Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques

Guy Brousseau

LES OBSTACLES EPISTEMOLOGIQUES ET LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES'

par G.BROUSSEAU
(UNIVERSITE BORDEAUX I)

1. POURQUOI LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES S'EST ELLE INTÉRESSÉE AUX OBSTACLES ÉPISTÉMOLOGIQUES ?

1.1. La transposition en mathématiques de la notion d'obstacle épistémologique, que BACHELARD [1938] pensait réservée aux sciences expérimentales, a été rendue possible et même nécessaire par le développement de la théorie des situations didactiques dans les années 70. Elle est directement issue des concepts de "saut informationnel"(BROUSSEAU 1974) et des "théorèmes" de didactique qui en découlent:

1.2. Une connaissance est le résultat d'une adaptation de l'élève à une situation S qui 'justifie" cette connaissance en la rendant plus ou moins efficace, des connaissances différentes conduisant à des apprentissages et à des exécutions de taches ayant des complexités différentes. Suivant les valeurs des variables pertinentes de S, on peut imaginer que l'on associe à chaque connaissance utile dans S, une surface d'efficacité (ou de coût). L'enveloppe supérieure de ces surfaces peut ménager des maximums, séparés par des cols (ou toute autre singularité). Donc pour faire créer par l'élève une certaine connaissance, l'enseignant "doit" choisir les valeurs qui rendent cette connaissance optimale par rapport aux connaissances concurrentes; il faut alors progresser par sauts et non de façon régulière:

Par exemple, si l'on veut favoriser la solution d'un système linéaire par combinaisons linéaires, pour des élèves qui connaissent la méthode de substitution, il vaut mieux choisir des systèmes de rang 4 que 2 ou même que 3.

1.3. i) Ce raisonnement peut s'appliquer pour analyser aussi bien la genèse historique d'une connaissance que son enseignement ou que l'évolution spontanée d'un élève.

ii) L'apprentissage par adaptation au milieu entraîne donc nécessairement des ruptures cognitives: accommodations, changements de modèles implicites, de langages, de systèmes cognitifs.

iii) Si son histoire oblige un élève - ou un groupe culturel - à une progression pas à pas vers un col, le principe d'adaptation lui même, peut contrarier le rejet pourtant nécessaire d'une connaissance inadéquate. Ce fait suggère l'idée que les conceptions "transitoires" résistent et persistent .

iv) Dans une voie ouverte par GONSETH [1936] ces ruptures peuvent être prévues par des études directes des situations (effet des variables didactiques) et des connaissances, et non seulement par des études (indirectes) des comportements des élèves (BROUSSEAU G. 1974,1976).

1.4. Poursuivre dans cette voie exige pourtant le réexamen de l'interprétation des erreurs des élèves et des modalités de leur production (SALIN, 1976). Jusque là, elles étaient attribuées toutes, soit à des dysfonctionnements erratiques, soit à des absences de connaissances et donc connotées très négativement; il faut maintenant envisager les erreurs récurrentes comme le résultat (produit par et construit autour) de conceptions, qui, mêmes lorsqu'elles sont fausses, ne sont pas des accidents, mais des acquisitions souvent positives.

Il s'agit donc d'abord pour les chercheurs de:

i) Trouver ces erreurs récurrentes, montrer qu'elles se regroupent autour de conceptions,

ii) Trouver des obstacles dans l'histoire des mathématiques,

iii) Confronter les obstacles historiques aux obstacles d'apprentissage et établir leur caractère épistémologique.

2. LES OBSTACLES ÉPISTÉMOLOGIQUES EN MATHÉMATIQUES EXISTENT-ILS?

2.1. Sur le premier point les observations d'erreurs marquantes se sont développées ($(a+b)^2 = a^2 + b^2$; $0.a = a$; $a^2 = a$; $(0,2)^2 = 0,4$ ...) mais leur rattachement à des conceptions fait appel à des méthodes statistiques qui nécessitent des aménagements aux méthodes standards. (CRONBACH [1967], PLUVINAGE [1977], puis par LERMANN et R.GRAS [1979]). Les progrès ont été rendus possibles par une meilleure définition de la notion de conception appuyée sur la théorie des situations didactiques.

La possibilité de provoquer l'acquisition de conceptions différentes est démontrée pour les rationnels (G.BROUSSEAU, 1980; 1982, N. et G.BROUSSEAU 1986): Soit la COMMENSURATION soit le FRACTIONNEMENT sont obtenus par la simple manipulation des variables didactiques. H. RATSIMBA-RAJHON [1982] observe comment ces deux conceptions peuvent se faire obstacle mutuellement et cependant coexister chez un même élève, et comment une conception initiale peut être, non pas rejetée, mais renforcée malgré un saut informationnel à priori suffisant.

2.2 Sur le deuxième point, l'étude de G. GLAESER [1981] sur l'histoire des nombres relatifs montre de façon décisive l'intérêt et l'importance de ces phénomènes de ruptures - observables dans l'histoire des mathématiques - pour la compréhension des difficultés des élèves. Mais il apparaît alors qu'il faut interpréter le modèle de BACHELARD [1938] pour l'étendre aux mathématiques. A.DUROUX [1982], propose, non pas une définition, mais une liste de conditions nécessaires:

i) Un obstacle sera une connaissance, une conception, pas une difficulté ou un manque de connaissance.

ii) Cette connaissance produit des réponses adaptées dans un certain contexte, fréquemment rencontré

iii) Mais elle engendre des réponses fausses hors de ce contexte. Une réponse correcte et universelle exige un point de vue notablement différent.

iv) De plus cette connaissance résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée et à l'établissement d'une connaissance meilleure. Il ne suffit pas de posséder une meilleure connaissance pour que la précédente disparaisse (ce qui distingue le franchissement d'obstacles de l'accommodation de PIAGET). Il est donc indispensable de l'identifier et d'incorporer son rejet dans le nouveau savoir

v) Après la prise de conscience de son inexactitude, elle continue à se manifester de façon intempestive et opiniâtre.

2.3. Sur le troisième point les résultats commencent à paraître substantiels. Citons, sur la notion de limite, les remarques très fines de C. et R. BERTHELOT [1983] et les importantes observations d' A.SIERPINSKA [1985, 1987] et sur la continuité simple des fonctions, la deuxième et récente thèse de HABIBA EL BOUAZZAOUI [1988] relative aux conceptions des professeurs, des élèves, des manuels et à celles qui apparaissent dans l'histoire des mathématiques. Ces travaux laissent peu de doutes: des obstacles existent bien, même si les distinguer, les reconnaître, les répertorier et examiner leur rapports et leurs causes demande encore beaucoup de discussions et des recherches.

Fondamentalement cognitifs, les obstacles semblent pouvoir être **ONTOGENIQUES, ÉPISTÉMOLOGIQUES, DIDACTIQUES** et même **CULTURELS** selon leur origine et la façon dont ils évoluent. Peut être serait il intéressant aussi de les différencier selon la forme de contrôle de la connaissance (proto-mathématique, para-mathématique ou mathématique ?) où se produit la rupture.

3. RECHERCHE D'UN OBSTACLE ÉPISTÉMOLOGIQUES: APPROCHE HISTORIQUE.

3.1. L'histoire des nombres est riche en exemples d'obstacles épistémologiques:

Par exemple le mesurage hétérogène, plus adaptable aux conditions sociales et matérielles particulières a fait longtemps obstacle à l'installation d'un système décimal généralisé, et empêché jusqu'à nos jours celle d'un système métrologique universel. Beaucoup plus tard les systèmes "supposant" que l'on peut engendrer toutes les fractions avec un petit nombre d'entre elles comme on l'avait fait avec les naturels vont commander l'organisation et la dénomination des fractions jusqu'à la fin du moyen âge et feront encore obstacle aux premières tentatives de Al UQLIDISI (952) pour recourir aux décimaux (ABU-L-WAFFA, vers 961-976).

L'usage permanent des rapports dans tous les calculs de l'antiquité, qui est lié à l'emploi de la fraction-mesure fut un obstacle à la formalisation des fractions-rapports et à la conception des applications comme nombres; l'étude de leur histoire montre plus nettement les avancées comme la tentative d'EUCLIDE et les résistances et les reculs comme celles des néo pythagoriciens; ARCHIMEDE a-t-il connu les fractions archimédiennes?

Le système sexagésimal, autre manière de résoudre à la fois les problèmes algébriques, topologiques et métrologiques de façon unique, fera difficilement place aux méthodes indiennes puis arabes tout en leur servant d'appui...

3.2. Méthodes et questions

a) Le sens dans lequel la didactique entend les questions d'histoire doit être précisé. il s'agit de produire des modèles de situations qui prennent en compte toutes les conditions pertinentes de la création des savoirs (connues dans l'histoire) et de les organiser selon sa propre logique, celle qui peut être confrontée à d'autres exigences (mathématiques, psychologie, sociologie, ergonomie...), et entre autres, aux expériences de re-production de ces savoirs. Cette méthode ne change pas plus en fait la méthode historique que les expériences de techniques de taille de la pierre ne le font pour la préhistoire. Des conjectures sur ce qui arriverait si tel groupe humain pouvait utiliser tel savoir ne sont pas d'aventureuses assertions sur l'histoire effective (et sur le nez de Cléopâtre) mais une simple hypothèse de travail sur un modèle, momentanément sous le contrôle d'un autre système de connaissances. Cette méthode permet l'interrogation et la confrontation historiques et assure la filiation des hypothèses, car lorsqu'une explication est contredite, la nouvelle modélisation peut être contrainte de donner des résultats meilleurs que la précédente sur un domaine plus vaste.

b) Il s'agit donc

i) de décrire cette connaissance, de comprendre son usage,

ii) d'expliquer quels avantages il procurait par rapport aux usages antérieurs, à quelles pratiques sociales il était lié, à quelles techniques, et si possible à quelles conceptions mathématiques,

iii) de repérer ces conceptions par rapport à d'autres possibles, et notamment celles qui leur ont succédé, afin de comprendre les limitations, les difficultés et finalement les causes d'échec de cette conception mais en même temps les raisons d'un équilibre qui semble avoir duré suffisamment longtemps.

iv) d'identifier le moment et les raisons de la rupture de cet équilibre et d'examiner alors les traces d'une résistance à son rejet en l'expliquant si possible par des survivances de pratiques, de langages ou de conceptions,

v) de rechercher de possibles résurgences, des retours inopinés, sinon sous la forme initiale, du moins sous des formes voisines et d'en voir les raisons.

A coté des arguments historiques fondés sur l'études des textes, des arguments techniques et épistémologiques appuyés sur des expériences liées à des apprentissages (sous réserve des précautions déontologiques) peuvent intervenir. A l'inverse, les arguments historiques peuvent intervenir dans des choix d'enseignement sous le contrôle d'une théorie des situations didactiques.

3.3. A titre d'exemple, pour illustrer nos propos, prenons une connaissance fossile et examinons sa candidature comme obstacle épistémologique: L'usage exclusif des quantièmes pour exprimer les fractions dans l'Egypte ancienne. Certes cet exemple manque d'intérêt didactique car les conditions "écologiques" qui lui ont permis d'exister ont vraisemblablement complètement disparu, mais il ne s'agit ici que d'un exercice.

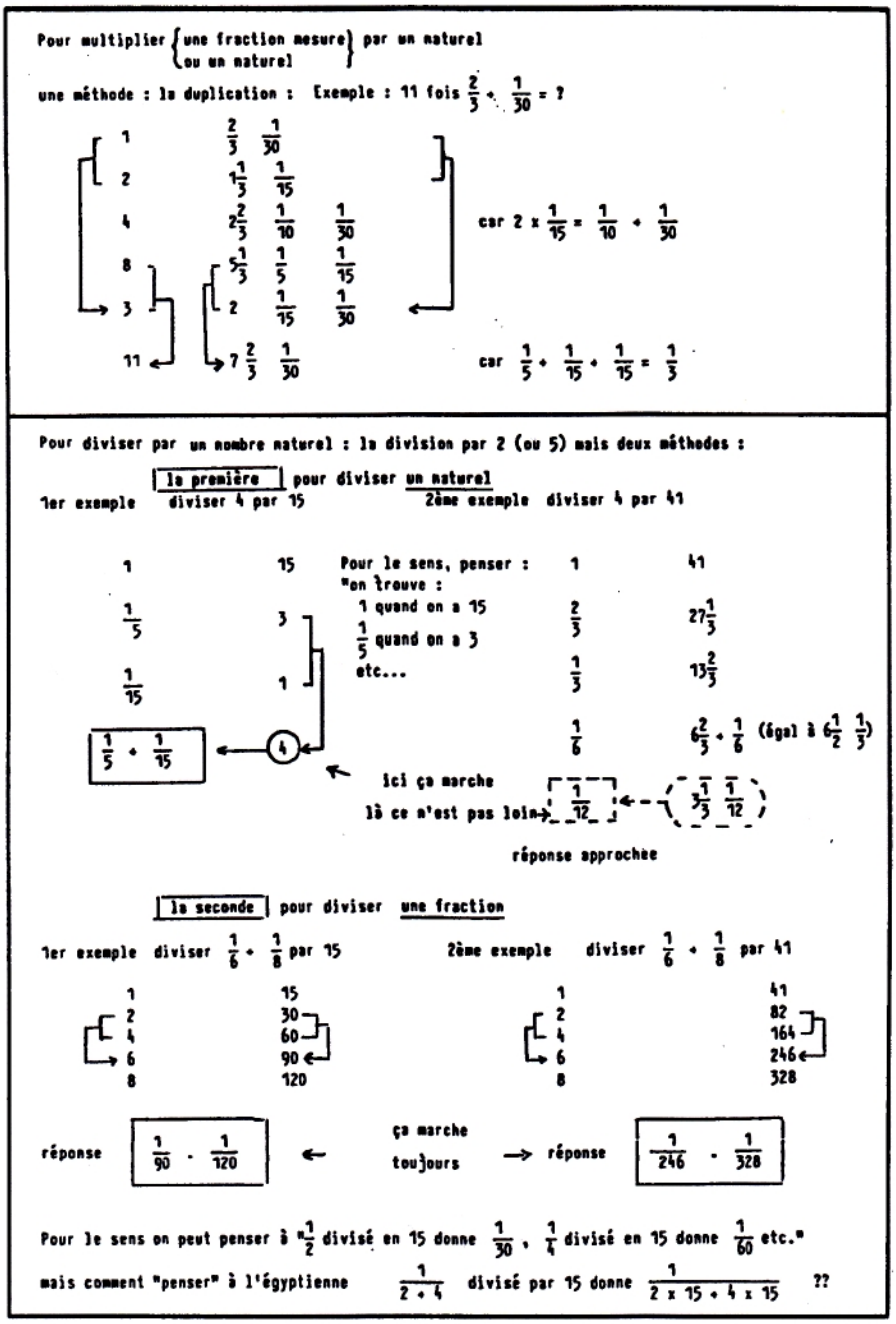
a) identification des connaissances: Pour exprimer les mesures le scribe égyptien utilise les naturels et des sommes de fractions dont le numérateur est 1, le dénominateur étant quelconque, il calcule sur ces nombres seulement par duplication et division par deux de sorte que leurs rapports - implicites - apparaissent comme sommes des puissances de deux.(voir le tableau 1)

Il apparaît que si certaines techniques et conceptions sont un apport interne au milieu des scribes il en est d'autres qui doivent s'appuyer sur les pratiques que les calculs sont chargés d'accompagner. De plus il est vraisemblable que le résultat du scribe est l'objet d'un certain contrôle de la part de ses administrés; contrôle qui s'effectue dans le système populaire. Il est donc important de connaître quelles sont les manipulations matérielles nécessitées par ces activités sociales et comment elles varient, par exemple selon les quantités dont il s'agit. Le scribe utilise ces calculs aussi bien pour des inventaires de récoltes, que pour des partages de ressources en particulier des partages proportionnels, et surtout des échanges dans une civilisation sans monnaie.

Remarque: Les historiens se sont trop souvent contentés de demander à des mathématiciens d'interpréter les calculs observés et au mieux les raisonnements qui pourraient les soutenir. Les techniques de calcul sont intéressantes, mais elles n'expliqueraient pas très bien d'éventuelles survivances car elles sont réservées à une caste qui a disparu avec les conditions économiques (absence de monnaie) sociales et politiques (centralisation) qui la justifiaient. La liberté, pour les scribes, de modifier leur système de calcul et de prévision s'exerce d'ailleurs à l'intérieur des bornes étroites fixées par la compatibilité avec le fonctionnement social de leur caste. Toutes les inventions mathématiques qu'ils ont produites sont restées localisées, comme par exemple le début d'écriture archimédienne pour les grands nombres. Le fonctionnement des connaissances doit donc être replacé dans son contexte social économique et technique en relation avec les pratiques de références qui les supportent.

47

Tableau 1



Du point de vue conceptuel, la restriction des fractions aux quantièmes permet de faire des raisonnements similaires à ceux utilisés pour les naturels: dans les calculs, le raisonnement sur les nombres de parts, est symétrique de celui sur la valeur d'une part; ainsi la barre sur un nombre pour indiquer le quantième pourrait ne pas marquer l'absence d'un quelconque numérateur. De plus les quantièmes se prêtent mieux aux partages proportionnels auxquels se livrent constamment le scribe. De toute manière, la conception des fractions antiques ne passe pas directement au fractionnement de l'unité comme notre culture actuelle pourrait nous incliner à le supposer, mais par la commensuration, bien mieux adaptée aux maniement des multiples. Justement les quantièmes pourraient montrer le passage de la décomposition des multiples en somme des puissances de deux à une conception plus globale.

Tableau 2

Pour diviser un nombre naturel par un autre on effectue successivement les deux méthodes.
D'abord, la première jusqu'à obtenir un "reste" inférieur à un, c'est-à-dire un nombre à droite, inférieur au dividende.

Par exemple 2 : 41

<u>première étape</u>

1	41	
$\frac{2}{3}$	$27\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$13\frac{2}{3}$	
$\frac{1}{6}$	$6\frac{2}{3}\ \frac{1}{6}$	
$\frac{1}{12}$	$3\ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{12}$	
$\frac{1}{24}$	$1\ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{24}$	inférieur à 2 or $2 - (1\frac{2}{3} + \frac{1}{24}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$

<u>Deuxième étape</u>

1	41	
2	82	
4	164	
6	246	
8	328	réponse $1\ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{24}\ \ \frac{1}{246}\ \ \frac{1}{328}$

La réponse exacte peut être toujours obtenue

c) Il est clair que cette construction ne permet pas de concevoir qu'il puisse y avoir "deux" neuvièmes, et plus généralement, elle ne permet pas la somme de deux quantièmes (en tant que quantième). En particulier, la reïtération qui figure bien la somme dans les naturels ne correspond à aucune opération simple: si l'on prend successivement 1/9 puis 1/9 (de ce qui reste) on n'obtient évidemment pas 2/9 mais 17/81. Au contraire, la réitération vraie figure bien le produit (par exemple prendre les 1/5 de 1/4) et donne un résultat interne. Les fractions plus grandes que l'unité n'ont pas de sens possible ...

d) Ce système permet en principe de conserver l'unicité de l'écriture et donne une certaine rapidité de décroissance des restes autorisant les approximations et les comparaisons. En fait les scribes ne peuvent pas optimiser leur méthode et n'obtiennent cette unicité que par la tradition en s'appuyant sur une grande dextérité dans le calcul et une familiarité sans égale avec ce type de fractions . L'acceptation des numérateurs quelconques aurait fait perdre cette "unicité" de l'écriture.

Le système polynomial babylonien propose une solution universelle où les naturels et les fractions s'écrivent avec les mêmes signes. Cette invention n'est possible qu'au prix d'une base énorme (60) qui dispense d'indiquer l'unité de mesure puisque une erreur de 1 à 60 est impensable pour toute personne qui connaît la pratique de référence, ce qui a pu faire croire à un usage des fractions scalaires (une erreur de un à dix est souvent possible). L'écriture des fractions simples et de leurs sommes est simplifiée mais les calculs sur les naturels s'en trouvent plus compliqués et il faut, recourir à des tables. L'écriture de tous les inverses reste non résolue, mais la conception de la fraction à numérateur supérieur à 1 est en route...sans qu'on puisse pour autant dire qu'un système "remplace" l'autre.

e) Le système des quantièmes fait-il obstacle? Les procédés égyptiens ne seront abandonnés par les astronomes grecs qu'au II'ème siècle av. J.C. et nous en retrouverons des traces jusqu'au XII**eme** siècle dans la civilisation arabe, chez les fonctionnaires, les arpenteurs, les commerçants... Comment formuler en termes d'opérations modernes des tables comme celle de la figure 3.

Cet exemple montre qu'un obstacle n'est fait ni de maladresses ni d'explications réellement "fausses", Il est une adaptation légitime à des conditions précises, et il laisse des traces dans la culture. Nous ne savons pas encore caractériser les obstacles dans un métalangage spécifique comme l'a fait BACHELARD.

4. RECHERCHE D'UN OBSTACLE A PARTIR DES SITUATIONS SCOLAIRES: UN OBSTACLE ACTUEL INATTENDU, LES NATURELS.

Les naturels fonctionnent-ils comme un obstacle à la conception des rationnels et des décimaux?

4.1. Une erreur comme "0x3=3" que l'on rencontre très fréquemment, peut s'expliquer, d'abord, par le fait que cette erreur, si elle se produit, ne sera jamais corrigée au cours de l'exécution d'une opération, à l'encontre de "3x0=0". Elle ne peut en effet donner lieu à des erreurs puisqu'au lieu d'avoir à l'envisager, l'élève décale simplement un produit partiel. Cela n'explique pas pourquoi elle se produit. Il est possible d'incriminer la conception de référence de la multiplication:

- 3x0 : prendre 3 fois 0, se comprend bien comme 0+0+0=0
- mais pour 0x3 il s'agit de prendre 0 fois une quantité de trois :il faut bien que cette quantité "existe", et donc elle reste présente bien qu'on ne veuille pas la prendre.

Le raisonnement est l'inverse de celui que décrit J. ROGALSKI (1979) : un élève compte le nombre de lignes et de colonnes d'un rectangle. Lorsqu'il a compté le nombre de lignes en utilisant les carrés de la première colonne, il compte les colonnes en omettant la première, "parce qu'il a déjà compté le carré du coin". La conception fautive est elle la même? Si oui, elle concernerait alors la définition implicite de ce qu'est "0 fois". Mais s'agit il du scalaire naturel? du rapport naturel? de l'application naturelle? ou d'une conception nécessitant une structure plus riche comme les décimaux? La réponse à ces questions dépend des connaissances de l'élève capables de corriger cette erreur. Diverses preuves peuvent être proposées pour convaincre un élève. Par exemple:

- Aucune ne peut être fondée sur la considération des rapports: pas de rapport de 0 à 1.
- 0 fois trois, c'est moins de une fois trois, le résultat c'est donc moins de trois. Ou bien $1 x 3 = 3$;
$1/2 x 3 =$ 1,5; $1/10 x 3 = 0,3$; 1/1000x3=0,003 ...
- 0 c'est 1 - 1, 0 fois c'est une fois, moins une fois, 0 fois trois, c'est donc une fois trois, moins une fois trois. Ou bien plus formellement:
0x3 = (4-4)x3 = (4x3)-(4x3) = 12-12 = 0.
- $0 x 3 = 3 x 0 = 0$
etc.

Aucune ne transforme directement la conception erronée, aucune n'empêche à elle seule le retour inopiné de cette erreur.

Nous avons donc un candidat-obstacle et la difficulté consiste à identifier la conception qui lui correspond. Nous pouvons la restreindre à cette simple représentation locale ou la rattacher à toute la structure mathématique qui la sous tend, ici, les naturels. Ce problème à été maintes fois signalé comme fondamental en didactique: nous possédons plus de moyens expérimentaux de distinguer et séparer des conceptions que de les regrouper. Il parait raisonnable de ne pas s'en tenir à une décision arbitraire et de choisir la structure la plus restreinte qui explique l'erreur. Mais, si d'autres erreurs sont liées à des conditions voisines, n'est il pas aussi raisonnable d'agrandir la conception supposée faire obstacle afin d'obtenir un modèle commun? Ainsi, on peut être tenté de rapprocher cette difficulté de celle qui fait dire à l'élève que multiplier agrandit, ou qui l'empêche d'envisager le produit de 0,35 par 0,84.

Une méthode est nécessaire: En poursuivant dans la direction indiquée (R.R.H. 1981, E.B.H. 1988, B.G. 1987) il est possible:

- d'établir une situation "fondamentale" correspondant à la connaissance en cause,
- de chercher les variables didactiques et les différentes conceptions qu'elles engendrent - en particulier celle que l'on suppose suffisante pour expliquer l'erreur-
- puis d'identifier des groupes d'élèves qui "séparent" ces conceptions à l'aide d'analyses factorielles ou à l'aide d'analyses statistiques plus classiques. S'il n'y a pas de discrimination nette, il n'y a pas lieu de considérer les conceptions comme distinctes.

Dans ces conditions, la première difficulté signalée ci dessus, n'appartient pas au même obstacle que les deux autres.

4.2. Mais examinons le problème du point de vue théorique: "comprendre" pour un enfant, c'est établir et relier sous sa propre responsabilité des phénomènes ou des faits laissés "indépendants", à la fois, par l'enseignant, par la situation, par son langage et par les connaissances apprises.

Par exemple, un enfant peut comprendre les premiers mesurages à l'aide du comptage, appréhender des propriétés de l'ordre à l'aide du mesurage, contrôler des opérations à l'aide de l'ordre ("ça" grandit donc il ne faut pas diviser") ou d'une autre opération (multiplier c'est ajouter un certain nombre de fois), comprendre le comptage grâce à des opérations ou à la recherche de successeurs .... et toutes les relations possibles, vraies dans N, sont bonnes pour donner du sens.

Ces connaissances, liées par l'élève personnellement, ou grâce à l'histoire de la classe, ne sont pas toutes institutionnalisées par l'activité de l'enseignant, mais certaines le sont certainement, et à juste titre dans le contexte. Elles sont, en tout cas, indispensables au fonctionnement convenable des connaissances institutionnalisées, enseignées par le professeur.

4.3. Pour l'élève, ces propriétés sont celles des nombres en général, de tous les nombres. Il est compréhensible que ce que les mathématiciens appellent le plongement de N dans un sur-ensemble, fasse disparaître certaines de ces propriétés qui ne sont plus vraies pour tous les nombres, ou même qui ne sont plus vraies pour aucun.

L'élève n'est pas averti de cette rupture, car, ni la culture, et en particulier la tradition, ni l'ingénierie didactique n'ont encore produit les instruments nécessaires (exercices, avertissements, concepts, remarques, paradoxes ...). Il commet donc des erreurs, et comme elles sont attachées à une certaine manière de comprendre les propriétés des nombres, ces conceptions fausses persistent et on peut observer les effets de la rupture pendant de nombreuses années.

Plus important encore est le mécanisme de cet obstacle: Ce sont, non pas les connaissances enseignées qui sont en défaut - en général les enseignants pourvoient à cet inconvénient - ce sont les instruments personnels de la compréhension de l'élève. Il ne comprend plus parce que ce qui doit être changé, ce sont justement les moyens de ce qu'il appelait "comprendre" jusque là .

4.4. Nous avons bien avec N toutes les caractéristiques que nous nous sommes imposées pour reconnaître un obstacle. Celui ci est évidemment incontournable. Faut il conserver le terme d'obstacle épistémologique à une connaissance de cette sorte?

Faut-il donc penser que TOUTES les conceptions sont des obstacles à des acquisitions ultérieures? Bien sûr, c'est dans leur nature, nous l'avons vu. Mais très peu présentent suffisamment de difficultés suffisamment importantes et communes pour être traités comme telles.

Il est aisé toutefois de comprendre comment un sur-apprentissage précoce peut augmenter les chances de transformer un savoir nécessaire en obstacle insurmontable.

Comme il l'est dit plus haut, l'analyse des situations, dont la solution fait appel à des divisions, a conduit à en distinguer une quinzaine, qui relèvent de conceptions différentes. Les enseignants n'en distinguent qu'un très petit nombre, souvent une seule: le PARTAGE, dont ils étudient seulement deux aspects: "recherche d'une part" et "recherche du nombre de parts". Ils appellent les élèves à reconnaître tous les problèmes de division sur la base de cette unique conception, alors que l'étude avec les élèves des différentes sortes de division (recherche du reste, approche d'un rapport, etc.) ne conduit à aucune difficulté spécifique, même lors de la généralisation.

Au contraire, l'usage du modèle des naturels va produire des difficultés lors de l'étude des décimaux. Ainsi les élèves essayent de comprendre le problème en tronquant les nombres pour se ramener à un problème dans les naturels:

Par exemple, si on a payé 135,40 F pour 35,75 litres de gazole, l'élève envisage l'opération qu'il convient de faire pour trouver le prix d'un litre, en référence avec une situation où on aurait payé 135 F pour 35 1. Le procédé ne va plus s'appliquer si on achète 0,75 1 que l'on paye 0,40 F. La production de divisions par zéro (ou même par 1) ou de zéro par quelque chose pose des problèmes "résistants" et qui dépendent, cette fois, de la conception utilisée (soustractions successives ou inversion d'un produit par ex.) et de la nature des grandeurs représentées par les nombres (mesures ou scalaires). Du point de vue didactique, il faut les traiter comme un obstacle. Faut-il pour autant considérer cette difficulté comme un obstacle épistémologique? Il me semble qu'il nous manque pour l'instant beaucoup trop d'informations (en particulier sur la généralité du phénomène et sur ses incidences historiques) pour cela.

4.5. En conclusion, les erreurs observées chez les élèves comme dans les pratiques historiques peuvent être regroupées autour de conceptions très particulières ou, au contraire, très générales. L'identification des conceptions est une difficulté importante pour tous les secteurs de la didactique.

Les obstacles doivent aussi être considérés ensemble du point de vue de leurs relations. Plusieurs peuvent coexister, se contrarier et successivement se supplanter. Par exemple, les conceptions des fractions contre celles des décimaux, ou bien l'aspect "mesure" versus l'aspect "rapport" ou "application". Rejeter l'un conduit à l'autre jusqu'à la solution.

La place nous a manqué ici pour examiner le fonctionnement précis d'un obstacle. Mais une telle étude aurait mis en évidence le caractère social et culturel des obstacles, autant et même plus que leur aspect simplement psychologique et cognitif. Il faut bien remarquer, dans les exemples montrés par BACHELARD, le rôle joué par un changement de pratique, de contexte, de système de référence. Ces conditions sont aussi des caractéristiques spécifiques de la relation didactique; plus le gradient de la transposition didactique est fort, plus les environnements de la connaissance sont différents chez les deux partenaires didactiques, plus les risques de fonctionnement en obstacle sont grands.

5. LES OBSTACLES ET L'INGÉNIERIE DIDACTIQUE.

Quelles qu'en soient les origines et l'importance, l'existence d'obstacles pose à la didactique un certain nombre de problèmes d'ingénierie: Comment éviter les obstacles? doit-on le faire? peut-on les éviter tous? comment franchir ceux qui ne peuvent pas être évités?

5.1. Problèmes locaux: les leçons. Comment traiter un obstacle repéré?

Les élèves rencontrent un obstacle épistémologique: comment organiser sa reconnaissance et son "franchissement"? On ne peut plus dire sa disparition. Il n'y a pas, à mon avis, de solution standard mais ce qui précède montre bien la nécessité de mettre en oeuvre, à la fois, des situations a-didactiques de toutes sortes et des situations didactiques.

i) La nécessité des situations de validation découle de la définition des obstacles : elles sont les seules qui permettent les intégrations personnelles dans la théorie en gestation. Les situations de conflits socio-cognitifs sont de ce type. Puisque l'explicitation de l'obstacle est indispensable, des situations de formulation peuvent être utiles. Puisque les obstacles se manifestent souvent au niveau des modèles implicites et en dépit d'une connaissance convenable au niveau conscient, des situations a-didactiques d'action le sont aussi.

ii) Des situations didactiques ne sont pas moins nécessaires: l'intervention de la culture (mathématique) par l'intermédiaire du professeur est incontournable à différents moments du processus. Il s'agit, là encore, d'une différence avec les stades piagétiens.

iii) Une autre caractéristique essentielle est le caractère dialectique des négociations des obstacles épistémologiques. Les changements de cadres et de rapport à la connaissance (dial.

outil-objet), en particulier, me semblent appelés à jouer un rôle important.(R.DOUADY, 1984)

5.2. Les problèmes "stratégiques": les curriculums. Quels obstacles peuvent être évités, lesquels accepter?

i) Ignorer les obstacles conduit

- soit à enseigner parmi les connaissances "définitives", celles qui semblent pouvoir être comprises des élèves et qui doivent simplement s'ajouter aux précédentes: Le fonctionnement de ces connaissances incomplètes dans un contexte trop étroit produit des "cultures temporaires" puis des obstacles qui peuvent être plus ou moins bien surmontés par l'élève et par le professeur, mais qui provoquent de nombreuses difficultés.
- soit à enseigner les connaissances définitives sous leur forme et leur "organisation" définitive comme un langage, avec le risque d'un usage uniquement formel et dénué de sens lorsque ce langage ne peut ne pas être adapté au développement des élèves.

ii) En tenir compte implique le choix d'une genèse que l'élève peut produire lui même et qui ne laissera pas dans l'ombre les problèmes que la connaissance enseignée a résolus. Cette genèse traite certains obstacles et en ignore d'autres. Il s'agit donc de les choisir car il serait absurde de restaurer inutilement des sources de difficultés et de multiplier les fausses pistes. Malgré ces précautions, une telle genèse ne peut être que très complexe. Par exemple, il a été montré (N. et G. BROUSSEAU, 1987) qu'il était possible à des enfants de 10-11 ans d'acquérir directement une connaissance mathématique correcte des rationnels et des décimaux avec tous les aspects de leurs structures algébriques, topologiques et ordonnées et de traiter "convenablement" les principaux obstacles.

Dans le curriculum expérimental, chaque obstacle est abordé d'une façon spécifique, mais tous se manifestent pour les élèves
- d'abord de façon implicite dans les moyens de résoudre des situations
-puis comme des curiosités
-avant de devenir des objets d'études,
-puis enfin un fait banal.

Cette séquence de 65 leçons n'excède pas en durée le temps généralement consacré à l'enseignement classique des mêmes types de connaissances. Elle est toutefois très lourde par rapport à ce que les professeurs des années suivantes vont en utiliser, et totalement incommunicable à un enseignant placé dans des conditions ordinaires.

Faut il faire les frais d'un tel investissement? jusqu'à quel point?

5.3. Traitements didactiques d'obstacles.

Les Naturels forment obstacle à la conception des décimaux. Pour des raisons évidentes de proximité d'écriture et de structure, cet obstacle est plus difficile à surmonter que celui qu'ils opposent à la conception des rationnels. M.L. IZORCHE a montré comment les élèves de 15/16 ans identifient D avec D2 (ou avec D3), ensemble des décimaux tels que d.10 exp2 (ou resp. d.10 exp3) appartient à N, puis D2 (ou D3) avec N.

Cet obstacle se manifeste sous la forme de plusieurs difficultés qui peuvent être traitées séparément. La plupart sont bien connues:

– difficulté à accepter que l'on puisse obtenir un agrandissement par une division et un rapetissement par un multiplication,

– difficulté pour trouver un nombre décimal entre deux autres, pour renoncer à trouver un successeur à un décimal,

– difficulté à accepter la double écriture des décimaux (par ex 1,5 et 1,49)

- Difficulté à concevoir le produit de deux scalaires décimaux
- Difficulté à concevoir de nouveaux types de divisions...

Prenons l'exemple d'erreurs signalé plus haut où pour résoudre un problème, les élèves devinent intuitivement les opérations qu'il convient de faire en remplaçant les données décimales par des entiers naturels voisins. Ils échouent lorsque le dividende (ou même le quotient) sont tels que la réduction ne donne plus de naturel utilisable: si le décimal est inférieur à 1, ou même seulement inférieur à deux on aperçoit des confusions avec la soustraction, des inversions, des erreurs, des incapacités à comprendre le problème.

Le fait d'avoir préalablement distingué fortement les naturels et les décimaux, leurs aspects comme expression de mesures, etc. et même étudié "convenablement" (cf N.G.B cité plus haut) les multiplications par des décimaux inférieurs à 1 n'empêche nullement le phénomène de se produire.

La technique utilisée consiste à organiser un concours d'énoncés de problèmes afin d'obtenir que, dans ce cadre, les enfants recherchent eux mêmes les variables des problèmes qu'ils proposent. Il s'agit de changements qui rendent le problème infaisable ou difficile : Par exemple "3 fillettes se partagent 5m de tissu" sera transformé en "3,5 fillettes se partagent 5m de tissu". Effectivement cette situation change la position de l'élève par rapport à l'obstacle et le fait passer par les étapes décrites ci-dessus.

6. LES OBSTACLES ET LA DIDACTIQUE FONDAMENTALE.

Mais les obstacles posent aussi des problèmes de didactique plus fondamentaux.

6.1. En effet, si l'installation des connaissances mathématiques chez l'élève se produit NÉCESSAIREMENT selon le schéma d'une succession de conceptions différentes, chacune formant plus ou moins obstacle à la suivante, alors de nombreuses pratiques didactiques justifiées par le modèle classique simplement additif, sont à revoir et peut être à rejeter. Or ce modèle préside aussi aux négociations internes (dans et entre les classes) et externes (entre les professeurs et la société) du système éducatif à propos des curriculums d'enseignement.

6.2. Problèmes internes à la classe: La fonction d'une leçon n'est plus seulement d'apporter un savoir nouveau qui se juxtapose harmonieusement aux précédents et qu'il faut apprendre, mais elle est aussi de faire oublier ou même de détruire explicitement des conceptions anciennes, qui avaient leur utilité mais qui sont devenues incompatibles avec ce nouveau savoir.

Il ne s'agit pas seulement d'un problème technique: le contrat didactique est complètement différent; Sont modifiés, non seulement le diagnostic des erreurs, leur explication et la prescription qui s'ensuit mais aussi la répartition des charges et des responsabilités entre le professeur et les élèves.

Pour signaler l'ampleur et la difficulté du problème, examinons seulement à titre d'exemples deux aspects très importants du contrat, susceptibles d'être complètement transformés.

i) Comment l'enseignant peut il accepter que le résultat de son enseignement soit des connaissances de l'élève, dont il sait, non seulement qu'elles sont incomplètes, mais aussi qu'elles sont fausses, et qu'elles seront démenties par la suite? Il aura besoin pour cela d'un sérieux appui, non seulement de l'institution, mais aussi de la culture et de la société. Comment l'élève lui même peut il avoir confiance dans un contrat dont il saura tôt ou tard qu'il contient de telles clauses?

ii) L'importance de la mémoire des circonstances de l'apprentissage ne peut plus être ignorée et ne peut plus être exclue de la responsabilité de l'enseignement comme elle l'est aujourd'hui.

Ce point mérite une explication. Les obstacles épistémologiques ne résident pas dans la formulation des connaissances institutionnalisées (l'enseignement tend à communiquer un savoir propre à ce sujet) mais dans les représentations que le sujet - et éventuellement le professeur - véhicule pour assurer le fonctionnement et la compréhension des connaissances. Cette compréhension est liée aux circonstances de l'apprentissage et elle est nécessaire à la mise en oeuvre des connaissances institutionnalisées. L'élève doit donc garder la mémoire des savoirs qui lui sont enseignés mais aussi une certaine mémoire des circonstances de l'apprentissage qu'il organise à sa guise. Cette mémoire est actuellement à la charge unique de l'élève. La responsabilité du système éducatif à ce sujet, se borne à l'organisation du savoir institutionnalisé en une progression ad hoc; Elle permet de régler les questions de dépendance temporelle de telle manière qu'il est possible à certains professeurs de proposer des suites de fiches , de leçons ou d'exercices sans rien dire de leurs relations. On pourrait même envisager la succession d'enseignants différents, chacun donnant son heure de leçon sans savoir autre chose du passé de l'élève que ses acquisitions institutionnelles. Dès lors, reconnaître l'existence d'obstacles épistémologiques et vouloir les traiter "officiellement" dans le rapport didactique, conduit le professeur à reconnaître l'histoire de son élève, l'historicité de ses connaissances et de sa démarche. Cette reconnaissance l'engage donc, comme protagoniste et témoin de cette histoire, à faire appel à une mémoire didactique différente. Il doit se souvenir du contexte, des exemples, des comportements, mais surtout de leur sens qu'il fait évoluer. Une partie de ces savoirs est institutionnalisée, au moins au niveau de la classe, et il existe un petit stock d'images communes véhiculées et reconnues dans la culture. La mémoire de certains comportements personnels des élèves est indispensable. Cette reconnaissance d'un savoir en évolution et tout ce que cela implique, est nettement visible dans l'expérience sur les rationnels citée plus haut.

Il est clair que ces connaissances encore personnalisées et contextualisées ne peuvent pas être mobilisées par les élèves sans l'appui d'un témoin ayant la mémoire des conditions de l'apprentissage précédent.

6.3. Ces difficultés sont encore plus visibles et aiguës lorsqu'elles concernent les relations inter niveaux. Seule la référence à des exemples culturellement reconnus, peut remplacer la mémoire du contexte de la classe précédente; lorsque cette référence est impossible toute une partie des acquisitions en cours de l'élève sont perdues. Ignorer les acquisitions antérieures est aussi un moyen d'échapper aux débats que provoquent les reprises de savoirs anciens et donc d'ignorer les obstacles épistémologiques.

6.4. Problèmes externes. Intégrer ce nouveau modèle de la communication didactique exige une modification de l'épistémologie des professeurs. Or, celle-ci sert de base à la négociation entre les enseignants et les élèves, et, aussi, avec la noosphère et l'ensemble du public. On mesure l'ampleur des modifications culturelles et sociales qu'impliqueraient les changements dans ce domaine.

Le fait que des connaissances, mêmes "fausses, puissent être nécessaires pour servir d'appui à l'établissement du savoir définitif, est difficile à assumer et à négocier. L'idée des sur-apprentissages, des retards à l'initiation ou des déperditions dans les changements de classe, bouscule toutes les habitudes. Comment obtenir un tel contrat sans distendre encore plus le difficile, légitime et nécessaire contrôle de la société sur la communication des savoirs?

7. PROBLÈMES DE RECHERCHES.

7.1. L'ampleur de la tâche, aussi bien technique que culturelle et même sociale, paraît redoutable, et les risques aussi, car il n'est pas évident que le système éducatif pourrait tirer un bon parti d'une révélation sur son fonctionnent alors que ses systèmes habituels de contrôle ne lui ont jamais permis de le corriger. Même si notre hypothèse de la progression chaotique est exacte, il serait vraiment déraisonnable de discréditer les bases des contrats didactiques qui fonctionnent actuellement, tant bien que mal, jusqu'à ce que nous possédions les moyens d'en prévenir les inconvénients les plus graves.

7.2. Comment s'assurer suffisamment de la validité de cette hypothèse et comment ensuite en tirer les conséquences pour l'ingénierie didactique, comment enfin opérer cette mutation "culturelle" que nous évoquions plus haut?

Il s'agit d'un exercice de Didactique appliquée à toute une discipline, non plus à l'échelon d'une classe ou même à toute l'institution scolaire comme on a pu en voir avec les "mathématiques modernes", mais à l'ensemble du corps social.

7.3. Il existe de nombreuses directions de recherches. Je voudrais en suggérer au moins une: Ignorer un fait de cette importance doit avoir eu des conséquences sur l'enseignement, peut-on déjà envisager lesquelles et les rechercher?

Par exemple, ne serait-ce pas une des causes de l'opiniâtre difficulté des professeurs à ménager pour leurs élèves des passages harmonieux d'un niveau à l'autre? Et ce phénomène n'aurait-il pas été sensiblement accentué par l'obligation, pour tous les niveaux scolaires, d'avoir à se référer directement à un savoir unique et universel, de préférence à des "cultures" plus locales comme les connaissances "primaires" (spécifiques de l'enseignement primaire) ou techniques?

7.4. Nous n'avons pas examiné la question de la typologie des obstacles mais je me suis intéressé à ce que nous pourrions appeler des obstacles culturels: Il s'agit de connaissances que l'on désirerait développer chez les élèves ou dont ils auraient besoin: une bonne maîtrise de leurs relations avec l'espace ou la capacité d'énumérer des ensembles ou une pensée naturelle bien développée. Mais ces connaissances n'existent pas directement dans la culture scientifique. Celle ci propose alors une sorte de substitut, plus ou moins proche mais généralement inadéquat - même s'il est présenté sous une forme où il peut être compris - : la géométrie, la combinatoire ou la logique mathématique. Le professeur sollicite ces moyens de compréhension mais ne peut ni les "reconnaître" (leur donner un statut dans le contrat didactique), ni les améliorer. Le malentendu se poursuit, il s'agit encore d'un obstacle, mais culturel et didactique.[G.BROUSSEAU, 1984, 1988]

7.5. Nous avons insisté sur le rôle des pratiques de référence; Quelle est l'importance relative des situations a-didactiques dans la genèse et le franchissement des obstacles? La question est importante pour déterminer si les obstacles sont de nature plutôt psychologique ou psychogénétique ou au contraire plutôt culturelle De même, quelle est l'importance des mécanismes sociaux par rapport aux situations d'action, dans le fonctionnement d'un obstacle? Il est vraisemblable qu'il faudra orienter les recherches de solution selon la réponse qui pourra être apportée à ces questions.

BIBLIOGRAPHIE DE LA NOTION D'OBSTACLE
(version exhaustive)

Bachelard, G. (1934). Le nouvel esprit scientifique. Paris: PUF.
Bachelard, G. (1938). La formation de l'esprit scientifique. Paris: Vrin.
Bachelard, G. (1940). La philosophie du non. Paris: PUF.
Bachelard, G. (1949). Le rationalisme appliqué. Paris; PUF.

Bednarz, N., Janvier, B. (1986). Une étude des conceptions inappropriées développées par les enfants dans l'apprentissage de la numération au primaire. Journal européen de psychologie de l'éducation, 1(2), 17-33.

Bednarz, Garnier. (1989). L'utilisation du conflit socio-cognitif dans une pédagogie contribuant à l'élaboration des processus d'anticipation et décentration. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 334-349.

Berthelot,C., Berthelot, R. (1983). Quelques apports de la théorie des situations à l'étude de l'introduction de la notion de limite en classe 1ère A. (DEA). Publications de l'IREM de Bordeaux.
Brousseau, G. (1974). L'enseignement du calcul numérique et les stratégies dans l'enseignement. Etudes sur l'enseignement élémentaire des mathématiques. Publications de l'IREM de Bordeaux.
Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre de la C.I.E.A.E.M., Louvain la neuve, pp.101-117.
Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. Recherches en didactique des mathématiques, 2(1), 37-128.
Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques, 4(2), 165-198.
Brousseau, G. (1984). Le rôle central du contrat didactique. Communication faite au 5e. Congrès ICME d'Adélaïde.
Brousseau, G. (1986). Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Thèse de Doctorat d'Etat. Université de Bordeaux I.
Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 41-63.
Brousseau, G. (1989). Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 277-285.

Closset, J.L. (1983). D'où proviennent certaines erreurs rencontrées chez les élèves et les étudiants en électrocinétique ...? Bulletin de l'Union des Physiciens, n° 657. 81-102.

Cornu, B. (1983). Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles. Thèse de doctorat de 3e. cycle de mathématiques pures, Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

Cronbach, J. (1967). The dependability of Behavioral Measurements. New York: John Wiley & Sons.

Désautels, J. (1989). Développement conceptuel et obstacle épistémologique. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 258-267.

Douady, R. (1984). Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. Thèse de Doctorat d'État. Université de Paris VII.

Dufour-Janvier, Bednarz. (1989) Situations conflictuelles expérimentées pour faire face à quelques obstacles dans une approche constructiviste de l'arithmétique au primaire. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 315-333.

Duroux, A. (1982). La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure. Publications de l'IREM de Bordeaux.

El Bouazzaoui, H. (1988). Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction. Thèse de Doctorat, Université Laval, Québec.

Giordan, A., De Vecchi, G. (1987). Les origines du savoir: des conceptions des apprenants aux concepts scientifiques. Neuchatel, Suisse: Delachaux & Niestle.

Giordan, A. (1989). Vers un modèle didactique d'apprentissage allostérique. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 240-257.

Girotto, V. (1989). Logique mentale, obstacles dans le raisonnement naturel et schémas pragmatiques. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 195-205.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. Recherches en didactique des mathématiques, 2(3), 303-346.

Glaeser, G. (1984). A propos des obstacles épistémologiques: réponse à Guy Brousseau. Recherches en Didactique des Mathématiques, 5(2), 229-234.

Gonseth, F. (1936). Les mathématiques et la réalité: essai sur la méthode axiomatique. Paris: A. Blanchard.

Gras, R. (1979). Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques. Thèse d'État. Université de Rennes I.

Hercowicz, N

Izorche, M.L. (1977). Les réels en classe de seconde. DEA, Publications de l'IREM de Bordeaux.

Janvier, Charbonneau, de Cotret. (1989). Obstacles épistémologiques à la notion de variable: perspectives historiques. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 64-75.

Johsua, S. (1989). La perdurance des obstacles épistémologiques: un révélateur de leur nature. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 110-116.

Johsua, S. (1989). Les conditions d'évolution de conceptions d'élèves. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 306-314.

Larochelle, M., Désautels, J. (1988). A propos de la nature du savoir scientifique et de son procés: les modèles épistémologiques spontanés des adolescentes. Rapport de recherche, Ottawa, Canada, Conseil de Recherche en Sciences Humaines.

Lemoyne, Legault. (1989). Des relations additives aux relations multiplicatives: construction socio-cognitive de représentations de ces relations. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 286-305.

Martinand, J.(1989). Des objectifs-capacités aux objectifs-obstacles; deux études de cas. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 217-227.

Moscovici, S. (1989). A propos des notions d'obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 390-398.

Pluvinage, F. (1977). Difficultés des exercices scolaires en mathématiques. Thèse d'État. Université de Strasbourg.

Ratsimba-Rajohn, H. (1981). Etude de deux méthodes de mesures rationnelles: la commensuration et le fractionnement de l'unité en vue de l'élaboration de situations didactiques. Thèse de 3e. cycle. Université de Bordeaux I.

Resnick, L. (1989). Convictions ontologiques dans l'apprentissage de la physique. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 103-109.
Resnick, L. (1989). Les approches pédagogiques et les conceptions conflictuelles. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 268-276.

Rogalski, J. (1982). L'acquisition de notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (Longueur, surface). Recherche en didactique des mathématiques, 3(3).

Ruel, F. (1986). Mise en évidence de quelques obstacles épistémologiques chez les élèves de secondaire V. Thèse de maîtrise, Québec: Université Laval, édition révisée.

Saidan (1978). The arithmetic of Al Uglidisi. D. Reidel Dordrecht.

Salin, M.H. (1976). Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire. Publications de l'IREM de Bordeaux.

Schubauer-Leoni, M. (1989). Problématisation des notions d'obstacle épistémologique et de conflit socio-cognitif dans le champ pédagogique. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 350-363.

Schneider, M. (1987). Les obstacles relatifs à l'apprentissage du théorème fondamental du calcul intègral. Actes de la 39e rencontre de la CIEAEM, Sherbrooke, Canada.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. Recherches en didactique des mathématiques; 6(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1985). La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques. Actes de la 37e rencontre de la CIEAEM, Leiden, Netherlands, PP. 73-95.
Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. Educational Studies in Mathematics, **18,** 371-397.
Sierpinska, A. (1989). Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 130-147.

Tiberghien, A. (1989).Phénomènes et situations matérielles: quelles interprétations pour l'élève et pour le physicien? Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 93-102.

Tiberghien, A. (1989). Difficulté dans l'apprentissage de la physique: la structuration du monde matériel en physique et dans la vie quotidienne. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 228-239.

Vergnaud, G. (1989). Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 33-40.

Vergnaud,G. (1989). L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction à l'algèbre. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 76-83.

Viennot, L. (1979). Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire. Paris: Hermann.
Viennot, L. (1989). Tendance à la réduction fonctionnelle: obstacle au savoir scientifique et objet de consensus. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 84-92.
Viennot, L. (1989). Obstacle épistémologique et raisonnements en physique: tendance au contournement des conflits chez les enseignants. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, 117-129.

' Ce texte accompagné d'une bibliographie restreinte a été publié pp 41-63, dans l'ouvrage "Construction des savoirs *Obstacles & conflits"* sous la direction de Nadine Bednarz et Catherine Garnier. Colloque international "obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif sept 88 CIRADE (Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation) (1988) CIRADE Agence d'ARC inc Ottawa 1989