hasta recientes artículos que estudian las propiedades de las diferentes aproximaciones para su cálculo han pasado casi sesenta años.

Hay dos aproximaciones para la medición de la eficiencia: a través de diferencias y de cocientes. Se denotan a las medidas en diferencias como "indicadores" y aquellas que se efectúan a partir de cocientes como "índices" (Diewert, 1998).

Del análisis de la literatura se desprenden las características de cada una de las medidas de productividad y las relaciones entre ellas. De tal manera que la elección entre una u otra depende de las necesidades del investigador, dadas las restricciones que le impone el problema empírico que está abordando.

El uso de índices Malmquist de productividad ha sido muy amplio en la literatura y una de sus principales ventajas es que permite descomponer el cambio de la productividad en sus elementos determinantes (Grifell-Tatjé y Lovell, 1995), en tanto su desventaja es que hay que elegir una orientación (hacia los productos o los insumos) para calcular las medidas de distancia, que en ocasiones tiene sentido (como en la orientación a los insumos si se están estudiando sectores regulados con obligación de provisión por parte del oferente), pero en otras se manifiesta como demasiado rígido o inapropiado (un mercado competitivo donde no hay restricciones a expandir la producción o reducir los insumos).

[1] Instituto de Economía UADE y CONICET.

[2] Instituto de Economía UADE

La aparición de los indicadores de Luenberger y Luenberger-Hicks-Moorsteen han permitido la utilización de modelos no-orientados, debido a que permiten comparar beneficios (considerando los componentes de ingreso y costo), o más recientemente la literatura que incluye aspectos medioambientales (las funciones de distancia permiten considerar tanto bienes como productos no deseados). Es decir, que se ha ganado en flexibilidad.

Aquí se presentarán formalmente estas metodologías y se realizará una comparación empírica de las mismas para ilustrar sobre sus diferencias teóricas. Para ello, se utilizará información del mercado de seguros de la Argentina, donde la elección del sector no es casual: se trata de un mercado atomizado, donde la regulación no fija cantidades, y hay también flexibilidad para modificar la mezcla de insumos. Los precios de productos e insumos pueden asumirse que se forman bajo un patrón razonablemente competitivo. Para la aplicación empírica, las estimaciones de eficiencia relativa (tanto en forma de cocientes como con funciones de distancia) se realizarán mediante la utilización de Análisis Envolvente de Datos (DEA, por "Data Envelopment Analysis")[3].

Tras esta Introducción, en la sección 2 efectuaremos un análisis conceptual de los Indicadores e Índices de Productividad. Luego, en la sección 3, se mostrarán las relaciones entre ambos. Posteriormente, en la sección 4 se ilustra con un ejercicio aplicado al sector de seguros de Argentina. Finalmente, la sección 5 es la de conclusiones.

2. TECNOLOGÍA FUNCIONES DE DISTANCIA Y MEDIDAS DE EFICIENCIA

Seguidamente, se expondrá conceptualmente cada método y aproximación seguida. Para ello, se presentan las definiciones de tecnología y funciones de distancia relevantes para el cálculo de los índices e indicadores y se introducen gráficamente los mismos. La estimación de la eficiencia relativa con el uso de fronteras de producción se basa en la teoría de las funciones de distancia ("Gauge Functions"). En economía, las funciones de distancia están relacionadas a la noción de "coeficientes de utilización de recursos" (Debreu, 1951) y a las medidas de eficiencia radial (Farrell, 1957).

2.1. Definiciones de tecnología y funciones de distancia

Sean $x = (x^1,...,x^N) \subset \boldsymbol{R}^N_+$ e $y = (y^1,...,y^M) \subset \boldsymbol{R}^M_+$ los vectores de insumos y productos, respectivamente, y se defínase la tecnología como $T_{(t)}=\{(x_t, y_t) \in R^{n+p}_+: x_t$ puede producir $y_t\}$. El conjunto tecnológico, $T_{(t)}$, consiste en todos los vectores factibles de insumos, x_t, y de productos, y_t, en el momento t que satisfacen ciertos axiomas, los cuales son suficientes para definir las funciones de distancia.[4]

La medida de eficiencia de Debreu-Farrell $E_{T(t)}(x_t, y_t)$ es la inversa de la función de distancia de Shepard (1953). Esta medida de eficiencia se conoce como función

[3] Ferro, Lentini y Romero (2011) describen los aspectos prácticos de la medición de eficiencia relativa.

[4] La tecnología satisface los siguientes supuestos. [a]: $(0,0) \in T_{(t)}$, $(0, y_t) \in T_{(t)} => y_t=0$; [b]: el conjunto $A(x_t) = \{(u_t, y_t) \in T_{(t)}: u_t \leq x_t\}$ está acotado para todo x_t; [c]: $T_{(t)}$ es cerrado; [d]: para todo $(x_t, y_t) \in T_{(t)}$, $(x_t, -y_t) \leq (u_t, -v_t) => (u_t, v_t) \in T_{(t)}$; [e]: $T_{(t)}$ es convexo.

proporcional de distancia (FPD). Con orientación a insumos[5], esta medida representa la mínima disminución proporcional, θ, del uso de insumos para alcanzar la frontera de producción.

(1) $E^{i}_{T(t)}(x_t, y_t) = \min_{\theta}\{\theta: (\theta x_t, y_t) \in T(t), \theta \geq 0\}$.

Similarmente, la medida de eficiencia orientada a productos[6] es la máxima expansión proporcional, θ, del nivel de producción, que sitúa la producción en la frontera con el mismo uso inicial de insumos:

(2) $E^{o}_{T(t)}(x_t, y_t) = \max_{\theta}\{\theta: (x_t, \theta y_t) \in T(t), \theta \geq 1\}$.[7]

Luenberger (1995) generaliza las nociones previas de funciones de distancia como funciones de escasez o insuficiencia (*shortage functions*) y provee una herramienta flexible capaz de tomar en cuenta tanto contracciones de insumos como aumentos de la producción al momento de medir eficiencia. Esta "Función Direccional de Distancia" (FDD), así definida, es el dual de la función de beneficio (Luenberger, 1995; Färe y Grosskopf, 2005). La Función Proporcional de Distancia es un caso especial de la *shortage function*, que se define en el momento t como:

(3) $D_{T(t)}(x_t, y_t) = \max_{\delta}\{\delta: [(1-\delta)x_t, (1+\delta)y_t] \in T(t), \delta \geq 0\}$.

donde δ es el máximo cambio para el cual el producto y_t, puede ser expandido y el insumo x_t puede ser reducido, simultáneamente, dada la tecnología $T(t)$.[8]

---

[5] Asumiendo que los productos no pueden ser alterados.

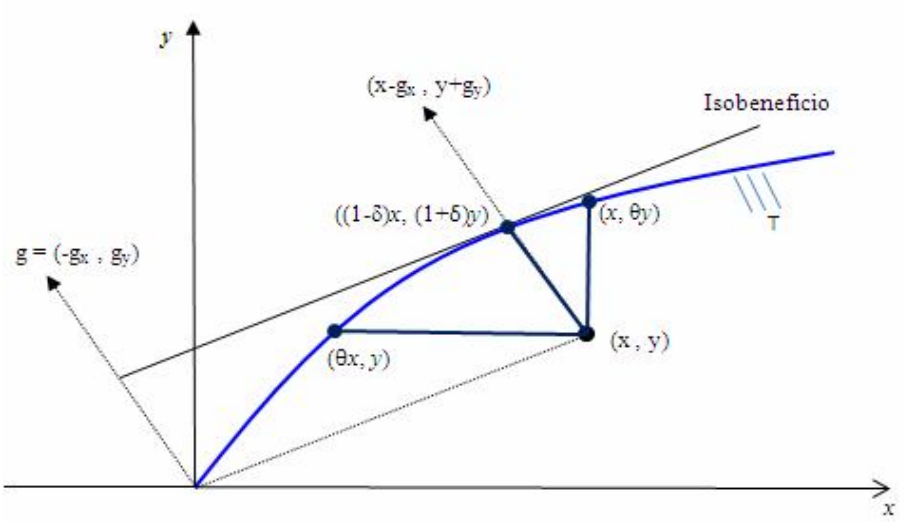
[6] Asumiendo que los insumos no pueden ser alterados.

[7] Estas medidas están relacionadas: $E^{o}_{T(t)}(x_t, y_t) = [E^{i}_{T(t)}(x_t, y_t)]^{-1}$.

[8] Färe, Grosskopf y Whittaker (2004) interpretan las funciones de distancia en términos de las funciones de producción, costos y beneficios (dualidad) y su estimación utilizando DEA.

La FDD permite expandir los productos en la dirección g_y y contraer los insumos en la dirección g_x. El Gráfico 1 ilustra esta función.

Gráfico 1: Función Direccional de Distancia



La tecnología T consiste en el área entre la frontera tecnológica (la curva convexa en el Gráfico 1) y el eje horizontal. El vector direccional $g=(g_x, g_y)$ está ubicado en el cuarto cuadrante, indicando que el producto se expande y el insumo se contrae. La FDD traslada el vector (x, y) en la dirección (g_x, g_y) hasta el límite de la tecnología, horizontalmente (contrayendo el uso del insumo, x, sin afectar el nivel de producto, y), perpendicularmente (aumentando la producción, y, con el mismo uso de insumos, x) o en forma oblícua (aumentando en una proporción el producto y, mientras se reduce simultáneamente en la misma proporción el uso del insumo x). Dado que (x, y) es un punto interior de la tecnología T, el valor de la función de distancia es mayor que cero. En este caso es igual $0a/0g$, donde $0g$ es el rayo que parte del origen hasta el punto (g_x, g_y).

Cualquier tipo de medida, ya sea basada en cocientes o en diferencias, está fundada en la teoría de la dualidad. La función de beneficios, con su estructura aditiva, ajusta perfectamente con la FDD. En cambio, los índices de eficiencia de de Farrell (basados en costos o ingresos) están emparentados con funciones de distancia de Shepard (Färe y Grosskopf, 2005).

3. DESCRIPCIÓN DE LOS ÍNDICES E INDICADORES DE PRODUCTIVIDAD

Primeramente, se resumirán las posibilidades de acuerdo a los caminos que ha tomado la literatura y que fueran presentados secuencialmente en la Introducción. El Cuadro 1 presenta una clasificación de las medidas de productividad.

Cuadro 1: Clasificación de medidas de productividad

Aproximaciones a las medidas de eficiencia	Denominación aceptada		Enfoques	Literatura
Medidas en cocientes	Índices	Malmquist	Funciones proporcionales de distancia	Caves, Christensen y Diewert (1982)
		Hicks-Moorsteen	Cociente entre Índices de Malmquist	Diewert (1992)
Medidas en diferencias	Indicadores	Luenberger	Diferencias entre Funciones direccionales de distancia	Luenberger (1995) y Chambers (1996)
		Luenberger-Hicks-Moorsteen	Diferencias entre indicadores de Luenberger	Briec y Kerstens (2004)

Fuente: Elaboración propia

En el estudio de los índices de productividad basados en funciones distancia cabe identificar dos enfoques diferenciados. El primero arranca con Caves, Christensen y Diewert (1982), que introduce de manera teórica los denominados índices Malmquist de productividad en insumos y productos. Estos se basan en razones (cocientes) con funciones distancia orientadas a insumos, por un lado, y con funciones distancia orientadas a productos, por otro. Aunque este planteamiento tuvo una amplia difusión en la literatura teórica, la obtención empírica de índices no pudo realizarse hasta que Färe *et al.* (1994) mostraron un método de cálculo a través de técnicas de programación lineal, descomponiendo el crecimiento de la productividad así medido en dos componentes: cambio técnico y cambio de eficiencia técnica.

El segundo enfoque referido a los índices de productividad, tiene como referencia básica a Bjurek (1996) que define una razón entre índices Malmquist en productos y en insumos. Este nuevo índice se le conoce como Hicks-Moorsteen. Esta línea ha tenido un menor seguimiento en la literatura teórica.

Por otra parte también existen dos aproximaciones para el cálculo de indicadores obtenidos por diferencias, basados en funciones de distancia. Luenberger (1995) introduce la Función Direccional de Distancia que luego es utilizada para calcular el Indicador de Productividad de Luenberger como diferencia de FDDs (Chambers, 1996). Posteriormente, Briec y Kerstens (2004) construyen el indicador de productividad de Luenberger-Hicks-Moorsteen. Estos indicadores permiten estimar los cambios de productividad con medidas de distancia que permiten reflejar cambios simultáneos en insumos y productos.

3.1. Indice de Productividad de Malmquist

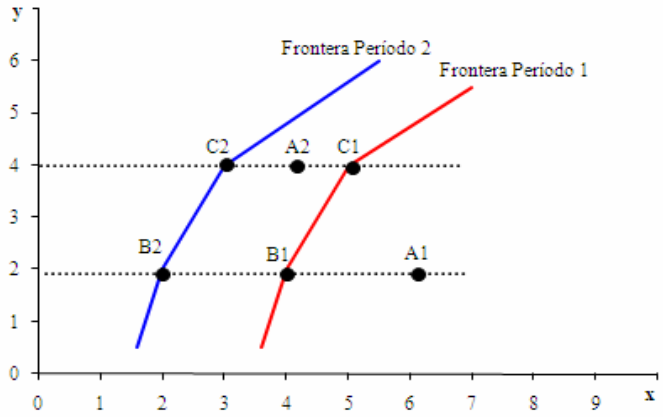
El concepto de índice de productividad de Malmquist (IPM) fue introducido por Malmquist (1953), y estudiado en un contexto no paramétrico por una diversidad de

autores[9]. Se trata de un índice que representa el crecimiento de la productividad total de los factores (TFP) de una unidad de decisión (DMU)[10]. Refleja el progreso en eficiencia (tránsito hacia la frontera, si la unidad no estaba entre las inicialmente eficientes) en consonancia con el progreso de la frontera tecnológica en el tiempo (es decir, las unidades inicialmente eficientes, incrementan su productividad en el tiempo, batiendo sus propias marcas), bajo un marco de múltiples insumos y productos.

Caves, Christiansen y Diewert (1982), sugieren el uso de índices de Malmquist para realizar comparaciones entre observaciones de los niveles de producto, insumos y productividad de unidades de decisión. Podría compararse a la misma empresa en dos momentos diferentes del tiempo, por ejemplo, o bien a dos empresas diferentes en el mismo o en distintos momentos.

El IPM se define como el producto de dos términos: el "Movimiento de la Frontera" (también conocido como "Innovación", "cambio técnico" o *Frontier-Shift*) y el "Cambio de eficiencia" ("Convergencia a la Frontera" o *Catch-Up*). Este último se relaciona con el grado en que una DMU mejora su eficiencia relativo a sus comparadores, mientras que el Movimiento de la Frontera refleja los movimientos hacia mayor productividad de las DMU inicialmente eficientes, entre dos períodos de tiempo.[11] El Gráfico 2 ilustra la forma de cálculo del IPM en un contexto no-paramétrico.

Gráfico 2: Componentes del Índice de Productividad de Malmquist



[9] Färe, Grosskopf y Roos (1998) presentan una revisión de la literatura teórica y aplicada. Tone (2004) introduce conceptualmente el índice de Malmquist y presenta medidas alternativas en un marco de análisis no-paramétrico. Coelli, Rao y Battesse (1998) dedica un capítulo para ilustrar como calcular este índice utilizando DEA.

[10] Se utiliza este término porque las medidas de eficiencia y cambio de productividad no necesariamente tienen que aplicarse a empresas. Por ejemplo, es común su utilización en las áreas de salud, educación o en áreas dentro de la organización de las firmas (sucursales de bancos, departamentos de ventas regionales, entre otros).

[11] Un análisis de las distintas alternativas para descomponer los índices de productividad puede consultarse en Grosskopf (2003).

Supongamos que para una DMU los insumos y productos (x_t, y_t) observados en t=1 y t=2 son, respectivamente, los puntos A1 = (6, 2) y A2 = (4, 4) para el caso de un insumo y un producto. Los niveles de eficiencia relativa son 0.667 para el primer período (B1/A1) y 0.75 para el segundo período (C2/A2). Así, en t=2 la DMU ha mejorado su nivel de eficiencia con respecto a la frontera.[12] Asimismo, como se observa en el gráfico 2, la frontera también se ha movido en el tiempo. Para medir este efecto es preciso trasladar el punto de referencia B1 a B2 sobre la frontera del período 2. Entonces, la convergencia hacia la frontera correspondiente a A1 es evaluada por [(B1/A1) / (B2/A1)], y similarmente para A2. Para computar el efecto innovación total se toma un promedio geométrico de ambas convergencias. Finalmente, el IPM es la multiplicación de los efectos de cambio de eficiencia y cambio técnico[13].

Formalmente, el índice de productividad de Malmquist, $IPM^i[(x_t, y_t), (x_{t+1}, y_{t+1})]$, orientado a insumos, se define de la siguiente manera:

(4) $$IPM^i[(x_t, y_t), (x_{t+1}, y_{t+1})] = \left[\frac{E^i_{T(t)}(x_t, y_t)}{E^i_{T(t)}(x_{t+1}, y_{t+1})} \frac{E^i_{T(t+1)}(x_t, y_t)}{E^i_{T(t+1)}(x_{t+1}, y_{t+1})}\right]^{\frac{1}{2}}$$

donde, $E^i_{T(t)}(x_t, y_t)$, $E^i_{T(t+1)}(x_t, y_t)$, $E^i_{T(t)}(x_{t+1}, y_{t+1})$ y $E^i_{T(t+1)}(x_{t+1}, y_{t+1})$ son las FPD (ver sección 2) necesarias para calcular el IPM^i.[14] Esto es, combinaciones de tecnología y observaciones de productos e insumos en distintos momentos del tiempo. La interpretación de este indicador resulta más clara si se reordena y se descomponen los efectos en cambio técnico y cambio en eficiencia, como se ilustra en el ejemplo presentado en el gráfico 2.[15]

---

[12] Dado que C2= (3,4) y B1 = (4,2), el cambio en eficiencia es: (C2/A2) / (B1/A1) = 1.125, lo que indica una mejora en la eficiencia relativa.

[13] Tomando C1= (4,5) y B2 = (2,2), el cambio técnico es: $\left[\frac{B1}{A1} \times \frac{C1}{A2} \frac{A2}{C2}\right]^{\frac{1}{2}}$ = 1.826, indicando progreso técnico. En consecuencia, el IPM de este ejemplo es 2.054 que representa una mejora en la productividad total de los factores.

[14] Similarmente, el IPM orientado a productos tiene la misma estructura, pero sobre la base de las medidas de distancia "shepardianas" orientadas a productos (ver ecuación2).

[15] La descomposición para el IPM orientado a insumos, de la ecuación 4, es:

$$IPM^i = \left[\frac{E^i_{T(t-1)}(x_{t-1}, y_{t-1})}{E^i_{T(t)}(x_t, y_t)}\right] \cdot \left[\left(\frac{E^i_{T(t)}(x_{t-1}, y_{t-1})}{E^i_{T(t-1)}(x_{t-1}, y_{t-1})}\right)\left(\frac{E^i_{T(t)}(x_t, y_t)}{E^i_{T(t-1)}(x_t, y_t)}\right)\right]$$, donde el primer término representa el Cambio en Eficiencia y el segundo término el Cambio Técnico.

La formulación DEA calcula el Indicador de productividad de Malmquist (bajo rendimientos constantes a escala[16]) orientado a insumos[17] resolviendo el siguiente problema de optimización para cada unidad de decisión j:

$$E^{j}_{T(t)}(x_t, y_t) = \min_{\theta,\lambda} \theta$$

(5) Sujeto a: $\mathbf{Y}_t \lambda \geq y_t^j$

$$\mathbf{X}_t \lambda \leq \theta x_t^j$$

$$\lambda \geq 0$$

donde θ es el nivel de eficiencia en el año t, λ es un vector N×1 de ponderadores, Y_t y X_t son las matrices de productos y_t, e insumos x_t para todas las DMUs de la muestra. Los vectores de productos e insumos de la empresa j son y_t^j y x_t^j, respectivamente.

Para estimar el cambio en productividad en el tiempo, son necesarias distintas funciones de distancia orientadas a insumos y productos, incluyendo funciones de distancia del mismo periodo y de periodos cruzados para cada producto y cada periodo de tiempo.[18]

3.2. Indicador de Productividad de Luenberger

El Indicador de Productividad de Luenberger (IPL), se calcula mediante una frontera tecnológica no-paramétrica para medir productividad, y no requiere una elección entre la orientación a insumos o productos (Chambers, 1996). Puesto que el Indicador de Productividad de Luenberger es consistente con ambas orientaciones, resulta ser una generalización de Índice de Productividad de Malmquist y superior al mismo por su flexibilidad (Luenberger, 1995; Färe y Grosskopf, 2005; Boussemart et al., 2003).

El Indicador de productividad de Luenberger, $IPL[(x_t, y_t), (x_{t+1}, y_{t+1}); g_t, g_{t+1}]$, se define de la siguiente manera:

---

[16] La medición no paramétrica de la medida de eficiencia de Farrell, con rendimientos constantes a escala, fue propuesta por Charnes, Cooper y Rhodes (1978). Posteriormente, Banker, Charnes y Cooper (1984) generalizan la medición para rendimientos variables (crecientes y decrecientes) a escala.

[17] La formulación de los problemas de optimización con diversas orientaciones y supuestos sobre los rendimientos puede ser consultada en Cooper, Seiford y Tone (2006) y Coelli, Rao y Battese (2002).

[18] Así, para el caso de las observaciones en el período inicial, t, con respecto a la tecnología en el periodo siguiente el problema a resolver es:

$E^{1}_{T(t+1)}(x_t, y_t) = \min_{\theta,\lambda} \theta$ sujeto a: $\mathbf{Y}_{t+1}\lambda \geq y_t^j$; $\mathbf{X}_{t+1}\lambda \leq \theta x_t^j$; $\lambda \geq 0$,

y para la comparación entre la DMU en el nuevo período (t+1) con respecto a la tecnología en el período inicial el problema es:

$E^{1}_{T(t)}(x_{t+1}, y_{t+1}) = \min_{\theta,\lambda} \theta$ sujeto a: $\mathbf{Y}_t\lambda \geq y_{t+1}^j$; $\mathbf{X}_t\lambda \leq \theta x_{t+1}^j$; $\lambda \geq 0$

$$IPL[(x_t, y_t), (x_{t+1}, y_{t+1})] = \frac{1}{2}\left[\left(D_{T(t)}(x_t, y_t; g_t) - D_{T(t)}(x_{t+1}, y_{t+1}; g_{t+1})\right)\right.$$

(6)

Al igual que el IPM, el Indicador de Productividad de Luenberger también puede ser expresado como la suma los componentes: cambio técnico y cambio en eficiencia.[19]

La formulación DEA calcula el Indicador de productividad de Luenberger resolviendo el siguiente problema de optimización, bajo rendimientos constantes a escala (Chambers, Färe y Grosskopf, 1996):

(7) $$D_{T(t)}(x_t, y_t; g_t) = \max_{\delta,\lambda} \delta$$

donde δ es el nivel de eficiencia en el año t, λ es un vector N×1 de ponderadores, Y_t y X_t son las matrices de productos y_t e insumos x_t para todas las DMUs de la muestra. Los vectores de productos e insumos de la empresa j son y_t^j y x_t^j, respectivamente.

Para estimar el cambio en el tiempo de la productividad, son necesarias distintas funciones proporcionales de distancia, incluyendo tanto el mismo periodo como una mezcla de periodos, para cada producto e insumo. Para la función de distancia de "periodo-cruzado," tenemos dos años, t y t+1, por ejemplo. Así, $D_{T(t)}(x_{t+1}, y_{t+1}; g_{t+1})$ es el valor de la función de distancia proporcional para el vector insumo-producto del periodo t+1 y tecnología en el período t.[20]

3.3. Relaciones entre los Índices y los Indicadores

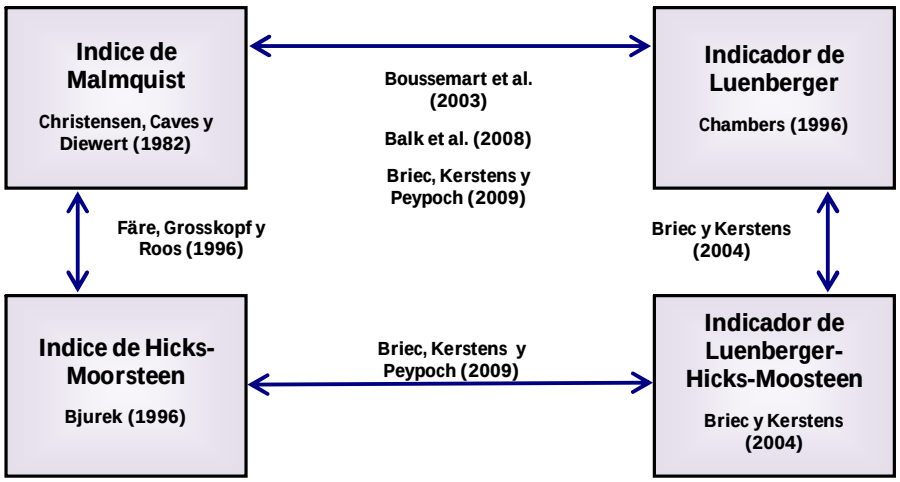
Las propiedades de cada uno de estos indicadores e índices han sido estudiadas por Boussemart et al. (2003). Asimismo, Färe, Grosskopf y Roos (1996), Balk et al. (2008), Briec y Kerstens (2004), y Briec, Kerstens y Peypoch (2009) han formalizado las relaciones aproximadas y exactas entre cada una de las medidas de productividad. El Gráfico 3 presenta el aporte de cada uno de los artículos a la literatura.

---

[19] $$L = \left[D_{T(t)}(x_t, y_t) - D_{T(t-1)}(x_{t-1}, y_{t-1})\right] + \frac{1}{2}\left[\left(D_{T(t-1)}(x_{t-1}, y_{t-1}) - D_{T(t)}(x_{t-1}, y_{t-1})\right) + \left(D_{T(t-1)}(x_t, y_t) - D_{T(t)}(x_t, y_t)\right)\right]$$
donde la primera diferencia entre corchetes representa el Cambio en Eficiencia y el segundo término, que es la media aritmética de dos diferencias, representa el Cambio Técnico.

[20] Siguiendo un procedimiento similar al presentado para el IPM (nota al pie 12)

Gráfico 3: Contribuciones de la literatura



Fuente: Elaboración propia sobre la base de Briec, Kerstens y Peypoch (2009)

En este trabajo nos concentramos en la relación existente entre el índice de productividad de Malmquist y el indicador de productividad de Luenberger. Boussemart et al. (2003) encuentran una relación aproximada entre estas dos medidas del cambio de la productividad. Muestran que el logaritmo del Índice de Productividad de Malmquist orientado a insumos es dos veces una aproximación lineal del Indicador de Productividad de Luenberger (en valor absoluto)[21].

(8) $$\log\{IPM^{i}[(x_t, y_t), (x_{t+1}, y_{t+1})]\} \cong 2\, IPL[(x_t, y_t), (x_{t+1}, y_{t+1})]$$

Dado que la medida orientada a insumos implica sólo reducciones en los factores de producción, sobreestima la ineficiencia técnica. Como consecuencia, se espera que también sobrestime los cambios de productividad.[22]

Por otra parte, Balk et al. (2008) y Briec, Kerstens y Peypoch (2009) establecen la relación exacta entre los IPM e IPL, pero solamente para aquellas DMUs que están sobre la frontera en ambos periodos para los que se evalúa el cambio de productividad.[23]

---

[21] En Boussemart et al. (2003) se puede consultar la demostración de este resultado, así como para otras aproximaciones de primer y segundo orden entre índices e indicadores orientados a productos o insumos.

[22] Similarmente, el logaritmo del Índice de Productividad de Malmquist orientado a productos es dos veces el Indicador de Productividad de Luenberger (en valor absoluto).

[23] Briec, Kerstens y Peypoch (2009) demuestran que el índicador de productividad de Luenberger orientado a productos se relaciona con el índice de productividad de Malmquist de acuerdo con la siguiente expresión: $$IPL^{o} = \frac{1}{2}\sum_{\tau=0,1}(2\tau - 1)(IPM_{\tau}^{o})^{2\tau-1}$$.

4. APLICACIÓN AL SECTOR SEGUROS DE LA ARGENTINA

Antes de los 1990s el sector tuvo un crecimiento acotado, especialmente en el segmento de vida por la alta inflación, combinada con la ausencia de una unidad de cuenta indexada para definir los contratos financieros. En los 1990s la posibilidad de denominar contratos en dólares, así como la reforma de las pensiones en 1994 y del régimen de accidentes de trabajo en 1996, permitió un desarrollo de los ramos personales. La crisis financiera y económica de 2002 tuvo varias influencias sobre el sector: desaparecieron los contratos en dólares, la caída del PBI motivó la retracción de la demanda, que se comenzó a recuperar junto con la economía desde 2003, y posteriores cambios institucionales en pensiones, donde se eliminó el sistema de capitalización, motivaron una caída continua del segmento de vida, a la par que la inflación retornaba en años recientes. La devaluación de la moneda implicó una fuerte reducción en las primas expresadas en dólares, que recién hacia 2008 llegaron a los niveles pre-crisis, de unos US$ 7000 millones.

La penetración del sector (producción medida en primas en relación al PBI) está en la media regional, aproximadamente en 2,5% del PBI, baja en relación a algunos países vecinos (como Chile) y mucho más en comparación a países desarrollados (como España). La densidad (los dólares per cápita de primas), estaba en US$ 184 antes de la crisis y la devaluación, y recién había recuperado esos niveles en 2008 (Swiss Re, 2009).

Es preciso aclarar que el objetivo de la presente aplicación es ilustrar las diferencias entre el IPM y el IPL, y por lo tanto no se realiza un análisis detallado de los cambios de productividad del sector y sus determinantes.[24]

4.1. Base de Datos

La base de datos en uso, confeccionada por los autores a partir de información oficial centralizada por la Superintendencia de Seguros de la Nación), consta de cinco observaciones anuales para 71 compañías actuantes en el período 2004 a 2008[25], sobre cinco variables indicativas de producción, todas expresadas en unidades monetarias, y cuatro de insumos también denominadas en unidades monetarias (las cuáles fueron tomadas a valores constantes del año 2008). Se está abarcando aproximadamente la mitad del mercado en términos de primas netas totales. Las observaciones que no pudieron ser incluidas en la muestra contenían faltantes de datos en variables específicas, o bien inconsistencias. El criterio de inclusión fue completitud y consistencia de los datos sobre las variables utilizadas.

Los ingresos de la industria se clasifican en "técnicos", como ser primas vendidas para cobertura de siniestros –en ramos personales y no personales-, y reaseguros tomados por las compañías y financieros, por ejemplo por la colocación en instrumentos de deuda

[24] Ferro, Labaronnie y Romero (2011) se presenta un análisis sectorial con estimaciones del IPL para el sector seguros de la Argentina luego de la crisis financiera y económica de 2002.

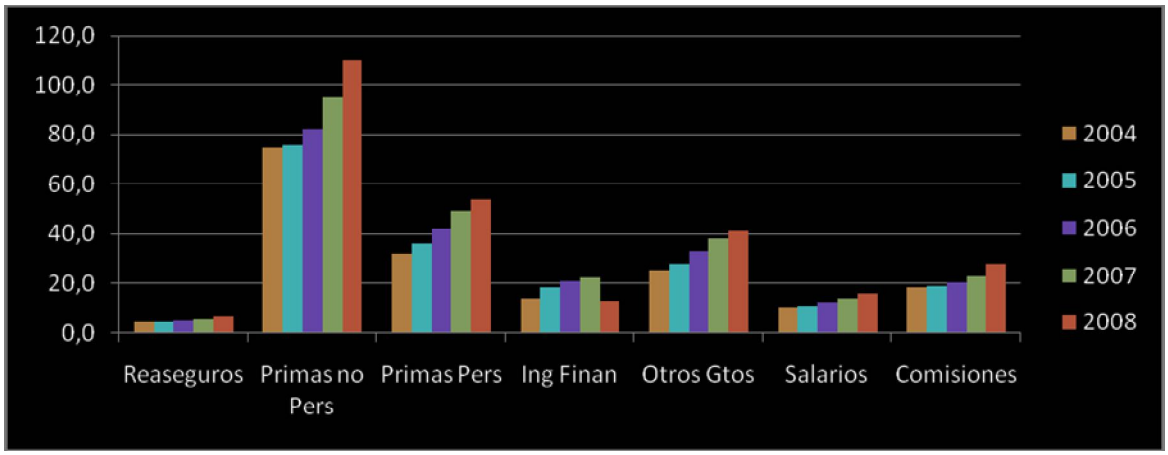
[25] Los ejercicios contables de las aseguradoras, por disposición regulatoria, cierran a fin de junio de cada año. De ese modo, 2004 debe ser interpretado como el período que corre entre el 1 de julio de 2003 y el 30 de junio de 2004, y así para los demás.

de las reservas que se mantienen en cartera (Baltensperger et al., 2008). La proporción de primas por ramos no personales ha crecido desde un 60% a un 80% recientemente. Los ingresos financieros han sido muy volátiles y los reaseguros tomados tienen un porcentaje bajo y estable con relación a las primas. La industria en su conjunto cede un 20% de sus primas a reaseguradores extranjeros. Aquí sólo se contempla la cesión de primas entre compañías nacionales (reaseguros tomados por las compañías de otras aseguradoras).

La estructura de costos, en tanto, refleja el proceso productivo de una industria que vende directamente algunos seguros, principalmente de ramos personales, en tanto los no personales se colocan mayormente por el canal de intermediarios (productores asesores de seguro). Aproximadamente un tercio de los costos totales son comisiones a intermediarios, un poco más del 18% salarios y algo menos del 50% restante son otros gastos. Dicha estructura de costos se mantuvo en el tiempo.

El Gráfico 4 permite efectuarse una idea inicial de los cambios en productividad del sector, al examinarse como crecieron los rubros de ingreso y los de costos en el período.

Gráfico 4. Evolución promedio de ingresos y costos de las aseguradoras de Argentina (muestra de 71 empresas). Período 2004-2008 (en millones de pesos de 2008)



Fuente: Elaboración propia sobre datos de la Superintendencia de Seguros de la Nación

Las primas en ramos no personales crecieron más rápidamente que en ramos personales, en tanto los reaseguros lo hicieron más lentamente y los ingresos financieros tuvieron una evolución diferente. Dentro de los componentes de costos, las comisiones y los otros gastos crecieron más rápidamente que los salarios. Los componentes de ingreso tuvieron en conjunto un crecimiento más veloz que los de costos.

En el Cuadro 2 se presenta la estadística descriptiva de los promedios para todo el período de la base de datos utilizada para realizar las estimaciones de productividad.

Cuadro 2: Estadísticas descriptivas de las variables empleadas en las estimaciones.

Período 2004-2008	Reaseguros tomados	Primas ramos no personales	Primas ramos personales	Ingresos financieros	Otros gastos	Salarios	Comisiones
Mínimo	0	0	0	0	1516	237	0
Máximo	56822	924688	364664	241873	418933	194340	252441
Promedio	4788	87343	42553	17559	32993	12374	21654
Desvío Estándar	9555	159614	63827	30088	53578	20850	33040
Dispersión	2	1,8	1,5	1,7	1,6	1,7	1,5

Fuente: Elaboración propia sobre datos de la Superintendencia de Seguros de la Nación.

El Cuadro 3 permite caracterizar mejor la muestra para cada uno de los períodos, mostrando la distribución relativa de los ingresos por primas totales (incluyendo reaseguros tomados) de las compañías.

Cuadro 3. Frecuencia relativa (%) de los ingresos por primas totales (primas personales y no personales más reaseguros tomados) de empresas de seguros de la Argentina. Período 2004-2008 (en millones de Pesos de 2008).

Rango (millones de $)	2004	2005	2006	2007	2008
menor a 20	19.7%	18.3%	12.7%	12.7%	11.3%
20.01 – 50	33.8%	32.4%	32.4%	28.2%	22.5%
50.01 – 100	16.9%	18.3%	22.5%	21.1%	25.4%
100.01 – 200	14.1%	14.1%	15.5%	16.9%	15.5%
200.01 – 500	12.7%	14.1%	11.3%	14.1%	15.5%
mayor a 500	2.8%	2.8%	5.6%	7.0%	9.9%
Total empresas (Nro.)	71	71	71	71	71
Promedio ($ MM)	110	116	129	149	170
Desvío estándar ($ MM)	169	172	181	206	238
Dispersión	1.53	1.48	1.40	1.39	1.40

Fuente: Elaboración propia

Se observa que el tamaño de las empresas aumenta entre 2004 y 2008. En alrededor de un 54% de las empresas de la muestra tenían primas menores a 50 millones de Pesos de 2008, en cambio en 2008, la participación de empresas en este rango cae a 34%. El tamaño relativo de las empresas de la muestra es dispar (niveles de desvío estándar superiores a la media en todos los años). Sin embargo, se observa que la dispersión disminuye punta a punta (de 1.53 a 1.40), lo que significa que la distribución del tamaño de las empresas disminuyó.

4.2. Resultados

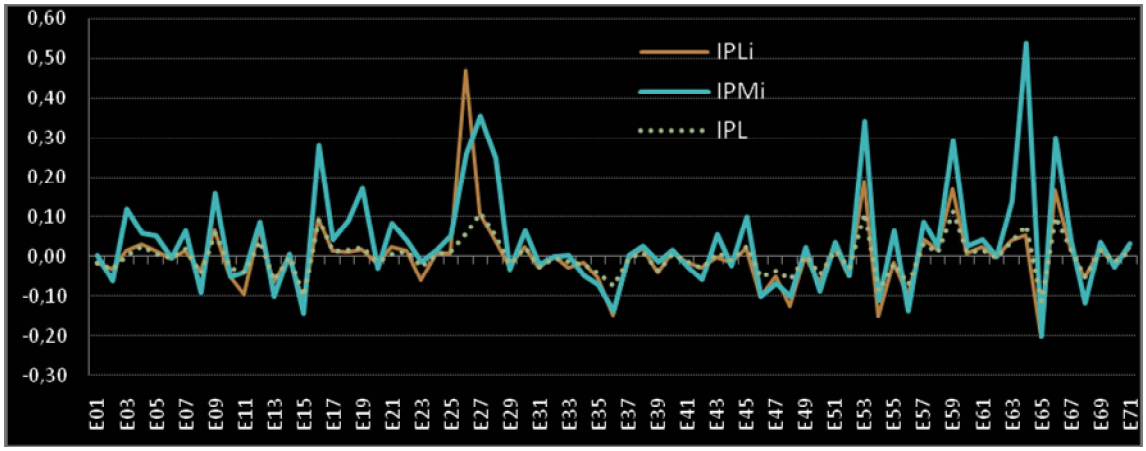
Dado que no se dispone de datos físicos para producción, sino solamente para insumos (personal y sucursales) se optó por variantes donde tanto los productos como los insumos están expresados en términos monetarios (ajustados a valores constantes de

2008). En este sector no hay direccionalidad en cuanto a productos o insumos en el logro de la optimización empresarial: las decisiones implícitas en los cambios de productividad son tanto de utilización de insumos como de expansión o contracción de la producción. Por la naturaleza competitiva del sector se asume que los precios de productos y costos están igualados dentro del mercado argentino de seguros.

Los productos considerados son primas de seguros agrupadas en personales y no personales. Los insumos son salarios, comisiones y otros costos. Se asume rendimientos constantes a escala y se consideraron modelos radiales y en diferencias orientados a insumos y productos y un modelo en diferencias no orientado.[26]

Debido a que el índice de productividad de Malmquist orientado a productos es la inversa del orientado a insumos, las comparaciones se realizan tomando en cuenta este último con respecto a los indicadores de Luenberger (no orientado) y Luenberger orientado a insumos (Gráfico 5).

Gráfico 5 Comparación de tasas de crecimiento de la productividad estimadas con el Índice de Malmquist (insumos) y los indicadores de Luenberger (insumos y no orientado), por empresa. Promedio del período 2004-2008.



Fuente: Elaboración propia.

Nota: IPL: Indicador de Productividad de Luenberger (no orientado); IPLi: Indicador de Productividad de Luenberger orientado a insumos; IPMi: Indicador de Productividad de Malmquist orientado a insumos

Se observa, tal cual lo menciona la literatura, que el índice de Malmquist sobreestima el crecimiento de la productividad. En el Gráfico 5, este índice aparece con niveles más altos en la mayoría de los casos. Sólo para una empresa en particular, el índice de Luenberger (insumos) es más alto. El índice de Malmquist también sobrestima la caída de la productividad, aunque aquí hay cuatro casos donde el IPL orientado a insumos da una caída mayor. Sin embargo, el objetivo es comparar con el IPL, que es la medida adecuada en un ambiente donde las unidades de decisión pueden tanto afectar la producción como su demanda de insumos.

[26] Eling y Luhnen (2008) y Cummins y Weiss (1998) realizan un análisis de las aplicaciones de modelos de frontera aplicados al sector de seguros.

Concentrándonos en el índice de Malmquist y el indicador de Luenberger, de acuerdo con la literatura existe una relación entre los niveles de productividad estimados por ambos métodos.

Por un lado, existe una relación exacta (Balk et al., 2008; Briec, Kerstens y Peypoch, 2009) para aquellas empresas que son eficientes en ambos periodos para los que se calcula el cambio de productividad. Se ha comprobado que las estimaciones realizadas cumplen con las relaciones exactas especificadas.

Por otra parte existe una relación aproximada para toda la muestra de empresas, tanto eficientes como no eficientes (Boussemart et al. 2003). El Cuadro 4 presenta la comparación de las diferencias entre ambas medidas de productividad, comparando el crecimiento anual (2005 representa el cambio entre 2005 y 2004, y así sucesivamente). Se toma como medida el cociente entre ambos términos de la ecuación anterior, y se espera un valor cercano a uno.

Se observa que no se puede tomar el resultado aproximativo como una regla. En promedio la aproximación muestra que las medidas de Malmquist están entre 15% a 22% por encima de la medida de Luenberger, con una variabilidad por empresa relativamente baja (dispersión entre 0.20 y 0.30).

Cuadro 4. Frecuencia relativa (%) de las diferencias entre el Índice de Malmquist y el Indicador de Luenberger. Período 2004-2008.

Rango (diferencias entre IPMi e IPL)	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**
hasta 1%	12.7%	16.9%	19.7%	21.1%
entre 1% y 5%	23.9%	14.1%	22.5%	25.4%
entre 5% y 10%	21.1%	23.9%	14.1%	15.5%
entre 10% y 20%	12.7%	16.9%	19.7%	16.9%
entre 20% y 50%	19.7%	18.3%	15.5%	11.3%
Más de 50%	9.9%	9.9%	8.5%	9.9%
Total	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
Promedio	1.22	1.21	1.16	1.15
Desvío estándar	0.37	0.41	0.23	0.25
Dispersión	0.31	0.34	0.20	0.22

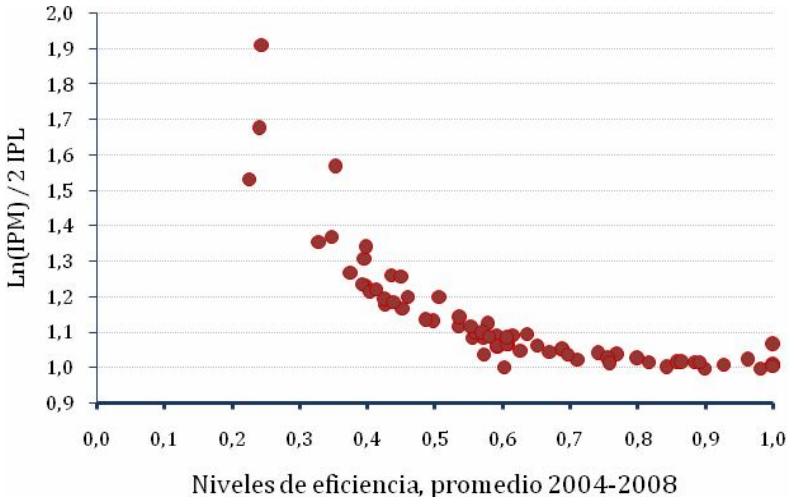
Fuente: Elaboración propia

La frecuencia relativa expone adicionalmente, que esta aproximación no puede ser utilizada directamente a nivel de cada unidad de decisión. Si bien no menos de 55% de los casos se encuentran dentro de un error del 10% (año 2006), se observa que los errores mayores al 20% llegan a casi el 30% de los casos (en el año 2005).

Este resultado indica que se requiere mayor información para poder comparar resultados de productividad obtenidos por intermedio del Índice de Malmquist y del Indicador de Luenberger. A continuación se estudia si las diferencias se pueden explicar por los niveles relativos de eficiencia**.**

El Gráfico 6 presenta la relación entre las diferencias calculadas de acuerdo a Boussemart et al. (2003) y los niveles promedio de eficiencia, calculados de forma radial orientados a insumos.[27]

Gráfico 6. Correspondencia entre las diferencias entre el IPM (orientado a insumos) y el IPL y el nivel de eficiencia realtiva. Promedio del período 2004-2008.



Fuente: Elaboración propia

Se observa claramente que a menores niveles de eficiencia de las DMUs (calculados como promedio aritmético de las estimaciones de cada año), los errores se magnifican (medidos en el eje vertical, un valor 1 significa que se cumple la aproximación). Con niveles de eficiencia relativa de alrededor de 0.7 (30% de ineficiencia) el error de la relación aproximada supera el 5%, con eficiencia de 0.6 el error alcanza el 10% y con niveles de eficiencia de 0.5 el error supera el 20%.

En otras palabras, a medida que el nivel de eficiencia se acerca a la frontera, las diferencias de estimación entre el IPM y el IPL se desvanecen. Sin duda este resultado es sólo conjetural dado que se basa en una muestra particular de empresas de seguros de la Argentina. Sin embargo, está en línea con la literatura que se dedicó a buscar las relaciones exactas, que se satisfacen cuando las unidades productivas están sobre la frontera, o a partir de relaciones aproximadas, que se cumplen cuando la variabilidad de la muestra es baja.

[27] Si bien el gráfico muestra resultados para el promedio de los cuatro años considerados para cada DMU, los mismos se mantiene en términos cualitativos cuando se toma cada período individualmente.

5. CONCLUSIONES

A la forma tradicional de medición de cambios en productividad, Índices de Malmquist (IPM), expresados como razones, se han agregado en los últimos años nuevas medidas, Indicadores de Luenberger (IPL), formadas como diferencias. El presente trabajo está enfocado en la construcción de los índices e indicadores y la comparación de los resultados que arrojan, para lo cual se resume la literatura y se presentan los lineamientos para su estimación con DEA.

Los Índices de Malmquist resultan de utilidad en el análisis económico cuando el problema a resolver tiene una orientación clara: esto es, si las unidades de decisión trabajan ajustando sus insumos por alguna restricción al cambio en la producción (por ejemplo en sectores regulados de infraestructura) o bien si la orientación es al producto (por alguna rigidez en el cambio en la mezcla de insumos). En tanto, en determinadas industrias la orientación a insumos o a productos no es una buena descripción de las alternativas que cuentan las unidades de decisión para su objetivo de maximizar beneficios. En este caso, el Indicador de Luenberger ofrece una medida no orientadas consistentes con tal objetivo. En este contexto, ambas medidas de productividad requieren por lo tanto diferentes funciones de distancia: funciones de distancia "Shepardianas" para el IPM y funciones direccionales de distancia para el IPL.

Balk et al. (2008) y Briec, Kerstens y Peypoch (2009) han hallado las relaciones matemáticas entre el IPM y el IPL, guardando proporcionalidad las medidas para empresas eficientes (las que están sobre la frontera) y también se han encontrado relaciones aproximadas entre las diferentes medidas de cambio de productividad (Boussemart et al., 2003). Resulta importante contar con estas relaciones entre las diferentes medidas de cálculo de la productividad, para poder hacer correctas comparaciones de diferentes mercados y de un mismo mercado en diferentes momentos del tiempo. Para ilustrar y comparar el cálculo del IPM y del IPL se realizaron estimaciones para el sector de Seguros de la Argentina entre 2004 y 2008.

Los resultados obtenidos hasta el momento, si bien importantes, todavía son parciales dado que los resultados están asociados a una muestra en particular. Sin embargo, el presente trabajo contribuye conjeturando que cuando la variabilidad de la eficiencia relativa de las DMUs es alta la relación aproximada de Boussemart et al. (2003) no se cumple. Sólo se satisface si las empresas están dentro de un rango eficiencia relativa Una extensión de este trabajo requeriría la utilización de *bootstrapping* para variar el tamaño y la composición de la muestra y estudiar con mayor profundidad esta conjetura.

6. REFERENCIAS

Balk, B., R. Färe, S. Grosskopf y D. Margaritis, 2008. "Exact relations between Luenberger productivity indicators and Malmquist productivity indexes," *Economic Theory* 35, pp. 187-190.

Baltensperger E., P. Buomberger, A. Iuppa, B. Keller y A. Wicki, 2008. "Regulation and intervention in the insurance industry – fundamental issues." The Geneva Reports, Geneva Association.

Banker, R., A. Charnes y W. Cooper, 1984. "Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis," *Management Science* 30, pp. 1078-1092.

Bjurek, H., 1996. "The Malmquist total factor productivity index," *Scandinavian Journal of Economics* 98, pp. 303-313.

Boussemart, J-P., W. Briec, K. Kerstens y J-C. Poutineau, 2003. "Luenberger and Malmquist productivity indices: Theoretical comparisons and empirical illustration," *Bulletin of Economic Research* 55, pp. 391-405.

Briec, W. y K. Kerstens, 2004. "A Luenberger-Hicks-Moorsteen Productivity indicator: Its relation to the Hicks-Moorsteen productivity index and the Luenberger productivity indicator," *Economic Theory* 23, pp. 925-939.

Briec, W., K. Kerstens y N. Peypoch, 2009. "Exact Relations Between four Definitions of Productivity Indices and Indicators," Document de travail du LEM 2009-08, abril.

Caves, D., L. Christensen y W. Diewert, 1982. "The economic theory of index numbers and the measurement of inputs, outputs and productivity," *Econometrica* 50, pp. 1393-1414.

Chambers R., 1996. "A new look at exact input, output, and productivity measurement," Working Paper 96-05, Department of Agricultural and Resource Economics, University of Maryland.

Charnes, A., W. Cooper y E. Rhodes, 1978. Measuring the efficiency of decision making units," *European Journal of Operational Research* 2, pp. 429-444

Coelli, T., D. Prasada-Rao y G. Battesse, 1998. *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Cooper, W., L. Seiford y K. Tone, 2006. *Introduction to Data Envelopment Analysis and Its Uses*, Springer, New York.

Cummins, J. y M. Weiss, 1998. "Analyzing Firm Performance in the Insurance Industry Using Frontier Efficiency Methods," Financial Institutions Center 98-22, The Wharton School, University of Pennsylvania.

Debreu, G., 1951. "The Coefficient of Resource Utilization," *Econometrica* 19, pp. 273-292

Diewert, W., 1998. "Index Number Theory Using Differences Rather than Ratios," Department of Economics, UBC, Discussion paper 98-10.

Eling, M., M. Luhnen, 2008. “Frontier efficiency methodologies to measure performance in the insurance industry: Overview and new empirical evidence,” *Working papers on risk management and insurance* 56.

Färe, R., S. Grosskopf, B. Lindgren y P. Roos, 1994. *Productivity Development in SwedishHospitals: A Malmquist Output Index Approach*, Kluwer Academic Publisher, Boston.

Färe, R., S. Grosskopf y P. Roos, 1996. “On two definitions of productivity." *Economic Letters* 53, pp. 269-274.

Färe, R, S. Grosskopf y P. Roos, 1998. “‘Malmquist productivity indexes: a survey of theory and practice,” en R. Färe, S. Grosskopf y R. Russell (eds): *Index Numbers: Essays in Honour of Sten Malmquist,* Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

Färe, R, S. Grosskopf y G. Whittaker, 2004. “‘Distance Functions With Applications to DEA,” en W. Cooper, L. Seiford y J. Zhu (eds): *Handbook on Data Envelopment Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

Färe, R y S. Grosskopf, 2005. *New Directions: Efficiency and Productivity,* Springer, New York.

Farrell, M., 1957. “The Measurement of Productivity Efficiency,” *Journal of the Royal Statistical Society* 120, pp. 253-281.

Ferro, G., E. Labaronnie y C. Romero, 2011. “Cambios de productividad a la salida de una crisis: El sector de seguros en Argentina,” V Congreso de Eficiencia y Productividad EFIUCO, Universidad de Córdoba, España, Mayo.

Ferro, G, E. Lentini y C. Romero, 2011. “Eficiencia y su medición en prestadores de servicios de agua potable y saneamiento. Una guía útil para gerentes y reguladores”. *Documento de Proyecto* LC/W.385 CEPAL/GTZ. Santiago de Chile, febrero.

Grifell-Tatjé, E. y C. Lovell, 1995. “A Note on the Malmquist Productivity Index,” *Economics Letters* 47, pp. 169-75.

Grosskopf, S., 2003. “Some Remarks on Productivity and Its Decompositions,” *Journal of Productivity Analysis* 20:3, pp. 459-474

Luenberger, D., 1995. *Microeconomic theory*, New York: McGraw-Hill Book Co.

Malmquist, S., 1953. “Index Numbers and Indifference Surfaces,” *Trabajos de Estadistica* 4, pp. 209-242.

Shepard, R., 1953. *Cost and Production Functions*, Princeton University Press, Princeton

Swiss Reinsurance Company Ltd., 2009. “Insurance in Latin America: Focus on Personal Lines,” Swiss Re Insights, November.

Tone, K., 2004. “Malmquist Productivity Index: Efficiency Change Over Time,” en W. Cooper, L. Seiford y J. Zhu (eds): *Handbook on Data Envelopment Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.