Amortissement Landau

Clément Mouhot, Cédric Villani

AMORTISSEMENT LANDAU

C. MOUHOT AND C. VILLANI

Résumé. Dans cette note nous présentons les principaux résultats du récent travail [14], où le phénomène d'amortissement Landau est pour la première fois établi dans un contexte non linéaire.

Abstract. In this note we present the main results from the recent work [14], which for the first time establish Landau damping in a nonlinear context.

Mots-clés. amortissement Landau ; physique des plasmas ; astrophysique ; équation de Vlasov–Poisson.

1. Introduction

Le « modèle standard » de la physique des plasmas classique est l'équation de Vlasov–Poisson–Landau [9, 18], ici écrite avec des conditions aux limites périodiques et en unités adimensionnées :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F[f] \cdot \nabla_v f = \frac{\log \Lambda}{2\pi\Lambda}\, Q_L(f, f), \tag{1}$$

où $f = f(t, x, v)$ est la fonction de distribution des électrons ($t \geq 0$, $v \in \mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$),

$$F[f](t, x) = -\iint \nabla W(x - y)\, f(t, y, w)\, dw\, dy \tag{2}$$

est la force auto-induite, $W(x) = 1/|x|$ est le potentiel d'interaction coulombien, et Q_L est l'opérateur de collision de Landau, décrit par exemple dans [10] ou [17]. Le paramètre Λ est très grand, variant typiquement entre 10^2 et 10^{30}.

Sur de très grandes échelles de temps (disons $O(\Lambda/\log \Lambda)$), les phénomènes dissipatifs jouent un rôle non négligeable, et l'augmentation de l'entropie est supposée forcer la convergence (lente) vers une maxwellienne. Grâce aux progrès récents sur l'hypocoercivité, ce mécanisme est maintenant assez bien compris mathématiquement parlant, dès que l'on dispose d'estimations de régularité globale (voir [16] et les références incluses).

Dix ans après avoir mis au point ce scénario collisionnel, Landau [9] formulait une prédiction beaucoup plus subtile : la stabilité d'un équilibre homogène vérifiant certaines conditions — par exemple fonction radiale de la vitesse v, mais pas forcément gaussienne — sur des échelles de temps beaucoup plus courtes (disons $O(1)$), par le jeu de mécanismes purement conservatifs. Ce phénomène, appelé **amortissement Landau**, est une propriété de l'équation (non collisionnelle !) de Vlasov, obtenue en posant $\Lambda = \infty$ dans (1). La découverte de Landau fut jugée "stupéfiante" par ses contemporains ; c'est maintenant l'une des bases théorique de la physique classique des plasmas (parmi un très grand nombre de références citons [1, 10]). Des effets d'amortissement similaires ont été prédits en astrophysique [11], mais aussi dans d'autres domaines de la physique.

L'amortissement Landau est compris depuis longtemps au niveau de l'équation linéarisée [2, 4, 6, 7, 13, 15]. Cependant, il y a déjà cinquante ans de cela, dans le premier volume du *Journal of Mathematical Physics*, Backus [2] notait que l'échelle de temps de la linéarisation est parfois bien plus courte que l'échelle de temps de l'amortissement Landau, et exprimait des doutes sur la pertinence de l'approche par linéarisation. Son objection n'a jamais été réfutée, car les difficultées conceptuelles et techniques associées à l'équation non linéaire ont sévèrement limité les résultats obtenus dans ce cadre : dans [3, 8] on prouve seulement l'existence de *certaines* solutions amorties.

Nous comblons cette lacune dans un travail récent [14], dont nous décrivons maintenant le résultat principal.

2. Résultat principal

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$, on note, pour $k \in \mathbb{Z}^d$, $\eta \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{f}(k,v) = \int_{\mathbb{T}^d} f(x,v)\, e^{-2i\pi k\cdot x}\, dx, \qquad \widetilde{f}(k,\eta) = \iint_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^d} f(x,v)\, e^{-2i\pi k\cdot x}\, e^{-2i\pi \eta\cdot v}\, dv\, dx.$$

On pose en outre

$$\|f\|_{\lambda,\mu,\beta} = \sup_{k,\eta}\Big(|\widetilde{f}(k,\eta)|\, e^{2\pi\lambda|\eta|}\, e^{2\pi\mu|k|}\Big) + \iint_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^d} |f(x,v)|\, e^{2\pi\beta|v|}\, dv\, dx. \tag{3}$$

Théorème 1 (amortissement Landau non linéaire pour interactions générales)**.** *Soient $d \geq 1$, et $f^0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ un profil de vitesses analytique. Soit $W : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ un potentiel d'interaction. Pour $k \in \mathbb{Z}^d$, $\xi \in \mathbb{C}$, on pose*

$$\mathcal{L}(k,\xi) = -4\pi^2\, \widehat{W}(k) \int_0^\infty e^{2\pi|k|\xi^* t}\, |\widetilde{f}^0(kt)|\, |k|^2\, t\, dt.$$

On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ *tel que*

$$\sup_{\eta\in\mathbb{R}^d} |\widetilde{f}^0(\eta)|\, e^{2\pi\lambda|\eta|} \le C_0, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^d} \frac{\lambda^n}{n!} \|\nabla_v^n f^0\|_{L^1(dv)} \le C_0, \tag{4}$$

$$\inf_{k\in\mathbb{Z}^d} \inf_{0\le\Re\,\xi<\lambda} \big|\mathcal{L}(k,\xi) - 1\big| \ge \kappa > 0, \tag{5}$$

$$\exists\,\gamma \ge 1;\ \forall\, k \in \mathbb{Z}^d; \qquad |\widehat{W}(k)| \le \frac{C_W}{|k|^{1+\gamma}}. \tag{6}$$

Alors dès que $0 < \lambda' < \lambda$, $0 < \mu' < \mu$, $\beta > 0$, $r \in \mathbb{N}$, *il existe* $\varepsilon > 0$ *et* $C > 0$, *dépendant seulement de* $d, \gamma, \lambda, \lambda', \mu, \mu', C_0, \kappa, C_W, \beta, r$ *tels que, si* $f_i \ge 0$ *vérifie*

$$\delta := \|f_i - f^0\|_{\lambda,\mu,\beta} \le \varepsilon, \tag{7}$$

alors l'unique solution de l'équation de Vlasov non linéaire

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f + F[f]\cdot\nabla_v f = 0, \qquad F[f](t,x) = -\int \nabla W(x-y)\, f(t,y,w)\, dw\, dy, \tag{8}$$

définie pour tous les temps et telle que $f(0,\,\cdot\,) = f_i$, *vérifie*

$$\big\|\rho(t,\,\cdot\,) - \rho_\infty\big\|_{C^r(\mathbb{T}^d)} \le C\,\delta\, e^{-2\pi\lambda'|t|}, \tag{9}$$

où $\rho(t,x) = \int f(t,x,v)\, dv$, $\rho_\infty = \iint f_i(x,v)\, dv\, dx$. *En outre il existe des profils analytiques* $f_{+\infty}(v)$, $f_{-\infty}(v)$ *tels que*

$$f(t,\,\cdot\,) \xrightarrow{t\to\pm\infty} f_{\pm\infty} \qquad \textit{faiblement}$$

$$\int f(t,x,\,\cdot\,)\, dx \xrightarrow{t\to\pm\infty} f_{\pm\infty} \qquad \textit{fortement (dans } C^r(\mathbb{R}^d_v)\textit{)},$$

ces convergences étant également en $O(\delta\, e^{-2\pi\lambda'|t|})$.

Ce théorème, entièrement constructif, est presque optimal comme le montrent les commentaires qui suivent.

Commentaires sur les hypothèses : Les conditions aux limites périodiques sont bien sûr contestables ; cependant, au vu des contre-exemples de Glassey et Schaeffer [5], un mécanisme de confinement — ou tout au moins de limitation des longueurs d'onde spatiales — est indispensable. La condition (4) exprime quantitativement l'analyticité du profil f^0, sans laquelle on ne peut espérer avoir de convergence exponentielle. L'inégalité (5) est une condition de stabilité linéaire, essentiellement optimale, qui couvre les cas physiquement intéressants : l'interaction de Newton aux longueurs d'onde inférieures à la longueur d'instabilité de Jeans, et l'interaction coulombienne pour toutes les longueurs d'ondes autour de profils f^0 radialement symétriques en dimension supérieure ou égale à 3. La condition (6) en revanche n'intervient que dans la stabilité non linéaire, elle inclue les interactions de Coulomb ou Newton dans le cas limite $\gamma = 1$. Quant à la condition (7), son caractère perturbatif est naturel au vu des spéculations théoriques et des études numériques sur le sujet.

Commentaires sur les conclusions

(1) La convergence en temps grand est basée sur un mécanisme réversible, purement déterministe, sans fonctionnelle de Lyapunov ni interprétation variationnelle. Les profils asymptotiques $f_{\pm\infty}$ gardent d'ailleurs la mémoire de la donnée initiale et de l'interaction. Cette convergence « sans raison d'être » n'était pas vraiment attendue, puisque la théorie quasilinéaire de l'amortissement Landau [1, Vol. II, Section 9.1.2] ne prédit la convergence qu'après une prise de moyenne sur des ensembles statistiques.

(2) On peut interpréter ce résultat dans l'esprit du théorème KAM : pour l'équation de Vlasov linéaire, la convergence est forcée par une infinité de lois de conservation qui rendent le modèle « complètement intégrable » ; dès que l'on ajoute un couplage non linéaire, les lois de conservation disparaissent mais la convergence demeure.

(3) Étant donné un équilibre stable f^0, un voisinage entier — en topologie analytique — de f^0 est rempli par des trajectoires homoclines ou (en général) hétéroclines. C'est la dimension infinie qui permet ce comportement remarquable de l'équation de Vlasov non linéaire.

(4) La convergence en temps grand de la fonction de distribution n'a lieu qu'au sens faible ; les normes des dérivées en vitesse croissent très vite en temps grand, ce qui traduit une filamentation dans l'espace des phases, et un transfert d'énergie (ou d'information) des basses vers les hautes fréquences (« turbulence faible »).

(5) C'est ce mécanisme de transfert d'information aux petites échelles qui permet de réconcilier la réversibilité de l'équation de Vlasov–Poisson avec l'apparente irréversibilité de l'amortissement Landau. Notons que le mécanisme « dual » de transfert d'énergie vers les grandes échelles, aussi appelé *radiation*, a été largement étudié dans le cadre des systèmes hamiltoniens de dimension infinie.

On trouvera davantage de commentaires, aussi bien mathématiques que physiques, dans [14].

3. Stabilité linéaire

La stabilité linéaire est la première étape de notre étude ; elle ne demande qu'un investissement technique assez réduit.

Linéarisée autour d'un équilibre homogène $f^0(v)$, l'équation de Vlasov devient

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h - (\nabla W * \rho) \cdot \nabla_v f^0 = 0, \qquad \rho = \int h\, dv. \tag{10}$$

Il est bien connu que cette équation se découple en une infinité d'équations indépendantes régissant l'évolution des modes de ρ : pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$ et tout $t \geq 0$,

$$\widehat{\rho}(t,k) - \int_0^t K^0(t-\tau,k)\, \widehat{\rho}(\tau,k)\, d\tau = \widetilde{h}_i(k,kt), \tag{11}$$

où h_i est la donnée initiale, et K^0 un noyau intégral qui dépend de f^0 :

$$K^0(t,k) = -4\pi^2\, \widehat{W}(k)\, \widetilde{f}^0(kt)\, |k|^2\, t. \tag{12}$$

On déduit alors de résultats classiques sur les équations de Volterra que pour tout $k \neq 0$ la décroissance de $\widehat{\rho}(t,k)$ quand $t \to +\infty$ est essentiellement contrôlée par le pire de deux taux de convergence :

• le taux de convergence du terme source au membre de droite de (11), qui ne dépend que de la régularité de la donnée initiale dans la variable de vitesse ;

• $e^{-\lambda t}$, où λ est le plus grand réel positif tel que la transformée de Fourier–Laplace (dans la variable t) de K^0 ne s'approche pas de 1 dans la bande complexe $\{0 \leq \Re z \leq \lambda\}$.

Le problème consiste donc à trouver des conditions suffisantes sur f^0 pour garantir la stricte positivité de λ. Depuis Landau, cette étude est traditionnellement réalisée grâce à la formule d'inversion de la transformée de Laplace ; cependant, dans la perspective de l'étude non linéaire, nous lui préférons une approche plus élémentaire et constructive, basée sur la simple formule d'inversion de Fourier.

On montre ainsi l'amortissement Landau linéaire, sous les conditions (5) et (4), pour n'importe quelle interaction W telle que $\nabla W \in L^1(\mathbb{T}^d)$, et pour toute condition initiale analytique (sans restriction de taille dans ce contexte linéaire). On retrouve comme cas particulier tous les résultats précédemment connus sur l'amortissement Landau linéaire [4, 13, 15] ; mais on couvre également l'interaction newtonienne. En effet, la condition (5) est vérifiée dès que l'une ou l'autre des conditions suivantes est vraie :

(a) $\forall\, k \in \mathbb{Z}^d$, $\forall\, z \in \mathbb{R}$, $\widehat{W}(k) \geq 0$, $\;z\,\phi_k'(z) \leq 0$, où ϕ_k est la « marginale » de f^0 selon la direction k, définie par

$$\phi_k(z) = \int_{\frac{kz}{|k|}+k^\perp} f^0(w)\,dw, \quad z \in \mathbb{R}\ ;$$

(b) $4\pi^2 \left(\max |\widehat{W}(k)|\right) \left(\sup_{|\sigma|=1} \int_0^\infty |\widetilde{f}^0(r\sigma)|\,r\,dr\right) < 1.$

Cette dernière condition couvre l'interaction de Newton en-deçà de la longueur de Jeans. On renvoie à [14, Section 3] pour plus de détails.

4. Stabilité non linéaire

Pour traiter la stabilité non linéaire, nous commençons par introduire des **normes analytiques** « hybrides » (basées sur la taille des dérivées successives dans la variable de vitesse, et sur la taille des coefficients de Fourier dans la variable de position) et « glissantes » (la norme utilisée changera au cours du temps pour tenir compte des transferts dans l'espace des phases). Cinq indices permettent d'obtenir toute la souplesse nécessaire :

$$(13) \qquad \|f\|_{\mathcal{Z}_\tau^{\lambda,(\mu,\gamma);p}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sum_{n\in\mathbb{N}^d} e^{2\pi\mu|k|}\,(1+|k|)^\gamma\, \frac{\lambda^n}{n!} \left\| \left(\nabla_v + 2i\pi\tau k\right)^n \widehat{f}(k,v)\right\|_{L^p(dv)}.$$

(Par défaut $\gamma = 0$.) Un théorème fastidieux d'injection « à la Sobolev » compare ces normes à d'autres plus traditionnelles, telles que les normes $\|f\|_{\lambda,\mu,\beta}$ de (3).

Les normes $\mathcal{Z}$ possèdent des propriétés remarquables vis-à-vis de la composition et du produit. Le paramètre τ permet de compenser, dans une certaine mesure, la filamentation. Enfin le caractère hybride est bien adapté à la géométrie du problème. Si f ne dépend que de x, la norme (13) coïncide avec la norme d'algbère $\mathcal{F}^{\lambda\tau+\mu,\gamma}$ définie par

$$(14) \qquad \|f\|_{\mathcal{F}^{\lambda\tau+\mu,\gamma}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(k)|\, e^{2\pi(\lambda\tau+\mu)|k|}\,(1+|k|)^\gamma.$$

(Nous utilisons également la version « homogène » $\dot{\mathcal{F}}^{\lambda\tau+\mu,\gamma}$ lorsque l'on n'inclut le mode $k = 0$ dans la somme.)

L'équation de Vlasov est résolue par un **schéma de Newton** dont la première étape est la solution du linéarisé autour de f^0 :

$$f^n = f^0 + h^1 + \ldots + h^n,$$

$$\begin{cases} \partial_t h^1 + v \cdot \nabla_x h^1 + F[h^1] \cdot \nabla_v f^0 = 0 \\ h^1(0,\,\cdot\,) = f_i - f^0 \end{cases}$$

$$n \geq 1, \quad \begin{cases} \partial_t h^{n+1} + v \cdot \nabla_x h^{n+1} + F[f^n] \cdot \nabla_v h^{n+1} + F[h^{n+1}] \cdot \nabla_v f^n = -F[h^n] \cdot \nabla_v h^n \\ h^{n+1}(0,\,\cdot\,) = 0. \end{cases}$$

Dans un premier temps, on établit la régularité analytique en temps petit des $h^n(\tau,\,\cdot\,)$ en norme $\mathcal{Z}_\tau^{\lambda,(\mu,\gamma);1}$; cette étape, dans l'esprit d'un théorème de Cauchy–Kowalevskaya, est réalisée grâce à l'identité

$$\frac{d}{dt}^+\bigg|_{t=\tau} \|f\|_{\mathcal{Z}_\tau^{\lambda(t),\mu(t);p}} \leq -\frac{K}{1+\tau}\,\|\nabla f\|_{\mathcal{Z}_\tau^{\lambda(\tau),\mu(\tau);p}}, \tag{15}$$

où $\lambda(t) = \lambda - Kt$, $\mu(t) = \mu - Kt$.

Dans un deuxième temps, on établit des estimations uniformes en temps sur chaque h^n, cette fois par une méthode partiellement eulérienne et partiellement lagrangienne, en intégrant l'équation le long des caractéristiques $(X^n_{\tau,t}, V^n_{\tau,t})$ crées par la force $F[f^n]$. (Ici τ est le temps initial, t le temps courant, (x,v) les conditions initiales, (X^n, V^n) l'état courant.) La régularité de ces caractéristiques est exprimée par des contrôles en norme hybride sur les opérateurs $\Omega^n_{t,\tau}(x,v) = (X^n_{t,\tau}, V^n_{t,\tau})(x+v(t-\tau), v)$, qui comparent la dynamique perturbée à la dynamique libre, informellement appelés **opérateurs de scattering** (en temps fini).

On propage alors un certain nombre d'estimations à travers le schéma, les plus importantes étant (en simplifiant légèrement)

$$\sup_{\tau\geq 0} \left\| \int_{\mathbb{R}^d} h^n\big(\tau,\,\cdot\,,v\big)\,dv \right\|_{\mathcal{F}^{\lambda_n\tau+\mu_n}} \leq \delta_n, \tag{16}$$

$$\sup_{t\geq\tau\geq 0} \left\| h^n\big(\tau, \Omega^n_{t,\tau}\big) \right\|_{\mathcal{Z}^{\lambda_n(1+b),\mu_n;1}_{\tau-\frac{bt}{1+b}}} \leq \delta_n, \qquad b = b(t) = \frac{B}{1+t} \tag{17}$$

$$\left\| \Omega^n_{t,\tau} - \mathrm{Id} \right\|_{\mathcal{Z}^{\lambda_n(1+b),(\mu_n,\gamma);\infty}_{\tau-\frac{bt}{1+b}}} \leq C \left(\sum_{k=1}^n \frac{\delta_k\, e^{-2\pi(\lambda_k-\lambda_{n+1})\tau}}{2\pi(\lambda_k-\lambda_{n+1})^2} \right) \min\{t-\tau\,;\,1\}. \tag{18}$$

On note, dans (16), l'augmentation linéaire de la régularité de la densité spatiale, qui fait contrepoids à la détérioration de régularité dans la variable de vitesse. Dans (17), le léger décalage des indices par la fonction $b(t)$ sera crucial pour absorber les termes d'erreur provenant de la composition ; la constante B est elle-même choisie en fonction des estimations en temps petit réalisées précédemment. Enfin, dans (18), remarquons le contrôle uniforme en t, et l'amélioration des estimées dans les deux régimes asymptotiques $t \to \tau$ et $\tau \to \infty$; ceci également est important pour la gestion des termes d'erreur. Les constantes λ_n et μ_n décroissent à chaque étape du schéma, convergeant — pas trop rapidement — vers des limites λ_∞, μ_∞ positives ; dans le même temps, les constantes δ_n convergent extrêmement vite vers 0, ce qui garantit « par rétroaction » l'uniformité des constantes du membre de droite de (18).

Les estimations (18) sont obtenues par des applications répétées de théorèmes de point fixe en normes analytiques. Un autre ingrédient essentiel pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$ est le mécanisme d'**extorsion de régularité**, que nous allons décrire dans une version simplifiée. Étant données deux fonctions de distribution f et $\overline{f}$, dépendant de t, x, v, définissons

$$\sigma(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \big(F[f] \cdot \nabla_v \overline{f}\big)\big(\tau, x - v(t-\tau), v\big)\, dv\, d\tau.$$

L'interprétation de σ est comme suit : si les particules distribuées selon f exercent une force sur des particules distribuées selon $\overline{f}$, alors σ est la variation de densité $\int f\, dv$ causée par la réaction de $\overline{f}$ sur f. Nous montrons que si $\overline{f}$ a une régularité glissante élevée, alors la régularité de σ en temps grand est meilleure que ce que l'on attendrait :

$$\|\sigma(t,\,\cdot\,)\|_{\dot{\mathcal{F}}^{\lambda t + \mu}} \le \int_0^t K(t,\tau)\, \big\| F\big[f(\tau,\,\cdot\,)\big]\big\|_{\mathcal{F}^{\lambda\tau+\mu,\gamma}}\, d\tau, \tag{19}$$

où

$$K(t,\tau) = \left[\sup_{0\le s\le t} \left(\frac{\big\|\nabla_v \overline{f}(s,\,\cdot\,)\big\|_{\mathcal{Z}_s^{\overline{\lambda},\overline{\mu};1}}}{1+s}\right)\right] (1+\tau) \sup_{k\neq 0,\ \ell\neq 0} \frac{e^{-2\pi(\overline{\lambda}-\lambda)|k(t-\tau)+\ell\tau|}\, e^{-2\pi(\overline{\mu}-\mu)|\ell|}}{1+|k-\ell|^\gamma}.$$

Le noyau $K(t,\tau)$ est d'intégrale $O(t)$ quand $t \to \infty$, ce qui laisse craindre une instabilité violente ; mais au fur et à mesure que t augmente, il est également de plus en plus concentré sur des temps discrets $\tau = kt/(k-\ell)$; c'est la manifestation des **échos plasmas**, découverts et observés expérimentalement dans les années soixante [12]. Le rôle stabilisant du phénomène d'écho, en relation avec l'amortissement Landau, est mis à jour dans notre étude. Le mécanisme d'extorsion de régularité éclaire d'un jour nouveau l'interprétation qualitative populaire de l'amortissement Landau comme un transfert d'énergie d'onde vers particule.

On analyse alors la réponse non linéaire due aux échos. Lorsque $\gamma > 11$ on peut montrer que cette réponse est sous-exponentielle, de sorte que l'on peut la contrôler par une très légère perte de régularité glissante, au prix d'une constante gigantesque, qui sera plus tard absorbée par la convergence ultrarapide du schéma de Newton.

Finalement, une partie de la regularité de $\overline{f}$ aura été convertie en décroissance en temps long.

Lorsque $\gamma = 1$, des estimations plus fines sont nécessaires. Pour pouvoir traiter ce cas, nous étudions la réponse non linéaire mode par mode, c'est-à-dire en estimant $\widehat{\rho}(t,k)$ pour tous les k, *via* un système infini d'inégalités. Cela permet de tirer avantage du fait que les échoes qui se produisent à des fréquences différentes sont asymptotiquement plutôt bien séparés. Par exemple en dimension 1, l'écho dominant au temps t et à la fréquence k correspond à $\tau = kt/(k+1)$.

En pratique, les trajectoires rectilignes dans (19) doivent être remplacées par les caractéristiques (ceci traduit le fait que $\overline{f}$ exerce aussi une force sur f), ce qui est source de difficultés techniques considérables. Parmi les moyens mis en oeuvre pour les surmonter, mentionnons un deuxième mécanisme d'extorsion de régularité, en temps court et proche dans l'esprit des lemmes de moyenne ; en voici une version simplifiée :

$$\|\sigma(t,\,\cdot\,)\|_{\dot{\mathcal{F}}^{\lambda t+\mu}} \le \int_0^t \big\|F\big[f(\tau,\,\cdot\,)\big]\big\|_{\mathcal{F}^{\lambda[\tau-b(t-\tau)]+\mu,\gamma}} \,\big\|\nabla f(\tau,\,\cdot\,)\big\|_{\mathcal{Z}^{\lambda(1+b),(\mu,0);1}_{\tau-bt/(1+b)}}\, d\tau. \tag{20}$$

On voit dans (20) que la régularité de σ est meilleure que celle de $F[f]$, avec un gain qui dégénère en temps grand et lorsque $\tau \to t$. $\square$

Références

[1] Akhiezer, A., Akhiezer, I., Polovin, R., Sitenko, A., and Stepanov, K. *Plasma electrodynamics. Vol. I : Linear theory, Vol. II : Non-linear theory and fluctuations.* Pergamon Press, 1975 (Enlglish Edition). Translated by D. ter Haar.

[2] Backus, G. Linearized plasma oscillations in arbitrary electron distributions. *J. Math. Phys. 1* (1960), 178–191, 559.

[3] Caglioti, E., and Maffei, C. Time asymptotics for solutions of Vlasov–Poisson equation in a circle. *J. Statist. Phys. 92*, 1-2 (1998), 301–323.

[4] Degond, P. Spectral theory of the linearized Vlasov–Poisson equation. *Trans. Amer. Math. Soc. 294*, 2 (1986), 435–453.

[5] Glassey, R., and Schaeffer, J. On time decay rates in Landau damping. *Comm. Partial Differential Equations 20*, 3-4 (1995), 647–676.

[6] Hayes, J. N. Damping of plasma oscillations in the linear theory. *Phys. Fluids 4* (1961), 1387–1392.

[7] Hayes, J. N. On non-Landau damped solutions to the linearized Vlasov equation. *Nuovo Cimento (10) 30* (1963), 1048–1063.

[8] Hwang, J.-H., and Velázquez, J. On the existence of exponentially decreasing solutions of the nonlinear landau damping problem. Prépublication, 2008.

[9] Landau, L. On the vibration of the electronic plasma. *J. Phys. USSR 10* (1946), 25. Traduction anglaise dans *JETP 16*, 574. Reproduit dans *Collected papers of L.D. Landau*, édité et avec une introduction par D. ter Haar, Pergamon Press, 1965, pp. 445–460 ; et dans *Men of Physics : L.D. Landau*, Vol. 2, Pergamon Press, D. ter Haar, ed. (1965).

[10] Lifshitz, E. M., and Pitaevskiĭ, L. P. *Course of theoretical physics ["Landau–Lifschits"]. Vol. 10.* Pergamon Press, Oxford, 1981. Traduit du Russe par J. B. Sykes et R. N. Franklin.

[11] Lynden-Bell, D. The stability and vibrations of a gas of stars. *Mon. Not. R. astr. Soc. 124*, 4 (1962), 279–296.

[12] Malmberg, J., Wharton, C., Gould, R., and O'Neil, T. Plasma wave echo experiment. *Phys. Rev. Letters 20*, 3 (1968), 95–97.

[13] Maslov, V. P., and Fedoryuk, M. V. The linear theory of Landau damping. *Mat. Sb. (N.S.) 127(169)*, 4 (1985), 445–475, 559.

[14] Mouhot, C., and Villani, C. On Landau damping. Disponible en ligne sur `http ://hal.archives-ouvertes.fr/ccsd-00376547`. Prépublication, 2009.

[15] Sáenz, A. W. Long-time behavior of the electic potential and stability in the linearized Vlasov theory. *J. Mathematical Phys. 6* (1965), 859–875.

[16] Villani, C. Hypocoercivity. À paraître dans *Mem. Amer. Math. Soc.*

[17] Villani, C. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. In *Handbook of mathematical fluid dynamics, Vol. I.* North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 71–305.

[18] Vlasov, A. A. On the oscillation properties of an electron gas. *Zh. Èksper. Teoret. Fiz. 8* (1938), 291–318.

Clément Mouhot

DAMTP, University of Cambridge,
On leave from: CNRS & École Normale Supérieure
DMA, UMR CNRS 8553
45 rue d'Ulm, F 75320 Paris Cedex 05
FRANCE

E-mail: `Clement.Mouhot@ens.fr`

Cédric Villani

ENS Lyon & Institut Universitaire de France
UMPA, UMR CNRS 5669
46 allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07
FRANCE

E-mail: `cvillani@umpa.ens-lyon.fr`